Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Hugo Rolando Jacho Hancco

Propriedades genéricas das classes homoclínicas.

Juiz de Fora

2016

Hugo Rolando Jacho Hancco

Propriedades genéricas das classes homoclínicas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Jacho Hancco, Hugo Rolando.
Propriedades genéricas das classes homoclínicas. / Hugo Rolando Jacho Hancco. – 2016.
95 f. : il.

Orientador: Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Campos vetoriais C^1-genéricos. 2. Conjunto neutrais. 3. Classe homoclínica. I. Soares Junior, Regis Castijos Alves, orient. II. Título.

Hugo Rolando Jacho Hancco

Propriedades genéricas das classes homoclínicas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Enoch Humberto Apaza Calla
Universidade Federal de Viscoça

Professor Dr. Reginaldo Braz Batista
Universidade Federal de Juiz de Fora

A meus pais, Emilio e Emelda Lucila, meus irmãos Julio e Juan Carlos que sempre me ajudaram com seu apoio e conselhos de maneira incondicional.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e bem-estar que nunca me a faltado.

Quero agradecer a meu orientador, Prof. Dr. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior por me aceitar em trabalhar na dissertação de mestrado, pelo seu apoio, sua paciência e dedicação para me orientar. Pela ajuda em esclarecer minhas duvidas da pesquisa, por seus conselhos e discussões construtivas sobre a pesquisa e demais assuntos. Também agradeço a confiança, amizade, tiempo e paciência que teve comigo.

Aos membros da banca pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço a meus pais, Emelda Lucila e Emilio pelo apoio moral a ânimo de seguir avançando em meus estudos, pelo seus conselhos e apoio nos momentos mais difíceis da vida. Aos meus irmãos, Julio e Juan Carlos, por todas as palavras de incentivo e apoio que me brindaram no percurso do mestrado. A todos os meus familiares, tios, primos, sobrinhos. Obrigado a todos eles.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Aos professores, que partilharam seus conhecimentos nas disciplinas de mestrado que cursei durante estes dois anos de curso, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação.

A meus companheiros e amigos do Departamento de matemática, Carlos, Juan, Mariana, Vladimir, Eduardo, Erasmo, Livia, Tais, Camila, Jorge, Miguel, Oscar, Santiago, Daniel, Natalia, Talita, Alberth, Alejandro, Marcos, Mario, Mauro, Naamã, Sarah, Eli, Giovanna, Guillermo, Jorge, Maiara, Marco, Vânia, pela companhia, conversa e brincadeira que graças a vocês minha estadia em Juiz de Fora foi muito agradável.

Também agradeço a meus amigos Antonio, Rosa, porque eles me deram a oportunidade de estudar, apoio e aconselhamento para avançar. Também agradeço a minha amiga Zamira, que sempre acredita em mim e por me incentivar a continuar meus estudos.

Quero agradecer a tudo e a todos que contribuíram para a conclusão desta dissertação e peço desculpas aos que não foram citados explicitamente.

Agradeço o apoio financiero da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que me permitiu concluir os estudos de mestrado satisfatoriamente.

RESUMO

Consideramos os campos vetoriais C^1 sobre uma variedade riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão finita n, com $n \geq 3$. Uma classe homoclínica de um campo vetorial é o fecho de conjunto de pontos homoclínicos transversais associados com uma órbita periódica hiperbólica. Neste trabalho, provamos que as classes homoclínicas para um conjunto residual de campos vetoriais C^1 são conjuntos neutrais, mais ainda, a classe homoclínica é a intersecção dos fechos do conjunto estável e o conjunto instável. Como consequencia das propriedades do conjuntos neutrais, provamos as propriedades genéricas das classes homoclínicas.

Assim, provamos que as classes homoclínicas de campos vetoriais C^1-genérico X são conjuntos transitivos maximais, saturados e que dependem continuamente da órbita periódica. Também provamos que uma classe homoclínica de X não apresentam ciclos de X formados por classes homoclínicas de X. Além disso, uma classe homoclínica de X é isolado se, e somente se, é Ω-isolado. Mais ainda, é isolado, se a classe homoclínica é hiperbólica. Todas estas propriedades são bem conhecidos para campos vetoriais estruturalmente estáveis e Axioma A.

Palavras-chave: Campos vetoriais C^1-genéricos. Conjunto Lyapunov estável. Conjunto neutrais. Hiperbolicidade. Classe homoclínica.

ABSTRACT

We consider the vector fields C^1 on a compact Riemannian manifold, boundaryless of finite dimension n, with $n \geq 3$. A homoclinic class of a vector field is the closure of the set transverse homoclinic point associated with a hyperbolic periodic orbit. In this work, we prove that the homoclinic classes for a residual set of vector fields C^1, are neutral sets, moreover, the homoclinic class is the intersection of the closure the stable set and unstable set. As a consequence of the properties of the neutral sets, we prove the generic properties of homoclinic classes.

Thus, we proved that in the homoclinic classes of generic C^1 vector fields X are maximal transitive sets, saturated and depend continuously on the periodic orbit. We also proved that a homoclinic class X, does not exhibit cycles of X formed by homoclinic class of X. Furthermore, homoclinic class X is isolated if it only if it is Ω-isolated. But still, it is isolated, the homoclinic class is hyperbolic. All these properties are well known to structurally stable vector fields and Axiom A.

Key-words: Generic-C^1 vector field. Lyapunov stable set. Neutral set. Hyperbolicity. Homoclinic class.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{X}^r(M)$	Conjunto de campos vetoriais de classe C^r.
$\mathcal{O}_X(p)$	Órbita de p pelo fluxo X_t.
$X_{[a,b]}(p)$	Segmento da órbita de p pelo fluxo X_t.
$Sing(X)$	Conjunto dos ponto de singularidade de X.
$Per(X)$	Conjunto das órbitas periódicas de X.
$\pi_X(p)$	Período de p.
$Crit(X)$	Conjunto dos elementos críticos de X.
$\alpha_X(p)$	α-limite de p.
$\omega_X(p)$	ω-limite de p.
$\Omega(X)$	Conjunto não errante de X.
$B_X(\sigma)$	Bacia de atração da singularidade σ.
P_Σ	Aplicação de Poincaré associado à seção transversal Σ.
$\gamma_P^s(p)$	Conjunto estável da aplicação de Poincaré no ponto fixo p.
$W_X^s(\Lambda)$	Conjunto estável de Λ.
$W_X^u(\Lambda)$	Conjunto instável de Λ.
$W_X^{ss}(\sigma)$	Variedade estável forte do ponto σ para o campo vetorial X.
$W_X^{uu}(\sigma)$	Variedade instável forte do ponto σ para o campo vetorial X.
$H_X(p)$	Classe homoclínica de um campo vetorial X no ponto p.
$Crit_T(X)$	Conjunto de elementos críticos de X com período menor que T.
$\mathcal{KS}^r(M)$	Conjunto de campos Kupka-Smale.
$D_Y^u(x)$	Domínio fundamental de $W_Y^u(x)$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos o artigo de Carballo, Morales e Pacifico [7], trabalho no que concerne à propriedades das classes homoclínicas para campos vetoriais C^1-genéricos sobre uma variedade riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão finita n, com $n \geq 3$.

1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

A classe homoclínica de um campo vetorial é o fecho de órbitas homoclínicas transversais associadas a uma órbita periódica hiperbólica. Em 1890, foi a primeira vez que os pontos homoclínicos transversais foram construídos por Poincaré em seu premiado ensaio [21]. Onde a existência destes pontos homoclínicos implicou a não-convergência de certas expressões da série de potência para soluções de um sistema halmitoniano, que era comparável com o sistema hamiltoniano descrevendo o problema dos três corpos restrito. Isso indicava que certas informações qualitativas, como a estabilidade, não foi obtida por o método analítico de séries de potências. Além disso, percebeu que a órbitas homoclínicas transversais são ponto de acumulação de outros pontos homoclínicos.

Em 1935, Birkhoff [4] mostrou que cada órbita homoclínica transversal de um difeomorfismo é acumulado por órbitas periódicas. Em 1965, Smale [24] generalizou este resultado em dimensões superiores, mostrando que uma órbita homoclínica transversal está contida em um conjunto hiperbólico (neste caso, a ferradura) em que as órbitas periódicas são denso. Dizemos que um conjunto compacto e invariante é *transitivo* para um campo vetorial X se é ω-limite de uma das suas órbitas. Assim, classes homoclínicas são conjuntos compactos, invariante e transitivos (Ver Seção 2.6).

Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, é C^r-*estruturalmente estável* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de X em $\mathfrak{X}^r(M)$, tal que $Y \in \mathcal{V}$ é topologicamente equivalente a X. Se assumirmos que o conjunto não errante $\Omega(X)$ é hiperbólica e se os pontos periódicos de X são densos em $\Omega(X)$, então dizemos que X satisfaz Axioma A. Por outro lado, um campo vetorial Axioma A satisfaz a forte condição de transversalidade, se $W^s_X(x)$ é transversal a $W^u_X(x)$ em tudo $x \in M$. Em 1970, Palis e Smale conjecturam em [19] que X é C^r estruturalmente estável se, e somente se, X satisfaz Axioma A mais forte condição de transversalidade. Esta conjetura foi demostrada em [28] para o caso do fluxo.

Para campos vetoriais Axioma A tem-se que $\Omega(X) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_k$ e assim podemos escrever o conjunto não errante como uma união finita de conjuntos disjuntos, compactos, invariante, transitivo e isolado. Este é o conteúdo do Teorema de Decomposição Espectral de Smale [25, Theorem 5.2, p. 823]. O conjunto não errante de um campo vetorial não singular Axioma A se divide em uma união disjunta finita de classe homoclínica [20, Chapter 0, p.3]. Assim, as classes homoclínicas para campos estruturalmente estáveis e Axioma A, são conjuntos conjuntos disjuntos, compactos, invariante, transitivo e isolado. Porém, os campos estruturalmente estáveis e Axioma A, não são conjuntos densos no espaço dos campos vetoriais C^1 em M, com $n \geq 3$. Ver [26] e [17] respectivamente.

1.2 ANÚNCIO DOS RESULTADOS

Neste trabalho iremos provar as propriedades mencionadas na seção anterior para C^1 campos vetoriais em uma n-variedade M compacta e sem bordo (nem estruturalmente estável nem Axioma A são assumidos). Em particular, todas as propriedades mencionadas vale para um conjunto denso de C^1 campos vetoriais em M.

Dizemos que um conjunto compacto invariante B é *isolado* se $B = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$ para alguma vizinhança compacta U de B e sera Ω-*isolado* se $\Omega(X) \setminus B$ é fechado. Dizemos que um conjunto Λ é *saturado* se $\Lambda = W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)$, onde $W^s_X(\Lambda)$ e $W^s_X(\Lambda)$ são os conjuntos estáveis e instáveis de Λ. Um conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset M$ de um campo vetorial X é chamado *hiperbólico* se existe uma decomposição contínua DX-invariante do fibrado tangente de M restrito a Λ, $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, tal que E^s_Λ é contrator, E^u_Λ é expansor e E^X_Λ denota a direção do campo vetorial X. Seja p um ponto periódico hiperbólico para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. A *classe homoclínica de* p denotada por $H_X(p)$, é o fecho do conjunto de interseções transversais entre a variedade estável e instável de p, isto é,

$$H_X(p) = \overline{W^s_x(p) \pitchfork W^u_x(p)}.$$

Se H é uma classe homoclínica de X então é um conjunto saturado [2, p. 371]. Um *ciclo de* X é um conjunto finito de conjuntos compactos invariantes $\Lambda_0, \Lambda_1 \ldots \Lambda_n$ tal que $\Lambda_n = \Lambda_0$, $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}$ são disjuntos, e

$$(W^u_X(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^u_X(\Lambda_{i+1}) \setminus \Lambda_{i+1}) \neq \emptyset, \text{ para todo } i = 0, \ldots, n-1.$$

Se o campo é estruturalmente estável, não há ciclos formados por classes homoclínica. Um conjunto transitivo Λ é *transitivo maximal* se para todo conjunto transitivo T tal que

$T \cap \Lambda \neq \emptyset$ temos que $T \subseteq \Lambda$. No caso de Axioma A sem ciclos, as classes homoclínicas são conjuntos transitivos maximais [5, p. 136].

Um subconjunto de um espaço topológico é *residual* se inclui um conjunto que é uma interseção de abertos densos. Dizemos que $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é *genérico* se X pertence a algum subconjunto residual de $\mathfrak{X}^1(M)$, e, dado um aberto $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}^1(M)$ e uma propriedade P, dizemos que um campo vetorial genérico em $\mathcal{U}$ satisfaz P se existe um subconjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$ tal que todo elemento de $\mathcal{R}$ satisfaz a propriedade P.

O seguinte teorema nos diz que, classes homoclínicas de campos vetoriais C^1 genéricos satisfazem propriedades análogas.

Teorema A. *As seguintes propriedades cumpre-se para um subconjunto residual de campos vetoriais X em $\mathfrak{X}^1(M)$:*

1. *As classes homoclínicas de X são conjuntos transitivos maximais de X. Em particular, classes homoclínicas diferentes são disjuntas.*
2. *As classes homoclínicas de X são conjuntos saturados.*
3. *As classes homoclínicas de X dependem continuamente da órbita dada, isto é, a aplicação $p \in Per(X) \longrightarrow H_X(p)$ é semicontínua superiormente.*
4. *Uma classe homoclínica de X é isolada se, e somente se, é Ω-isolada.*
5. *As classes homoclínicas hiperbólicas de X são isoladas.*
6. *Não existe ciclos de X formados por classes homoclínicas de X.*
7. *X tem um número finito de classes homoclínicas se, e somente se, a união das classes homoclínicas de X é fechada e cada classe homoclínica de X é isolada.*

1.3 ESTRUTURA DO TEXTO

O texto está dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 2 apresentaremos resultados gerais de Equações Diferenciais Ordinárias, Topologia C^r com $r \geq 1$ e Dinâmica Hiperbólica necessários para as demostrações ao longo deste trabalho. Nestes incluímos o Lema de Inclinação (Lema 2.54), Closing Lemma (Lema 2.62), Closed Orbit Theorem Connecting Lemma (Lema 4.4).

No Capitulo 3 apresentaremos o conceito de estabilidade de Lyapunov e suas caracterizações. Além disso, estudamos conjuntos compactos invariantes Λ de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, satisfazendo $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$, onde $\Lambda^\pm$ é Lyapunov estável para $\pm X$. Tais conjuntos serão chamados conjuntos neutrais. Apresentaremos e provaremos suas principais propriedades, que serão depois utilizadas para provar o teorema principal deste trabalho.

No capitulo 4 apresentamos a prova de um resultado chave: as classes homoclínicas de campos vetoriais C^1 genéricos são conjuntos neutrais. Para isso precisaremos de dois resultados locais que são os Lemas 4.12 e 4.16. A principal ferramenta técnica para provar ditos Lemas, é C^1-Connecting Lemma [29, Theorem E, p. 5214].

No Capitulo 5 apresentamos a prova do resultado principal do trabalho. Este está basado na prova de que toda classe homoclínica de campos vetoriais C^1 genéricos são conjuntos neutrais (Teorema 4.20) e as principais propriedades dos Conjuntos Neutrais (Capítulo 2).

2 PRELIMINARES

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Nesta seção apresentaremos definições e alguns resultados da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. Para fazer isso de maneira precisa usamos a seguinte notação. M é uma n-variedade riemanniana suave, compacta e sem bordo. A referência para essa seção é [18].

Definição 2.1. Seja $M^n \subset I\!R^k$ uma variedade diferenciável. Um *campo vetorial de classe* C^r em M é uma aplicação de classe C^r $X : M \longrightarrow I\!R^k$ que, a cada ponto $p \in M$, associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Isso corresponde a uma aplicação C^r $X : M \longrightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ é a identidade em M, onde π é a projeção natural de TM em M.

O conjunto de campos vetoriais C^r em uma variedade compacta M provido da topologia C^r é um espaço topológico que denotamos por $\mathfrak{X}^r(M)$, com $r \geq 1$.

Definição 2.2. Uma *curva integral de* $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação de classe C^{r+1}, $\alpha : I \longrightarrow M$, onde I é um intervalo contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. A imagem da curva integral é chamada de *órbita* ou *trajetória.*

Agora , se $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo de classe C^{r+1} e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, então definimos $Y = f_*X$ por $Y(p) = Df_p \cdot X(p)$ com $q = f(p)$. Neste caso Y, é um campo vetorial de classe C^r em N.

Se $\alpha : I \longrightarrow M$ é uma curva integral de X, então $f \circ \alpha : I \longrightarrow N$ é uma curva integral para Y. Em particular, f leva trajetórias de X em trajetórias de Y. Assim, se $\phi : U \subset M \longrightarrow U_0 \subset I\!R^n$ é uma carta local, $Y = \phi_*X$ é um campo de classe C^r em U_0; dizemos que Y é a expressão de X na carta local (U, ϕ).

Com essas considerações, os teoremas locais sobre existência, unicidade (Teoremas de Picard e de Peano, ver em [27]) e diferenciabilidade de soluções estendem-se a campos vetoriais definidos em variedades. Isso se traduz na proposição dada a seguir.

Proposição 2.3. *Sejam E um espaço de Banach e $F : E \times M \longrightarrow TM$ uma aplicação C^r, $r \geq 1$, tal que $\pi \circ F(\lambda, p) = p$, onde $\pi : TM \longrightarrow M$ é a projeção natural. Para todo*

$\lambda_0 \in E$ e $p_0 \in M$, existem vizinhanças W de λ_0 em E, V de p_0 em M, um número real $\varepsilon > 0$ e uma função de classe C^r $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \times W \longrightarrow M$ tais que $\varphi(0, p, \lambda) = p$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t, p, \lambda) = F(\lambda, \varphi(t, p, \lambda))$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $p \in V$ e $\lambda \in W$. Além disso, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é uma curva integral do campo $F_\lambda = F(\lambda, \cdot)$ com $\alpha(0) = p$, então $\alpha = \varphi_{p,\lambda} = \varphi(\cdot, p, \lambda)$.

Proposição 2.4. *Sejam I, J intervalos abertos e $\alpha : I \longrightarrow M$, $\beta : J \longrightarrow M$ curvas integrais de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Se $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, para algum $t_0 \in I \cap J$, então $\alpha(t) = \beta(t)$ em $I \cap J$. Conseqüentemente existe uma curva integral $\gamma : I \cup J \longrightarrow M$, que coincide com α, em I, e com β, em J.*

Demonstração. A demostração pode ser encontrada em [18, Proposição 1.2, p. 11]. □

O seguinte resultado vem para definir um fluxo global induzido por um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. A demostração deste resultado pode ser encontrada em [18, Proposição 1.3, p. 12].

Proposição 2.5. *Sejam M uma variedade compacta e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe em M um fluxo global de classe C^r para X, isto é, uma aplicação $\varphi : I\!R \times M \longrightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$.*

Dados um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\varphi : I\!R \times M \longrightarrow M$ o fluxo induzido por X, para cada $t \in I\!R$, podemos definir a aplicação $X_t : M \longrightarrow M$, tal que $X_t(p) = \varphi(t, p)$.

Corolário 2.6. *A aplicação X_t, com $t \in I\!R$, é um difeomorfismo de classe C^r. Além disso, $X_0 = Id$, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ para todo $t, s \in I\!R$.*

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e X_t, $t \in I\!R$, o fluxo de X.

Definição 2.7. Seja $p \in M$. Definimos a *órbita de p pelo fluxo X_t*, como sendo o conjunto

$$\mathcal{O}_X(p) = \{X_t(p) : t \in I\!R\}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}_X^+(p)$ e $\mathcal{O}_X^-(p)$ as órbitas futura e passada de p, respectivamente, isto é,

$$\mathcal{O}_X^+(p) = \{X_t(p) : t \geq 0\} \text{ e } \mathcal{O}_X^-(p) = \{X_t(p) : t \leq 0\}.$$

Observação 2.8. Seja $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dados $p, q \in M$ então $\mathcal{O}_Y(p) \cap \mathcal{O}_Y(q) = \emptyset$ ou $\mathcal{O}_Y(p) = \mathcal{O}_Y(q)$. Com efeito, suponhamos que $\mathcal{O}_Y(p) \cap \mathcal{O}_Y(q) \neq \emptyset$. Seja $r \in \mathcal{O}_Y(p) \cap \mathcal{O}_Y(q)$ então existem $t_1, t_2 \in I\!R$ tais que $r = Y_{t_1}(p)$ e $r = Y_{t_2}(q)$. Dado $a \in \mathcal{O}_Y(p)$ então existe $T \in I\!R$ tal que $a = Y_T(p)$. Observe que

$$Y_{T-t_1+t_2}(q) = Y_{T-t_1}(Y_{t_2}(q)) = Y_{T-t_1}(r) = Y_T(Y_{-t_1}(r)) = Y_T(p) = a.$$

Desta maneira $a \in \mathcal{O}_Y(q)$ e portanto $\mathcal{O}_Y(p) \subset \mathcal{O}_Y(q)$. A outra inclusão é análoga. Portanto $\mathcal{O}_Y(p) = \mathcal{O}_Y(q)$. Isso prova a observação.

Definição 2.9. Dados $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$, definimos o *segmento de órbita de p pelo fluxo* X_t, como sendo o conjunto $\{X_t(p) : a \leq t \leq b\}$, denotado por $X_{[a,b]}(p)$.

Observação 2.10. O conjunto $X_{[a,b]}(p)$ é um conjunto fechado em M. Com efeito, seja a aplição $\Phi : [a, b] \longrightarrow M$ tal que $\Phi(t) = X_t(p)$. Assim Φ é contínua em $[a, b]$ então $\Phi([a, b]) = X_{[a,b]}(p)$ é compacto. Como M é um espaço métrico, temos que $X_{[a,b]}(p)$ é fechado. Isto prova a observação.

Definição 2.11. Dizemos que $\sigma \in M$ é uma *singularidade* para um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ se $X(\sigma) = 0$. O conjunto dos pontos de singularidades de X será denotado por $Sing(X)$. Diremos que um campo vetorial é *não-singular* se ele não admite singularidades.

Observação 2.12. Temos que $\sigma \in Sing(X)$ se, e somente se, $\mathcal{O}_X(\sigma) = \{\sigma\}$. Com efeito, como $\sigma \in Sing(X)$ então $X(\sigma) = 0$. Definimos $\phi : I\!R \longrightarrow M$ tal que $\phi(t) = \sigma$, para todo $t \in I\!R$. Assim, $\phi'(t) = 0 = X(\sigma) = X(\phi(t))$, para todo $t \in I\!R$. Como $\phi(0) = \sigma$ então ϕ é uma curva integral passando por σ. Como $\phi(0) = X_0(\sigma)$, então pela Proposição 2.4 temos que $\phi(t) = X_t(\sigma)$ para todo $t \in I\!R$. Portanto $X_t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in I\!R$. Isto é, $\mathcal{O}_X(\sigma) = \{\sigma\}$. Recíprocamente, se $\mathcal{O}_X(\sigma) = \{\sigma\}$, para todo $t \in I\!R$. Então

$$X(\sigma) = X(X_t\sigma)) = \frac{\partial}{\partial t} X_t(\sigma) = 0.$$

Portanto, $\sigma \in Sing(X)$.

Definição 2.13. Uma *órbita periódica de X* é uma órbita $\mathcal{O}_X(p)$ tal que $X_T(p) = p$ para algum $T > 0$ e $X_t(p) \neq \{p\}$ para $0 < t < T$. Neste caso dizemos que p é um *ponto periódico de X*. O número $T > 0$ é chamado *período* de p e denotado por $\pi_X(p)$. Denotaremos por $Per(X)$ o conjunto de todas as órbitas períodicas de X.

Observação 2.14. Uma órbita é compacta se, e somente se, ela é uma singularidade ou uma órbita periódica. Com efeito, seja $\mathcal{O}_X(p)$ uma órbita compacta de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Seja $\varphi : I\!R \longrightarrow M$ tal que $\varphi(t) = X_t(p)$ para todo $t \in I\!R$. Suponhamos que φ não é injetiva, pois, se fosse injetiva, então φ seria um homeomorfismo sobre sua imagem, isto é, $\varphi(I\!R) = \mathcal{O}_X(p)$. Como $\mathcal{O}_X(p)$ é compacta então $I\!R$ é compacta, o qual é uma contradição. Logo φ é não injetiva. Então φ é constante ou existe $t_0 \in I\!R$ tal que $\varphi(t_0) = p$. Isto é, $X_t(p) = p$ para todo $t \in I\!R$ ou existe $t_0 \in I\!R$ tal que $X_{t_0}(p) = p$. Como $X_0(p) = p$, então $\mathcal{O}_X(p)$ é uma singularidade ou uma órbita períodica. Reciprocamente, se $p \in Sing(X)$ então pela Observação 2.12 temos que $\mathcal{O}_X(p) = \{p\}$, o qual é um conjunto compacto. Se $\mathcal{O}_X(p)$ fosse periódica então existiria $T > 0$ tal que $X_T(p) = p$ e $X_t(p) \neq p$ se $0 < t < T$. E claro que, $\mathcal{O}_X(p) = Y_{[0,T]}(p)$. Logo, pela Observação 2.10 temos que $Y_{[0,T]}(p)$ é fechado e portanto é compacto, pois $Y_{[0,T]}(p) \subset M$.

Definição 2.15. Um *elemento crítico* de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é um ponto $p \in M$ que é uma singularidade ou pertenente a uma órbita periódica. O conjunto

$$Crit(X) = Sing(X) \cup Per(X).$$

é o conjunto dos elementos críticos do campo vetorial X.

2.2 TOPOLOGIA NO ESPAÇO DE CAMPOS VECTORIAIS C^1

Nesta seção introduzimos a topologia natural no espaço de campos vetoriais de classe C^1 em uma variedade compacta n-dimensional M. Além disso, apresentaremos as noções sobre conjuntos residuais e a definição de um campo vetorial C^1-genérico $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. A referências para essa seção é [16] e [18].

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, definimos

$$d(X,Y) = \sup_{x \in M}\{\|X(x) - Y(x)\|\} \text{ e } d(DX,DY) = \sup_{x \in M}\{\|DX(x) - DY(x)\|\}.$$

Na verdade a definição usa cartas locais. Para maiores detalhes veja [18].

Dizemos que dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ estão $\varepsilon - C^1$ *próximos* se:

$$\max\{d(X,Y), d(DX,DY)\} < \varepsilon.$$

Em particular, a notação $X_n \longrightarrow X$ significa que os campos $X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$ convergem a $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ na topologia C^1. Vejamos agora uma noção de saber quando duas subvariedades são $\varepsilon - C^1$ *próximas.*

Definição 2.16. Sejam S e S' subvariedades C^r de M e $\varepsilon > 0$. Dizemos que S e S' estão $\varepsilon - C^1$ *próximos* se existe um difeomorfismo C^r, $h : S \longrightarrow S' \subset M$, tal que $i' \circ h$ está $\varepsilon - C^1$ próximos de i. Aqui $i : S \longrightarrow M$ e $i' : S' \longrightarrow M$ denotam as inclusões.

Considere o espaço $C^1(M, I\!R^n)$ formado pelas aplicações de classe C^1 definidas na variedade compacta M com imagem em $I\!R^n$. Como $C^1(M, I\!R^n)$ é um espaço métrico completo, temos que este é um espaço de Baire. Mais ainda, $C^1(M, I\!R^n)$ é um espaço separável, isto é, possui uma base enumerável de abertos (ver [18, p. 23]).

Consideremos $\pi : TM \longrightarrow M$ a projeção natural do fibrado tangente na variedade compacta M, tal que $\pi \circ X$ é a identidade em M. A partir disso, vemos que $\mathfrak{X}^1(M)$ é um subconjunto fechado de $C^1(M, I\!R^n)$, pois M está imersa em algum $I\!R^n$, logo $T_pM \subset I\!R^n$. Assim $\mathfrak{X}^1(M)$ é um espaço de Baire separável (Ver Proposição A.14).

Precisamos definir um conjunto "grande"no qual os resultados deste trabalho cumprem-se.

Definição 2.17. Dizemos que o conjunto $\mathcal{R} \subset M$ é um *conjunto residual* se é a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos de M.

Observação 2.18. A interseção enumerável de subconjuntos residuais é um conjunto residual.

Os conjuntos residuais são ainda mais interessantes quando estamos num espaço topológico de Baire onde todo subconjunto residual é denso (Ver Lema A.10). Assim entendemos por conjunto residual num espaço topológico de Baire como conjuntos topologicamente grandes. Tais conjuntos serão os candidatos para quais os resultados cumprem-se. Para isso precisamos da seguinte definição.

Definição 2.19. Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é *genérico* (ou C^1-*genérico*) se existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ tal que $X \in \mathcal{R}$. Dados um conjunto aberto $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{X}^1(M)$ e uma propriedade P, dizemos que um campo vetorial é *genérico em* $\mathcal{U}$ *e satisfaz* P se existe um conjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$ tal que todo elemento de $\mathcal{R}$ satisfaz P.

Estamos interessados em espaços de campos vetoriais de classe C^1 em M munidos com a topologia C^1. Isto é importante, pois nos permitem realizar perturbações locais. Estas são usadas no Connecting Lemma e Closing Lemma. Em topologias mais altas estes resultados estão em aberto.

2.3 CONJUNTOS LIMITES

Nesta seção apresentamos os conceitos sobre conjuntos invariantes, transitivos e conjuntos, que num sentido informal suportam a dinâmica assintótica do sistema. As referências para essa seção é [8] e [18].

Definição 2.20. Dizemos que um conjunto $\Lambda \subset M$ é *invariante* (ou X-*invariante*) para o campo vetorial X se $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \in I\!R$.

Proposição 2.21. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante para o campo vetorial X. Se $a \in \overline{\Lambda}$ então $X_t(a) \in \overline{\Lambda}$ para todo $t \in I\!R$. Em particular, $\overline{\Lambda}$ é invariante para o campo vetorial X.*

Demonstração. Seja $a \in \overline{\Lambda}$. Dado $t \in I\!R$, fixo e arbitrário, tomemos $b = X_t(a)$. Seja U_b uma vizinhança de b. Pelo Corolário 2.6 temos que X_t é um difeomorfismo. Assim $X_{-t}(U_b)$ é uma vizinhança de a. Como $a \in \Lambda$ então $X_{-t}(U_b) \cap \Lambda \neq \emptyset$. Assim existe $c \in X_{-t}(U_b) \cap \Lambda$. Logo $X_t(c) \in U_b$ e como Λ é invariante temos $X_t(c) \in U_b \cap \Lambda$. Como U_b é uma vizinhança arbitrária de b, então $X_t(b) \in \Lambda$. Agora vejamos que $\overline{\Lambda}$ é invariante pelo fluxo X_t para todo $t \in I\!R$. Dado $t \in I\!R$. Seja $a \in \overline{\Lambda}$, então pelo feito acima, temos que $X_{-t}(a) \in \overline{\Lambda}$, assim $a \in X_t(\overline{\Lambda})$. Portanto $\overline{\Lambda} \subset X_t(\overline{\Lambda})$. A outra inclusão segue-se pelo feito acima. Portanto $\overline{\Lambda} = X_t(\overline{\Lambda})$ para todo $t \in I\!R$. $\square$

Definição 2.22. Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. O *conjunto ω-limite* de um ponto $p \in M$, denotado por $\omega_X(p)$, é o conjunto dos pontos $q \in M$ tais que existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \longrightarrow +\infty$ e $X_{t_n}(p) \longrightarrow q$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Analogamente, definimos o *conjunto α-limite* de um ponto $p \in M$, denotado por $\alpha_X(p)$, é o conjunto dos pontos $q \in M$ tais que existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \longrightarrow -\infty$ e $X_{t_n}(p) \longrightarrow q$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Intuitivamente, $\alpha_X(p)$ é onde a órbita "nasce"e $\omega_X(p)$ onde ela "morre".

Observação 2.23. O conjunto α-limite de p para um campo X é o conjunto ω-limite de p para o campo $-X$.

A seguir discutiremos algumas propriedades gerais do conjunto ω-limite de p para o campo X.

Proposição 2.24. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, M uma variedade compacta e $p \in M$. Temos:*

1. $\omega_X(p) \neq \emptyset$.
2. $\omega_X(p)$ *é fechado.*
3. $\omega_X(p)$ *é invariante pelo fluxo de X.*
4. $\omega_X(p)$ *é conexo.*

Demonstração. Ver [18, Proposição 1.4, p. 17]. □

Proposição 2.25. *Seja $p \in M$, tem-se:*

1. *Se $q \in \mathcal{O}(p)$, então $\omega_X(q) = \omega_X(p)$.*
2. *Se $q \in \omega_X(p)$, então $\omega_X(q) \subset \omega_X(p)$.*
3. *Se $p \in Per(X)$, então $\mathcal{O}_X(p) = \omega_X(p)$.*

Demonstração. Ver [8, Seção 6.1, p. 234-235]. □

Observação 2.26. As propriedades acima são, obviamente, válidas para o conjunto α-limite. Isto é devido à Observação 2.23.

Definição 2.27. Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dizemos que $p \in M$ é *não errante* para X, se para todo $T > 0$ e toda vizinhança U_p de p existe $t > T$ tal que $X_t(U_p) \cap U_p \neq \emptyset$. O conjunto do pontos não errantes de X é denotado por $\Omega(X)$. Assim temos

$$\Omega(X) = \{p \in M : \text{para todo } U_P \text{ vizinhança de } p \text{ e } T > 0 \text{ existe } t > T \text{ tal que } X_t(U_p) \cap U_p \neq \emptyset\}.$$

Proposição 2.28. *Para cada $p \in M$ tem-se que $\omega_X(p) \subset \Omega(X)$ e $\alpha_X(p) \subset \Omega(X)$.*

Demonstração. Dado $p \in M$. Seja $q \in \omega_X(p)$, então existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \longrightarrow +\infty$ e $X_{t_n}(p) \longrightarrow q$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Sejam U_q uma vizinhança de q e $T > 0$. Então existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$X_{t_n}(p) \in U_q \;\text{ e }\; t_n > T, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{2.1}$$

Como $t_n \longrightarrow +\infty$, então existe um $\hat{t} > T$ tal que $t_{n_k} = t_{n_0} + \hat{t}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $r = X_{t_{n_0}}(p) \in U_q$. Assim $X_{\hat{t}}(r) \in X_{\hat{t}}(U_q)$.

Por outro lado, por (2.1) temos

$$X_{\hat{t}}(r) = X_{\hat{t}}(X_{t_{n_0}}(p)) = X_{\hat{t}+t_{n_0}}(p) = X_{t_{n_k}}(p) \in U_q.$$

Assim, temos que existe $\hat{t} > T$ tal que $X_{\hat{t}}(r) \in X_{\hat{t}}(U_q) \cap U_q$. Portanto $q \in \Omega(X)$. Analogamente cumpre-se que $\alpha_X(p) \subset \Omega(X)$. □

A seguir discutiremos algumas propriedades gerais do conjunto $\Omega(X)$.

Proposição 2.29. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$*

1. *$\Omega(X)$ é não vazio.*
2. *$\Omega(X)$ é um conjunto compacto.*
3. *Se $p \in \Omega(X)$ então $X_t(p) \in \Omega(X)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular $\Omega(X)$ é invariante pelo fluxo X_t.*
4. *Se $p \in Per(X)$, então $p \in \Omega(X)$.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$.

1. Como M é uma variedade compacta. Então do item (1) da Proposição 2.24 temos que $\omega_X(p) \neq \emptyset$, logo pela Proposição 2.28 tem-se que $\Omega(X)$ é não vazio.

2. Seja $p \in M \setminus \Omega(X)$. Então existem U_p uma vizinhança aberta de p e $T > 0$ tal que

$$X_t(U_p) \cap U_p = \emptyset, \quad \text{para todo} \quad t \geq T. \tag{2.2}$$

Afirmamos que $U_p \cap \Omega(X) = \emptyset$. Com efeito, suponhanmos que $U_p \cap \Omega(X) \neq \emptyset$. Então existe $q \in U_p \cap \Omega(X)$. Como $q \in \Omega(X)$ e U_p é uma vizinhança q. Então para esse

$T > 0$, existe $\hat{t} > T$ tal que $X_{\hat{t}}(U_p) \cap U_p \neq \emptyset$. Isso é uma contradição por (2.2). Logo $U_p \subset M \setminus \Omega(X)$. Assim, $M \setminus \Omega(X)$ é um conjunto aberto. Portanto $\Omega(X)$ é fechado, consequentemente $\Omega(X)$ é um conjunto compacto.

3. Sejam $p \in \Omega(X)$ e $\hat{t} \in I\!R$. Seja V uma vizinhança de $X_{\hat{t}}(p)$. Pelo Corolário 2.6, temos que $X_{\hat{t}}$ é um difeomorfismo, assim $\widetilde{V} = X_{-\hat{t}}(V)$ é uma vizinhança de p. Como $p \in \Omega(X)$ e $T > 0$, então existe $t > T$ tal que $X_t(\widetilde{V}) \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$. Como $V = X_{\hat{t}}(\widetilde{V})$ tem-se $X_t(V) \cap V \neq \emptyset$ para algum $t > T$. Portanto $X_{\hat{t}}(p) \in \Omega(X)$, para todo $\hat{t} \in I\!R$.

4. Seja $p \in Per(X)$. Sejam U_p vizinhança de p e $T > 0$. Como $p \in Per(X)$ então existe $\hat{t} = \pi_X(p)$ o período de p. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{T} = n\hat{t} > T$. Assim, $X_{\hat{T}}(p) = X_{n\hat{t}}(p) = p \in U_p$. Logo $X_{\hat{T}}(p) \in X_{\hat{T}}(U_p) \cap U_p$. Portanto $p \in \Omega(X)$.

□

Definição 2.30. Um conjunto compacto invariante Λ para um campo vetorial X é *transitivo* se $\Lambda = \omega_X(p)$, para algum $p \in \Lambda$.

Definição 2.31. Seja Λ um conjunto compacto invariante para um campo campo vetorial X. Dizemos que é *topologicamente transitivo*, se dados U, V conjuntos abertos em Λ, existe $t > 0$ tal que $X_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Na seguinte proposição apresentaremos as caracterizações do conjuntos transitivos.

Proposição 2.32. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e Λ um conjunto compacto invariante para um campo X. Então são equivalentes:*

1. *Λ é transitivo.*

2. *Existe $p \in \Lambda$ tal que $\overline{\mathcal{O}_X(p)} = \Lambda$.*

3. *Λ é topologicamente transitivo.*

4. *Existe um conjunto residual R em Λ, tal que para todo $p \in R$ a órbita de p é densa em Λ.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto compacto invariante para um campo X.

(1) $\Rightarrow$ (2) Como Λ é transitivo, então existe $p \in \Lambda$ tal que $\omega_X(p) = \Lambda$. Afirmamos que $\overline{\mathcal{O}_X(p)} = \Lambda$. Com efeito, e claro que $\overline{\mathcal{O}_X(p)} \subset \Lambda$, pois Λ é invariante para o campo

X. Vejamos a outra inclusão. Seja $q \in \Lambda$. Então existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_{t_n}(p) \longrightarrow q$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $X_{t_n}(p) \in \mathcal{O}_X(p)$, então $q \in \overline{\mathcal{O}_X(p)}$. Portanto tem-se a outra inclusão. Assim $\overline{\mathcal{O}_X(p)} = \Lambda$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Temos que existe $p \in \Lambda$ tal que $\overline{\mathcal{O}_X(p)} = \Lambda$. Sejam U, V conjuntos abertos em Λ. Assim,

$$U \cap \mathcal{O}_X(p) \neq \emptyset \text{ e } V \cap \mathcal{O}_X(p) \neq \emptyset,$$

logo existem $r \in U \cap \mathcal{O}_X(p)$ e $s \in V \cap \mathcal{O}_X(p)$. Assim $r = X_{t_1}(p)$ e $s = X_{t_2}(p)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $t_2 > t_1$. Assim definimos $t = t_2 - t_1 > 0$.

Como $r \in U$ então $X_t(r) \in X_t(U)$. Por outro lado

$$X_t(r) = X_{t_2-t_1}(X_{t_1}(p)) = X_{t_2}(p) = s \in V.$$

Portanto, existe $t > 0$ tal que $X_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Seja B_n uma base enumerável da topologia induzida em Λ. Definimos o conjunto $\Lambda_n = \{y \in \Lambda : X_t(y) \in B_n, \text{ para algum } \ t > 0\}$.

Afirmamos que Λ_n é m conjunto aberto e denso em Λ, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, para $n \in \mathbb{N}$.

Seja $y_n \in \Lambda \setminus \Lambda_n$ tal que $y_n \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $y_n \in \Lambda \setminus \Lambda_n$, então $X_t(y_n) \notin \mathcal{B}_n$ para todo $t \geq 0$. Assim, pela continuidade do fluxo temos que $X_t(y) \notin B_n$ para cada $t \geq 0$. Portanto $y \in \Lambda \setminus \Lambda_n$. Assim $\Lambda \setminus \Lambda_n$ é fechado em Λ, ou seja Λ_n é aberto em Λ.

Vejamos que Λ_n é denso em Λ. Seja U um conjunto aberto em Λ. Como Λ_n é um conjunto aberto, então existe $t > 0$ tal que $\Lambda_n \cap X_t(U) \neq \emptyset$.

Assim, existe $r \in \Lambda_n \cap X_t(U)$. Logo existe $u \in U$ tal que $r = X_t(u)$. Por outro lado, $r \in \Lambda_n$, então existe $\hat{t} > 0$ tal que $X_{\hat{t}}(r) \in B_n$. Logo

$$X_{\hat{t}}(r) = X_{\hat{t}}(X_t(u)) = X_{\hat{t}+t}(u) \text{ onde } \hat{t} + t > 0.$$

Assim $u \in \Lambda_n$. Portanto $\Lambda_n \cap U \neq \emptyset$, ou seja, Λ_n é um conjunto denso em Λ.

Definimos $R = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$ um conjunto residual em Λ. Seja $p \in R$. Afirmamos que $\overline{\mathcal{O}_X(p)} = \Lambda$, para todo $p \in R$. Com efeito, seja U um conjunto aberto em Λ, então existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{n_0} \subset U$. Como $p \in R$, então para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $t_m > 0$ tal que $X_{t_m}(p) \in B_m$. Assim para n_0 temos que $X_{t_{n_0}}(p) \in B_{n_0}$. Portanto

$$X_{t_{n_0}}(p) \in B_{n_0} \cap \mathcal{O}_X(p) \subset U \cap \mathcal{O}_X(p).$$

Assim prova a afirmação.

(4) $\Rightarrow$ (1) Seja R o conjunto residual em Λ. Seja $p \in R$, então $\overline{\mathcal{O}_X(p)} = \Lambda$. Da definição do conjunto $\omega_X(p)$ tem-se $\omega_X(p) = \Lambda$. Isso encerra a prova. $\square$

Definição 2.33. Dizemos que um conjunto transitivo Λ de um campo vetorial X é *transitivo maximal* se para todo conjunto transitivo T tal que $T \cap \Lambda \neq \emptyset$ temos que $T \subseteq \Lambda$.

2.4 ESTABILIDADE LOCAL

Nesta seção apresentaremos os comportamento topológico das órbitas de um campo de vetores na vizinhança das singularidade e órbitas periódicas. Além disso, a noção de conjunto hiperbólico. As referências para essa seção é [1], [8],[18] e [23].

O estudo qualitativo de uma equação diferencial consiste na descrição geométrica de seu espaço de órbitas. É, então, natural perguntar-se quando é que dois espaços de órbitas têm a mesma descrição; isso corresponde establecer uma relação de equivalência entre equações diferenciais. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas é a equivalência topológica.

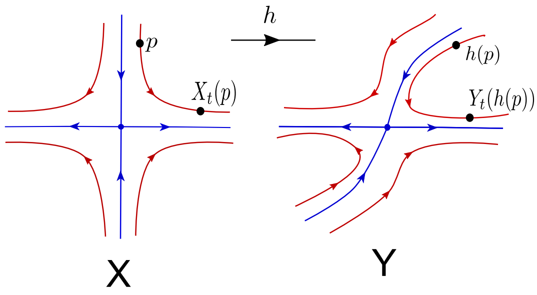
Definição 2.34. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Dizemos que X e Y são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : M \longrightarrow M$ levando órbitas de X em órbitas de Y e preservando a orientação das trajetórias. Isto é, dado $p \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$,

$$h(X_t(p)) = Y_{\hat{t}}(h(p)),$$

para algum $0 < \hat{t} < \varepsilon$. Dizemos que h é uma *equivalência topológica entre X e Y*. Uma representação geométrica pode-se ver na Figura 1.

Definição 2.35. A órbita de um ponto p é *Lyapunov estável* para o fluxo X_t, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x,p) < \delta$ então $d(X_t(x), X_t(p)) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. A órbita de um ponto p é chamado *assintoticamente estável*, se é Lyapunov estável e

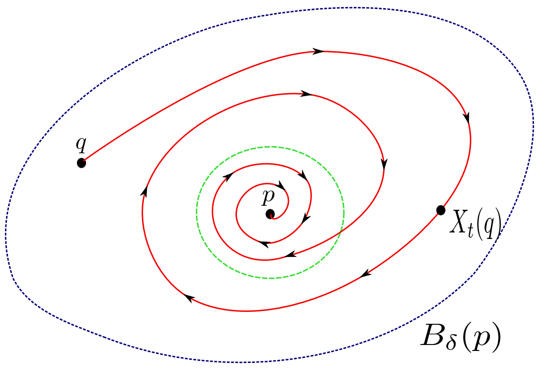
Figura 1 – X e Y são topologicamente equivalente.



Fonte: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias [27].

existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, p) < \delta$ então $d(X_t(x), X_t(p)) \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow +\infty$. Uma representação geométrica para uma singularidade assintoticamente estável pode-se ver na Figura 2.

Figura 2 – p é uma singularidade assintoticamente estável para X.



Fonte: Elaboração própria.

2.4.1 Singularidade Hiperbólica

Nesta subseção vamos ver o comportamento local de uma singularidade para um campo vetorial X, para isso vamos a definir a noção de hiperbolicidade para singularidades.

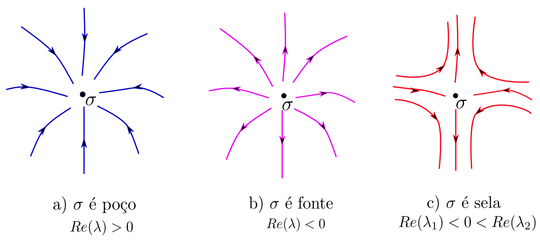
Definição 2.36. Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\sigma \in M$ uma singularidade de X. Dizemos que σ é uma *singularidade hiperbólica* se $DX(\sigma) : T_pM \longrightarrow T_pM$ é um campo linear hiperbólico, isto é, $DX(\sigma)$ não tem autovalor no eixo imaginário. Ou seja, para qualquer autovalor λ de $DX(\sigma)$ temos que $Re(\lambda) \neq 0$.

Seja $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto de campos vetoriais cujas singularidades são todas hiperbólicas.

Observação 2.37. Se $X \in \mathcal{G}_1$ então X tem um número finito de singularidades hiperbólicas. (Ver [18, Proposição 3.1, p. 61]).

Definição 2.38. Dizemos que uma singularidade hiperbólica $\sigma \in M$ é um *poço* de X se a matriz $DX(\sigma)$ tem todos autovalores generalizados com parte real negativa. Dizemos que que uma singularidade hiperbólica $\sigma \in M$ é uma *fonte* de X se a matriz $DX(\sigma)$ tem todos autovalores generalizados com parte real positiva. Finalmente, uma singularidade hiperbólica $\sigma \in M$ é chamada *sela* se não é poço nem fonte, isto é, existe dois autovalores λ_+ e λ_- com $Re(\lambda+) > 0$ e $Re(\lambda-) < 0$. Uma representação geométrica pode ser visto na Figura 3.

Figura 3 – Representação geométrica de poço, fonte e sela, de uma singularidade hiperbólica σ.



Fonte: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias [27].

Teorema 2.39. *Seja $\sigma \in M$ uma singularidade do campo vetorial X. Se σ é poço de X, então σ é uma singularidade assintoticamente estável para X.*

Demonstração. Ver [8, Teorema 5.3, p. 195]. $\square$

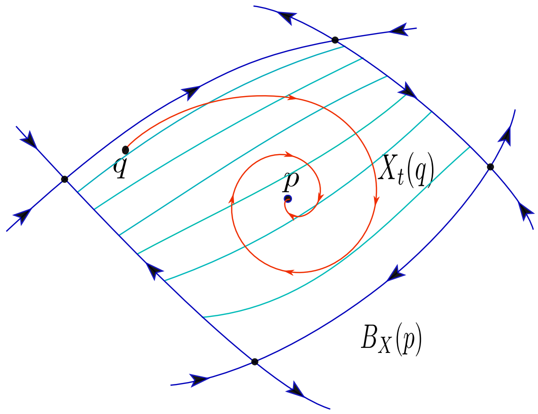
Dada uma singularidade assintoticamente estável σ do campo de vetores X, dizemos que o conjunto $B_X(\sigma)$ dos pontos cujas trajetórias tendem à singularidade σ é a *bacia de atração da singularidade* σ. Assim

$$B_X(\sigma) = \{y \in M : d(X_t(y), \sigma) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow +\infty\}.$$

Uma representação geométrica para uma bacia de atração da singularidade σ pode-se ver na Figura 4.

Observação 2.40. A bacia de atração de uma singularidade assintoticamente estável é sempre um conjunto não vazio, invariante e aberto (Ver [8, p.227]).

Figura 4 – $B_X(p)$ é uma bacia de atração de p.



Fonte: Equações Diferenciais Ordinárias [8].

Quando uma singularidade não é assintoticamente estável podemos generalizar o conceito de bacia de atração como segue. Dizemos que o *conjunto estável de uma singularidade* σ é o conjunto $W^s_X(\sigma)$ dos pontos cujas trajetórias tendem à singularidade σ, isto é,

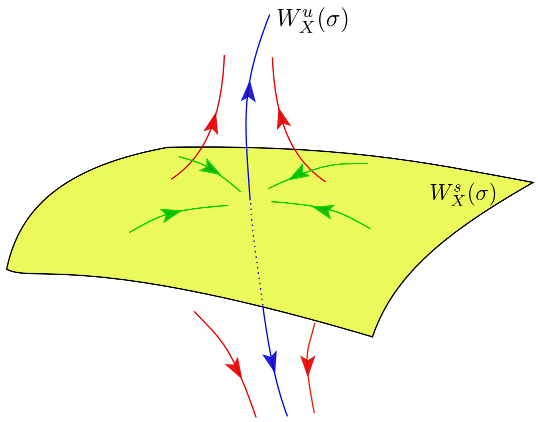
$$W^s_X(\sigma) = \{y \in M : \lim_{t \to +\infty} X_t = \sigma\}.$$

Analogamente, o *conjunto instável de uma singularidade* σ é o conjunto

$$W^u_X(\sigma) = \{y \in M : \lim_{t \to -\infty} X_t = \sigma\}.$$

Uma representação geométrica do conjunto estável e instável de uma singularidade σ tipo sela, pode-se ver na Figura 5.

Figura 5 – As variedades estável e instável de uma singularidade σ de tipo sela.



Fonte: Equações Diferenciais Ordinárias [8].

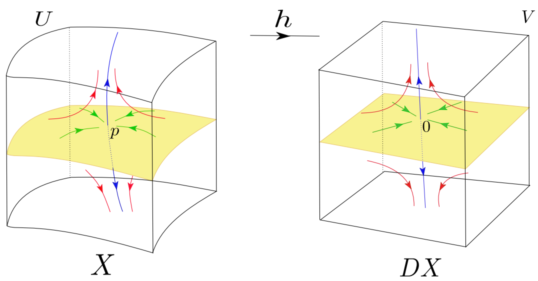
Assim, pelo Teorema da Variedade Estável para singularidades [8, Teorema 6.2, p.230] temos que os conjuntos estável e instável são subvariedades imersa de classe C^1. Se σ é um poço do campo X, então $W^u_X(\sigma) = \{\sigma\}$ e $W^s_X(\sigma)$ contém uma vizinhança de σ, coincidindo com a bacia de atração de σ. Se σ é uma fonte do campo X, então σ é um poço do campo $-X$.

Apresentaremos o seguinte teorema, que garante que o comportamento local numa singularidade hiperbólica é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.

Teorema 2.41. *(Hartman-Grobman para singularidades) Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de X. Seja $Y = DX_0 : T_pM \longrightarrow T_pM$ campo vetorial linear em T_pM dada pela trasformação linear DX_0. Então existem vizinhanças U de p em M, V de 0 em T_pM e um homeomorfismo $h : U \longrightarrow V$ que leva trajetórias de X a trajetórias de Y, isto é, $X_{|_U}$ é topologicamente equivalente a $Y_{|_V}$. Ver Figura 6.*

Demonstração. Ver [23, Theorem 5.3, p.153-165]. □

Figura 6 – Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman para singularidades.



Fonte: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias [27].

2.4.2 Órbita Periódica Hiperbólica

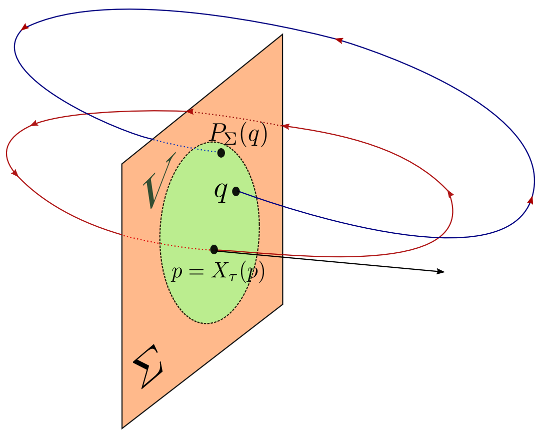
Como já descrevemos o comportamento topológico das órbitas de um campo vetorial X na vizinhança de uma singularidade hiperbólica (Subseção 2.4.1). É natural pensar como sera o comportamento topólogico das órbitas periódicas de um campo vetorial X. Para isso precisamos do conceito da aplicação de Poincaré associado a tal órbita.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e Σ uma superfície imersa em M que é transversal ao campo vetorial X em todos os pontos, isto é, para todo $p \in \Sigma$ temos $T_p(\Sigma) + E_X(p) = T_p(M)$ o equivalentemente $X(p) \notin T_p(\Sigma)$. Dizemos no que se segue que tal Σ é uma *seção transversal para o campo vectorial X*.

Seja γ uma órbita periódica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Por um ponto $p \in \gamma$ consideremos uma seção transversal Σ ao campo X. A órbita de p volta a intersectar Σ no tempo τ, onde τ é o período de γ. Pela continuidade do fluxo de X, a órbita por um ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de p também volta a intersectar Σ em um tempo próximo a τ.

Portanto se $V \subset \Sigma$ é uma vizinhança de p suficientemente pequena, podemos definir uma aplicação $P_\Sigma : V \longrightarrow \Sigma$ que a cada ponto $x \in V$ associa $P_\Sigma(x)$, sendo $P_\Sigma(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a intersectar Σ. Esta aplicação é denominada a *Aplicação de Poincaré* associado à órbita γ e à seção Σ. Ver Figura 7.

Figura 7 – Aplicação de Poincaré.



Fonte: Equações Diferenciais Ordinárias [8].

O conhecimento desta aplicação nos permite dar uma descrição das órbitas em uma vizinhanças de γ.

Definição 2.42. Seja $p \in \gamma$, onde γ é uma órbita fechada de X. Seja Σ uma seção transversal a X pelo ponto p. Dizemos que γ é uma *órbita fechada hiperbólica de* X se p é um ponto fixo hiperbólico da aplicação de Poincaré $P_\Sigma : V \subset \Sigma \longrightarrow \Sigma$. Isto é, qualquer autovalor λ de $DP_\Sigma(p)$ satisfaz $|\lambda| \neq 1$.

Definição 2.43. Dizemos que a órbita γ é *atratora* se todos os autovalores generalizados da derivada $DP_\Sigma(p)$ da aplicação de Poincaré no ponto fixo p têm módulo menor do que 1. Dizemos que a órbita γ é *repulsora* se todos os autovalores generalizados da derivada $DP_\Sigma(p)$ da aplicação de Poincaré no ponto fixo p têm módulo maior do que 1.

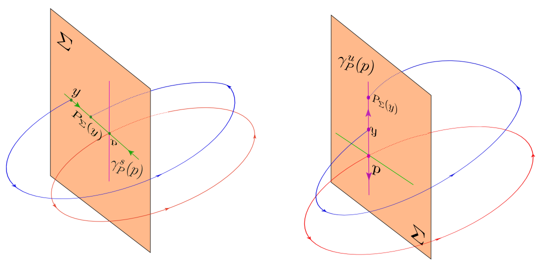
Teorema 2.44. *Sejam X um campo vetorial no aberto U e $\gamma \subset U$ uma órbita periódica de X. Se γ é atratora, então existe uma vizinhança de γ que é positivamente invariante e tal que todas órbitas de X por pontos dessa vizinhança tem ω-limite igual a γ, com trajetórias tendendo a γ, no seguinte sentido: as iteradas $P_\Sigma^n(y)$ da aplicação de Poincaré P_Σ de X numa seção local Σ de X em $p \in \gamma$, de pontos $y \in \Sigma$ suficientemente próximos a p, convergem ao ponto fixo p de P_Σ, com $n \longrightarrow +\infty$.*

Demonstração. Ver [8, Teorema 6.22, p. 256]. □

Assim, a órbita atratora γ é uma espécie de *poço*, e a órbita repulsora γ se comporta como uma espécie de *fonte*. As órbitas hiperbólicas que não são atratoras ou repulsoras são denominadas *selas*, que somente podem existir em dimensões $n \geq 3$.

Definição 2.45. Dizemos que o *conjunto estável* $\gamma_P^s(p)$ do ponto fixo p da aplicação de Poincaré é o conjunto dos ponto $y \in \Sigma$ tais que $P_\Sigma^n(p) \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n \to +\infty} P_\Sigma^n(y) = p$. O *conjunto instável* $\gamma_P^u(p)$ do ponto fixo p, analogamente, é o conjunto desses pontos tais que $\lim_{n \to -\infty} P_\Sigma^n(y) = p$. Uma idea do comportamento geométrico dos conjuntos estável e instável pode-se visto na Figura 8.

Figura 8 – Os conjuntos estável e instável da aplicação de Poincaré.



Fonte: Equações Diferenciais Ordinárias [8].

Os conjuntos estável e instável de p são invariantes por P_Σ e dão origem aos conjuntos estável e instável da órbita γ, como segue. Dizemos que o *conjunto estável* $W_X^s(\gamma)$ da órbita periódica γ é o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que γ é o ω-limite de x e o *conjunto instável* $W_X^u(\gamma)$ da órbita periódica γ é o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que γ é o α-limite de x.

No caso de uma órbita atratora, o conjunto instável é a própria órbita e o conjunto estável é um aberto que contém γ, a *bacia de atração* da órbita; se a órbita é repulsora, analogamente, o conjunto instável é um aberto e o estável é a órbita. Em geral, temos que $W^s_X(\gamma) \cap \Sigma = \gamma^s_P(p)$ e $W^u_X(\gamma) \cap \Sigma = \gamma^u_P(p)$ e mostra-se que os conjuntos estável e instável de p e γ são, realmente variedades imersas de Σ e U, respectivamente, isto é pelo Teorema da Variedade Estável para difeomorfismo [11, Theorem 6.2.3. p.240] e Teorema da Variedade Estável para fluxo [11, Theorem 17.4.3. p.545].

Agora vejamos o comportamento local para órbitas periódicas. Porém, antes disso necessitamos a seguinte definição.

Definição 2.46. Seja $\mathcal{O}_X(p)$ uma órbita periódica hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, com período T, e considere uma aplicação de Poincaré P_Σ definida numa seção transversal Σ de p. Consideremos E^s_P e E^u_P os espaços estável e instável do mapa de Poincaré $DP_\Sigma(p)$. Definamos a decomposição ao longo da órbita de p por $E^r_{X_t(p)} = DX_t(p)(E^r_P)$ para $r = s, u$. Isto gera o fibrado

$$\mathcal{N} = \{(q, v) : q \in \mathcal{O}_X(p) \quad \text{e} \quad v \in E^s_q \oplus E^u_q\}.$$

Existe um fluxo Φ_t en $\mathcal{N}$ que é linear nas fibras de $E^s_q \oplus E^u_q$ dada por

$$\Phi_t(q, v) = (X_t(q), DX_t(q)v).$$

Teorema 2.47. *(Hartman-Grobman para órbitas periódicas) Seja $\mathcal{O}_X(p)$ uma órbita periódica hiperbólica para um campo X. Então o fluxo X_t é topologicamente equivalente em uma vizinhança de $\mathcal{O}_X(p)$ em M ao fluxo Φ_t numa vizinhança de $\mathcal{O}_X(p) \times \{0\}$ em $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Ver [23, Theorem 8.7, p. 170] □

2.4.3 Conjunto Estável e Instável

Nas subseções 2.4.1 e 2.4.2, temos a noção de conjuntos estável e instável para um ponto σ (singularidade) e uma órbita periódica γ, que são conjuntos compactos e invariantes então é natural tratar de geralizar este conceito para um conjunto compacto invariante arbitrário. Assim nesta subseção, apresentaremos a forma geral do conjunto estável e instável para um conjunto compacto invariante Λ. O qual nos vai a dar informação dos pontos cujas órbitas a futuro o passado se acumulam assintoticamente a Λ.

Definição 2.48. Se Λ é um conjunto compacto invariante de X, denotamos por

$$W^s_X(\Lambda) = \{q \in M : dist(X_t(q), \Lambda) \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow +\infty\}$$
$$W^u_X(\Lambda) = \{q \in M : dist(X_t(q), \Lambda) \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow -\infty\},$$

onde $dist$ é a métrica induzida pela métrica riemmaniana de M. Esses conjuntos são chamados respectivamente o *conjunto estável e instável de* Λ.

Observação 2.49. Denotamos $W^s_X(p) = W^s_X(\mathcal{O}_X(p))$ e $W^u_X(p) = W^u_X(\mathcal{O}_X(p))$, no caso em que Λ é uma órbita $\mathcal{O}_X(p)$ de p.

A seguinte Proposição dá-nos as principais propriedades e caracterizações dos conjuntos estáveis para um conjunto compacto invariante Λ.

Proposição 2.50. *Para todo conjunto compacto invariante Λ de X temos que:*

1. $W^s_X(\Lambda) = \{q \in M : \omega_X(q) \subset \Lambda\}$ *e* $W^u_X(\Lambda) = \{q \in M : \alpha_X(q) \subset \Lambda\}$.
2. *Sejam Λ, Δ conjuntos compactos invariantes de X. Se $\Lambda \subset \Delta$, então*
$$W^s_X(\Lambda) \subset W^s_X(\Delta) \text{ e } W^u_X(\Lambda) \subset W^u_X(\Delta).$$
3. $W^s_X(\Lambda) = W^u_{-X}(\Lambda)$ *e* $W^u_X(\Lambda) = W^s_{-X}(\Lambda)$.
4. *Se $p \in W^*_X(\Lambda)$ então $X_t(p) \in W^*_X(\Lambda)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Onde $* = s, u$.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto compacto invariante de X.

1. ($\subseteq$) Seja $p \in W^s_X(\Lambda)$, então $dist(X_t(p), \Lambda) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que
$$dist(X_t(p), \Lambda) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } t \geq T. \tag{2.3}$$
Agora, seja $q \in \omega_X(p)$, então existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \longrightarrow +\infty$ e $X_{t_n}(p) \longrightarrow q$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Seja $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ dados acima então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que
$$d(X_{t_n}(p), q) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } t_n > T, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{2.4}$$
Assim de (2.3) temos que, para cada $n \geq n_0$ existe $a_n \in \Lambda$ tal que
$$d(X_{t_n}(p), a_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$
De (2.4) e (2.5) temos

$$d(q, a_n) \leq d(q, X_{t_{n_0}}(p)) + d(X_{t_{n_0}}(p), a_{n_0}) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Como Λ é compacto e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em Λ. Então $q \in \Lambda$. Portanto, $\omega_X(p) \subset \Lambda$. Assim $p \in \{q \in M : \omega_X(q) \subset \Lambda\}$.

($\supseteq$) Seja $p \in \{q \in M : \omega_X(q) \subset \Lambda\}$, então $\omega_x(p) \subset \Lambda$. Suponhamos que $p \notin W^s_X(\Lambda)$. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $T > 0$, existe $t > T$ com $dist(X_t(p), \Lambda) \geq \varepsilon$. Assim existe uma sequência crescente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\varepsilon < dist(X_{t_n}(p), \Lambda) \leq d(X_{t_n}(p), a) \;\text{ para todo }\; a \in \Lambda. \tag{2.6}$$

Por outro lado, como $(X_{t_n}(p))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de M. Então existem $x \in M$ e uma subsequência $(X_{t_{n_k}}(p))_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $X_{t_{n_k}}(p) \longrightarrow x$. Assim $x \in \omega_x(p) \subset \Lambda$. Isso é uma contradição de (2.6). Assim $p \in W^s_X(\Lambda)$.

2. Seja $p \in W^s_X(\Lambda)$ então $\omega_X(p) \subset \Lambda$. Como $\Lambda \subset \Delta$ então $\omega_X(p) \subset \Delta$. Portanto $p \in W^s_X(\Delta)$. Assim $W^s_X(\Lambda) \subset W^s_X(\Delta)$. Analogamente tem-se $W^u_X(\Lambda) \subset W^u_X(\Delta)$.

3. Se segue do item (1) e da Observação 2.23.

4. Seja $p \in W^s_X(\Lambda)$ então pelo item (1) temos que $\omega_X(p) \subset \Lambda$. Dado $t \in I\!R$ fixo e arbitrário, definimos $q = X_t(p)$. Assim, pelo item (1) da Proposição 2.25 temos que $\omega_X(q) = \omega_X(p) \subset \Lambda$. Portanto, pelo item (1) temos que $X_t(p) = q \in W^s_X(\Lambda)$. De maneira análoga temos que, se $p \in W^u_X(\Lambda)$, então $X_t(p) \in W^u_X(\Lambda)$ para todo $t \in I\!R$.

$\square$

2.5 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS

Já vimos nas seções 2.4.1 e 2.4.2, uma noção de hiperbolicidade para uma singularidade e órbita periódica. Uma órbita periódica hiperbólica, pode ser vista como um conjunto. Assim sendo, o que segue é uma generalização para se definir o que seria um conjunto hiperbólico. As referência para essa subseção é [1] e [10].

Denotaremos por $m(T) = inf_{\|v\|=1}\|T(v)\|$ a norma mínima do operador linear T.

Definição 2.51. Um conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset M$ de um campo X é chamado *hiperbólico* se

1. Admite uma decomposição contínua DX-invariante do fibrado tangente de M restrito a Λ, $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, isto é, pode-se escrever o espaço tangente T_xM como uma soma direita $E^s_x \oplus E^X_x \oplus E^u_x$, onde E^X_x é o subespaço em T_xM gerado por $X(x)$, satisfazendo $DX_t(x) \cdot (E^*_x) = E^*_{X_t}(x)$ para todo $t \in I\!R$, $x \in \Lambda$ e $* = s, u, X$.

2. Existem constantes λ, $K > 0$ tais que:

   - E^s_Λ é (K, λ)-*contrator*, ou seja,

     $$\|DX_t(x)_{|E^s_x}\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t}, \text{ para todo } x \in \Lambda, \text{ e para todo } t \geq 0.$$

   - E^u_Λ é (K, λ)-*expansor*, ou seja,

     $$m(DX_{-t}(x)_{|E^u_x}) \geq Ke^{\lambda t}, \text{ para todo } x \in \Lambda, \text{ e para todo } t \geq 0.$$

Assim, definimos que um ponto crítico de X é hiperbólico se sua órbita é um conjunto hiperbólico para X.

Definição 2.52. Os conjuntos

$$W^{ss}_X(p, X) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow \infty\}$$
$$W^{uu}_X(p, X) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente *variedade estável e instável forte* do ponto p para o campo X.

Dado $\varepsilon > 0$, a variedade estável local de tamanho ε do ponto $p \in M$ é o conjunto $W^{ss}_\varepsilon(p)$ dos pontos $y \in M$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} d(X_t(p), X_t(y)) = 0 \text{ e } d(X_t(p), X_t(y)) \leq \varepsilon, \text{ para todo } t \geq 0.$$

De forma análoga se definem a variedade instável local $W^{uu}_\varepsilon(p)$ de um ponto $p \in M$.

Teorema 2.53. *(Teorema da Variedade Estável para Fluxos) Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e Λ um conjunto hiperbólico, invariante para X. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $p \in \Lambda$ existem dois discos mergulhados $W^{ss}_\varepsilon(p, X)$ e $W^{uu}_\varepsilon(p, X)$ os quais são tangentes a E^s_p e E^s_p, respetivamente. Além disso, dados $p \in Crit(X)$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se Y é δ-C^r próximo de X e $D \subset W^{ss}_X(p)$ é um disco compacto mergulhado contendo p, então existe um disco $D_Y \subset W^{ss}_Y(p_Y)$ ε-C^r próximo de D onde p_Y é a continuação de p, isto é, p_Y mantem-se um elemento crítico hiperbólico para Y.*

Demonstração. Ver [10, Theorem 4.1, p. 39] ou ver [11, Theorem 17.4.3, p. 545]. □

O Teorema da Variedade Estável para Fluxos assegura que se p pertence a um conjunto hiperbólico, então $W^{ss}_X(p)$ e $W^{uu}_X(p)$ são subvariedades imersas em M de classe C^1, tangentes a E^s_Λ e E^u_Λ, respectivamente em p. consequentemente, a variedade estável e instável

$$W^s_X(p) = \bigcup_{t\in I\!R} W^{ss}_X(X_t(p)) \text{ e } W^u_X(p) = \bigcup_{t\in I\!R} W^{uu}_X(X_t(p))$$

também são subvariedades imersas em M. se Λ é um conjunto hiperbólico para um fluxo X_t, então $W^s_X(p)$ e $W^u_X(p)$ são variedades invariantes de classe C^1 tangentes a $E^s_p \oplus E^X_p$ e $E^X_p \oplus E^u_p$ em p respectivamente, e dependem continuamente de p. Para maiores detalhes poder ser visto em [10].

Para simplificar a notação denotaremos, $W^s_X(p) = W^s_X(\mathcal{O}_X(p))$ e $W^u_X(p) = W^u_X(\mathcal{O}_X(p))$. Definimos, desta forma, as *variedades estável forte e estável* de um ponto $p \in \Lambda$, respectivamente, por $W^{ss}_X(p)$ e $W^s_X(\mathcal{O}_X(p))$.

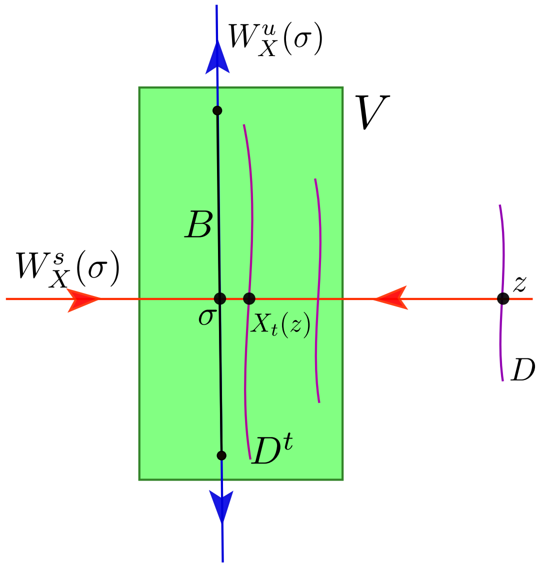
Seja $p \in M$ ponto crítico hiperbólico para X. A dimensão da variedade estável $W^s(\mathcal{O}(p))$ é chamado o *índice de* $\mathcal{O}(p)$, e denotaremos por $ind(\mathcal{O}(p))$.

O seguinte lema é um resultado muito importante sobre a dinámica perto de uma singularidade hiperbólica e que é extremamente útil para obter interseções entre as variedades estável e instável por argumentos geométricos simples.

Lema 2.54. *(O Lema da Inclinação (ou λ-Lema))*
Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ para algum $r \geq 1$, com variedades estável e instável locais $W^s_{loc}(\sigma)$, $W^u_{loc}(\sigma)$. Fixando um disco mergulhado B em $W^u_{loc}(\sigma)$ que é uma vizinhança de σ em $W^u_{loc}(\sigma)$, e uma vizinhança V deste disco em M. Então seja D um disco transversal a $W^s_{loc}(\sigma)$ em Z com a mesma dimensão de B, e escreva D^t para a componente conexa de $X_t(D) \cap V$ que contém $X_t(z)$, para todo $t \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$ o disco D^t está ε-próximo de B na C^r-topologia. Ver Figura 9.

Demonstração. Ver [18, Lema 7.2, p. 95]. □

Figura 9 – O Lema de Inclinação.



Fonte: Three-Dimensional Flows [1].

2.6 CLASSES HOMOCLÍNICAS

Nesta seção estaremos interessados quando as variedades estável e instável de um ponto hiperbólico se intersectam, pois elas pode gerar dinâmicas bem complicadas, como a ferradura de Smale, por exemplo (Ver [20]). E um resultado que ajuda a obter tais interseções é o Lema de Inclinação. A referência usada nesta seção são [1, Chapter 2, p. 25] e [11].

Definição 2.55. Seja p um ponto periódico hiperbólico para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. A *classe homoclínica de* p denotada por $H_X(p)$, é definida como o fecho do conjunto de interseções transversais entre a variedade estável e instável de p, isto é,

$$H_X(p) = \overline{W^s_x(p) \pitchfork W^u_x(p)}.$$

Dizemos que a classe homoclínica de p é trivial se ela é um poço ou uma fonte. Em tal caso a classe homoclínica se reduz à órbita de p.

Observação 2.56. As classes homoclínicas de um campo vetorial X, são conjuntos compactos. Isto devido à definição de classe homoclínica e que M é compacto.

Proposição 2.57. *Uma classe homoclínica de um campo vetorial X é sempre um subconjunto invariante pelo fluxo.*

Demonstração. Seja $H_X(p)$ uma classe homoclínica de p, onde p é um ponto periódico hiperbólico para o campo vetorial X.

Afirmamos que se $q \in H_X(p)$ então $X_t(q) \in H_X(p)$ para todo $t \in I\!R$. Com efeito, seja $q \in H_X(p)$. Dado $t \in I\!R$, definimos $r = X_t(q)$. Seja V um conjunto aberto que contém a r. Pelo Corolário 2.6 temos que X_t é um difeomorfismo, então $\widetilde{V} = X_{-t}(V)$ é um conjunto aberto que contém a q. Assim

$$\widetilde{V} \cap (W^s_X(p) \pitchfork W^u_X(p)) \neq \emptyset.$$

Seja $s \in \widetilde{V} \cap (W^s_X(p) \pitchfork W^u_X(p))$, então

$$X_t(s) \in V \quad \text{e} \quad X_t(s) \in (W^s_X(p) \cap W^u_X(p)). \tag{2.7}$$

Definimos $y = X_t(s)$.

Afirmação 2.58. $T_y(M) = T_y(W^s_X(p)) + T_y(W^u_X(p))$.

Com efeito, pelo Corolário 2.6 temos que X_t é um difeomorfismo. Então

$$DX_t(s) : T_s(M) \longrightarrow T_y(M) \text{ e } D\hat{X}_t(s) : T_s(W^*_X(p)) \longrightarrow T_y(W^*_X(p)),$$

são isomorfismos, com $\hat{X}_t(s)= X_{t|_{W^*_X(p)}}(s)$, onde $* = s, u$. Seja $a \in T_y(M)$, então existe um $b \in T_s(M)$ tal que $DX_t(s)(b) = a$. Como $s \in (W^s_X(p) \pitchfork W^u_X(p))$ temos que:

$$T_s(M) = T_s(W^s_X(p)) + T_s(W^u_X(p)).$$

Assim, $b = m + n$ com $m \in W^s_X(p)$ e $n \in W^u_X(p)$. Logo

$$a = DX_t(s)(m) + DX_t(s)(n) = D\hat{X}_t(s)(m) + D\hat{X}_t(s)(n) \in T_y(W^s_X(p)) + T_y(W^u_X(p)).$$

Portanto, $T_y(M) \subset T_y(W^s_X(p)) + T_y(W^u_X(p))$. A outra inclusão é imediata, pois $T_y(W^*_X(p))$ são subespaço de $T_y(M)$. Isso prova a afirmação.

Da Afirmação temos que $X_t(s) \in (W^s_X(p) \pitchfork W^u_X(p))$. Assim de (2.7) temos que $V \cap (W^s_X(p) \pitchfork W^u_X(p)) \neq \emptyset$. Portanto $X_t(q) \in \overline{W^s_x(p) \pitchfork W^u_x(p)} = H_X(p)$, para cada $t \in I\!R$.

Agora vejamos que $H_X(p)$ é invariante pelo fluxo X_t para todo $t \in I\!R$. dado $t \in I\!R$. Seja $a \in H_X(p)$, então pelo feito acima, temos que $X_{-t}(a) \in H_X(p)$, assim $a \in X_t(H_X(p))$. Portanto $H_X(p) \subset X_t(H_X(p))$. A outra inclusão segue-se pelo feito acima. Portanto $H_X(p) = X_t(H_X(p))$, para todo $t \in I\!R$. $\square$

O seguinte Lema nos diz que as classes homoclínicas são conjuntos transitivos.

Lema 2.59. *Toda classe homoclínica H de um campo vetorial X é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Ver [1, Lemma 2.18, p. 25]. □

O seguinte Teorema nos diz que toda classe homoclinica são acumuladas por órbitas periódicas. Ver [24] e [15].

Teorema 2.60. *(Teorema de Birkhoff-Smale)*
Toda classe homoclínica de um campo vetorial X, tem órbita densa e contém um conjunto denso de órbitas periódicas.

A pessoas interessadas podem ver [20] para uma apresentação geral moderna deste resultado, incluindo a motivação, provas e outras consequências dinâmicas não-triviais.

Teorema 2.61. *(Closed Orbit Theorem) Para todo $\beta > 0$ existem $\delta, L > 0$ para os quais o seguinte é verdadeiro: se $d(X_r(x), x) \leq \delta$ e $r \geq L$, então existem $y \in M$ e $\hat{r}$ tais que $X_{\hat{r}}(y) = y$, $|\hat{r} - r| \leq \beta$ e*

$$d(X_t(y), X_t(x)) \leq \beta \text{ para } 0 \leq t \leq r.$$

Demonstração. Ver [6, Theorem 2.4, p.10]. □

Lema 2.62. *(C^1-Closing Lemma)*
Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ um campo vetorial de classe C^1 sobre uma variedade compacta, sem bordo e de dimensão finita M e $p \in M$ um ponto não errante de X. Dada uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de X e uma vizinhança V de p, então existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que Y tem uma órbita fechada por p.

Demonstração. Ver [22]. □

Observação 2.63. Como consequencia do Closing Lemma temos que para campo vetorial C^1-genérico X tem-se

$$\Omega(X) = \overline{Per(X) \cup Sing(X)}.$$

Ver [1, L2. p. 37] e [22, Theorem 6.5, p. 1019].

3 CONJUNTOS LYAPUNOV ESTÁVEL E CONJUNTOS NEUTRAIS

Nesta seção estabelecemos algumas propriedades dos conjuntos Lyapunov estáveis. Uma referêrencia clássica sobre a teoria de estabilidade de Lyapunov é [3, Chapter V].

3.1 CONJUNTOS LYAPUNOV ESTÁVEL

Definição 3.1. Um conjunto compacto $\Lambda \subseteq M$ é *Lyapunov estável* para X se para todo conjunto aberto U contendo Λ existe um conjunto aberto V contendo Λ tal que $X_t(V) \subseteq U$ para todo $t \geq 0$.

Observação 3.2. Se Λ é um conjunto Lyapunov estável para X, então $X_t(\Lambda) \subset \Lambda$ para todo $t \geq 0$. Com efeito, dado $t_0 \geq 0$ fixo e arbitrário, seja $y \in X_{t_0}(\Lambda)$. Suponhamos que $y \notin \Lambda$, como Λ é compacto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(y)} \cap \Lambda = \emptyset$. Tomemos $U = M \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$, assim U é uma vizinhança aberta de Λ, logo como Λ é um conjunto Lyapunov estável, existe V um conjunto aberto com $\Lambda \subset V$ tal que $X_t(V) \subset U$ para todo $t \geq 0$. Como $y \in X_{t_0}(\Lambda)$, então existe $a \in \Lambda \subset V$ tal que $X_{t_0}(a) = y$, logo $y \in U$, o qual é uma contradição, portanto $y \in \Lambda$. Assim como $t_0 \geq 0$ é arbitrário, concluímos que $X_t(\Lambda) \subset \Lambda$ para todo $t \geq 0$.

Lema 3.3. *Seja Λ^+ um conjunto Lyapunov estável de X. Então:*

1. *Se $x_n \in M$ e $t_n \geq 0$ satisfazem $x_n \longrightarrow x \in \Lambda^+$ e $X_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$, então $y \in \Lambda^+$.*

2. *$W^u_X(\Lambda^+) \subset \Lambda^+$.*

3. *Se Γ é um conjunto transitivo de X e $\Gamma \cap \Lambda^+ \neq \emptyset$, então $\Gamma \subset \Lambda^+$.*

Demonstração. Seja Λ^+ um conjunto Lyapunov estável de X.

1. Seja U um conjunto aberto que contém Λ^+. Como Λ^+ é compacto, então pelo item (2) da Proposição A.4 existe um conjunto aberto U' com $\Lambda^+ \subset U'$ tal que $U' \subset \overline{U'} \subset U$. Por outro lado, como Λ^+ é Lyapunov estável, existe V conjunto aberto com $\Lambda^+ \subset V$ tal que $X_t(V) \subset U'$, para todo $t \geq 0$. Como $x \in \Lambda^+ \subset V$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$, logo $X_{t_n}(x_n) \in U'$ para todo $n \geq n_0$, por conseguinte, temos que $y \in \overline{U'} \subset U$.

Afirmamos que $y \in \Lambda^+$. Com efeito, suponhamos que $y \notin \Lambda^+$, como Λ^+ é compacto então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(y)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Tomemos $U = M \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$, assim U é um aberto que contém Λ^+, pelo fato da acima temos que $y \in U$, o qual é uma contradição.

2. Seja $p \in W^u_X(\Lambda^+)$, então $dist(X_{-t}(p), \Lambda^+) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$. Seja U um conjunto aberto que contém Λ^+, agora como Λ^+ é Lyapunov estável para X, então existe um aberto V com $\Lambda^+ \subset V$ tal que $X_t(V) \subset U$ para todo $t \geq 0$.

   Como $\Lambda^+ \subset V$ e Λ^+ é compacto, então pela Proposição A.7 existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Lambda^+ \subset B_\varepsilon(\Lambda^+) \subset V$.

   Por outro lado, como $dist(X_{-t}(p), \Lambda^+) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$, então para esse $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que $dist(X_{-t}(p), \Lambda^+) < \varepsilon$ para todo $t \geq T$, assim existem $t_0 \geq T$ e $a \in \Lambda^+$ tal que $d(X_{-t_0}(p), a) < \varepsilon$, logo $X_{-t_0}(p) \in B_\varepsilon(a) \subset V$. Por conseguinte, pela propriedade de fluxo, temos que $p = X_{t_0}(X_{-t_0}(p)) \in X_{t_0}(V) \subset U$, assim $p \in U$.

   Afirmamos que $p \in \Lambda^+$. Com efeito, suponhamos que $p \notin \Lambda^+$, como Λ^+ é compacto então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(p)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Tomemos $U = M \setminus \overline{B_\varepsilon(p)}$, assim U é um aberto que contém Λ^+, pelo fato da acima temos que $p \in U$, o qual é uma contradição.

3. Seja U um conjunto aberto que contém Λ^+. Como Λ^+ é compacto, então pelo item (2) da Proposição A.4, existe um conjunto aberto U' com $\Lambda^+ \subset U'$ tal que $U' \subset \overline{U'} \subset U$. Por outro lado, como Λ^+ é Lyapunov estável, existe V conjunto aberto com $\Lambda^+ \subset V$ tal que $X_t(V) \subset U'$, para todo $t \geq 0$. Seja T um conjunto transitivo tal que $T \cap \Lambda^+ \neq \emptyset$. Portanto existe $y \in T$ tal que $T = \omega_X(y)$. Como $\Lambda^+ \subset V$ então $T \cap V \neq \emptyset$, assim existe $p \in T \cap V$, como $p \in T$ existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \longrightarrow +\infty$ e $X_{t_n}(y) \longrightarrow p$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $p \in V$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_{t_n}(y) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Seja $q = X_{t_{n_0}}(y) \in V$ então pelo item (1) da Proposição 2.25 temos que $\omega_X(y) = \omega_X(q)$. Agora, seja $r \in \omega_X(q)$ então, sem pérdida de generalidade existe uma sequência de numeros reais positivos $(\hat{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\hat{t}_n \longrightarrow +\infty$ e $X_{\hat{t}_n}(q) \longrightarrow r$ quando $n \longrightarrow +\infty$, assim $X_{\hat{t}_n}(q) \in V \subset U'$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $r \in \overline{U'} \subset U$. Por conseguinte, $T = \omega_X(y) = \omega_X(q) \subset U$.

   Afirmamos que $T \subset \Lambda^+$. Com efeito, suponhamos existe $p \in T$ tal que $p \notin \Lambda^+$, como Λ^+ é compacto então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(p)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Tomemos $U = M \setminus \overline{B_\varepsilon(p)}$, assim U é um aberto que contém Λ^+, pelo fato da acima temos que $T \subset U$, o qual é uma contradição. Portanto $T \subset \Lambda^+$.

□

3.2 CONJUNTOS NEUTRAIS

Nesta seção estabelecemos o conceito de conjunto neutral e suas principais propriedades, as quais serão as ferramentas que nos vai permitir fazer a demostração do Teorema principal do trabalho (Teorema A).

Definição 3.4. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante de X. Dizemos que Λ é um *conjunto neutral*, se

$$\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$$

onde Λ^+ é um conjunto Lyapunov estável para X e Λ^- é um conjunto Lyapunov Estável para $-X$.

Definição 3.5. Um conjunto compacto invariante de X é dito *saturado* se

$$\Lambda = W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda).$$

Lema 3.6. *Seja Λ um conjunto neutral de X. Então:*

1. *Λ é saturado.*

2. *Λ é transitivo para X se e somente se Λ é transitivo maximal. Em particular, dois conjuntos neutrais transitivos de X diferentes são disjuntos.*

Demonstração.

1. Seja Λ um conjunto neutral para X então $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$, onde $\Lambda^\pm$ é Lyapunov estável para $\pm X$, assim temos $\Lambda \subset \Lambda^+$ e $\Lambda \subset \Lambda^-$. Pelos items (2) e (3) da Proposição 2.50 temos que

$$W^u_X(\Lambda) \subset W^u_X(\Lambda^+) \text{ e } W^s_X(\Lambda) \subset W^s_X(\Lambda^-) = W^u_{-X}(\Lambda^-)$$

e pelo item (2) no Lema 3.3 aplicado a X e $-X$ obtemos $W^u_X(\Lambda) \subset \Lambda^+$ e $W^s_X(\Lambda) \subset \Lambda^-$. Assim

$$W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda) \subset \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda. \tag{3.1}$$

Por outro lado, seja $p \in \Lambda$, como Λ é invariante temos que $X_t(p) \in \Lambda$, para todo $t \in I\!R$. Assim, temos que:

$$dist(X_t(p), \Lambda) = 0, \text{ se } t \longrightarrow +\infty, \quad dist(X_t(p), \Lambda) = 0, \text{ se } t \longrightarrow -\infty$$

logo $p \in W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)$ e portanto $\Lambda \subset W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)$. Assim de (3.1) temos que $\Lambda = W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)$, ou seja Λ é saturado.

2. ($\Rightarrow$) Temos que Λ é um conjunto transitivo para X. Seja Γ um conjunto transitivo tal que $\Gamma \cap \Lambda \neq \emptyset$. Como Λ é um conjunto neutral temos que $\Gamma \cap \Lambda^+ \neq \emptyset$ e $\Gamma \cap \Lambda^- \neq \emptyset$. Pelo item (3) no Lema 3.3, temos $\Gamma \subset \Lambda^+$ e $\Gamma \subset \Lambda^-$. Logo $\Gamma \subset \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda$ e portanto Λ é transitivo maximal.

   ($\Leftarrow$) Como Λ é transitivo maximal, em particular é um conjunto transitivo.

   Por outro lado, sejam Λ,Γ conjuntos neutrais e transitivo de X, suponhamos que $\Lambda \cap \Gamma \neq \emptyset$, pelo anterior eles são transitivos maximais de X, assim $\Lambda \subset \Gamma$ e $\Gamma \subset \Lambda$, ou seja $\Lambda = \Gamma$.

□

Definição 3.7. Um *ciclo* de X é uma coleção finita de conjuntos compactos invariantes $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ tal que $\Lambda_n = \Lambda_0$, $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}$ são disjuntos, e

$$(W^u_X(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s_X(\Lambda_{i+1}) \setminus \Lambda_{i+1}) \neq \emptyset, \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Proposição 3.8. *Não há ciclos de X formados por conjuntos neutrais transitivos.*

Demonstração. A prova é por contradição. Suponhamos que X tem um ciclo $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ onde cada Λ_i é um conjunto neutral transitivo de X tal que:

$$(W^u_X(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s_X(\Lambda_{i+1}) \setminus \Lambda_{i+1}) \neq \emptyset, \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

assim cada $\Lambda_i = \Lambda_i^+ \cup \Lambda_i^-$, onde $\Lambda_i^\pm$ são conjuntos Lyapunov estável para $\pm X$. Agora para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$ escolhemos

$$a_i \in (W^u_X(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s_X(\Lambda_{i+1}) \setminus \Lambda_{i+1}),$$

de acordo com a definição de ciclo e lembremos que $\Lambda_n = \Lambda_0$. Como $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^-$, pelo item (2) da Proposição 2.50 temos que $W^s_X(\Lambda_0) \subset W^s_X(\Lambda_0^-) = W^u_{-X}(\Lambda_0^-)$, agora pelo item (2) da Proposição 3.3 aplicado a $-X$, temos que $W^u_{-X}(\Lambda_0^-) \subset \Lambda_0^-$, assim $W^s_X(\Lambda_0) \subset \Lambda_0^-$.

Afirmação 3.9. $a_i \in \Lambda_0^-$, para todo i.

Com efeito, primeiro vejamos que acontece com a_{n-1}. Como

$$a_{n-1} \in (W^u_X(\Lambda_{n-1}) \setminus \Lambda_{n-1}) \cap (W^s_X(\Lambda_n) \setminus \Lambda_n),$$

então $a_{n-1} \in W^s_X(\Lambda_n) = W^s_X(\Lambda_0)$, como $W^s_X(\Lambda_0) \subset \Lambda_0^-$, por conseguinte $a_{n-1} \in \Lambda_0^-$.
Afirmamos que se $a_i \in \Lambda_0^-$ para algum $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, então $a_{i-1} \in \Lambda_0^-$. Com efeito, como $a_i \in (W^u_X(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s_X(\Lambda_{i+1}) \setminus \Lambda_{i+1})$, então $a_i \in W^u_X(\Lambda_i)$, logo pelo item (1) da Proposição 2.50 temos que $\alpha_X(a_i) \subset \Lambda_i$. Como M é compacto, então $\alpha_X(a_i) \neq \emptyset$, agora seja $z \in \alpha_X(a_i)$, então existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_{-t_n}(a_i) \longrightarrow z$ quando $t_n \longrightarrow +\infty$. Como $a_i \in \Lambda_0^-$ e Λ_0^- é Lyapunov estável para $-X$ então pela Observação 3.2 temos que $X_{-t}(a_i) \in \Lambda_0^-$ para todo $t \geq 0$, assim $X_{-t_n}(a_i) \in \Lambda_0^-$ e como Λ_0^- é compacto, temos que $z \in \Lambda_0^-$. Por conseguinte, $\alpha_X(a_i) \subset \Lambda_0^-$, assim $\alpha_X(a_i) \subset \Lambda_0^- \cap \Lambda_i$.
Como Λ_i é transitivo e Λ_0^- é um conjunto Lyapunov estável para $-X$, então pelo item (3) de Lema 3.3, temos que $\Lambda_i \subset \Lambda_0^-$, daqui temos $W^u_{-X}(\Lambda_i) \subset W^u_{-X}(\Lambda_0^-)$.
Como $W^s_X(\Lambda_i) = W^u_{-X}(\Lambda_i)$, então pelo item (2) de Lema 3.3 temos que $W^s_X(\Lambda_i) \subset \Lambda_0^-$. Por outro lado, como $a_{i-1} \in (W^u_X(\Lambda_{i-1}) \setminus \Lambda_{i-1}) \cap (W^s_X(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i)$, temos que $a_{i-1} \in W^s_X(\Lambda_i)$, por conseguinte, $a_{i-1} \in \Lambda_0^-$. Isso prova nossa afirmação.

Da Afirmação 3.9 temos que $a_0 \in \Lambda_0^-$, por outro lado, como $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^+$ tem-se $W^u_X(\Lambda_0) \subset W^u_X(\Lambda_0^+)$, assim pelo item (2) de Lema 3.3 temos que $W^u_X(\Lambda_0) \subset \Lambda_0^+$, como $a_0 \in W^u_X(\Lambda_0)$ temos que $a_0 \in \Lambda_0^+$, portanto $a_0 \in \Lambda_0^+ \cap \Lambda_0^- = \Lambda_0$. Isso contradiz que $a_0 \in W^u_X(\Lambda_0) \setminus \Lambda_0$ e portanto, a proposição fica provada. $\square$

Lema 3.10. *Se Λ é um conjunto neutral para X, então para toda vizinhança U de Λ existe uma vizinhança $V \subset U$ de Λ tal que:*

1. *$t \geq 0$ e $p \in V \cap X_{-t}(V)$, então $X_{[0,t]}(p) \subseteq U$.*

2. *$t \leq 0$ e $p \in V \cap X_t(V)$, então $X_{[t,0]}(p) \subseteq U$.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto neutral para X. Suponhamos, por absurdo que existe uma vizinhança U de Λ tal que para toda vizinhança $V \subset U$ de Λ,

1. existem $t \geq 0$ e $p \in V \cap X_{-t}(V)$ tais que $X_{[0,t]}(p) \not\subseteq (U)$.

2. existem $t \leq 0$ e $p \in V \cap X_t(V)$ tais que $X_{[t,0]}(p) \not\subseteq (U)$.

Podemos supor que U é uma vizinhança aberta e como Λ é compacto então pela Proposição A.7 existe $\hat{\varepsilon} > 0$ tal que $B_{\hat{\varepsilon}}(\Lambda) \subset U$. Agora definimos $V_n = B_{\frac{\hat{\varepsilon}}{n}}(\Lambda)$, vizinhança de Λ, assim para cada $n \in \mathbb{N}$:

1. Existem $t_n \geq 0$ e $p_n \in V_n \cap X_{-t_n}(V_n)$, tal que $X_{[0,t_n]}(p_n) \not\subseteq (U)$.

2. Existem $t_n \leq 0$ e $p_n \in V_n \cap X_{t_n}(V_n)$, tal que $X_{[t_n,0]}(p_n) \not\subseteq (U)$.

Como $p_n \in V_n$, então $dist(p_n, \Lambda) < \dfrac{\hat{\varepsilon}}{n}$, assim $dist(p_n, \Lambda) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Logo, como Λ é compacto então existe $p \in \Lambda$ e uma subsequência $(p_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(p_{n_j}, p) \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow +\infty$. Assim obtemos uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_n \longrightarrow p \in \Lambda$.

Agora vejamos os casos separadamente.

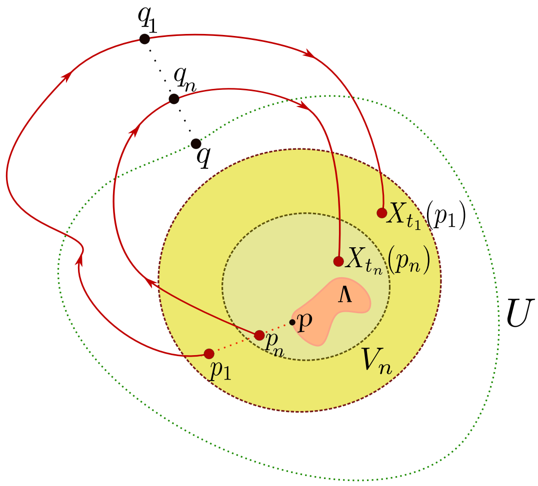
1. Como $p_n \in X_{-t_n}(V_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $X_{t_n}(p_n) \in V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $dist(X_{t_n}(p_n), \Lambda) < \dfrac{\hat{\varepsilon}}{n}$, por conseguinte $dist(X_{t_n}(p_n), \Lambda) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, isto é, $X_{t_n}(p_n) \longrightarrow \Lambda$.

   Assim existem sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $t_n > 0$ tais que $p_n \longrightarrow p$ com $p \in \Lambda$ e $X_{t_n}(p_n) \longrightarrow \Lambda$ e $X_{[0,t_n]}(p_n) \not\subseteq (U)$. Escolhamos $q_n \in X_{[0,t_n]}(p_n) \setminus U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo existe $\hat{t}_n \in [0, t_n]$ tal que $q_n = X_{\hat{t}_n}(p_n)$, assim obtemos uma sequência em M, logo como M é compacto podemos assumir que $q_n \longrightarrow q$, onde $q \in M$. Como $q_n \in X_{[0,t_n]}(p_n) \setminus U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $q \notin U$. Ver Figura 10.

   Por outro lado, como Λ é um conjunto neutral, então $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ com $\Lambda\pm$ conjuntos Lyapunov estável para $\pm X$. Temos que $\hat{t}_n > 0$ com $p_n \longrightarrow p \in \Lambda^+$ e $q_n = X_{\hat{t}_n}(p_n) \longrightarrow q$, como Λ^+ é Lyapunov estável para X então pelo item(1) do Lema 3.3 tem-se que $q \in \Lambda^+$.

   Por outro lado, como $X_{t_n}(p_n) \longrightarrow \Lambda$, como Λ é compacto, então existe $r \in \Lambda$ tal que $X_{t_n}(p_n) \longrightarrow r \in \Lambda^-$. Agora escreveremos $q_n = X_{(\hat{t}_n - t_n)}(X_{t_n}(p_n))$ para todo

Figura 10 – A construção da sequência $(p_n)_{\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{\mathbb{N}}$ tal que $q_n \longrightarrow q \notin U$.



Fonte: Elaboração própria.

$n \in \mathbb{N}$, como $t_n - \hat{t}_n > 0$ obtemos que $q_n = X_{-(t_n-\hat{t}_n)}(X_{t_n}(p_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo $X_{-(t_n-\hat{t}_n)}(X_{t_n}(p_n)) \longrightarrow q$, como Λ^- é Lyapunov estável para $-X$, então pelo item(1) do Lema 3.3 temos que $q \in \Lambda^-$. Assim $q \in \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda$, portanto $q \in U$, que é uma contradição pois $q \notin U$.

2. Como $p_n \in X_{t_n}(V_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $X_{-t_n}(p_n) \in V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $dist(X_{-t_n}(p_n), \Lambda) < \frac{\hat{\varepsilon}}{n}$, consequentemente $dist(X_{-t_n}(p_n), \Lambda) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, isto é, $X_{-t_n}(p_n) \longrightarrow \Lambda$.

   Assim existem sequências $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $t_n < 0$ tais que $p_n \longrightarrow p$ com $p \in \Lambda$ e $X_{-t_n}(p_n) \longrightarrow \Lambda$ e $X_{[t_n,0]}(p_n) \nsubseteq (U)$. Escolhamos $q_n \in X_{[0,t_n]}(p_n) \setminus U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, assim existe $\hat{t}_n \in [t_n, 0]$ tal que $q_n = X_{\hat{t}_n}(p_n)$, portanto obtemos uma sequência em M, logo como M é compacto podemos assumir que $q_n \longrightarrow q$, onde $q \in M$. Como $q_n \in X_{[t_n,0]}(p_n) \setminus U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $q \notin U$.

   Por outro lado, como Λ é um conjunto neutral, então $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ com $\Lambda\pm$ conjuntos Lyapunov estável para $\pm X$. Temos que $-\hat{t}_n > 0$ com $p_n \longrightarrow p \in \Lambda^-$ e $q_n = X_{-(-\hat{t}_n)}(p_n) \longrightarrow q$, como Λ^- é Lyapunov estável para $-X$ ntão pelo item(1) do Lema 3.3 tem-se que $q \in \Lambda^-$.

   Por outro lado, como $X_{-t_n}(p_n) \longrightarrow \Lambda$, como Λ é compacto, então existe $r \in \Lambda$ tal que $X_{-t_n}(p_n) \longrightarrow r \in \Lambda \subset \Lambda^+$. Agora escreveremos $q_n = X_{(\hat{t}_n-t_n)}(X_{-\hat{t}_n}(p_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como $\hat{t}_n - t_n > 0$, e $X_{(\hat{t}_n-t_n)}(X_{-\hat{t}_n}(p_n)) \longrightarrow q$, como Λ^+ é Lyapunov estável para X, então pelo item(1) do Lema 3.3 temos que $q \in \Lambda^+$. Assim $q \in \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda$, portanto $q \in U$, que é uma contradição, pois $q \notin U$. Isto encerra a prova.

$\square$

Lema 3.11. *Se Λ é um conjunto neutral para X, então para toda vizinhança U de Λ existe uma vizinhança $V \subset U$ de Λ tal que*

$$\Omega(X) \cap V \subset \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U).$$

Demonstração. Se U é uma vizinhança do conjunto neutral Λ, então pelo item (2) da Proposição A.4 podemos escolher outra vizinhança U' de Λ tal que $U' \subset \overline{U'} \subset U$, pois Λ é compacto.

Seja $q \in \Omega(X) \cap V$ e suponhamos que $q \notin \bigcap\limits_{t \in I\!R} X_t(U)$. Então existe $t_0 \in I\!R$ tal que $q \notin X_{t_0}(U)$, ou ainda $X_{-t_0}(q) \notin U$. Agora vejamos os seguintes casos:

1. Se $t_0 = 0$.
   Como $q = X_0(q) \notin U$, assim $q \notin U$, o que leva uma contradição, pois $q \in V \subset U$. Portanto $q \in \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$.

2. Se $t_0 > 0$.
   Como $q \in V$ então existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(q) \subset V$. Dado que $X_{-t_0}(q) \notin U$ e $\overline{U'} \subset U$, então $X_{-t_0}(q) \notin \overline{U'}$. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)) \cap \overline{U'} = \emptyset. \tag{3.2}$$

   Pela continuidade do fluxo temos que, para esse $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$X_{-t_0}(B_{\delta_2}(q)) \subset B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)).$$

   Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Portanto

$$X_{-t_0}(B_\delta(q)) \subset B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)), \tag{3.3}$$

   Por outro lado, como $q \in \Omega(X)$ e $t_0 > 0$, então existe $t > t_0 > 0$ tal que

$$B_\delta(q) \cap X_t(B_\delta(q)) \neq \emptyset,$$

logo $B_\delta(q) \cap X_{-t}(B_\delta(q)) \neq \emptyset$, assim existe $p \in B_\delta(q) \cap X_{-t}(B_\delta(q))$, como $B_\delta(q) \subset V$, então $X_{-t}(B_\delta(q)) \subset X_{-t}(V)$, assim $p \in V \cap X_{-t}(V)$. Por conseguinte, como $-t < 0$ pelo item (2) do Lema 3.10 temos que $X_{[-t,0]}(p) \subseteq U'$, logo como $-t \leq -t_0 \leq 0$, então $X_{-t_0}(p) \in U'$, como $p \in B_\delta(q)$, por (3.3) temos que $X_{-t_0}(p) \in B_\varepsilon(X_{-t_0}(q))$, portanto

$$X_{-t_0}(p) \in B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)) \cap \overline{U'},$$

portanto $B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)) \cap \overline{U'} \neq \emptyset$, o qual é uma contradição por (3.2).

3. Se $t_0 < 0$.

Como $q \in V$ então existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(q) \subset V$. Dado que $X_{-t_0}(q) \notin U$ e $\overline{U'} \subset U$, então $X_{-t_0}(q) \notin \overline{U'}$. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)) \cap \overline{U'} = \emptyset. \tag{3.4}$$

Pela continuidade do fluxo temos que, para esse $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$X_{-t_0}(B_{\delta_2}(q)) \subset B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)).$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Portanto

$$X_{-t_0}(B_\delta(q)) \subset B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)), \tag{3.5}$$

Por outro lado, como $q \in \Omega(X)$ e $-t_0 > 0$, então existe $t > -t_0 > 0$ tal que

$$B_\delta(q) \cap X_t(B_\delta(q)) \neq \emptyset,$$

logo $B_\delta(q) \cap X_{-t}(B_\delta(q)) \neq \emptyset$, assim existe $p \in B_\delta(q) \cap X_{-t}(B_\delta(q))$, como $B_\delta(q) \subset V$, então $X_{-t}(B_\delta(q)) \subset X_{-t}(V)$, assim $p \in V \cap X_{-t}(V)$. Por conseguinte, como $t > 0$ pelo item (1) do Lema 3.10 temos que $X_{[0,t]}(p) \subseteq U'$, logo como $0 \leq -t_0 \leq t$, então $X_{-t_0}(p) \in U'$, como $p \in B_\delta(q)$, por (3.5) temos que $X_{-t_0}(p) \in B_\varepsilon(X_{-t_0}(q))$, portanto

$$X_{-t_0}(p) \in B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)) \cap \overline{U'},$$

portanto $B_\varepsilon(X_{-t_0}(q)) \cap \overline{U'} \neq \emptyset$, o qual é uma contradição por (3.4).

$\square$

Definição 3.12. Dizemos que uma sequência de compactos Λ_n *acumula no compacto* Λ se para toda vizinhança U de Λ existe $n_0 > 0$ tal que $\Lambda_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$.

Corolário 3.13. *Se Λ é um conjunto neutral de X e Λ_n é uma sequência de conjuntos transitivos de X tal que $dist(\Lambda_n, \Lambda) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então Λ_n acumula em Λ.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de Λ, pelo item(2) da Proposição (A.4) existe U' vizinhança de Λ tal que $U' \subset \overline{U'} \subset U$. Como Λ é um conjunto neutral para X e $\Lambda \subset U'$, então pelo Lema 3.11 existe $V \subset U'$ vizinhança de Λ tal que $\Omega(X) \cap V \subset \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$.

Como V é uma vizinhança de Λ, então pela proposição (A.7) existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Lambda \subset B_\varepsilon(\Lambda) \subset V,$$

como $dist(\Lambda_n, \Lambda) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então para esse ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $dist(\Lambda_n, \Lambda) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, logo existem $a_n \in \Lambda_n$, $b \in \Lambda$ tal que $dist(a_n, b) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, assim $a_n \in B_\varepsilon(b) \subset V$ e portanto $\Lambda_n \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$, assim para cada $n \geq n_0$ existe $\hat{q}_n \in \Lambda_n \cap V$, como Λ_n é transitivo, então existe um $r_n \in \Lambda$ tal que $\Lambda = \omega_X(r_n)$, assim existe t_n tal que $X_{t_n}(r_n) \longrightarrow \hat{q}_n$ quando $t_n \longrightarrow +\infty$, como $\hat{q}_n \in V$, então existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_{t_n}(r_n) \in V$ para todo $n \geq m_0$.

Definamos $q_n = X_{t_{m_0}}(r_n)$ para todo $n \geq n_0$. Como Λ_n é invariante temos que $q_n \in \Lambda_n$, pelo item (1) da Proposição 2.25 e Proposição 2.28 temos que $\omega_X(q_n) = \omega_X(r_n) = \Lambda_n$ e $\omega_X(q_n) \subset \Omega(X)$, como $q_n \in \Lambda_n$ temos que $q_n \in \Omega(X)$, portanto

$$q_n \in \Omega(X) \cap V \subset \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U'),$$

assim $X_t(q_n) \in U'$ para todo $t \in I\!R$, logo $\{X_t(q_n) : t \in I\!R\} \subset U'$ para todo $n \geq n_0$.

Afirmamos que $\Lambda_n = \overline{\{X_s(q_n) : s \in I\!R\}}$ para todo $n \geq n_0$. Com efeito, seja $a \in \Lambda_n$, como $\Lambda_n = \omega_X(q_n)$, então existe t_m tal que $X_{t_m}(q_n) \longrightarrow a$ quando $t_m \longrightarrow +\infty$, como $X_{t_m}(q_n) \in \{X_s(q_n) : s \in I\!R\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, então $a \in \overline{\{X_s(q_n) : s \in I\!R\}}$, portanto

$$\Lambda_n \subset \overline{\{X_s(q_n) : s \in I\!R\}}. \tag{3.6}$$

Na outra inclusão, como $q_n \in \Lambda_n$ e como Λ_n é compacto e invariante tem-se

$$\overline{\{X_s(q_n) : s \in I\!R\}} \subset \Lambda_n, \tag{3.7}$$

portanto de (3.6) e (3.7) obtém-se a afirmação.

Como $\{X_t(q_n) : t \in I\!R\} \subset U'$ então pela afirmação temos que $\Lambda_n = \overline{\{X_t(q_n) : t \in I\!R\}} \subset \overline{U'} \subset U$ para todo $n \geq n_0$, portanto $\Lambda_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$, isto é Λ_n acumula na Λ. □

Definição 3.14. Um conjunto compacto e invariante Λ de X é Ω-*isolado*, se $\Omega(X) \setminus \Lambda$ é fechado e é dito *isolado* se $\Lambda = \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$ para alguma vizinhança compacta de U.

Proposição 3.15. *Um conjunto neutral é isolado se, e somente se, é* Ω*-isolado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja Λ um conjunto neutral isolado. Então existe uma vizinhança U de Λ tal que $\Lambda = \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$. Pelo Lema 3.11 existe $V \subset U$ vizinhança de Λ tal que

$$\Omega(X) \cap V \subset \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U) = \Lambda.$$

Suponhamos que $\Omega(X) \setminus \Lambda \neq \emptyset$. Então $\overline{\Omega(X) \setminus \Lambda} \neq \emptyset$, e assim tomemos $y \in \overline{\Omega(X) \setminus \Lambda}$. Então existe $y_n \in \Omega(X) \setminus \Lambda$ tal que $y_n \longrightarrow y$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $y_n \in \Omega(X) \setminus \Lambda$ e $\Omega(X)$ é fechado temos que $y \in \Omega(X)$.

Afirmamos que $y \notin \Lambda$. Com efeito, suponhamos que $y \in \Lambda$. Então $y \in V$ e assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Logo $y_n \in \Omega(X) \cap V$, para todo $n \geq n_0$. Portanto $y_n \in \Lambda$ para todo $n \geq n_0$ o que é uma contradição. Logo $y \notin \Lambda$.

Assim $y \in \Omega(X) \setminus \Lambda$ e portanto é fechado, logo temos que Λ é Ω-isolado.
($\Leftarrow$) Seja Λ um conjunto Ω-isolado, isto é, $\Omega(X) \setminus \Lambda$ é fechado. Como Λ é compacto e $(\Omega(X) \setminus \Lambda) \cap \Lambda = \emptyset$, então pela Proposição A.6 temos que $dist(\Omega(X) \setminus \Lambda, \Lambda) > 0$. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$dist(\Omega(X) \setminus \Lambda, \Lambda) > \varepsilon. \tag{3.8}$$

Para esse $\varepsilon > 0$, tomemos $U = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Lambda)$. Afirmamos que $(\Omega(X) \setminus \Lambda) \cap \overline{U} = \emptyset$. Com efeito, suponhamos que $(\Omega(X) \setminus \Lambda) \cap \overline{U} \neq \emptyset$, então existe $y \in \Omega(X) \setminus \Lambda$ e $y \in \overline{U}$. Como $\overline{U} = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Lambda)}$, então existe $y_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Lambda)$ tal que $y_n \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Assim $dist(y_n, \Lambda) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo existe $a_n \in \Lambda$ tal que $d(y_n, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

Assim para $a_{n_0} \in \Lambda$ temos que:

$$d(y, a_{n_0}) \leq d(y, y_{n_0}) + d(y_{n_0}, a_{n_0}) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo $dist(\Omega(X) \setminus \Lambda, \Lambda) \leq d(y, a_{n_0}) < \varepsilon$, o qual é uma contradição por (3.8). Portanto existe uma vizinhança U de Λ tal que $(\Omega(X) \setminus \Lambda) \cap \overline{U} = \emptyset$. Isso prova a afirmação.

Agora temos

$$\begin{aligned} \Omega(X) \cap \overline{U} &= [(\Omega(X) \setminus \Lambda) \cup (\Omega(X) \cap \Lambda)] \cap \overline{U} \\ &= (\Omega(X) \setminus \Lambda) \cup \overline{U}) \cup ((\Omega(X) \cap \Lambda) \cap \overline{U}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

da afirmação temos que $(\Omega(X) \setminus \Lambda) \cap \overline{U} = \emptyset$, e de (3.9) obtemos $\Omega(X) \cap \overline{U} \subset \Omega(X) \cap \Lambda$, portanto $\Omega(X) \cap \overline{U} \subset \Lambda$.

Afirmação 3.16. *U é um bloco isolante, isto é, $\Lambda = \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$.*

Com efeito,

($\subseteq$) Como $\Lambda \subset U$, então $X_t(\Lambda) \subset X_t(U)$ para todo $t \in I\!R$. Como Λ é invariante temos que $\Lambda \subset X_t(U)$ para todo $t \in I\!R$, assim $\Lambda \subset \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$.

($\supseteq$)Seja $a \in \bigcap_{t \in I\!R} X_t(U)$, então $X_t(a) \in U$ para todo $t \in I\!R$. Por outro lado como M é compacto, então $\omega_X(a) \neq \emptyset$ para todo $a \in M$. Seja $z \in \omega_X(a)$. Então existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_{t_n}(a) \longrightarrow z$ quando $t_n \longrightarrow +\infty$. Logo $z \in \overline{U}$ e assim $\omega_X(a) \subset \overline{U}$. Pela Proposição 2.28 temos que $\omega_X(a) \subset \Omega(X)$ e portanto $\omega_X(a) \subset \overline{U} \cap \Omega(X) \subset \Lambda$. Pela Proposição 2.50 temos que $a \in W^s_X(\Lambda)$. Como $\alpha_X(a) \subset \Omega(X)$, podemos de maneira semelhante obter $\alpha_X(a) \subset \overline{U} \cap \Omega(X) \subset \Lambda$ e assim pela Proposição 2.50 temos que $a \in W^u_X(\Lambda)$, logo $a \in W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)$, agora como Λ é um conjunto neutral, então pelo item (1) do Lema 3.6 temos que Λ é saturado, portanto $a \in \Lambda$. Assim concluímos que $\bigcap_{t \in I\!R} X_t(U) \subset \Lambda$. Isso prova a afirmação. Portanto Λ é um conjunto isolado. $\square$

Proposição 3.17. *Um conjunto neutral, hiperbólico e transitivo é isolado.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto neutral, hiperbólico e transitivo. Pela Proposição 3.15, basta mostrar que o conjunto Λ é Ω-isolado. Por contradição, suponhamos que Λ não é Ω-isolado, então $\Omega(X) \setminus \Lambda$ não é fechado, isto é, existe $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de $\Omega(X) \setminus \Lambda$ tal que $p_n \longrightarrow p$ com $p \notin \Omega(X) \setminus \Lambda$. Como $\Omega(X)$ é fechado e $p_n \in \Omega(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $p \in \Omega(X)$.

Por outro lado, como Λ é um conjunto transitivo, existe $q \in \Lambda$ tal que $\Lambda = \omega_X(q) \subset \Omega(X)$. Assim $\Omega(X) = (\Omega(X) \setminus \Lambda) \cup \Lambda$, e como $p \notin \Omega(X) \setminus \Lambda$, então $p \in \Lambda$.

Fixando U vizinhança de Λ, como Λ é um conjunto neutral, podemos tomar outra vizinhança V como feito na Lema 3.10. Como $p \in \Lambda \subset V$, então podemos assumir que $p_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo temos que $p_n \in V$, então existe $r_n > 0$ tal que $B_{r_n}(p_n) \subset V$ e $B_{r_n}(p_n) \cap \Lambda = \emptyset$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo e arbitrário, tomemos $\varepsilon = \dfrac{r_n}{2m}$. Então, existem $\delta_n, L_n > 0$, dado pelo Teorema 2.61. Tomemos $\widehat{\delta}_n = \min\{\dfrac{\delta_n}{2}, \dfrac{r_n}{2m}\}$, assim, $B_{\widehat{\delta}_n}(p_n) \subset V$.

Tomemos a vizinhança $U_m = B_{\widehat{\delta}_n}(p_n)$ de p_n. Como p_n é não errante para X, para U_m e para $L_n > 0$ existe $t_m > L_n$ tal que $X_{t_m}(U_m) \cap U_m \neq \emptyset$. Logo, existe $q_m \in X_{-t_m}(U_m) \cap U_m$. Do item (1) do Lema 3.10, temos que $X_{[0,t_m]}(q_m) \subset U$. Como $X_{t_m}(q_m) \in U_m$ e $q_m \in U_m$, temos,

$$d(X_{t_m}(q_m), p_n) < \widehat{\delta}_n \quad \text{e} \quad d(q_m, p_n) < \widehat{\delta}_n.$$

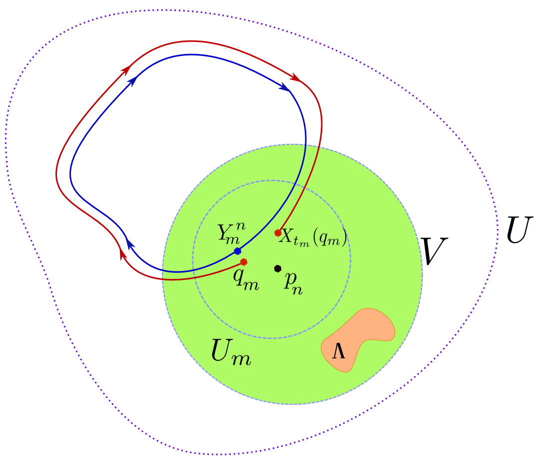
Daqui, temos $d(X_{t_m}(q_m), q_m) \leq d(X_{t_m}(q_m), p_n) + d(p_n, q_m) < 2\widehat{\delta}_n < \delta_n$.

Agora, pelo Teorema 2.61, existe $y_m^n \in Per(X)$ e $d(X_t(y_m^n), X_t(q_m)) \leq \dfrac{r_n}{2m}$, para $0 \leq t \leq t_m$. Por outro lado, para $t = 0$ temos $d(y_m^n, q_m) \leq \frac{r_n}{2m}$. Daqui, temos que

$$d(y_m^n, p_n) \leq d(y_m^n, q_1) + d(q_1, p_n) < \frac{r_n}{2m} + \widehat{\delta}_n < \frac{r_n}{m}. \tag{3.10}$$

Uma idea geométrica da construção dos y_m^n pode-se ver na Figura 11.

Figura 11 – A construção dos $y_m^n \in Per(X)$, usando o Closed Orbit Theorem 2.61.



Fonte: Elaboração própria.

Logo, para cada m existe $y_m^n \in Per(X) \backslash \Lambda$ pois, pela (3.10) temos que $y_m^n \in B_{\frac{r_n}{m}}(p_n)$. Portanto, de (3.10) temos que, $d(y_m^n, p_n) \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow +\infty$. Isto prova que $p_n \in \overline{Per(X)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como U é arbitrário, podemos asumir que $p_n \in Per(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para p_1, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(p_1) \subset U$ e $B_{\varepsilon_1}(p_1) \cap \Lambda = \emptyset$. Como $p_1 \in \overline{Per(X)}$, existe uma sequência de pontos periódicos $(y_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $y_m^1 \longrightarrow p_1$. Assim existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_m^1 \in B_{\varepsilon_1}(p_1)$ para todo $m > m_0$. Desta maneira, escolhemos $m_1 > m_0$ tal que

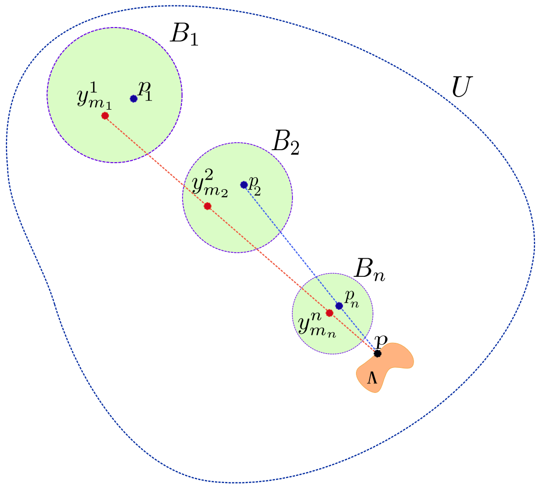
$$y_{m_1}^1 \in Per(X) \setminus \Lambda \text{ e } d(y_{m_1}^1, p_1) < \varepsilon_1.$$

Para p_2 temos $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_2}(p_2) \subset U$ e $B_{\varepsilon_2}(p_2) \cap \Lambda$. Tomemos $r_2 = \min\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2}\}$, assim existe $y_{m_2}^2 \in Per(X) \setminus \Lambda$ tal que $d(y_{m_2}^2, p_2) < r_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$. De maneira análoga, obtemos

$$y_{m_n}^n \text{ em } Per(X) \setminus \Lambda \text{ tal que } d(y_{m_n}^n, p_n) < \frac{\varepsilon_1}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $d(y_{m_n}^n, p_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Ver Figura 12.

Figura 12 – A construção da sequência de pontos $y_{m_n}^n \in Per(X)$, tal que $y_{m_n}^n \longrightarrow p$, onde $B_n = B_{\frac{\varepsilon_1}{n}}(p_n)$.



Fonte: Elaboração própria.

Por outro lado como $d(p_n, p) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então $d(y_{m_n}^n, p) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Assim obtemos uma sequência $(y_{m_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $Per(X) \setminus \Lambda \subset \Omega(X) \setminus \Lambda$ tal que $d(y_{m_n}^n, p) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Portanto podemos asumir que $p_n \in Per(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $p \in \Lambda$ e $d(p_n, p) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, temos que

$$dist(\mathcal{O}_X(p_n), \Lambda) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Por outro lado, pelo item (3) da Proposição 2.25 temos que $\mathcal{O}_X(p_n) = \omega_X(p_n)$, assim, $\mathcal{O}_X(p_n)$ é um conjunto compacto e transitivo. Como Λ é um conjunto neutral, então pelo

Corolário 3.13 tem-se que $\mathcal{O}_X(p_n)$ acumula-se no conjunto Λ. Isto é, para toda vizinhança U de Λ existe $n_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{O}_X(p_n) \subset U \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{3.11}$$

Como Λ é um conjunto compacto hiperbólico, então admite uma decomposição contínua DX-invariante do fibrado tangente de M restrito a Λ. Seja $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, tal decomposição.

Como Λ é um conjunto transitivo, então $\dim(E^s_\Lambda) = s$ e $\dim(E^u_\Lambda) = u$ são constantes em Λ. Com efeito, suponhamos que existe $a, b \in \Lambda$ tais que $\dim(E^s_a) \neq \dim(E^s_b)$. Como Λ é transitivo então pela Proposição 2.32 existe $q \in \Lambda$ tal que $\Lambda = \overline{\mathcal{O}_X(q)}$. Como $a \in \Lambda$ e $b \in \Lambda$ então existem sequências $(X_{t_n}(q))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(X_{t_m}(q))_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$X_{t_n}(q) \longrightarrow a \text{ e } X_{t_m}(q) \longrightarrow b.$$

Pela continuidade do espaço E^s_Λ temos que

$$E^s_{X_{t_n}(q)} \longrightarrow E^s_a \quad \text{e} \quad E^s_{X_{t_m}(q)} \longrightarrow E^s_b. \tag{3.12}$$

Por outro lado, como E^s_q e $E^s_{X_t(q)}$ são isomorfos para todo $t \in I\!R$, visto que X_t é um difeomorfismo para todo $t \in I\!R$. Então $\dim(E^s_{X_t(q)}) = \dim(E^s_q) = k$ para todo $t \in I\!R$. Assim $\dim(E^s_{X_{t_n}}(q)) = k$ e $\dim(E^s_{X_{t_m}}(q)) = k$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Logo de (3.12) temos que $\dim(E^s_a) = \dim(E^s_b) = k$, o qual é uma contradição. Portanto $\dim(E^s_\Lambda) = s$ são constantes em Λ. Analogamente tem-se $\dim(E^u_\Lambda) = u$ são constantes em Λ.

Como Λ não é Ω-isolado então nem $s = 0$ nem $u = 0$. Com efeito, suponhamos que $u = 0$ então $\dim(T_p(M)) = \dim(T_p(E^s_p \oplus E^X_p))$ para todo $p \in \Lambda$. Assim $W^s(\Lambda)$ é um conjunto aberto. Seja $x_n \in \Omega(X) \setminus \Lambda$ tal que $x_n \longrightarrow p \in \Lambda$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W^s(\Lambda)$ para todo $n \geq n_0$. Para x_{n_0}, existe uma vizinhança aberta U tal que

$$U \subset W^s(\Lambda) \quad \text{e} \quad U \cap \Lambda = \emptyset. \tag{3.13}$$

Assim, como $x_{n_0} \in \Omega(X)$ e $T > 0$, existe $t_0 > T$ tal que $X_{t_0}(U) \cap U \neq \emptyset$. Logo existe $y \in X_{t_0}(U) \cap U$. Assim, $y = X_{t_0}(u)$ com $u \in U$. Como $y \in U \subset W^s(\Lambda)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset U$. Logo, como $u \in U$ então para esse $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ temos que

$$dist(X_t(u), \Lambda) < \varepsilon \text{ para todo } t \geq T.$$

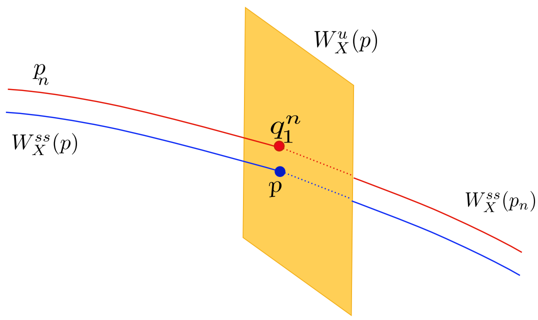
Como $t_0 > T$ então $dist(y, \Lambda) < \varepsilon$, assim por a propriedade (2) da definição A.1 existe $a \in \Lambda$ tal que $d(y, a) < \varepsilon$. Portanto, como $a \in B_\varepsilon(y)$ temos que $B_\varepsilon(y) \cap \Lambda \neq \emptyset$, o que é uma contradição de (3.13). Portanto, $u = 0$. De maneira análoga tem-se que $s = 0$.

Como Λ é um conjunto hiperbólico, então existe U uma vizinhança aberta de Λ tal que todo p_n (sem perda de generalidade) admite uma decomposição contínua do espaço tangente $T_{p_n}(M) = E^s_{p_n} \oplus E^X_{p_n} \oplus E^u_{p_n}$ tal que $E^s_{p_n}$ é contrator e $E^u_{p_n}$ é expansor, assim cada órbita p_n é hiperbólica.

De (3.11), como $\mathcal{O}_X(p_n)$ converge a Λ e p_n são hiperbólicos então pelo Teorema 2.53 (Teorema da Variedade Estável) tem-se que $W^{ss}_X(p_n)$ e $W^{uu}_X(p_n)$ são subvariedades de classe C^1 tangentes a E^s_Λ e E^u_Λ, respectivamente.. Logo, ambas variedades estável e instável locais de p_n têm dimesão s e u respectivamente. Além disso, ambas as variedades também têm tamanho uniforme.

Assim, para cada vizinhança U_p de p, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $W^{ss}_X(p_n)$ está C^1-próximo a $W^{ss}_X(p)$ e $W^{uu}_X(p_n)$ está C^1-próximo a $W^{uu}_X(p)$, para todo $n \geq n_0$. Como p é um ponto hiperbólico, temos que $W^{ss}_X(p)$ e $W^u_X(p)$ são tranversais em p. Assim, como $W^{ss}_X(p_n)$ está C^1-próximo a $W^{ss}_X(p)$, então pela Proposição B.2 existem $q^n_1 \in W^{ss}_X(p_n) \cap W^u_X(p)$. Uma idea geométrica pode-se ver na Figura 13.

Figura 13 – $q^n_1 \in W^{ss}_X(p_n) \cap W^u_X(p)$.



Fonte: Elaboração própria.

Da mesma maneira, desde que $W^{uu}_X(p)$ e $W^s_X(p)$ são tranversais em p. Então existe $q^n_2 \in W^{uu}_X(p_n) \cap W^s_X(p)$ tais que $W^{ss}_X(p_n)$ e $W^{uu}_X(p)$, para todo $n \geq n_0$. Assim

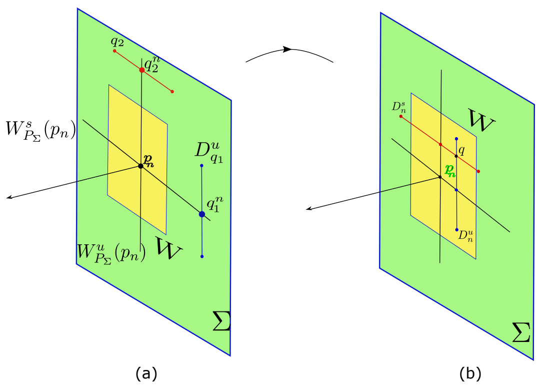
$$W^s_X(p_n) \cap W^u_X(p) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad W^u_X(p_n) \cap W^s_X(p) \neq \emptyset \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{3.14}$$

Como $p_n \in Per(X)$ e $p \in \Lambda$, concluímos, usando o Lema 2.54 (Lema de Inclinação), que $p_n \in \overline{W^s_X(p) \cap W^u_X(p)}$, para $n \geq n_0$. Com efeito, sejam $n \geq n_0$ e V uma vizinhança aberta de p_n. Como $p_n \in Per(X)$ então existe uma seção transversal Σ de p_n. Seja $W = V \cap \Sigma$ uma vizinhança aberta em Σ tal que podemos definir a aplicação de Poincaré P_Σ associado a Σ. Assim, p_n é um ponto fixo da aplicação de Poincaré P_Σ. Sejam $W^s_{P_\Sigma}(p_n) = W^s_X(p_n) \cap \Sigma$ e $W^u_{P_\Sigma}(p_n) = W^u_X(p_n) \cap \Sigma$, as variedades estável e instável de P_Σ respectivamente. De (3.14) e pela invariança das variedades estável e instável, temos que $W^u_X(p) \cap W^s_{P_\Sigma}(p_n) \neq \emptyset$ e $W^s_X(p) \cap W^u_{P_\Sigma}(p_n) \neq \emptyset$. Então, existe $q_1^n \in W^u_X(p) \cap W^s_{P_\Sigma}(p_n)$ e $q_2^n \in W^s_X(p) \cap W^u_{P_\Sigma}(p_n)$. Sejam $D^u_{q_1} \subset W^u_X(p) \cap W^s_{P_\Sigma}(p_n)$ e $D^s_{q_2} \subset W^s_X(p) \cap W^u_{P_\Sigma}(p_n)$ com $\dim(D^u_{q_1}) = \dim(W^u_{P_\Sigma}(p_n))$ e $\dim(D^s_{q_2}) = \dim(W^s_{P_\Sigma}(p_n))$ tais que

$$D^u_{q_1} \pitchfork_{q_1^n} W^s_{P_\Sigma}(p_n) \text{ e } D^s_{q_2} \pitchfork_{q_2^n} W^u_{P_\Sigma}(p_n).$$

Além disso, $W^s_{P_\Sigma}(p_n) \subset W$ e $W^u_{P_\Sigma}(p_n) \subset W$. Esta parte pode ser vista na a parte (a) da Figura 14.

Figura 14 – Restringindo à aplicação de Poincaré e usando o Lema da inclinação.



Fonte: Elaboração própria.

Assim pelo Lema de Inclinação para difeomorfismo [18, Lema 7.1, p. 90] aplicado á aplicação de Poincaré P_Σ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então $D^u_n = P^n_\Sigma(D^u_{q_1}) \cap W$ está ε-C^1 próximo $W^u_{p_\Sigma}(p_n)$ e $D^s_n = P^n_\Sigma(D^s_{q_2}) \cap W$ está ε-C^1 próximo $W^s_{p_\Sigma}(p_n)$. Como $W^u_{P_\Sigma}(p_n) \pitchfork_{p_n} W^s_{P_\Sigma}(p_n) \subset W$, então pelo Corolário B.4 existe $q \in D^u_n \cap D^s_n$ tal que $D^s_n \pitchfork_q D^u_n$. Ver a parte (b) da Figura 14. Como $q \in D^u_n \cap D^s_n$, então

$$q \in P^n_\Sigma(D^s_{q_2}) \cap W \text{ e } q \in P^n_\Sigma(D^u_{q_1}) \cap W.$$

Assim, existem $u \in P^n_\Sigma(D^s_{q_2})$ e $s \in P^n_\Sigma(D^u_{q_1}) \cap W$ tais que $q = P^n_\Sigma(u) = P^n_\Sigma(s)$. Como $D^u_{q_1} \subset W^u_X(p)$ e $D^s_{q_2} \subset W^s_X(p)$ então $P^n_\Sigma(u) \in W^u_X(p)$ e $P^n_\Sigma(s) \in W^s_X(p)$.

Portanto, $q \in V \cap (W^s_X(p) \cap W^u_X(p))$. Isto é, $V \cap (W^s_X(p) \cap W^u_X(p)) \neq \emptyset$. Como V é arbitrário então $p_n \in \overline{W^s_X(p) \cap W^u_X(p)}$.

Como Λ é invariante e $p \in \Lambda$, tem-se que $\mathcal{O}_X(p) \subset \Lambda$, então pelo item (2) da Proposição 2.50 temos que:

$$W^s_X(p) = W^s_X(\mathcal{O}_X(p)) \subset W^s_X(\Lambda) \text{ e } W^u_X(p) = W^u_X(\mathcal{O}_X(p)) \subset W^u_X(\Lambda),$$

portanto,

$$\overline{W^s_X(p) \cap W^u_X(p)} \subset \overline{W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)}.$$

Assim

$$p_n \in \overline{W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)}. \tag{3.15}$$

Como Λ é um conjunto neutral então pelo Lema 3.6 temos que Λ é um conjunto saturado, isto é, $\Lambda = W^s_X(\Lambda) \cap W^u_X(\Lambda)$. De (3.15) temos que $p_n \in \overline{\Lambda} = \Lambda$. Isto leva a uma contradição, pois $p_n \in \Omega(X) \setminus \Lambda$. Por conseguinte $\Omega(X) \setminus \Lambda$ é fechado, assim Λ é Ω-isolado, portanto, pela Proposição 3.15 temos que Λ é isolado. Isso encerra a prova. □

Denotaremos por $\mathcal{F}$ a coleção de todos os conjuntos neutrais, isolados e transitivos de X.

Proposição 3.18. *Uma subcoleção $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ é finita se, e somente se, $\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}'} \Lambda$ é fechado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{F}'$ um conjunto finito de $\mathcal{F}$, digamos $\mathcal{F}' = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ onde Λ_i são conjuntos neutrais para todo $i = 1, \ldots, n$, assim os Λ_i são fechados para todo $i = 1, \ldots, n$, portanto $\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}'} \Lambda$ é fechado.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $B = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}'} \Lambda$ é fechado e que $\mathcal{F}'$ é infinito.

Afirmação 3.19. Existe uma sequência $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos diferentes de $\mathcal{F}'$ tal que $dist(\Lambda_n, \Lambda) \longrightarrow 0$, para algum $\Lambda \in \mathcal{F}'$.

Com efeito, como $\mathcal{F}'$ é infinito, então $\mathcal{F}' \neq \emptyset$, assim existe $\Lambda_1 \in \mathcal{F}'$. Agora como $\mathcal{F}' \setminus \{\Lambda_1\}$ é infinito, então existe $\Lambda_2 \in \mathcal{F}' \setminus \{\Lambda_1\}$ e $\Lambda_2 \neq \Lambda_1$. De maneira indutiva temos

$$\Lambda_n \in \mathcal{F}' \setminus \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}\} \text{ com } \Lambda_n \neq \Lambda_k \text{ para cada } k = 1, \ldots, n-1.$$

Assim obtemos uma coleção de conjuntos diferentes de $\mathcal{F}'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos $a_n \in \Lambda_n$. Assim obtemos uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B e como B é fechado com $B \subset M$, temos que B é compacto, sem perda de generalidade, a menos de subsequência, existe $a \in B$ tal que $a_n \longrightarrow a$. Como $a \in B$ existe $\Lambda \in \mathcal{F}'$ tal que $a \in \Lambda$. Da convergência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Como $dist(\Lambda_n, \Lambda) \leq d(a_n, a)$ para todo $n \geq n_0$, então $dist(\Lambda_n, \Lambda) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, portanto $dist(\Lambda_n, \Lambda) \longrightarrow 0$. Isso prova nossa afirmação.

Assim existem $\Lambda \in \mathcal{F}'$ e uma sequência $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos diferentes de $\mathcal{F}'$ tais que $dist(\Lambda_n, \Lambda) \longrightarrow 0$, como Λ é um conjunto neutral, então pelo Corolário 3.13 temos que Λ_n acumula em Λ. Como $\Lambda \in \mathcal{F}'$, então Λ é isolado, assim existe uma vizinhança compacta U de Λ tal que $\Lambda = \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} X_t(U)$. Como Λ_n acumula em Λ e $\Lambda \subset U$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Logo $X_t(\Lambda_n) \subset X_t(U)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como Λ_n são invariantes temos que $\Lambda_n \subset \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} X_t(U) = \Lambda$ para todo $n \geq n_0$, logo $\Lambda_n \subset \Lambda$ para todo $n \geq n_0$, como Λ_n são conjuntos neutrais e transitivos, pelo item (2) do Lema 3.6 temos que Λ_n são transitivos maximais, então $\Lambda_n = \Lambda$ para todo $n \geq n_0$, o qual é uma contradição, pois Λ_n são diferentes para todo $n \in \mathbb{N}$. portanto $\mathcal{F}'$ é finito. $\square$

4 CLASSES HOMOCLÍNICAS: RESULTADOS PRÉVIOS

Seja M uma n-variedade fechada, $n \geq 3$. Para cada K_1, K_2 subconjuntos compactos de M, definimos a *distância Hausdorff* de K_1 e K_2 como:

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : K_1 \subset B_\varepsilon(K_2) \text{ e } K_2 \subset B_\varepsilon(K_1)\}.$$

Denotaremos por 2_c^M o espaço métrico de todos os subconjuntos compactos de M dotado com a distância Hausdorff.

Seja $\mathcal{V}$ um espaço métrico. Consideramos a seguinte aplicação

$$\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow 2_c^M.$$

Definição 4.1. Dizemos que Φ é *semicontínua inferiormente em* $x \in \mathcal{V}$ se, para todo conjunto aberto $U \subset M$ com $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$, podemos encontrar uma vizinhança $V_x \subset \mathcal{V}$ tal que $\Phi(y) \cap U \neq \emptyset$ para todo $y \in V_x$.

A aplicação, Φ é dito *semicontínua superiormente em* $x \in \mathcal{V}$ se, para todo conjunto compacto $K \subset M$ com $\Phi(x) \cap K = \emptyset$, podemos encontrar uma vizinhança $V_x \subset \mathcal{V}$ tal que $\Phi(y) \cap K = \emptyset$ para todo $y \in V_x$.

Dizemos que Φ é *semicontínua inferiormente* (resp. *semicontínua superiormente*), se Φ é semicontínua inferiormente (resp. semicontínua superiormente) para todo $x \in \mathcal{V}$.

Lema 4.2. *Sejam F e K espaços métricos completos e uma aplicação $\Phi : F \longrightarrow 2_c^K$. Se Φ é semicontínua inferiormente então existe um subconjunto residual $\mathcal{R}$ de F onde Φ é semicontínua superiormente.*

Demonstração. A demostração pode ser vista em [12]. $\square$

Apresentaremos uma das principais ferramentas que serão utilizadas ao longo desta seção. Esta ferramenta é o Connecting Lemma , o qual é motivado pela seguinte situação. Suponha que a variedade instável de uma órbita periódica hiperbólica acumula-se na variedade estável de outra órbita periódica hiperbólica. Nós gostaríamos de encontrar um campo vetorial perto ao dado, tal que a continuação das variedades invariantes de órbitas periódicas acima realmente se intersectam.

Teorema 4.3. *(Connecting Lemma (Hayashi)) Sejam* $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ *e* Λ *um conjunto hiperbólico e isolado de* X*. Se* $W^s_X(\Lambda) \cap \overline{W^u_X(\Lambda)} - \Lambda \neq \emptyset$*. Então para quaisquer* C^1 *vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* X*, existe* $Y \in \mathcal{U}$ *tal que* $Y = X$ *em uma vizinhança* U *de* Λ *e* $W^s_Y(\Lambda) \cap W^u_Y(\Lambda) - \Lambda \neq \emptyset$*.*

Demonstração. Ver [9, Theorem A, p. 83] e [29, Theorem C, p. 5214]. □

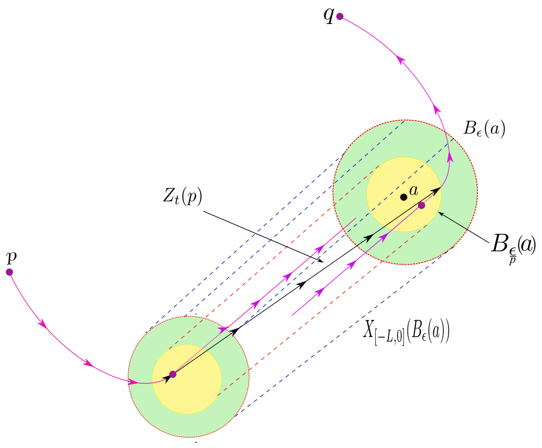
Teorema 4.4. *(Connecting Lemma)*
Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ *e* $a \notin Crit(X)$*. Para toda* C^1*-vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* X *existem* $\rho > 1$, $L > 0$ *e* $\varepsilon_0 > 0$ *tais que, para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *e quaisquer dois pontos* $p, q \in M$ *que satisfazem*

1. $p, q \notin X_{[-L,0]}(B_\varepsilon(a))$.
2. $\mathcal{O}^+_X(p) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(a) \neq \emptyset$.
3. $\mathcal{O}^-_X(q) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(a) \neq \emptyset$.

Então, existe $Z \in \mathcal{U}$ *tal que* $Z = X$ *fora de* $X_{[-L,0]}(B_\varepsilon(a))$ *e* $q \in \mathcal{O}^+_Z(p)$*.*

Demonstração. A demostração pode ser vista em [29, Theorem E, p. 5214]. Para uma idea gemétrica do Teorema pode ver a Figura 15. □

Figura 15 – Connecting Lemma.



Fonte: Elaboração própria.

4.1 PROPRIEDADES ÓRBITAS FECHADAS HIPERBÓLICAS

Lema 4.5. *Seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dado $T > 0$, existem vizinhanças $U \subset M$ de p e $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X e uma função contínua $\rho : \mathcal{U} \longrightarrow U$ tais que:*

1. *Se $Y \in \mathcal{U}$, $\rho(Y)$ é a única singularidade de Y em U, a qual é hiperbólica.*

2. *Toda órbita fechada de um campo $Y \in \mathcal{U}$, que passa por U, tem período $> T$.*

Demonstração. Ver [18, Lema 2.1 p.110]. □

Lema 4.6. *Sejam $T > 0$ e Γ uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Então existem vizinhanças $U \subset M$ de Γ e $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tais que:*

1. *Cada $Y \in \mathcal{U}$ possui uma órbita fechada hiperbólica $\Gamma \subset U$ e toda órbita fechada de Y distinta de $\Gamma \subset U$ que passa por U tem período maior do que T.*

2. *A órbita Γ_Y varia continuamente com Y.*

Demonstração. Ver [18, Lema 2.2 p.110]. □

Seja $\mathcal{G}_{12} \subset \mathcal{G}_1$ o conjunto dos campos vetoriais cujas órbitas fechadas são hiperbólicas.

Corolário 4.7. *Dado $T > 0$, existe apenas um número finito de órbitas fechadas de $X \in \mathcal{G}_{12}$ de período $\leq T$. Isto é,*

$$Per_T(X) = \{p_1(X), \ldots, p_k(X)\}.$$

Demonstração. Ver [18, Capítulo III, p. 111]. □

Lema 4.8. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $K \subset M$ um compacto tal que X não possua singularidades em K e que as órbitas fechadas de X por pontos de K tenham período $> T$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que todo $Y \in \mathcal{U}$ não possui singularidades em K e as órbitas fechadas de Y por pontos de K têm período $> T$.*

Demonstração. Ver [18, Lema 2.3 p.111]. □

Dados $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in Per(X)$ denotamos $\pi_X(p)$ o período de p. Vamos definir $\pi_X(p) = 0$ se p é uma singularidade de X. Se $T > 0$ denotamos

$$Crit_T(X) = \{p \in Crit(X) : \pi_X(p) < T\}.$$

Proposição 4.9. *Seja $X \in \mathcal{G}_{12}$. Dado $T > 0$, então*

$$Crit_T(X) = \{p_1(X), \ldots, p_k(X)\}$$

é um conjunto finito. Mais ainda,

$$Crit_T(Y) = \{p_1(Y), \ldots, p_k(Y)\}$$

para todo Y suficientemente próximo a X.

Demonstração. Sejam $T > 0$ e $X \in \mathcal{G}_{12}$, então pela Observação 2.37 temos que X tem um número finito de singularidades hiperbólicas. Como $T > 0$, então pelo Corolário 4.7 temos que X tem um número finito de órbitas fechadas de X de período $\leq T$. Portanto o conjunto $Crit_T(X)$ é finito.

Seja $p \in M$. Temos três casos a considerar:

1. p é uma singularidade de X.

2. $\mathcal{O}_X(p)$ é regular ou é uma órbita fechada com período $> T$.

3. $\mathcal{O}_X(p)$ é fechada com período $\leq T$.

No caso (1), pelo Lema 4.5, existem vizinhanças U_p de p em M e $\mathcal{N}_p$ de X em $\mathfrak{X}^r(M)$, tais que todo campo $Y \in \mathcal{N}_p$ possui apenas uma singularidade $p(Y) \in U_p$, a qual é hiperbólica, e toda órbita fechada de Y que interseta U_p tem período $> T$.

No caso (2), pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe uma vizinhança U_p de p em M tal que toda órbita fechada de X que interseta $\overline{U_p}$ tem período $> T$ e X não possui singularidade em $\overline{U_p}$. $\mathcal{N}_p$ de X em $\mathfrak{X}^r(M)$, tais que todo campo $Y \in \mathcal{N}_p$ possui apenas uma singularidade $p(Y) \in U_p$, a qual é hiperbólica, e toda órbita fechada de Y que interseta U_p tem período $> T$. Pelo Lema 4.8, existe vizinhança $\mathcal{N}_p$ de X em $\mathfrak{X}^r(M)$, tal que todo campo $Y \in \mathcal{N}_p$ não possui singularidades em $\overline{U_p}$ e as órbitas fechadas de Y, por pontos de $\overline{U_p}$, têm período $> T$.

No caso (3), pelo Lema 4.6 existem vizinhanças U_p de $\mathcal{O}_X(p)$ em M e $\mathcal{N}_p$ de X em $\mathfrak{X}^r(M)$, tais que todo campo $Y \in \mathcal{N}_p$ possui apenas uma órbita fechada γ_Y contida em U_p, a qual é hiperbólica, e todas as outras órbitas fechadas de Y que intersetam U_p tem período $> T$. Além disso, Y não possui singularidades em U_p.

O conjunto $\{U_p : p \in M\}$ é uma cobertura aberta de M. Como M é compacto então ela tem uma subcobertura finita. Seja $\{U_1, \ldots, U_k\} \subset \{U_p : p \in M\}$ a subcobertura finita de M por abertos de $\{U_p : p \in M\}$. Sejam $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k \subset \mathfrak{X}^r(M)$as vizinhanças respectivas de X, obtidas nos casos (1), (2) e (3) e seja $\mathcal{U} = \mathcal{N}_1 \cap, \ldots, \cap \mathcal{N}_k$. Assim, todo campo $Y \in \mathcal{U}$, possui o mesmo número de órbitas fechadas com período $\leq T$ que X (as quais são hiperbólicas) e que Y possui o mesmo número de singularidades que X (as quais são hiperbólicas). □

Definição 4.10. Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é de *Kupka-Smale* se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Os elementos críticos de X (singularidades e órbitas fechadas) são hiperbólicos, isto é, $X \in \mathcal{G}_{12}$.
2. Se σ_1 e σ_2 são elementos críticos de X, então $W^s_X(\sigma_1)$ é transversal a $W^u_X(\sigma_2)$.

Denotamos por $\mathcal{KS}^r(M)$ o conjunto dos campos de Kupka-Smale.

Teorema 4.11. *(Kupka-Smale)*
O conjunto $\mathcal{KS}^r(M)$ é um conjunto residual em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Demonstração. Ver [18, Teorema 3.1, p.118]. □

4.2 LEMAS PRINCIPAIS

Nesta seção apresentaremos os principais Lemas que nos vão permitir provar o Teorema 4.20 que nos diz que genericamente as classes homoclínicas são conjuntos neutrais.

Lema 4.12. *Se $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $T > 0$, então existem uma vizinhança $\mathcal{U}_{X,T}$ de X e um subconjunto residual $\mathcal{R}_{X,T}$ de $\mathcal{U}_{X,T} \ni X$ tais que, se $Y \in \mathcal{R}_{X,T}$ e $p \in Crit_T(Y)$, então $\overline{W^u_Y(p)}$ é um conjunto Lyapunov estável para Y e $\overline{W^s_Y(p)}$ é um conjunto Lyapunov estável para $-Y$.*

Demonstração. Como $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $T > 0$, então pela Proposição 4.9 temos que

$$Crit_T(X) = \{p_1(X), \dots, p_k(X)\}$$

é um conjunto finito. Mais ainda, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_{X,T}$ de X tal que

$$Crit_T(Y) = \{p_1(Y), \dots, p_k(Y)\}$$

para todo $Y \in \mathcal{U}_{X,T}$, onde $p_i(Y)$, $1 \leq i \leq k$, já seja uma órbita periódica o uma singularidade de Y.

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, definimos a aplicação

$$\Phi_i : \mathcal{U}_{X,T} \longrightarrow 2_c^M \text{ tal que } \Phi_i(Y) = \overline{W_Y^u(p_i(Y))}.$$

Afirmamos que Φ_i é semicontínua inferiormente em $Y_0 \in \mathcal{U}_{X,T}$. Com efeito, seja $U \subset M$ conjunto aberto tal que $\Phi_i(Y_0) \cap U \neq \emptyset$, então existe $x \in \Phi_i(Y_0) \cap U$. Como $x \in \Phi_i(Y_0) = \overline{W_{Y_0}^u(p_i(Y_0))}$ e U é uma vizinhança de x, tem-se que $U \cap W_{Y_0}^u(p_i(Y_0)) \neq \emptyset$, assim existe $z \in U \cap W_{Y_0}^u(p_i(Y_0))$. Como $z \in U$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset U$ e $z \in W_{Y_0}^u(p_i(Y_0))$. Por Teorema Variedade Estável (Teorema 2.53) temos que, para $0 < \varepsilon < r$, existe $\delta > 0$ tal que $W_Y^u(p_i(Y))$ e $W_{Y_0}^u(p_i(Y_0)$ estão ε-C^1 próximos, para todo $Y \in \mathcal{V}_\delta(Y_0)$, onde $\mathcal{V}_\delta(Y_0)$ é uma vizinhança em $\mathcal{U}_{X,T}$. Assim, para cada $Y \in \mathcal{V}_\delta(Y_0)$ existe um difeomorfismo $h_Y : W_{Y_0}^u(p_i(Y_0) \longrightarrow W_Y^u(p_i(Y))$ tal que

$$\max\{d(\hat{i} \circ h_Y, i), d(D(\hat{i} \circ h_Y), Di)\} < \varepsilon,$$

onde $\hat{i} : W_Y^u(p_i(Y)) \longrightarrow M$ e $i : W_{Y_0}^u(p_i(Y_0)) \longrightarrow M$ são inclusões. Como $z \in W_{Y_0}^u(p_i(Y_0))$ então

$$\begin{aligned} \|h_Y(z) - z\| &= \|\hat{i} \circ h_Y(z) - i(z)\| \\ &\leq \sup_{x \in W_{Y_0}^u(p_i(Y_0))} \{\|\hat{i} \circ h_Y(x) - i(x)\|\} \\ &= d(\hat{i} \circ h_Y, i) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, existe $w_Y = h_Y(z) \in W_Y^u(p_i(Y))$ tal que $w_Y \in B_\varepsilon(z) \subset B_r(z)$. Portanto para cada $Y \in \mathcal{V}_\delta(Y_0)$ existe

$$w_Y \in W_Y^u(p_i(Y)) \cap B_r(z) \subset W_Y^u(p_i(Y)) \cap U.$$

Assim, $W^u_Y(p_i(Y)) \cap U \neq \emptyset$ para cada $Y \in \mathcal{V}_\delta(Y_0)$. Portanto Φ_i é semicontínua inferiormente para Y_0. Consequentemente Φ_i é semicontínua inferiormente em $\mathcal{U}_{X,T}$.

Pelo Lema 4.2 existe um conjunto residual $\mathcal{R}_i$ de $\mathcal{U}_{X,T}$ tal que Φ_i é semicontínua superiormente para todo $Y \in \mathcal{R}_i$.

Definimos $\mathcal{R}_{X,T} = \mathcal{KS}^1(M) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{R}_i\right)$. Então $\mathcal{R}_{X,T}$ é um conjunto residual de $\mathcal{U}_{X,T}$. Provaremos que $\mathcal{R}_{X,T}$ satisfaz a conclusão do lema.

Seja $\sigma \in Crit_T(Y)$ para algum $Y \in \mathcal{R}_{X,T}$, ou seja $\sigma = p_i(Y)$ para algum i. Assim temos que $\Phi_i(Y) = \overline{W^u_Y(\sigma)}$.

Suponhamos por contradição que $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ não é Lyapunov estável para Y. Então existe um conjunto aberto U que contém $\overline{W^u_Y(\sigma)}$. Assim para toda vizinhança V de $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ existe $t > 0$ tal que $Y_t(V) \not\subset U$. Como $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ é compacto e U um conjunto aberto então pela Proposição A.4 existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\overline{W^u_Y(\sigma)}) \subset U$.

Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ e $V_n = B_{\frac{\varepsilon}{n}}(\overline{W^u_Y(\sigma)})$ existe $t_n > 0$ tal que $Y_{t_n}(V_n) \not\subset U$. Assim existem sequências $x_n \in V_n$ e $t_n > 0$ tais que $Y_{t_n}(x_n) \notin U$. Logo $dist(x_n, \overline{W^u_Y(\sigma)}) < \frac{\varepsilon}{n}$, agora quando $n \longrightarrow +\infty$ temos que $dist(x_n, \overline{W^u_Y(\sigma)}) \longrightarrow 0$. Como $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ é compacto, existe $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ tal que $x_n \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$ (a menos de subsequências). Portanto existem uma sequência $x_n \longrightarrow x$, com $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ e $t_n > 0$ tais que $Y_{t_n}(x_n) \notin U$.

Temos dois casos:

1. $x \notin Crit_T(Y)$.

   Como $\overline{W^u_Y(\sigma)} \subset U$ e Φ_i é semicontínua superiormente para todo $Y \in \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança em $\mathcal{U}_{X,T}$, para o conjunto compacto $K = M \setminus U$ tem-se que $\overline{W^u_Z(\sigma)} \cap K = \emptyset$, para todo $Z \in \mathcal{U}$. Assim

$$\overline{W^u_Z(\sigma)} \subset U, \quad \text{para todo} \quad Z \in \mathcal{U}. \tag{4.1}$$

   Dado que $x \notin Crit_T(Y)$ então $\mathcal{O}_Y(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$. Seja $L > 0$ então

$$Y_{[-L,0]}(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset.$$

   Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, e como $W^u_Y(\sigma)$ é invariante, então pela Proposição 2.21 temos que, $Y_t(x) \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, para todo $t \in I\!R$. Portanto

$$Y_{[-L,0]}(x) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)} \subset U.$$

Como $Y_{[-L,0]}(x) \subset M$ e pelas Observações 2.10 e 2.14 temos que $Y_{[-L,0]}(x)$ e $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ são conjuntos compactos, então existem V_1, V_2 vizinhanças abertas de $Y_{[-L,0]}(x)$ e $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ respectivamente, tais que $V_1, V_2 \subset U$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Como $x \in V_1$ então existe ε_0 tal que $B_{\varepsilon_0}(x) \subset V_1 \subset U$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $Y_{[-L,0]}B_\varepsilon(x) = \bigcup\limits_{t\in[-L,0]} Y_t(B_\varepsilon(x))$. Afirmamos que existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tal que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \subset V_1.$$

Com efeito, suponhamos por contradição, isto é, $Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \subsetneq V_1$, para todo $\varepsilon > 0$. Assim, para cada $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{n} > 0$, existe $r_n \in Y_{[-L,0]}(B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x))$ tal que $r_n \notin V_1$. Por outro lado, como Y_t é um difeomorfismo para cada $t \in [-L, 0]$, então pelo [14, Lema 2, p. 385] temos

$$\begin{aligned} vol(Y_t(B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x))) &= vol(\overline{Y_t(B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x))}) \\ &\leq vol(Y_t(\overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x)})) \\ &\leq N vol(\overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x)}) \\ &= N vol(B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $N = \sup\{\|DY_t(y)\| : y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x)}\}$. Como $vol(B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x)) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$, então de (4.2) temos que $vol(Y_t(B_{\frac{\varepsilon_0}{n}}(x))) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$, para cada $t \in [-L, 0]$. Assim, $dist(r_n, Y_{[-L,0]}(x)) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $Y_{[-L,0]}(x)$ é compacto, então existe $r \in Y_{[-L,0]}(x)$ tal que (a menos de subsequência) $r_n \longrightarrow r$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $r_n \notin V_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $r \notin V_1$. O qual é uma contradição, pois, $Y_{[-L,0]}(x) \subset V_1$. Portanto, existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tal que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \subset V_1 \subset U. \tag{4.3}$$

Como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ então existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tal que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset \quad \text{e} \quad Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \subset U. \tag{4.4}$$

Por outro lado, como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V_2$ então pela Proposição A.4 existe V vizinhança aberta de $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ tal que $V \subset \overleftarrow{V} \subset V_2$. De (4.3) e como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ temos que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \cap V = \emptyset. \tag{4.5}$$

Seja $\rho > 1$ então $B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x)$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, então $B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \cap W^u_Y(\sigma) \neq \emptyset$. Assim, existe $\hat{p} \in B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x)$ e $\hat{p} \in W^u_Y(\sigma)$. Logo $dist(Y_{-t}(\hat{p}), \mathcal{O}_Y(\sigma)) \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow +\infty$. Como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V$, então existe $T > 0$ tal que

$$Y_{-t}(\hat{p}) \in V \quad \text{para todo} \quad t \geq T. \tag{4.6}$$

Seja $p = Y_{-T}(\hat{p}) \in W^u_Y(\sigma)$. Afirmamos que $p \neq \sigma$. De fato, suponhamos que $p = \sigma$. Então $Y_T(\sigma) = Y_T(Y_{-T}(\hat{p}) = \hat{p}$. Portanto $\hat{p} \in \mathcal{O}_Y(\sigma)$. Como $\hat{p} \in B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x)$ então temos que

$$\emptyset \neq \mathcal{O}_Y(\sigma) \cap B_{\varepsilon}(x) \subset \mathcal{O}_Y(\sigma) \cap Y_{[-L,0]}(B_{\varepsilon}(x)).$$

Isto é uma contradição por (4.4). Assim $p \in W^u_Y(\sigma) - \{\sigma\} \cap V$.

Como $\hat{p} = Y_T(p)$ e como $\hat{p} \in B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x)$, então $\mathcal{O}^+_Y(p) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \neq \emptyset$. Por outro lado, seja $a \in \mathcal{O}^-_Y(p)$. Então $a = Y_{-t}(p) = Y_{-t}(Y_{-T}(\hat{p})) = Y_{-(t+T)}(\hat{p})$. Como $t + T > T$, então de (4.6) temos que $a = Y_{-(t+T)}(\hat{p}) \in V$. Portanto temos

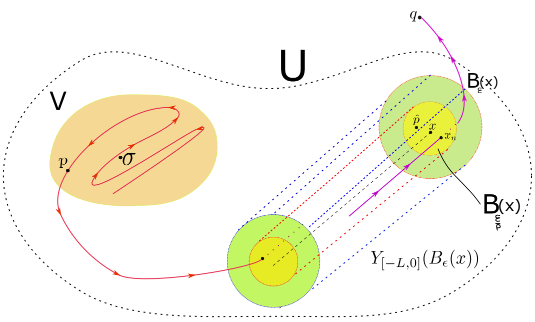
$$\mathcal{O}^+_Y(p) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \neq \emptyset \ \text{ e } \ \mathcal{O}^-_Y(p) \subset V. \tag{4.7}$$

Por outro lado, como $x_n \longrightarrow x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x)$, para todo $n \geq n_0$. Definimos $q = Y_{t_{n_0}}(x_{n_0}) \notin U$. Assim $Y_{-t_{n_0}}(q) = x_{n_0} \in B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x)$. Portanto

$$\mathcal{O}^-_Y(q) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \neq \emptyset. \tag{4.8}$$

Como $q \notin U$ e $p \in V$ então por (4.4) e (4.5), tem-se que $p, q \notin Y_{[-L,0]}(B_{\varepsilon}(x))$. Ver Figura 16.

Figura 16 – A construção de $p, q \notin Y_{[-L,0]}(B_{\epsilon}(x))$.



Fonte: Elaboração própria.

Assim, existem $L > 0$, $\rho > 1$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $p, q \in M$ que satisfazem (4.7) e (4.8). Além disso $p, q \notin Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$.

Portanto pelo Lema 4.4, existe $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z = Y$ fora de $Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$ e $q \in \mathcal{O}_Z^+(p)$. De (4.5) e (4.7) temos que

$$\mathcal{O}_Y^-(p) \cap Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) = \emptyset. \tag{4.9}$$

Como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V$, e por (4.5) temos que $Z(p) = Y(p)$, para todo $p \in \mathcal{O}_Y(\sigma)$. Assim $Z_t(p) = Y_t(p)$, para todo $p \in \mathcal{O}_Y(\sigma)$ e $t \in I\!R$. Em particular, $Z_t(\sigma) = Y_t(\sigma)$, $t \in I\!R$.

Se $\sigma \in Sing(Y)$, então $Z_t(\sigma) = \sigma$, para todo $t \in I\!R$. Como $Z \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{X,T}$ então $\sigma(Z) = \sigma$.

Se $\sigma \in Per(Y)$, então $Z_{\hat{T}}(\sigma) = Y_{\hat{T}}(\sigma) = \sigma$ e $Z_{\hat{T}}(\sigma) = Y_{\hat{T}}(\sigma) \neq \sigma$ para $0 < t < \hat{T}$, onde $\hat{T} = \pi_Y(p) < T$. Assim, $Z_{\hat{T}}(\sigma) = \sigma$ e $Z_{\hat{T}}(\sigma) \neq \sigma$ para $0 < t < \hat{T}$. Logo $\sigma \in Per(Z)$ com $\pi_Z(\sigma) < T$. Como $Z \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{X,T}$ então $\sigma(Z) = \sigma$.

Como $p \in W_Y^u(\sigma)$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ tal que

$$dist(Y_{-t}(p), Y_{-t}(\sigma)) < \varepsilon, \text{ para } t > T_0.$$

Como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V$, tem-se que $Z_t(\sigma) = Y_t(\sigma)$, para todo $t \in I\!R$. De (4.9) temos que $Z_t(p) = Y_t(p)$, para todo $t \leq 0$. Portanto

$$dist(Z_{-t}(p), Z_{-t}(\sigma)) < \varepsilon, \text{ para } t > T_0.$$

Logo $p \in W_Z^u(\sigma)$. Como $q \in \mathcal{O}_Z^+(p)$ tem-se que $q = Z_{\hat{t}}(p)$. Então $q = Z_{\hat{t}}(p) \in W_Z^u(\sigma)$. Assim, por (4.1) temos que $q \in U$. Isto é uma contradição pois $q \notin U$. Isso encerra a prova quando $x \in Crit(Y)$.

Vejamos que o seguinte caso nos leva ao caso anterior.

2. $x \in Crit(Y)$.

   Como $Y \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $x \in Crit(Y)$, então $\mathcal{O}_Y(x)$ é hiperbólica. Afirmamos que $\mathcal{O}_Y(x)$ não é poço nem fonte. Com efeito, suponhamos que:

   - $\mathcal{O}_Y(x)$ é poço. Como $\mathcal{O}_Y(x) \subset U$. Como $\mathcal{O}_Y(x)$ é poço então é Lyapunov estável. Assim, existe V tal que $Y_t(V) \subset U$, para todo $t \geq 0$. Como $x \in V$ e $x_n \longrightarrow x$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo

$n \geq n_0$. Para $x_{n_0} \in V$ temos que $Y_{t_{n_0}}(x_{n_0}) \in U$. O qual é uma contradição, pois, $Y_{t_{n_0}}(x_{n_0}) \notin U$.

- $\mathcal{O}_Y(x)$ é fonte. Como $x \in Crit(Y)$ então $x = \sigma$ ou $x \neq \sigma$.

  Se $x = \sigma$ então $\mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_Y(\sigma)$. Como $\mathcal{O}_Y(x)$ é fonte então existe uma vizinhança V de $\mathcal{O}_Y(x)$ com $V \subset U$ tal que $p \in W^u_Y(x)$ para todo $p \in V$. Por outro lado, como $x_n \longrightarrow x$, então $dist(x_n, \mathcal{O}_Y(x)) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$, para todo $n \geq n_0$. Para n_0 temos que $x_{n_0} \in V$, logo $x_{n_0} \in W^u_Y(x)$ e portanto $Y_{t_{n_0}}(x_{n_0}) \in W^u_Y(x) = W^u_Y(\sigma) \subset U$. Isto é uma contradição, pois $Y_{t_{n_0}}(x_{n_0}) \notin U$.

  Se $x \neq \sigma$ então $\mathcal{O}_Y(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$. Como $\mathcal{O}_Y(x)$ é fonte e $\mathcal{O}_Y(x), \mathcal{O}_Y(\sigma)$ são compactos, então existem vizinhanças abertas V de $\mathcal{O}_Y(x)$ e W de $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ tais que $V \cap W = \emptyset$, e onde V é uma vizinhança de $\mathcal{O}_Y(x)$ tal que, se

  $$p \in V \quad \text{então} \quad p \in W^u_Y(x). \tag{4.10}$$

  Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ e $x \in V$ então existe $z \in V \cap W^u_Y(\sigma)$. Como $z \in W^u_Y(x)$ então $dist(Y_{-t}(z), \mathcal{O}(\sigma)) \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow +\infty$. Visto que W é uma vizinhança de $\mathcal{O}_Y(\sigma)$, então existe $T_1 > 0$ tal que $Y_{-t}(z) \in W$, para todo $t \geq T_1$. Por outro lado, como $z \in V$, então por (4.10) temos que $z \in W^u_Y(x)$, então existe $T_2 > 0$ tal que $Y_{-t}(z) \in V$, para todo $t \geq T_2$. Tomemos $T = \max\{T_1, T_2\}$. Logo, seja $\hat{T} > T$ assim obtemos que $Y_{-\hat{T}}(z) \in V \cap W$. O qual é uma contradição, pois $V \cap W = \emptyset$.

Portanto, $\mathcal{O}_Y(x)$ não é poço nem fonte. Assim, tem-se que $W^s_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$ e $W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$. Pois, se supomos que $W^s_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x) = \emptyset$, então $\mathcal{O}_Y(x) \subset W^s_Y(x)$, e assim $W^s_Y(x) = \mathcal{O}_Y(x)$. Portanto, $\mathcal{O}_Y(x)$ é fonte, o qual é uma contradição. Outro caso é análogo.

Afirmação 4.13. Se $x_n \longrightarrow x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ e $t_n > 0$ é tal que $Y_{t_n}(x_n) \notin U$, então existem $x'_n \in Y_{[0,t_n]}(x_n)$ e $x' \in W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x)$ tais que $x'_n \longrightarrow x'$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Com efeito, pelo Teorema de Hartman-Grobman (2.41) ou (2.47), existe $V \subset U$ vizinhança aberta de $\mathcal{O}_Y(x)$, tal que $\partial(W^u_Y(x, V)) = D^u_Y(x)$ é um domínio fundamental de $W^u_Y(x)$ (aqui $W^u_Y(x, V)$ denota a componente conexa de $V \cap W^u_Y(x)$ que contém $\mathcal{O}_Y(x)$). Visto que V é uma vizinhança de $\mathcal{O}_Y(x)$ temos que $\mathcal{O}_Y(x) \subset int(V)$ e como $\mathcal{O}_Y(x) \subset W^u_Y(x, V)$, então $\mathcal{O}_Y(x) \subset int(W^u_Y(x, V))$.

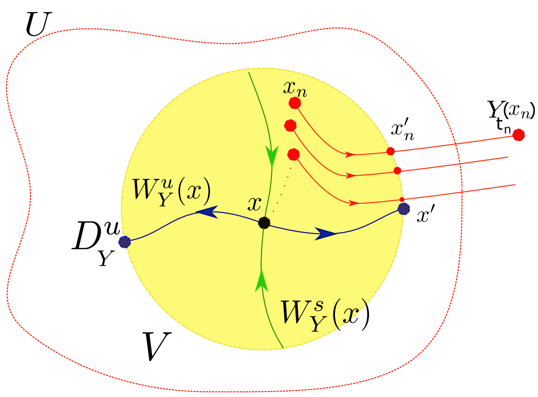
Como $W^u_Y(x,V)$ é uma componente conexa então é fechada. Assim, $D^u_Y(x) \subset W^u_Y(x,V)$ e como $W^u_Y(x,V) = D^u_Y(x) \cup int(W^u_Y(x,V))$ tem-se que

$$D^u_Y(x) \subset W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x).$$

Como $x_n \longrightarrow x$, podemos assumir que $x_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, sabemos que $Y_{t_n}(x_n) \notin U$. Portanto $x_n \notin W^s_Y(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois, se $x_n \in W^s_Y(x)$ e como $x_n \in V$, que é uma vizinhança de Hartman-Grobman, temos que $Y_t(X_n) \in V$, para todo $t \geq 0$. Em particular, $Y_{t_n}(x_n) \in V \subset U$ o qual é uma contradição. Como $\mathcal{O}_Y(x)$ é conexo, e $x_n \in V$ e $Y_{t_n}(x_n) \notin V$, então pelo Teorema de Alfândega [13, Proposição 9, p. 99], existe $r \in \mathcal{O}_Y(x)$ tal que $r \in \partial V$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos $x'_n \in \partial V$ como o primeiro ponto em $\mathcal{O}^+_Y(x_n)$ fora de V, ou seja, existe $s_n > 0$ tal que $x'_n = Y_{s_n}(x_n) \in \partial V$ e $Y_s(x_n) \in int(V)$ para $0 \leq s < s_n$. Mais ainda, como $Y_{t_n}(x_n) \notin U$ temos que $Y_{t_n}(x_n) \notin \overline{V}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daqui, concluímos que $s_n < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x'_n \in Y_{[0,t_n]}(x_n)$.

Como $x_n \notin W^s_Y(x)$ e $x_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então as órbitas de x_n tendem a acumular sobre $W^u_Y(x)$. Assim, visto que $x_n \longrightarrow x$, pela escolha de V e x'_n temos que $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ se acumula em $x' \in D^u_Y(x) \subset W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x)$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $x'_n \longrightarrow x'$, quando $n \longrightarrow +\infty$. A idea gemétrica pode ser vista na Figura 17.

Figura 17 – A construção da sequência x'_n tal que $x'_n \longrightarrow x'$.



Fonte: Elaboração própria.

Portanto, existem $x'_n \in Y_{[0,t_n]}(x_n)$ e $x' \in W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x)$ tais que $x'_n \longrightarrow x'$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Afirmação 4.14. $x' \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$.

Com efeito, se $x = \sigma$, temos que $x' \in W^u_Y(x) = W^u_Y(\sigma)$ e portanto $x' \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Vejamos quando $x \neq \sigma$, então existe vizinhanças abertas W e V de $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ e $\mathcal{O}_Y(x)$ respectivamente, tal que

$$V \cap W = \emptyset, \tag{4.11}$$

onde V é uma vizinhança dada pelo Teorema de Hartman-Grobman. Suponhamos que $x' \notin \overline{W^u_Y(\sigma)}$, então existe uma vizinhança compacta K de x' tal que

$$K \cap \overline{W^u_Y(\sigma)} = \emptyset. \tag{4.12}$$

Como Φ_i é semicontínua superiormente para todo $Y \in \mathcal{U}$ temos que

$$K \cap \overline{W^u_Z(\sigma(Z))} = \emptyset \quad \text{para todo} \quad Z \in \mathcal{U}. \tag{4.13}$$

Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, então existe $z_n \longrightarrow x$, onde $z_n \in W^u_Y(\sigma)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $z_n \in V$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $z_n \notin W^u_Y(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, suponhamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_0} \in W^u_Y(x)$. Como $z_{n_0} \in W^u_Y(\sigma) \cap W^u_Y(x)$ então

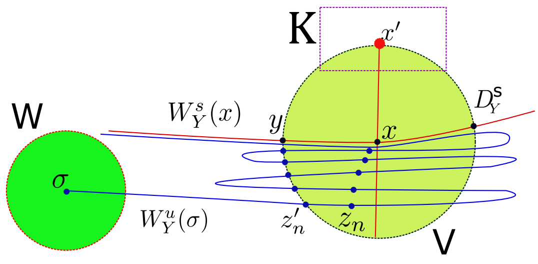
$$dist(Y_{-t}(z_{n_0}), \mathcal{O}_Y(\sigma)) \longrightarrow 0 \text{ e } dist(Y_{-t}(z_{n_0}), \mathcal{O}_Y(x)) \longrightarrow 0.$$

Como W e V são vizinhanças de $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ e $\mathcal{O}_Y(x)$ respectivamente. Então existe $T > 0$ tal que $Y_{-t}(z_{n_0}) \in V \cap W$, para todo $t \geq T$. Assim, $V \cap W \neq \emptyset$, o qual é uma contradição por (4.11). Portanto, $z_n \notin W^u_Y(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $D^s_Y(x) = \partial(W^s_Y(x, V))$ é um domínio fundamental de $W^s_Y(x)$ (aqui $W^s_Y(x, V)$ denota a componente conexa de $V \cap W^s_Y(x)$ que contém $\mathcal{O}_Y(x)$). Como $z_n \in W^u_Y(\sigma)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, desde que, W é uma vizinhança de $\mathcal{O}_Y(\sigma)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $T_n > 0$ tal que $Y_t(z_n) \in W$ para todo $t \geq T_n$. Assim, existe $r_n \geq T_n$ tal que $Y_{r_n}(z_n) \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, de maneira análoga à construção de x', podemos obter uma sequência de pontos $y_n = Y_{-r_n}(z_n) \in \partial V$ tal que $y_n \longrightarrow y$, onde $y \in D^s_Y(x) \subset W^s_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x)$. Além disso, como $y_n \in W^u_Y(\sigma)$ então $y \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Portanto,

$$y \in \overline{W^u_Y(\sigma)} \cap W^s_Y(x) \setminus (\mathcal{O}_Y(\sigma) \cup \mathcal{O}_Y(x)).$$

Figura 18 – A construção do ponto $y \in \overline{W^u_Y(\sigma)} \cap W^s_Y(x) \setminus (\mathcal{O}_Y(\sigma) \cup \mathcal{O}_Y(x))$.

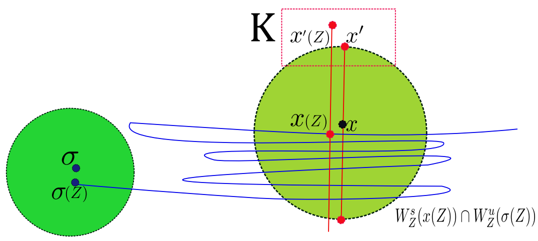


Fonte: Elaboração própria.

Para uma idea geométrica da constrção pode-se ver a Figura 18.

Assim, pelo Teorema 4.3 (Connecting Lemma), existe uma perturbação Z de Y tal que $W^s_Z(x(Z)) \cap W^u_Z(\sigma(Z)) \neq \emptyset$. Em outras palavras existe uma conexão de selas entre $x(Z)$ e $\sigma(Z)$. Ver Figura 19.

Figura 19 – Aplicando o Teorema 4.3 (Connecting Lemma (Hayashi)).



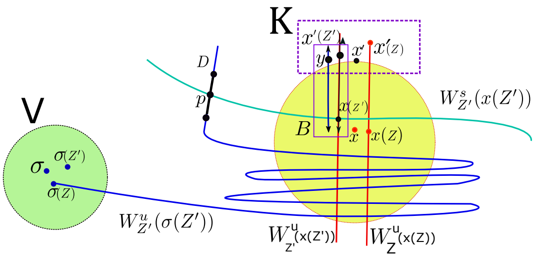
Fonte: Elaboração própria.

Quebrando esta conexão de selas como na prova do [18, Lema 3.5, p.121] existe um campo Z' C^1-próximo a Z tal que $W^s_{Z'}(x(Z')) \pitchfork W^u_{Z'}(\sigma(Z')) \neq \emptyset$. Além disso, pela continuidade temos que $W^u_{Z'}(x(Z'))$ é C^1- próximo a $W^u_Z(x(Z))$. Como $x'(Z) \in K \cap W^u_Z(x(Z))$ então existe $x'(Z') \in K \cap W^u_{Z'}(x(Z'))$.

Suponhamos que $x \in Sing(Y)$, então pelo Lema 4.5 temos que $x(Z') \in Sing(Z')$ e é hiperbólica. Sejam $p \in W^s_{Z'}(x(Z')) \pitchfork W^u_{Z'}(\sigma(Z'))$ e um disco mergulhado B em $W^u_{Z'}(x(Z'))$ que é uma vizinhança de $x(Z')$ em $W^u_{Z'}(x(Z'))$ que contém a $x'(Z')$, e uma vizinhança V deste disco em M. Seja $D \subset W^u_{Z'}(\sigma(Z')$ um disco transversal a $W^s_{Z'}(X(Z'))$ em p com a mesma dimensão de B. Como $x'(Z') \in K$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(x'(Z')) \subset K \cap V$. Então pelo Lema de Inclinação 2.54, para $\varepsilon < \varepsilon_0$ existe $T > 0$ tal que, para todo $t > T$ o disco D^t está ε-próximo de B, onde D^t é a componente conexa de $Z'_t(D) \cap V$ que contém $Z'_t(p)$. Como foi feita ao inicio da prova, desde que D^t está ε-próximo de B, então existe $y \in D^t \cap B_{\varepsilon_0}(x'(Z'))$ para $t > T$.

Assim, $y \in Z'_t(D) \subset Z'_t(W^u_{Z'}(\sigma(Z')) \subset W^u_{Z'}(\sigma(Z'))$. Logo, $y \in K \cap W^u_{Z'}(\sigma(Z'))$. Portanto $K \cap W^u_{Z'}(\sigma(Z')) \neq \emptyset$. A idea geométrica pode ser visto na Figura 20.

Figura 20 – Perturbando por um campo Z' e usando o Lema de inclinação.



Fonte: Elaboração própria.

Suponhamos que $x \in Per_T(Y)$, então pelo Lema 4.6 temos que que $x(Z') \in Per_T(Z')$ e é hiperbólica. Podemos tomar uma seção transversal de $x(Z')$ denotado por $\Sigma_{x(Z')}$ tal que contém $x'(Z')$ e $\Sigma_{x(Z')} \cap W^u_{Z'}(\sigma) \neq \emptyset$.

Como $W^s_{Z'}(x(Z')) \pitchfork W^u_{Z'}(\sigma(Z')) \neq \emptyset$, então existe $p \in (W^s_{Z'}(x(Z')) \pitchfork W^u_{Z'}(\sigma(Z'))) \cap \Sigma_{x(Z')}$. Tomemos a aplicação de Poincaré associada à órbita de $x(Z')$ e $\Sigma_{x(Z')}$. Como $x(Z') \in Per_T(Z')$, então $x(Z')$ é um ponto fixo hiperbólico da aplicação de Poincaré. Seja $D \subset W^u_{Z'}(\sigma(Z')) \cap \Sigma_{x(Z')}$ o disco transversal a $W^s_{Z'}(x(Z')) \cap \Sigma_{x(Z')}$ em p e B um disco mergulhado em $W^u_{Z'}(x(Z')) \cap \Sigma_{x(Z')}$ que é uma vizinhança de $x(Z')$ em $W^u_{Z'}(x(Z')) \cap \Sigma_{x(Z')}$ e que contém a $x'(Z')$. Agora, de maneira análoga ao caso da acima, pelo Lema de inclinação para o caso de difeomorfismo aplicado à aplicação de Poincaré. Obtemos que $K \cap W^u_{Z'}(\sigma(Z')) \neq \emptyset$. O qual é uma contradição por (4.13), desde que, $K \cap W^u_{Z'}(\sigma(Z')) = \emptyset$. Assim, $x' \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$.

Da Afirmação 4.13 temos $x' \notin Crit_T(Y)$ e sequências $x'_n \longrightarrow x'$ e pela construção feita na Afirmação 4.13, definimos $t'_n = t_n - s_n$, assim $t_n > 0$ e $Y_{t'_n}(x'_n) = Y_{t_n - s_n}(x'_n) = Y_{t_n}(x_n) \notin U$ e da Afirmação 4.14 temos que $x' \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Isso mostra que basta considerar o caso $x \notin Crit_T(Y)$, substuindo x por x', x_n por x'_n e t_n por t'_n. Isso completa a prova do Lema.

$\square$

Lema 4.15. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}_1$ de $\mathfrak{X}^1(M)$ tal que, para todo $X \in \mathcal{R}_1$ e $\sigma \in Crit(Y)$, $\overline{W^u_X(\sigma)}$ é um conjunto Lyapunov estável para X e $\overline{W^s_X(\sigma)}$ é um conjunto Lyapunov estável para $-X$.*

Demonstração. Temos que $\mathfrak{X}^1(M)$ é um espaço métrico separável [18, Proposição 2.3, p. 23-25]. Como $\mathcal{KS}^1(M) \subset \mathfrak{X}^1(M)$, então pelo item (1) da Proposição A.14 temos que $\mathcal{KS}^1(M)$ é separável, assim existe $\mathcal{K}$ um subconjunto enumerável denso em $\mathcal{KS}^1(M)$, isto é,

$$\mathcal{KS}^1(M) = \overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{KS}^1(M).$$

Como $\mathfrak{X}^1(M)$ é um espaço métrico de Baire, visto que $K\mathcal{S}^1(M)$ é um conjunto residual em $\mathfrak{X}^1(M)$, então $K\mathcal{S}^1(M)$ é um conjunto denso em $\mathfrak{X}^1(M)$.

Assim temos:

$$\mathfrak{X}^1(M) = \overline{K\mathcal{S}^1(M)} = \overline{\overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{KS}^1(M)} \subseteq \overline{\mathcal{K}} \cap \overline{\mathcal{KS}^1(M)} = \overline{\mathcal{K}} \cap \mathfrak{X}^1(M) = \overline{\mathcal{K}}.$$

Portanto, existe um subconjunto enumerável $\mathcal{K}$ de $\mathcal{KS}^1(M)$ que é denso em $\mathfrak{X}^1(M)$. Assim, escolhemos uma sequência $X_n \in \mathcal{KS}^1(M)$ tal que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathfrak{X}^1(M)$.

Dado $T > 0$. para cada $X_n \in \mathcal{KS}^1(M)$, pelo Lema 4.12 existe uma vizinhança $\mathcal{U}_{X_n,T}$ de X_n (sem perda de generalidade, podemos assumir uma vizinhança aberta) e um subconjunto residual $\mathcal{R}_{X_n,T}$ de $\mathcal{U}_{X_n,T}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para simplificar a notação, denotemos por $\mathcal{U}_{n,T} = \mathcal{U}_{X_n,T}$ e $\mathcal{R}_{n,T} = \mathcal{R}_{X_n,T}$.

Definimos

$$\mathcal{O}^T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{n,T} \text{ e } \mathcal{R}^T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_{n,T}.$$

Como $\mathcal{U}_{X_n,T}$ é conjunto aberto para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{n,T}$ é um conjunto aberto. Agora, como $X_n \in \mathcal{U}_{n,T}$, assim $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{n,T} = \mathcal{O}^T$, consequentemente:

$$\mathfrak{X}^1(M) = \overline{\{X_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\mathcal{O}^T} \subset \mathfrak{X}^1(M),$$

daqui concluímos que $\mathcal{O}^T$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^1(M)$.

Por outro lado, afirmamos que $\mathcal{R}^T$ é um subconjunto residual de $\mathcal{O}^T$. Com efeito, para cada n temos que $\mathcal{R}_{n,T}$ é um conjunto residual de $\mathcal{U}_{n,T}$, então existe uma sequência $(D_{k,n,T})_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos e densos em $\mathcal{U}_{n,T}$ tal que

$$\mathcal{R}_{n,T} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}.$$

Como

$$\mathcal{R}^T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_{n,T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}). \tag{4.14}$$

Assim, como $D_{k,n,T}$ é um conjunto aberto em $\mathcal{U}_{n,T}$, então existe U_n conjunto aberto em $\mathfrak{X}^1(M)$ tal que:

$$D_{k,n,T} = U_n \cap \mathcal{U}_{n,T} = U_n \cap (\mathcal{U}_{n,T} \cap \mathcal{O}^T) = (U_n \cap \mathcal{U}_{n,T}) \cap \mathcal{O}^T.$$

Como $U_n \cap \mathcal{U}_{n,T}$ é um conjunto aberto em $\mathfrak{X}^1(M)$, então $D_{k,n,T}$ é um aberto em $\mathcal{O}^T$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}$ é aberto em $\mathcal{O}^T$. Por outro lado, temos que $D_{k,n,T}$ é um conjunto denso em $\mathcal{U}_{n,T}$, tem-se $\mathcal{U}_{n,T} = \overline{D_{k,n,T}} \cap \mathcal{U}_{n,T}$.

Assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{n,T} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\overline{D_{k,n,T}} \cap \mathcal{U}_{n,T}) \\
&\subseteq (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D_{k,n,T}}) \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{n,T}) \\
&\subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}} \cap \mathcal{O}^T \subseteq \mathcal{O}^T,
\end{aligned}$$

por conseguinte, $\mathcal{O}^T = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}} \cap \mathcal{O}^T$, isto é, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}$ é um conjunto denso em $\mathcal{O}^T$. Logo $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}$ é um conjunto aberto e denso em $\mathcal{O}^T$. Assim, em (4.14), temos que $\mathcal{R}^T$ é um conjunto residual em $\mathcal{O}^T$ e isto prova a afirmação.

Em particular, $\mathcal{R}^T$ é um conjunto residual de $\mathfrak{X}^1(M)$, para todo $T > 0$. Com efeito, denotamos $D_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{k,n,T}$. Assim $\mathcal{R}^T = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} D_k$. Como D_k é aberto em $\mathcal{O}^T$ o qual é um conjunto aberto em $\mathfrak{X}^1(M)$, então D_k é um conjunto aberto em $\mathfrak{X}^1(M)$.

Além disso, como D_k é denso em $\mathcal{O}^T$ o qual é um conjunto denso em $\mathfrak{X}^1(M)$, temos

$$\mathfrak{X}^1(M) = \overline{\mathcal{O}^T} = \overline{\overline{D_k} \cap \mathcal{O}^T} \subseteq \overline{D_k}.$$

Consequentemente, $\overline{D_k} = \mathfrak{X}^1(M)$, isto é, D_k é denso em $\mathfrak{X}^1(M)$. Logo $\mathcal{R}^T$ é interseção de conjunto abertos e densos em $\mathfrak{X}^1(M)$ e portanto $\mathcal{R}^T$ é um subconjunto residual de $\mathfrak{X}^1(M)$, para todo $T > 0$.

Definimos o conjunto $\mathcal{R}_1 = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^N$. Assim $\mathcal{R}_1$ é um conjunto residual em $\mathfrak{X}^1(M)$. Resta mostrar que $\mathcal{R}_1$ é o conjunto residual procurado.

Escolhemos $X \in \mathcal{R}_1$, $p \in Crit(X)$, então $X \in \mathcal{R}^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$, escolhemos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 \geq \pi_X(p) + 1$. Por definição $X \in \mathcal{R}^{N_0}$, e portanto $X \in \mathcal{R}_{X_n,N_0}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $N_0 > \pi_X(p)$ temos que $p \in Crit_{N_0}(X)$. Então pelo Lema 4.12 aplicado a X_n, e $T = N_0$ temos que $\overline{W^u_X(\sigma)}$ é um conjunto Lyapunov estável para X e $\overline{W^s_X(\sigma)}$ é um conjunto Lyapunov estável para $-X$. Isso completa a prova do lema. $\square$

Lema 4.16. *Se $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $T > 0$, então existem uma vizinhança $\mathcal{V}_{X,T} \ni X$ e um subconjunto residual $\mathcal{P}_{X,T}$ de $\mathcal{V}_{X,T} \ni X$ tais que se $Y \in \mathcal{P}_{X,T}$ e $p \in Per_T(Y)$, então*

$$H_Y(p) = \overline{W^u_Y(p)} \cap \overline{W^s_Y(p)}.$$

Demonstração. Como $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $T > 0$, então pelo Corolário 4.7 temos que

$$Per_T(X) = \{p_1(X), \ldots, p_k(X)\}$$

é um conjunto finito. Mais ainda, da Proposição 4.9, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{X,T}$ de X tal que

$$Per_T(Y) = \{p_1(Y), \ldots, p_k(Y)\}$$

para todo $Y \in \mathcal{V}_{X,T}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, definimos a aplicação

$$\Phi_i : \mathcal{V}_{X,T} \longrightarrow 2^M_c \text{ por } \Phi_i(Y) = H_Y(p_i(Y)).$$

Afirmamos que Φ_i é semicontínua inferiormente em $Y_0 \in \mathcal{V}_{X,T}$. Com efeito, seja $U \subset M$ conjunto aberto tal que $\Phi_i(Y_0) \cap U \neq \emptyset$, então existe $x \in \Phi_i(Y_0) \cap U$. Como $x \in U$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$. Desde que $x \in H_{Y_0}(p_i(Y_0)) = \overline{W^s_{Y_0}(p_i(Y_0)) \pitchfork W^u_{Y_0}(p_i(Y_0))}$, tem-se $B_r(x) \cap (W^s_{Y_0}(p_i(Y_0)) \pitchfork W^u_{Y_0}(p_i(Y_0))) \neq \emptyset$, assim, existe

$$z \in B_r(x) \cap (W^s_{Y_0}(p_i(Y_0)) \pitchfork W^u_{Y_0}(p_i(Y_0))).$$

Pelo Teorema da Variedade Estável (Teorema 2.53) temos que, para cada $0 < \varepsilon < r$, existe $\delta > 0$ tais que $W^s_Y(p_i(Y))$ e $W^s_{Y_0}(p_i(Y_0)$ estão ε-C^1 próximos e $W^u_Y(p_i(Y))$ e $W^u_{Y_0}(p_i(Y_0)$ estão ε-C^1 próximos, para todo $Y \in \mathcal{V}_\delta(Y_0)$, onde $\mathcal{V}_\delta(Y_0)$ é uma vizinhança em $\mathcal{V}_{X,T}$. Como $z \in W^s_{Y_0}(p_i(Y_0)) \pitchfork W^u_{Y_0}(p_i(Y_0))$, então pela Proposição B.2 existe

$$z' \in B_r(x) \cap [W^s_Y(p_i(Y)) \pitchfork W^u_Y(p_i(Y))].$$

Como $B_r(x) \subset U$, obtemos que $W_Y^u(p_i(Y)) \cap U \neq \emptyset$ para cada $Y \in \mathcal{V}_\delta(Y_0)$. Portanto Φ_i é semicontínua inferiormente para Y_0. Consequentemente Φ_i é semicontínua inferiormente em $\mathcal{V}_{X,T}$.

Pelo Lema 4.2 existe um conjunto residual $\mathcal{P}^i_{X,T}$ de $\mathcal{V}_{X,T}$ tal que Φ_i é semicontínua superiormente para todo $Y \in \mathcal{P}^i_{X,T}$. Definimos $\mathcal{P}_{X,T} = \mathcal{KS}^1(M) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{P}^i_{X,T}\right) \cap \mathcal{R}_1$, onde $\mathcal{R}_1$ é o conjunto residual dado no Lema 4.15. Então $\mathcal{P}_{X,T}$ é um conjunto residual de $\mathcal{V}_{X,T}$. Provaremos que $\mathcal{P}_{X,T}$ satisfaz a conclusão do lema.

Seja $\sigma \in Per_T(Y)$ para algum $Y \in \mathcal{P}_{X,T}$, ou seja $\sigma = p_i(Y)$ para algum i. Assim temos que $\Phi_i(Y) = \overline{H_Y(\sigma)}$. Como $Y \in \mathcal{P}_{X,T}$, então $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ é hiperbólica. Agora, se $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ fosse um poço, então $H_Y(\sigma) = \mathcal{O}_Y(\sigma)$ e $W_Y^u(\sigma) = \mathcal{O}_Y(\sigma)$. Desde que, $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset W_Y^s(\sigma)$, então

$$H_Y(\sigma) = \mathcal{O}_Y(\sigma) = \overline{W_Y^s(\sigma)} \cap \overline{W_Y^u(\sigma)}.$$

De maneira análoga, se $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ fosse fonte também temos $H_Y(\sigma) = \overline{W_Y^s(\sigma)} \cap \overline{W_Y^u(\sigma)}$. Suponhamos que $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ não fosse poço nem fonte. Então temos

$$\begin{aligned} H_Y(\sigma) &= \overline{W_Y^s(\sigma) \pitchfork W_Y^u(\sigma)} \\ &\subseteq \overline{W_Y^s(\sigma) \cap W_Y^u(\sigma)} \\ &\subseteq \overline{W_Y^s(\sigma)} \cap \overline{W_Y^u(\sigma)}. \end{aligned}$$

Assim, $H_Y(\sigma) \subseteq \overline{W_Y^s(\sigma)} \cap \overline{W_Y^u(\sigma)}$. Suponhamos, por contradição, que $H_Y(\sigma) \neq \overline{W_Y^s(\sigma)} \cap \overline{W_Y^u(\sigma)}$. Então existe $x \in \overline{W_Y^s(\sigma)} \cap \overline{W_Y^u(\sigma)} \setminus H_Y(\sigma)$.

Temos dois casos:

1. $x \notin Crit_T(Y)$.

   Dado que $x \notin H_Y(\sigma)$ e $H_Y(\sigma)$ é compacta, então existe uma vizinhança compacta K de x, tal que $K \cap H_Y(\sigma) = \emptyset$. Como Φ_i é semicontínua superiormente em Y, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de Y tal que,

   $$K \cap H_Z(\sigma(Z)) = \emptyset \tag{4.15}$$

   para todo $Z \in \mathcal{U}$.

   Dado que $x \notin Crit_T(Y)$ então $\mathcal{O}_Y(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$. Assim, para $L > 0$ temos

$$Y_{[-L,0]}(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset.$$

Como $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ e $Y_{[-L,0]}(x)$ são conjuntos compactos, então existem V, W vizinhanças abertas de $Y_{[-L,0]}(x)$ e $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ respectivamente, tal que $V \cap W = \emptyset$. Como $x \in K \cap W$ então existe ε_0 tal que $B_{\varepsilon_0}(x) \subset K \cap W \subset K$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $Y_{[-L,0]}B_\varepsilon(x) = \bigcup_{t\in[-L,0]} Y_t(B_\varepsilon(x))$.

Portanto, de maneira análoga ao feito no Lema 4.15 existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tal que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \subset W. \tag{4.16}$$

Como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V$ e $V \cap W = \emptyset$ então existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tal que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset \quad \text{e} \quad B_{\varepsilon_0}(x) \subset K. \tag{4.17}$$

Além disso, como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V$ então por (4.16) e $V \cap W = \emptyset$ temos que

$$Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) \cap V = \emptyset. \tag{4.18}$$

Seja $\rho > 1$ então $B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, de maneira análoga ao Lema 4.12, existe $p \in W^u_Y(\sigma) - \{\sigma\} \cap V$ tal que

$$\mathcal{O}^+_Y(p) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \neq \emptyset \;\text{ e }\; \mathcal{O}^-_Y(p) \subset V. \tag{4.19}$$

Da mesma forma, como $x \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$, existe $q \in W^s_Y(\sigma) - \{\sigma\} \cap V$ tal que

$$\mathcal{O}^-_Y(q) \cap B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \neq \emptyset \;\text{ e }\; \mathcal{O}^+_Y(q) \subset V. \tag{4.20}$$

Como $\mathcal{O}^-_Y(p) \subset V$ e $\mathcal{O}^+_Y(q) \subset V$. E por (4.18) temos,

$$(\mathcal{O}^-_Y(p) \cap \mathcal{O}^+_Y(q)) \cap Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) = \emptyset. \tag{4.21}$$

Observemos que $q \notin \mathcal{O}^+_Y(p)$, pois, se $q \in \mathcal{O}^+_Y(p)$ então existe $t > 0$ tal que $q = Y_t(p)$. Como $q \in W^s_Y(\sigma)$, então $p \in W^s_Y(\sigma)$. Logo, $p \in W^s_Y(\sigma) \cap W^u_Y(\sigma)$, como $Y \in \mathcal{KS}^1(M)$ temos que $p \in W^s_Y(\sigma) \pitchfork W^u_Y(\sigma)$. Assim, $p \in H_Y(\sigma)$, mas ainda, $\mathcal{O}_Y(p) \subset H_Y(\sigma)$. Agora, de (4.19) e desde que $B_{\frac{\varepsilon}{\rho}}(x) \subset K$ temos que $K \cap H_Y(\sigma(Y)) \neq \emptyset$ o qual contradiz (4.15). Portanto $q \notin \mathcal{O}^+_Y(p)$.

Assim, existem $L > 0$, $\rho > 1$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $p, q \in M$ que satisfazem (4.19) e (4.20). Além disso, como $p, q \in V$ e por (4.18) tem-se

$p, q \notin Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$. Portanto, pelo Lema 4.4, existe $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z = Y$ fora de $Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$ e $q \in \mathcal{O}^+_Z(p)$.

Como $\mathcal{O}_Y(\sigma) \subset V$, e por (4.17) temos que $Z(r) = Y(r)$, para todo $r \in \mathcal{O}_Y(\sigma)$. Assim $Z_t(r) = Y_t(r)$, para todo $r \in \mathcal{O}_Y(\sigma)$ e $t \in I\!R$. Em particular, $Z_t(\sigma) = Y_t(\sigma)$, $t \in I\!R$. Como $\sigma \in Per_T(Y)$, então $Z_{\hat{T}}(\sigma) = Y_{\hat{T}}(\sigma) = \sigma$ e $Z_{\hat{T}}(\sigma) = Y_{\hat{T}}(\sigma) \neq \sigma$ para $0 < t < \hat{T}$, onde $\hat{T} = \pi_Y(p) < T$. Assim, $Z_{\hat{T}}(\sigma) = \sigma$ e $Z_{\hat{T}}(\sigma) \neq \sigma$ para $0 < t < \hat{T}$. Logo $\sigma \in Per_T(Z)$ com $\pi_Z(\sigma) < T$. Como $Z \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{X,T}$ então $\sigma(Z) = \sigma$. Por outro lado, por (4.21) e de maneira análoga ao Lema 4.12 temos que $p \in W^u_Z(\sigma)$ e $q \in W^s_Z(\sigma)$, visto que $Z = Y$ fora de $Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$.

Como $q \in \mathcal{O}^+_Z(p)$, então $\mathcal{O}_Z(p) = \mathcal{O}_Z(q) = \mathcal{O}$. Como $p \in W^u_Z(\sigma)$ e $q \in W^s_Z(\sigma)$, então $\mathcal{O} \subset W^s_Z(\sigma) \cap W^u_Z(\sigma)$. Por outro lado, se $\mathcal{O} \cap Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) = \emptyset$, então $Z_t(p) = Y_t(p)$, para todo $t \in I\!R$. Como $q \in \mathcal{O}^+_Z(p)$, existe $t_0 > 0$ tal que $q = Z_{t_0}(p)$. Assim, $q = Y_{t_0}(p)$, o qual é uma contradição, pois $q \notin \mathcal{O}^+_Y(\sigma)$. Portanto, existe $Z_T(p) \in \mathcal{O}_Z(p) \cap Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$. Se $\mathcal{O}_Z(p) \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset$, então existe $r \in \partial(Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)))$, tal que $Z_{[T,T_0]}(p) \subset Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x))$, onde $r = Z_{T_0}(p)$ e $Z_{[T_0,t_0]}(p) \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset$. Logo, $r = Z_{T_0}(p) = Z_{T_0}(Z_{-t_0}(q)) = Z_{T_0 - t_0}(q) = Y_{T_0 - t_0}(q)$. Como $r \in \partial(Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)))$ então $\mathcal{O}_Y(r) \cap Y_{[-L,0]}(B_\varepsilon(x)) = \emptyset$, o qual é uma contradição, pois, como $\mathcal{O}_Y(r) = \mathcal{O}_Y(q)$ e por (4.20) tem-se $\mathcal{O}_Y(r) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Portanto, $\mathcal{O} \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.

Agora, perturbando Z como no Lema 4.12, podemos assumir que $\mathcal{O}$ é transversal, isto é, $\mathcal{O} \subset H_Z(\sigma)$. Dado que $\mathcal{O} \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(x) \subset K$, temos que $K \cap H_Z(\sigma) \neq \emptyset$, em contradição com (4.15).

Vejamos que o seguinte caso nos leva ao caso anterior.

2. $x \in Crit(Y)$.

   Como $Y \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $x \in Crit(Y)$, então $\mathcal{O}_Y(x)$ é hiperbólica. Afirmamos que $\mathcal{O}_Y(x)$ não é poço nem fonte. Com efeito, suponhamos que $\mathcal{O}_Y(x)$ é poço. Como $x \neq \sigma$, então $\mathcal{O}_Y(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$. Sendo $\mathcal{O}_Y(x)$ e $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ conjuntos compactos, então existem vizinhanças abertas V e W de $\mathcal{O}_Y(x)$ e $\mathcal{O}_Y(\sigma)$ respectivamente, tal que $V \cap W = \emptyset$, onde V é a pequena vizinhança aberta dada pelo Teorema de Hartman-Grobman. Como $x \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$ temos que $V \cap W^s_Y(\sigma) \neq \emptyset$. Seja $z \in V \cap W^s_Y(\sigma)$, então existe $T > 0$ tal que $Y_T(z) \in W$. Por outro lado, como $x \in V$ e $\mathcal{O}_Y(x)$ é poço então $Y_T(z) \in V$. Portanto, $Y_T(z) \in V \cap W$. O qual é uma contradição, pois, $V \cap W = \emptyset$.

Se $\mathcal{O}_Y(x)$ é fonte, prosseguindo da mesma maneira obtemos também uma contradição. Portanto, $\mathcal{O}_Y(x)$ não é poço nem fonte. Assim, tem-se que $W^s_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$ e $W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$.

Afirmação 4.17. $W^u_Y(x) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)}$.

Com efeito, seja $a \in W^u_Y(x)$, então $\alpha_Y(a) \subset \mathcal{O}_Y(x)$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Então como $W^u_Y(\sigma)$ é invariante e pela Proposição 2.21 temos que $\mathcal{O}_Y(x) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Logo, $\alpha_Y(a) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)}$, portanto, $a \in W^u_Y(\overline{W^u_Y(\sigma)})$, assim temos $W^u_Y(x) \subset W^u_Y(\overline{W^u_Y(\sigma)}))$. Por outro lado, $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ é Lyapunov estável para Y, pois, $Y \in \mathcal{R}$. Então pelo Lema 3.3 temos que $W^u_Y(\overline{W^u_Y(\sigma)})) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Portanto, $W^u_Y(x) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)}$.

Afirmação 4.18. Existe $x' \in \overline{W^s_Y(\sigma)} \cap (W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x))$ tal que $x' \notin Crit(Y)$ e $x' \notin H_Y(\sigma)$.

Com efeito, dado que $x \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$, existem $x_n \in W^s_Y(\sigma)$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Usando o Teorema de Hartman-Grobman como no Lema 4.12, obtemos $x'_n \in \mathcal{O}^+_Y(x_n)$ tal que $x'_n \longrightarrow x' \in W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x)$. Como $x_n \in W^s_Y(\sigma)$, temos que $x'_n \in W^s_Y(\sigma)$, assim, $x' \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$. Portanto, $x' \in \overline{W^s_Y(\sigma)} \cap (W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x))$.

Como $x' \in W^u_Y(x) \setminus \mathcal{O}_Y(x)$, temos que $x' \notin Crit(Y)$, pois se, $x' \in Crit(Y)$ teriamos que $x' \in \mathcal{O}_Y(x)$, o qual é uma contradição.

Finalmente, se $x' \in H_Y(\sigma)$, então $Y_{-t}(x) \in H_Y(\sigma)$, para todo $t \geq 0$. Assim, $\alpha_Y(x') \subset H_Y(\sigma)$. Por outro lado, como $x' \in W^u_Y(x)$ temos que $\alpha_Y(x') \subset \mathcal{O}_Y(x)$. Como $\alpha_Y(x') \neq \emptyset$, existe $r \in \alpha_Y(x') \subset \mathcal{O}_Y(x)$, logo,

$$\mathcal{O}_Y(r) \subset \alpha_Y(x') \subset \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_Y(r).$$

Portanto, $\alpha_Y(x') = \mathcal{O}_Y(x)$. Daqui temos que $x \in H_Y(\sigma)$, contradizendo nossa suposição inicial. Portanto, $x' \notin H_Y(\sigma)$. O que encerra a prova da afirmação.

Como $x' \in W^u_Y(x)$ então pela Afirmação 4.17 temos que $x' \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Agora da Afirmação 4.18 temos que $x' \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$ e $x' \notin H_Y(\sigma)$. Por tanto,

$$x' \in (\overline{W^s_Y(\sigma)} \cap \overline{W^u_Y(\sigma)}) \setminus H_Y(\sigma).$$

Isso mostra que basta considerar o caso quando $x \notin Crit(Y)$, substituindo x por x'. Isso completa a prova do Lema.

$\square$

Lema 4.19. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}_2$ de $\mathfrak{X}^1(M)$ tal que todo $X \in \mathcal{R}_2$ satisfaz*

$$H_X(p) = \overline{W^u_X(p)} \cap \overline{W^s_X(p)},$$

para todo $p \in Per(X)$.

Demonstração. De maneira análoga ao Lema 4.15, existe um subconjunto enumerável $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{KS}^1(M)$ que é denso em $\mathfrak{X}^1(M)$.

Dado $T > 0$, para cada $X_n \in \mathcal{KS}^1(M)$, pelo Lema 4.16 existem uma vizinhança $\mathcal{V}_{X_n,T}$ de X_n (sem perda de generalidade, podemos asumir uma vizinhança aberta) e um subconjunto residual $\mathcal{P}_{X_n,T}$ de $\mathcal{V}_{X_n,T}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para simplificar a notação, denotemos por $\mathcal{V}_{n,T} = \mathcal{V}_{X_n,T}$ e $\mathcal{P}_{n,T} = \mathcal{P}_{X_n,T}$.

Definimos

$$\mathcal{O}^T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_{n,T} \text{ e } \mathcal{P}^T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{n,T}.$$

De maneira análoga ao Lema 4.15 concluímos que $\mathcal{O}^T$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^1(M)$ e. $\mathcal{P}^T$ é um subconjunto residual de $\mathfrak{X}^1(M)$, para todo $T > 0$.

Definimos o conjunto $\mathcal{R}_2 = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^N$, assim $\mathcal{R}_2$ é um conjunto residual em $\mathfrak{X}^1(M)$. Resta mostrar que $\mathcal{R}_2$ é o conjunto residual procurado.
Escolhemos $X \in \mathcal{R}_2$, $p \in Per(X)$, então $X \in \mathcal{P}^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$, escolhemos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 \geq \pi_X(p) + 1$, pela definição $X \in \mathcal{P}^{N_0}$, e portanto $X \in \mathcal{P}_{X_n,N_0}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $N_0 > \pi_X(p)$ temos que $p \in Per_{N_0}(X)$, então pelo Lema 4.16 aplicado a X_n, e $T = N_0$ temos que $H_X(p) = \overline{W^u_X(p)} \cap \overline{W^s_X(p)}$. Isso completa a prova do lema. $\square$

A seguir apresentamos o principal resultado desta seção, o qual caracteriza genericamente as classes homoclínicas de campos vetoriais em $\mathfrak{X}^1(M)$.

Teorema 4.20. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{X}^1(M)$ tal que toda classe homoclínica de todo campo vetorial em $\mathcal{R}$ é neutral.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ os subconjuntos residuais de $\mathfrak{X}^1(M)$, dados nos Lemas 4.15 e 4.19. Definimos $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Logo $\mathcal{R}$ é um subconjunto residual de $\mathfrak{X}^1(M)$ e assim para cada $Y \in \mathcal{R}$ e $p \in Per_Y(p)$ e pelo Lema 4.19 temos que:

$$H_Y(p) = \overline{W^u_Y(p)} \cap \overline{W^s_Y(p)}.$$

Além disso, para cada $p \in Per_Y(p)$, temos que $p \in Crit(Y)$ e pelo Lema 4.15 temos que $\overline{W^u_Y(p)}$ é um conjunto Lyapunov estável para Y e $\overline{W^s_Y(p)}$ é um conjunto Lyapunov estável para $-Y$. Portanto $H_Y(p)$ é um conjunto neutral para cada $p \in Per_Y(p)$. $\square$

Corolário 4.21. *As seguintes propriedades são equivalentes para $X \in \mathcal{R}$ e todo conjunto compacto invariante Λ de X:*

1. *Λ é um conjunto neutral transitivo com órbitas periódicas de X.*

2. *Λ é uma classe homoclínica de X.*

3. *Λ é um conjunto transitivo maximal com órbitas periódicas de X.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é o subconjunto residual de $\mathfrak{X}^1(M)$ dado no Teorema 4.20, e Λ um conjunto compacto invariante de X.
(2) $\Rightarrow$ (1) Seja Λ uma classe homoclínica de X. Então existe $p \in Per_H(X)$ tal que $\Lambda = H_X(p)$. Como Λ é invariante pelo fluxo X_t, então $\mathcal{O}_X(p) \subset \Lambda$. Assim Λ contém órbitas periódicas de X. Agora pela Lema 2.59 temos que $\Lambda = H_X(p)$ é um conjunto transitivo. Logo como $X \in \mathcal{R}$, então pelo Teorema 4.20, temos que Λ é um conjunto neutral.
(1) $\Rightarrow$ (3) Temos que Λ é um conjunto neutral transitivo. Pelo item (2) do Lema 3.6, temos que Λ é transitivo maximal. Portanto Λ é um conjunto transitivo maximal com órbitas periódicas de X.
(3) $\Rightarrow$ (2) Seja Λ um conjunto transitivo maximal com órbitas periódicas de X. Como Λ tem órbita periódica de X, então existe $p \in \Lambda \cap Per(X)$ tal que $\mathcal{O}_X(p) \subset \Lambda$.

Como X é genérico, então X é Kupka -Smale. Assim p é um ponto periódico hiperbólico. Logo temos a classe homoclínica $H_X(p)$. Como $p \in H_X(p)$ então

$$\Lambda \cap H_X(p) \neq \emptyset. \tag{4.22}$$

Como $H_X(p)$ é uma classe homoclínica, então pela parte (2) $\Rightarrow$ (1) do Corolário implica que $H_X(p)$ é um conjunto neutral e transitivo Pelo item (2) do Lema 3.6 temos que $H_X(p)$ é um conjunto transitivo maximal.

Assim, Λ e $H_X(p)$ são conjuntos transitivos maximais. De (4.22) e pelo consequencia do item (2) do Lema 3.6 podemos concluir que $\Lambda = H_X(p)$. Isso encerra a prova. $\square$

Corolário 4.22. *Para $X \in \mathcal{R}$, um conjunto compacto isolado não singular de X é neutral e transitivo se, e somente se, é uma classe homoclínica de X.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto compacto, isolado de um campo vetorial C^1 genérico X.

($\Rightarrow$) Suponhamos que Λ é um conjunto neutral e transitivo. Como Λ é isolado e neutral, então pela Proposição 3.15 temos que Λ é Ω-isolado. Por outro lado, como Λ é transitivo então existe $p \in \Lambda$ tal que $\omega_X(p) = \Lambda$ e portanto $\Lambda \subset \Omega(X)$.

Como X é genérico e pela Observação do Lema 2.62 (Closing-Lemma) temos que $\Omega(X) = \overline{Per(X) \cup Sing(X)}$ e como $\Lambda \subset \Omega(X)$ temos que

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \Lambda \cap \Omega(X) \\
&= \Lambda \cap \overline{Per(X) \cup Sing(X)} \\
&= \Lambda \cap (\overline{Per(X)} \cup \overline{Sing(X)}) \\
&= (\Lambda \cap \overline{Per(X)}) \cup (\Lambda \cap \overline{Sing(X)}).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Afirmamos que $\Lambda \cap \overline{Sing(X)} = \emptyset$. Com efeito, suponhamos que $\Lambda \cap \overline{Sing(X)} \neq \emptyset$, então existe $a \in \Lambda \cap \overline{Sing(X)}$. Como $a \in \overline{Sing(X)}$, então existe uma sequência $a_n \in Sing(X)$ tal que $a_n \longrightarrow a$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Por outro lado, como $\Lambda \cap Sing(X) = \emptyset$, pois X é não singular e $\Lambda \subset \Omega(X)$, então $Sing(X) \subset \Omega(X) \setminus \Lambda$. Assim $a_n \in \Omega(X) \setminus \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como $\Omega(X) \setminus \Lambda$ é fechado, pois Λ é Ω-isolado, então $a \in \Omega(X) \setminus \Lambda$. Isto leva uma contradição pois $a \in \Lambda$.

Portanto

$$\Lambda \cap \overline{Sing(X)} = \emptyset. \tag{4.24}$$

Afirmamos que $\Lambda \cap \overline{Per(X)} = \overline{\Lambda \cap Per(X)}$. Com efeito, como Λ é compacto então

$$\overline{\Lambda \cap Per(x)} \subset \overline{\Lambda} \cap \overline{Per(X)} \subset \Lambda \cap \overline{Per(X)}.$$

Vejamos a outra inclusão. Seja $p \in \Lambda \cap \overline{Per(X)}$. Então existe uma sequência $p_n \in Per(X)$ tal que $p_n \longrightarrow p$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Afirmamos que $K = \{n \in \mathbb{N} : p_n \in \Lambda\}$ é um conjunto infinito. Com efeito, suponhamos que K é finito. Então $p_n \in \Omega(X) \setminus \Lambda$, para uma quantidade infinita de índices

$n \notin K$. Como $\Omega(X) \setminus \Lambda$ é fechado, temos que $p \in \Omega(X) \setminus \Lambda$, o que leva a uma contradição, pois $p \in \Lambda$.

Assim $p_n \in \Lambda \cap Per(X)$ para todo $n \in K$ e como K é infinito temos que $p \in \overline{\Lambda \cap Per(X)}$. Logo $\Lambda \cap \overline{Per(X)} \subset \overline{\Lambda \cap Per(X)}$.

Portanto
$$\Lambda \cap \overline{Per(X)} = \overline{\Lambda \cap Per(X)}. \tag{4.25}$$

Logo, de (4.23), (4.24) e (4.25) temos que $\Lambda = \overline{\Lambda \cap Per(X)}$. Como $\Lambda \neq \emptyset$, pois Λ é transitivo, tem-se $\overline{\Lambda \cap Per(X)} \neq \emptyset$ e assim, $\Lambda \cap Per(X) \neq \emptyset$. Então existe $r \in \Lambda \cap Per(X)$. Como Λ é invariante tem-se $\mathcal{O}_X(r) \subset \Lambda$.

Assim como Λ é un conjunto compacto invariante, transitivo e neutral com óbitas periódicas de X, então pelo Corolário 4.21 temos que Λ é uma classe homoclínica de X.

($\Leftarrow$) Suponhamos que Λ é uma classe homoclínica de X. Como $X \in \mathcal{R}$ então pelo Teorema 4.20 temos que Λ é um conjunto neutral. Como Λ é uma classe homoclínica, consequentemente Λ é um conjunto neutral transitivo. $\square$

5 PROVA DO TEOREMA A

Agora apresentaremos a demostração do Teorema A. Para isso, vamos utilizar o Teorema 4.20 e os principais Lemas do Capítulo 3.

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto residual em $\mathfrak{X}^1(M)$ dado no Teorema 4.20. Assim dado $X \in \mathcal{R}$ temos que cumpre-se o seguinte:

1. Seja Λ uma classe homoclínica de $X \in \mathcal{R}$. Então pelo Teorema 4.20 ele é um conjunto neutral. Por outro lado temos que a classe homoclínica é um conjunto transitivo. Assim pelo item (2) do Lema 3.6 é um conjunto transitivo maximal. Mais ainda, se as classes homoclínicas de X são diferentes então eles são disjuntos.

2. Seja Λ uma classe homoclínica de $X \in \mathcal{R}$, pelo Teorema 4.20 temos que Λ é um conjunto neutral, portanto pelo item (1) do Lema 3.6 temos que Λ é um conjunto saturado.

3. Seja $\Phi : Per(X) \longrightarrow H_X(p)$ a aplicação definida por $\Phi(p) = H_X(p)$ para cada $p \in Per(X)$. Vejamos que a aplição Φ é semicontínua superiormente. Suponhamos que Φ não é semicontínua superiormente em $p \in Per(X)$, isto é, existe $K \subset M$ compacto com $\Phi(p) \cap K = \emptyset$ tal que, para toda vizinhança $U_p \subset Per(X)$, existe $q \in U_p$ com $\Phi(q) \cap K \neq \emptyset$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $q_n \in B_{\frac{1}{n}}(p)$ tal que $\Phi(q_n) \cap K \neq \emptyset$. Como X é genérico então todos os pontos periódicos são hiperbólicos. Assim temos que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de pontos periódicos hiperbólicos, tal que $q_n \longrightarrow p$, onde $p \in Per(X)$. Como $p \in H_X(p)$ e $q_n \in H_X(q_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$dist(H_X(q_n), H_X(p)) \to 0.$$

   Como $H_X(p)$ e $H_X(q_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ são compactos, transitivos e neutrais tais que $dist(H_X(q_n), H_X(p)) \longrightarrow 0$, então pelo Corolário 3.13 tem-se que $H_X(q_n)$ acumula em $H_X(p)$. Por outro lado, seja $U = M \setminus K$ uma vizinhança aberta de $H_X(p)$. Como $H_X(q_n)$ acumula em $H_X(p)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H_X(q_n) \subset U$ para todo $n \geq n_0$, assim $H_X(q_n) \cap K = \emptyset$ o qual é uma contradição. Portanto Φ é semicontínua superiormente em p.

4. Seja Λ uma classe homoclínica de $X \in \mathcal{R}$. Pelo Teorema 4.20 temos que Λ é um conjunto neutral, pela Proposição 3.15 temos que Λ é isolado se, e somente se, é Ω-isolado.

5. Seja Λ uma classe homoclínica hiperbólica de $X \in \mathcal{R}$. Pelo Teorema 4.20 temos que Λ é um conjunto neutral, mais ainda Λ é transitivo. Consequentemente, temos que Λ é um conjunto transitivo, neutral e hiperbólico, logo pelo Proposição 3.17 temos que Λ é isolado.

6. Como as classes homoclínicas de $X \in \mathcal{R}$ são conjunto neutrais, pelo Teorema 4.20 e, além disso, são conjuntos transitivos, então pela Proposição 3.8 temos que X não tem ciclos formados por classes homoclínicas de X.

7. $(\Rightarrow)$ Se X tem um número finito de classes homoclínicas, digamos $H_1, \ldots, H_m$, então a união das classes homoclínicas é um conjunto fechado, pois H_i é fechado para cada $i = 1, \ldots, m$. Como X é genérico, então tem-se que todos os pontos críticos são hiperbólicos e mais ainda, há apenas uma quantidade finita, além disso, pela Observação do Lema 2.62 (Closing-Lemma) temos que

$$\Omega(X) = \overline{Sing(X) \cup Per(X)} = \overline{Sing(X)} \cup \overline{Per(X)}.$$

Como $Per(X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_i$, então $\overline{Per(X)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_i$, e como $Sing(X)$ é um conjunto finito temos que

$$\Omega(X) \subset Sing(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} H_i).$$

Por outro lado, como toda classe homoclínica tem um conjunto denso de órbitas periódicos Teorema 2.60 (Teorema de Birkhoff-Smale), temos que $H_i \subset \Omega(X)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Logo $\bigcup_{i=1}^{m} H_i \subset \Omega(X)$ e portanto temos $Sing(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} H_i) \subset \Omega(X)$. Assim $\Omega(X) = Sing(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} H_i)$. Logo para cada $k = 1, \ldots, m$ temos que

$$\Omega(X) \setminus H_k = Sing(X) \cup (\bigcup_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^{m} H_i).$$

Isto implica que $\Omega(X) \setminus H_k$ é um conjunto fechado, para cada $k = 1, \ldots, m$ e consequentemente H_k é Ω-isolado para cada $k = 1, \ldots, m$. Portanto pelo item (4) do Teorema A temos que toda classe homoclínica de X é isolada.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{F}$ a coleção de todos os conjuntos neutrais, isolados e transitivos de X. Temos que toda classe homoclínica de X é um conjunto neutral e transitivo. Seja $\mathcal{F}'$ a coleção e todas as classes homoclínicas de X. Como cada classe homoclínica é isolada, tem-se que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Por hipótese, temos que $\bigcup\limits_{\Lambda \in \mathcal{F}'} \Lambda$ é fechado, então pela Proposição 3.18 temos que $\mathcal{F}'$ é finita. Portanto X tem um número finito de classes homoclínicas.

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, V.; PACIFICO, M. J. *Three-Dimensional Flows.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.

[2] BÉGUIN, F.; BONATTI, C.; VIEITEZ, J.; L. Construction de flots de Smale en dimension 3. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, v. 8, n. 3, p. 369-410, 1999.

[3] BATHIA, N.P.; SZEGO G.P. *Stability theory of dynamical systems.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.

[4] BIRKHOFF, G. D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Mem. Pont. Acad. Sci. Novi. Lycaei*, v 1, p. 85-216, 1935.

[5] BONATTI, C.; DIAZ, L. Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits et de sources. *Annales Scientifiques de L'É.N.S.*, v.32, n. 1, p. 135-150, 1999.

[6] BOWEN, R. Periodic Orbits for Hyperbolic Flows. *American Journal of Mathematics*, v. 94, n. 1, p. 1-30, 1972.

[7] CARBALLO, C. M.; MORALES, C. A.; PACIFICO, M. J. Homoclinic classes for generic C^1 vector fields. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, v. 23, p. 403-415, 2003.

[8] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, Segunda Edição, 2007.

[9] HAYASHI, S. Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows. *Annals of Mathematics*, Second Series, v. 145, n. 1, p. 81-137, 1997.

[10] HIRSH, M.; PUGH, C.; SHUB M. Invariant Manifolds. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, New York, v. 583, 1974.

[11] KATOK, A.; HASSELBLATT; B. *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[12] KURATOWSKI, K. *Topology II.* Academic Press-PWN-Polish Science Publishers. Warszawa. 1968.

[13] LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[14] LIMA, E. L. *Curso de análise, Volume 2*, Décima primeira edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[15] MROWKA, T. A short proof of the Birkhoff-Smale Theorem, *Proceeding of the American Mathematical Society*, v 93, n 2, p. 337-338, 1985.

[16] MUNKRES, J.R. *Topologia*, Segunda edição, Prentice-Hall, 2001.

[17] NEWHOUSE, S. Non-density of Axiom A(a) on S^2. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. American Mathematical Society*, v.14, p. 191-202, 1970.

[18] MELO, W.; PALIS, J. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1978.

[19] PALIS, J.; SMALE, S. Structural Stability Theorems. *In Global Analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. American Mathematical Society*, v. 14, p. 223-231, Providence, 1970.

[20] PALIS, J.; TAKENS, F. *Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. Cambridge: Cambridge umiversity Press, 1993.

[21] POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique (Mémoire couronné du prix de S.M. le roi Oscar II de Suéde). *Acta Mathematica*, v. 13, p. 1-270, 1890.

[22] PUGH, C. An improved Closing Lemma and a General Density Theorem. *American Journal of Mathematics* v. 89, n. 4, p. 1010-1021, 1967.

[23] ROBINSON, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic dynamics, and Chaos*. CRC Press, 1995.

[24] SMALE, S. Diffeomorphisms with many periodic points. *In Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, p. 63-80, 1965.

[25] SMALE, S. Differentiable Dinamical Systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 73, p. 747-817, 1967.

[26] SMALE, S. Structurally stable systems are not dense. *American Journal Mathematics* v. 88, n. 2, p. 491–496, 1966.

[27] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1979.

[28] WEN, L. On the C^1-stability conjecture for flows. *Journal of Differential Equations*, v. 129, p. 334-357, 1995.

[29] WEN, L.; XIA, Z. C^1 Connecting Lemmas. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 352, n. 11, p. 5213-5230, 2000.

APÊNDICE A – TOPOLOGIA GERAL

A.1 DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS

Nessa seção apresentaremos algumas noções sobre os espaços métricos e topologia geral que serão utilizados ao longo deste trabalho. As referências que usaremos nesta seção são [13] e [16].

Definição A.1. Sejam (M, d) um espaço métrico e Λ um subconjunto não vazio de M. Para cada $p \in M$ definiremos a *distância do ponto ao conjunto* Λ como o número real

$$dist(p, \Lambda) = \inf_{x \in \Lambda} \{d(p, x)\}.$$

O conjunto de números reais não-negativos $\{d(a, x) : x \in \Lambda\}$, formado pelas distâncias de p aos diversos pontos de Λ, é não vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância $dist(p, \Lambda)$. Mas pode não existir um elemento $p_0 \in M$ mais próximo de p do que os outros pontos de M. Pela definição de ínfimo de um conjunto de número reais, a distância $dist(p, \Lambda)$ é caracterizada pelas propriedades abaixo:

1. $dist(p, \Lambda) \leq d(p, x)$ para todo $x \in \Lambda$.

2. Se $dist(p, \Lambda) < c$ então existe $x \in \Lambda$ tal que $d(p, x) < c$.

   Podemos reformular a parte 2 escrevendo:

3. Se $c \leq dist(p, x)$ para todo $x \in \Lambda$, então $c \leq dist(p, \Lambda)$.

Agora apresentaremos algumas propriedades sobre distância.

Proposição A.2. *Sejam (M, d) um espaço métrico e Λ um subconjunto não vazio de M. Então:*

1. *Se $p \in \Lambda$ então $dist(p, \Lambda) = 0$.*

2. *Se $\Delta \subset \Lambda$ então $dist(p, \Lambda) \leq dist(p, \Delta)$.*

3. *Se $dist(p, \Lambda) = 0$ se, e somente, se $p \in \overline{\Lambda}$.*

4. *Se Λ é um conjunto compacto então $dist(p, \Lambda) = d(p, a)$ para algum $a \in \Lambda$.*

Demonstração. Segue-se imediatamente da definição dada acima. □

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Seja p um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

A *bola aberta de centro p e raio r*, é o conjunto $B_\varepsilon(p)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto p é menor do que r. Ou seja,

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in M : d(x,p) < r\}.$$

Dada a definição de bola aberta com respeito um ponto $p \in M$. É natural pensar em uma noção de "bola de raio ε cujo centro fosse um conjunto Λ". Por isso apresentaremos a seguinte definição.

Definição A.3. Seja Λ um subconjunto de M. Denotamos por $B_\varepsilon(\Lambda)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ que estão a uma distância menor que ε do conjunto Λ, isto é,

$$B_\varepsilon(\Lambda) = \{x \in M : dist(x,\Lambda) < \varepsilon\}.$$

Proposição A.4. *Seja Λ um subconjunto do espaço métrico M. Então:*

1. *Dado $\varepsilon > 0$ tem-se $B_\varepsilon(\Lambda) = \bigcup_{a\in\Lambda} B_\varepsilon(a)$.*
2. *Seja Λ um conjunto compacto e U uma vizinhança de Λ, então existe uma vizinhança U' de Λ tal que $U' \subset \overline{U'} \subset U$.*

Demonstração. Seja $\Lambda \subset M$.

1. Seja $a \in B_\varepsilon(\Lambda)$ então $dist(a,\Lambda) < \varepsilon$, assim existe $b \in \Lambda$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$ então $a \in B_\varepsilon(b)$, portanto $B_\varepsilon(\Lambda) \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_\varepsilon(a)$. Reciprocamente, seja $b \in \bigcup_{a\in\Lambda} B_\varepsilon(a)$ então $b \in B_\varepsilon(a)$, logo $d(b,a) < \varepsilon$ e por definição de distância temos que $dist(b,\Lambda) < \varepsilon$, portanto $b \in B_\varepsilon(\Lambda)$.

2. Seja U uma vizinhança de Λ, assim para cada $a \in \Lambda$ existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $\overline{B_{\varepsilon_a}(a)} \subset U$, logo $\Lambda \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{\varepsilon_a}(a)$, como Λ é compacto temos que $\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$, agora definimos $U' = \Lambda \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$ assim temos que

$$U' = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)} \subset U.$$

Portanto existe U' uma vizinhança de Λ tal que $U' \subset \overline{U'} \subset U$.

□

Pode-se também definir, o conceito de distância entre dois conjuntos.

Definição A.5. Sejam (M, d) um espaço métrico e Λ, Δ subconjuntos não vazios de M. Definiremos a *distância entre dois subconjuntos* como o número real

$$dist(\Lambda, \Delta) = \inf\{d(x, y) : x \in \Lambda, \quad y \in \Delta\}.$$

De acordo com a definição de ínfimo de um conjunto de número reais, a distância $dist(\Delta, \Lambda)$ é caracterizada pelas propriedades abaixo:

1. Tem-se $dist(\Delta, \Lambda) \leq d(x, y)$ para quaisquer $x \in \Delta$, $y \in \Lambda$.

2. Se $dist(\Delta, \Lambda) < c$ então existe $x \in \Delta$, $y \in \Lambda$ tal que $d(x, y) < c$.

Vejamos agora algumas propriedades sobre distância entre dois conjunto, em particular com respeito a conjuntos compactos.

Proposição A.6. *Sejam $K \subset M$ um conjunto compacto e $F \subset M$ un conjunto fechado, com $K \cap F = \emptyset$. Então $dist(K, F) > 0$.*

Demonstração. Ver [13, Capítulo 8, p. 218]. □

Proposição A.7. *Se Λ é compacto e $\Lambda \subset U$ onde U é um conjunto aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\Lambda \subset B_\varepsilon(\Lambda) \subset U.$$

Demonstração. Como U é um conjunto aberto, definimos o conjunto $K = M \backslash U$. Assim K é um conjunto fechado tal que $\Lambda \cap K = \emptyset$. Pela Proposição A.6 temos que $dist(K, \Lambda) > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $dist(K, \Lambda) > \varepsilon > 0$. Afirmamos que $B_\varepsilon(\Lambda) \subset U$. Com efeito, suponhamos por contradição, isto é, existe $y \in B_\varepsilon(\Lambda)$ tal que $y \notin U$. Pelo Proposição

A.4 existe $a \in \Lambda$ tal que $y \in B_\varepsilon(a)$. Assim $d(y,a) < \varepsilon$. Como $y \notin U$, então $y \in K$, portanto pela propriedade (2) da definição de distância entre dois conjunto, temos que $dist(K,\Lambda) \leq d(y,a) < \varepsilon$, o qual é uma contradição, pois $dist(K,\Lambda) > \varepsilon$. Isso encerra a prova. □

A.2 ESPAÇO DE BAIRE

Nesta seção definiremos os espaços de Baire e suas principais propriedades. Os resultados aqui exibia esta desenvolvida em [16, Capítulo 8, § 48].

Definição A.8. Um conjunto B é dito um *espaço de Baire* se satisfaz a seguinte condição: Dada qualquer família enumerável $\{A_n\}$ de conjuntos fechados de B, todos eles com interior vazio em B, sua união $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ também tem interior vazio em B.

Agora apresentaremos uma das propriedades mais importantes que nos vai dar conjuntos topologicamente grandes.

Lema A.9. *Todo subespaço aberto A de um espaço de Baire B é um espaço de Baire.*

Demonstração. Ver [16, Lema 48.4, p. 339]. □

O seguinte Lema caracteriza aos Espaços de Baire com respeito aos conjuntos residuales. O qual nos diz que os conjuntos residuales são conjuntos grandes en dito espaço.

Lema A.10. *O conjunto B é um espaço de Baire se, o somente se, toda interseção enumerável de abertos e densos em B é um subconjunto denso em B.*

Demonstração. Ver [16, Lema 48.1, p. 337]. □

O seguinte Teorema nos diz quais são os conjuntos que são Espaços de Baire.

Teorema A.11. *(Teorema de Baire)*
Seja B um espaço de Hausdorff compacto o um espaço métrico completo então B é um espaço de Baire.

Demonstração. Ver [16, Teorema 48.2, p. 337]. □

A.3 ESPAÇO SEPARÁVEL

Nesta seção definiremos os espaços separável e seus principais propriedades, os resultados estão desarrollados em [13, Capítulo 9]. Lembremos que uma coleção $\mathfrak{B}$ de abertos num espaço métrico M chama-se uma *base* quando todo aberto $A \subset M$ se exprime como reunião $A = \bigcup B_\lambda$ de conjuntos $B_\lambda \in \mathfrak{B}$.

Proposição A.12. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1. *M contém um subconjunto enumerável denso.*
2. *M possui um base enumerável de abertos.*
3. *Toda cobertura aberta de M admite uma subcobertura enumerável.*

Demonstração. Ver [13, Proposição 1, p.274]. □

Definição A.13. Um espaço métrico M chama-se *separável* quando cumpre uma das (e portanto todas) as condições da Proposição.

Proposição A.14. *Seja M um espaço métrico.*

1. *Se M é um espaço separável então todo subconjunto $N \subset M$ é separáravel.*
2. *Se M é compacto, então é separáravel.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico.

1. Sejam $N \subset M$ e $\mathcal{B}$ uma base enumerável de M. As interseções $B \cap N$, $B \in \mathcal{B}$, constituem uma base enumerável de N. Com efeito, seja U um conjunto aberto de N, então ele é da forma $U = V \cap N$ onde V é um conjunto aberto de M. Assim, $V = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$, onde $B_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto
$$U = V \cap N = \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap N).$$
Isso prova a parte (1).
2. Segue-se de item (3) da Propisição A.12 desde que M é compacto.

□

APÊNDICE B – TRANSVERSALIDADE

Nesta seção apresentaremos a noção de quando dois subvariedades são transversais e suas principais propriedades na Topologia C^1. A referência que usaremos nesta seção pode-se encontrar em [11].

Definição B.1. Seja M uma variedade suave e $K,\ N \subset M$ subvariedades suaves. Dizemos que K e N são *transversais em* $x \in M$. Se

$$x \notin K \cap N \text{ ou } T_xK + T_xN = T_xM.$$

Escreveremos $K \pitchfork_x N$. Em particular, se $\dim K + \dim N = \dim M$ e $x \in K \cap N$ as dois últimas condições é equivalentes a $T_xK + T_xN = \{0\}$. Dizemos que K e N são *transversais* (uns aos outros), denotado por $K \pitchfork N$, se $K \pitchfork_x N$ para todo $x \in K \cap N$.

A seguinte proposição nos diz que a transversalidade é uma condição aberta na topologia C^1.

Proposição B.2. *Intersecções transversais são estáveis na topologia C^1.*

Demonstração. Ver [11, Proposition A.3.16, p. 725]. □

Vamos primeiro observar que intersecções transversais podem ser levados para uma "forma normal".

Lema B.3. *Se $K \pitchfork_x N$ em M, $x \in K \cap N$, e $k = \dim K$, $n = \dim N$ e $M = \dim M$ então existe uma vizinhança U de x e coordenadas $(x_1, \ldots, x_m)$ em U tal que nestas coordenadas*

$$K \cap U = \{(x_1, \ldots, x_m) : X_{k+1} = \ldots = x_m = 0\}$$
$$N \cap U = \{(x_1, \ldots, x_m) : X_1 = \ldots = x_{m-n} = 0\}.$$

Demonstração. Ver [11, Lemma A.3.17, p. 726]. □

Uma consequência imediata do Lema da acima é o seguinte corolário.

Corolário B.4. *Se K e N variedades transversais compactas então qualquer C^1-perturbações suficientemente pequenas $\widetilde{K}$ e $\widetilde{N}$ sáo transversais.*