Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Vladimir Alfredo Dionisio Armas

A Integral de Melnikov e uma aplicação em combustão em um meio poroso.

Juiz de Fora

2015

Vladimir Alfredo Dionisio Armas

A Integral de Melnikov e uma aplicação em combustão em um meio poroso.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Laura Senos Lacerda Fernández

Coorientador: Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

.

A Integral de Melnikov e uma aplicação em combustão em um meio poroso. / Vladimir Alfredo Dionisio Armas. – 2015.

109 f. : il.

Orientadora: Laura Senos Lacerda Fernández

Coorientador: Grigori Chapiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Integral de Melnikov. 2. Perturbação. 3. Onda Viajante. 4. Combustão no Meio Poroso. I. Senos Lacerda Fernández, Laura, II. Chapiro, Grigori. III. Dionisio Armas, Vladimir Alfredo. IV. A Integral de Melnikov e uma aplicação em combustão em um meio poroso.

Vladimir Alfredo Dionisio Armas

A Integral de Melnikov e uma aplicação em combustão em um meio poroso.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Professora. Dra. Laura Senos Lacerda Fernández-
Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor. Dr. Grigori Chapiro - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Mariana Pinheiro Gomes da Silva
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Professor Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico A meus pais: Celmith e Máximo Alfredo, para meus irmãos: José Antonio e Albert Iván, também para minha sobrinha Alessandra Thaiz que sempre me ajudaram com seu apoio e conselhos de maneira incondicional.

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar este trabalho de dissertação indicando o final do percurso do mestrado, meta conseguida com muito esforço e trabalho, para o qual intervieram pessoas que colaboraram para cumprir este objetivo.

Quero agradecer a minha orientadora a Dr(a) Laura Senos Lacerda Fernández pelo seu apoio, sua paciência e dedicação para me orientar. Por me aceitar para trabalhar na dissertação de mestrado sob sua orientação. Sua confiança, amizade e capacidade para guiar minhas ideias foram de muito valor.

Ao Dr Grigori Chapiro pelo seu apoio, amizade e dedicação para me coorientar, pela sua disponibilidade para me ajudar com sugestões e ideias para realizar um bom trabalho.

A meus pais, Celmith e Máximo Alfredo, pela vida, a educação e as ilusões à meus irmãos, José Antonio e Albert Iván pela alegria e a minha sobrinha Alessandra Thaiz pelo seu sorriso.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Aos professores, que partilharam seus conhecimentos nas disciplinas que cursei durante o mestrado, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação.

Agradeço aos professores da Facultad de Ciencias Matemáticas da Universidad Nacional Mayor de San Marcos (U.N.M.S.M.) Lima-Perú.

Dr: Agripino García Armas.

Mg: Tomás Núñez Lay.

A meus amigos e colegas de graduação.

Carlos Mejia Aleman.

Emerson Lech Huamaní Taipe.

Irene Edith Núñez Rodriguez.

Julio César Lanazca Vargas.

Agradeço à minha amiga.

Sra: Teresa Ángulo Cardenas pela sua ajuda.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo seu apoio financeiro.

A todos meus amigos, que compartilharam comigo tempo de estudo, conversas e brincadeiras, tornando estes anos de estudos mais leves.

“ E repito mais uma vez: Eu vivi pela alegria. Pela alegria eu fui ao combate e pela alegria morrerei. Que a tristeza nunca seja associada ao meu nome ”

Julius Fucik

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre a Integral de Melnikov para duas classes de sistemas de equações diferenciais ordinárias. A primeira delas é um sistema Hamiltoniano associado a uma perturbação uniparamétrica. A segunda classe é um sistema geral, associada a uma perturbação bidimensional. O trabalho termina com um estudo sobre a existência e unicidade de solucões do tipo de onda viajante para um modelo matemático de combustão em um meio poroso.

Palavra-chave: Integral de Melnikov, Perturbação, Ondas Viajantes, Combustão.

ABSTRACT

This work presents a study about the Melnikov's Integral for two classes of ordinary differential equations. In the first one, we study the Melnikov's Integral for a Hamiltonian system associated with one-parameter perturbation. The second class, we study the Melnikov's Integral for any system associated with a two-dimensional perturbation. The work finishes with a study on the existence and uniqueness of traveling wave solutions of the mathematical model describing combustion in porous medium.

Key-words: Melnikov's Integral, Perturbation, Traveling Wave, Combustion in Porous Medium.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O campo vetorial f. 17
Figura 2 – Os subespaços E^s, E^u e E^c. 22
Figura 3 – Pontos de equilíbrio para o sistema linear $\dot{x} = Ax$. 23
Figura 4 – Teorema(Hartman-Grobman) 25
Figura 5 – As variedades estável e instável locais $W^s_{loc}(\bar{x})$ e $W^u_{loc}(\bar{x})$ de um ponto de equilíbrio hiperbólico $\bar{x}$. 26
Figura 6 – A Aplicação de Poincaré e a seção transversal local Σ. 28
Figura 7 – Bifurcação de Tipo Sela-Nó. 33
Figura 8 – Espaço de fase associado para as hipóteses $(A_1), (A_2)$ e (A_3). 35
Figura 9 – $W^s_{loc}(\gamma_\epsilon)$ e $W^u_{loc}(\gamma_\epsilon)$ são $\epsilon-$pertos de $W^s_{loc}(p_0)$ e $W^u_{loc}(p_0)$. 37
Figura 10 – Separação das variedades $W^u(p^{t_0}_\epsilon)$ e $W^s(p^{t_0}_\epsilon)$. 40
Figura 11 – Equilíbrio de tipo sela-nó com laço separatriz Γ. 45
Figura 12 – Sistema (3.27) associado as hipóteses (i)-(vi). 45
Figura 13 – Sistema (3.28) para os valores de ν_1 com $\nu_2 = 0$. 46
Figura 14 – A variedade central do ponto p. 47
Figura 15 – Sistemas perturbados pertos do sistema (3.29). 48
Figura 16 – Configuração dos campos vetoriais numa vizinhança de Γ. 66
Figura 17 – Campos vetoriais (6) e (7). 67
Figura 18 – Campos vetoriais (5) e (2). 67
Figura 19 – Campos vetoriais (4) e (3). 68
Figura 20 – $\frac{\partial f}{\partial \mu_1}(x, 0, 0)$ é transversal a Σ'. 70
Figura 21 – (a) Órbita Heteroclínica , (b)Afastamento de $W^u(p(\theta))$ e $W^s(q(\theta))$. . . 71
Figura 22 – Distribução dos equilibrios do sistema (4.21), para 0<a<c. 79
Figura 23 – Distribução dos equilibrios do sistema (4.21), para 0<c<a 79
Figura 24 – Diagrama das região C, Região 1 e Região 2. 83
Figura 25 – Retrato de fase associado ao sistema (4.36). 86
Figura 26 – Retrato de fase associado ao sistema (4.41). 87
Figura 27 – Retrato de fase associado ao sistema (4.36). 88
Figura 28 – Retrato de fase associado ao sistema (4.45). 89
Figura 29 – Retrato de fase associado ao sistema (4.36). 89
Figura 30 – Retrato de fase associado à Região 1. 91
Figura 31 – Retrato de fase do sistema (4.52) 95
Figura 32 – Retrato de fase do sistema (4.36) para a Região 2. 96
Figura 33 – Retrato de fase para o sistema (4.53) 97
Figura 34 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $0 < c < \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a$.. 100
Figura 35 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $c = \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a$. 102
Figura 36 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $0 < c < a$. 105
Figura 37 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $\frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+} < c < a$. 106

Figura 38 – Semi-eixo de equilíbrios normalmente atratores. 107

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora.
EDO	Equação Diferencial Ordinária
PVI	Problema de Valor Inicial.
EOR	Enhanced Oil Recovery.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reias.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}^n$	O $n-$ produto cartesiano do conjunto dos números reais.
$\forall$	Para todo.
$\in$	Pertence.
$tr(A)$	Traço da matriz A.
$divf$	Divergência da aplicação f.
$\sigma(A)$	espectro da matriz A.
$A \oplus B$	Soma direita de A e B.
$\wedge$	Produto cunha.
$\perp$	Perpendicular.
.	Produto interno canônico.
$span(S)$	Espaço gerado pelo conjunto S.
$E^s(p)$	Espaço próprio estável do ponto p.
$E^u(p)$	Espaço próprio instável do ponto p.
$E^c(p)$	Espaço próprio central do ponto p.
$W^s_{loc}(p)$	Variedade estável local do ponto p.
$W^u_{loc}(p)$	Variedade instável local do ponto p.
$W^c_{loc}(p)$	Variedade central local do ponto p.
$W^s(p)$	Variedade estável global do ponto p.
$W^u(p)$	Variedade instável global do ponto p.
$W^c(p)$	Variedade central global do ponto p.
$int(A)$	Interior do conjunto A.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO. 13

2 PRELIMINARES 15

2.1 RESULTADOS BÁSICOS 15

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS 16

2.3 SISTEMAS LINEARES 19

2.4 SISTEMAS NÃO LINEARES 24

3 BIFURCAÇÕES DE TIPO SELA-NÓ E A INTEGRAL DE MELNIKOV. 29

3.1 BIFURCAÇÃO DE TIPO SELA-NÓ 29

3.2 A INTEGRAL DE MELNIKOV PARA UMA SELA-NÓ HIPERBÓLICA. 34

3.3 A INTEGRAL DE MELNIKOV PARA UMA SELA-NÓ NÃO HIPERBÓLICA. 44

4 UMA APLICAÇÃO NA COMBUSTÃO EM UM MEIO POROSO. 72

4.1 MODELO MATEMÁTICO 72

4.2 ONDAS VIAJANTES RÁPIDAS (0<a<c). 82

4.3 ONDAS VIAJANTES LENTAS (0<c<a). 98

REFERÊNCIAS 109

1 INTRODUÇÃO.

Um Sistema Dinâmico é um processo cuja evolução é dada por uma lei matemática que pode ser uma função ou uma equação diferencial. O objetivo, ao estudar um sistema dinâmico, é procurar, compreender e prever a evolução desse sistema. Assim, se temos um sistema dinâmico definido em um conjunto X e escolhemos um ponto $x \in X$, um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos consiste em saber se a órbita desse ponto, ou seja, o conjunto dado pelos pontos que descrevem a evolução de x através do sistema, tem algum limite, ou, se não tem, ao menos descrever os pontos dos quais a órbita se aproxima infinitas vezes no futuro.

Na primeira parte deste trabalho estudamos duas perturbações de sistemas dinâmicos que possuem um ponto de equilíbrio com variedades estável e instável que se intersectam. Nos dois casos o comportamento dinâmico possui propriedades que levam à noção de "caos". Por exemplo, se as variedades estável e instável de um ponto de equilíbrio se intersectam transversalmente é possível mostrar, usando a teoria de Poincaré, Birkhoff e Smale, a existência de infinitas órbitas periódicas de período arbitrariamente grande. A idéia de separatrizes que se intersectam transversalmente apareceu pela primeira vez no famoso artigo de Poincaré sobre o problema dos três corpos de 1890. Em 1963 e 1964 Melnikov [9] e Arnold [1] desenvolveram uma teoria para mostrar que o pêndulo

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = \varepsilon\cos(at)$$

não é integrável, no sentido de que não há integrais analíticas. Para isto, perturba-se o sistema criando uma órbita homoclínica perto de uma singularidade não hiperbólica. Com isto geram-se infinitas órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.

A Integral de Melnikov, como poderemos ver ao longo deste trabalho, foi desenvolvida para estabelecer a existência ou não existência de órbitas homoclínicas transversais em sistemas dinâmicos ao fazermos uma pequena perturbação ao adicionarmos um termo não autônomo ao sistema original.

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre a Integral de Melnikov para duas classes de sistemas de equações diferenciais ordinárias. A primeira delas é um sistema Hamiltoniano associado a uma perturbação a um parâmetro. A segunda classe é um sistema geral, associado a uma perturbação bidimensional.

Este trabalho esta organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é apresentado os resultados básicos e uma breve revisão da teoria de equações diferenciais ordinárias, ferramentas que iremos utilizar ao longo do trabalho. O Capítulo 3 trata do estudo da teoria de bifurcações e, em particular, sobre a bifurcação de tipo sela-nó, ferramenta utilizada para o estudo da bifurcação de tipo sela-nó com laço separatriz. Neste capítulo também estudaremos a Integral de Melnikov para um sistema

Hamiltoniano que admite uma órbita homoclínica associada a um ponto de equilíbrio hiperbólico. Terminando esse Capítulo trataremos sobre o estudo da Integral de Melnikov para um sistema em geral que admite uma órbita homoclínica associada a uma sela-nó. No Capítulo 4 apresentamos uma aplicação da Integral de Melnikov para o estudo de um modelo matemático em combustão no meio poroso. Vamos utilizar o modelo matemático [2] e, fazendo mudança de variáveis, transformamos o modelo em um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual passa a ser objeto de estudo. Construindo o retrato de fase desse sistema de E.D.O.'s e usando a Integral de Melnikov, provamos a existência e unicidade de uma órbita do sistema de E.D.O.'s, correpondendo à existência e unicidade de uma onda viajante do modelo. Vamos utilizar a teoria de perturbações para provar a existência e a Integral de Melnikov para provar a unicidade da órbita do sistema de E.D.O.'s.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo se apresentam as ferramentas que vamos utilizar ao longo desta dissertação, tais como uma breve revisão dos resultados básicos e da teoria básica de equações difrerenciais ordinárias.

2.1 RESULTADOS BÁSICOS

Definição 2.1 *Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ diz-se* ***Lipschitziana*** *quando existe $L > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Teorema 2.1 ***De Weierstrass.***
Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}^n$ é uma funcão real contínua, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [7](pp. 45-46).

Lema 2.1 ***A Desigualdade de Gronwall.***
Se v, u e $c \leq 0$ em $[0, t]$ com c diferenciável em $]0, t[$ tal que

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

Então

$$v(t) \leq c(0)exp[\int_0^t u(s)ds] + \int_0^t \dot{c}(s)exp\Big[\int_s^t u(\tau)d\tau\Big]ds.$$

A demonstração deste lema pode ser vista em [4](pp. 37).

Teorema 2.2 ***Da Aplicação Implícita.***
Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, diferenciável no ponto $a \in U$, com $f(a) = c$. Se $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ é uma decomposição em soma direta tal que $a = (a_1, a_2)$ e a derivada $\partial_2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, então existem abertos V, Z (onde $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^n, a \in Z \subset U$) com a seguinte propriedade: para cada $x \in V$ hà um único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x, \xi(x)) \in Z$ e $f(x, \xi(x)) = c$.
A aplicação $\xi : V \to \mathbb{R}^n$ assim definida é diferenciável no ponto a_1 e a sua derivada nesse ponto é

$$\dot{\xi}(a_1) = -\Big[\partial_2 f(a)\Big]^{-1} \circ \Big[\partial_1 f(a)\Big].$$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [7](pp. 295-296).

Teorema 2.3 ***Fórmula de Taylor.***
Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *no aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Fixando* $a \in U$, *para todo* $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $a + v \in U$, *escrevamos*

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.\alpha_i\alpha_j + r(v)$$

as derivadas sendo calculadas no ponto a. *Então* $\lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|^2} = 0$.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [7](pp. 261-262).

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Definição 2.2 *Sejam* $J \subset \mathbb{R}$ *e* $U \subset \mathbb{R}^n$ *subconjuntos abertos não vazios e* $F : J \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* $\mathcal{C}^r, r \geq 1$. *Uma* ***equação diferencial ordinária*** *é uma equação da seguinte forma*

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), x^{(k)}(t)) = 0, \tag{2.1}$$

com $t \in J$ *e* $x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), x^{(k)}(t) \in U$. *Sendo o ponto a representação da diferenciação de* x *com respeito a* t.

Definição 2.3 *A* ***ordem*** *da equação diferencial ordinária (2.1) é a maior ordem da derivada que encontra-se na equação diferencial ordinária.*

Agora vamos definir a solução de (2.1).

Definição 2.4 *Dizemos que uma função* $\gamma : J_0 \subset J \longrightarrow U$ *de classe* $\mathcal{C}^r$ *com* $r \geq 1$ *é* ***solução*** *da equação diferencial ordinária (2.1) se satisfaz as seguintes condições.*

(i) J_0 *é um subconjunto aberto não vazio de* J

(ii) $(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t), \ldots, \gamma^{(k-1)}(t), \gamma^{(k)}(t)) \in J \times U$ *para todo* $t \in J_0$

(iii) $F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t), \ldots, \gamma^{(k-1)}(t), \gamma^{(k)}(t)) = 0$ *para todo* $t \in J_0$

Para fins deste trabalho, vamos estudar equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Isto é, equações na forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

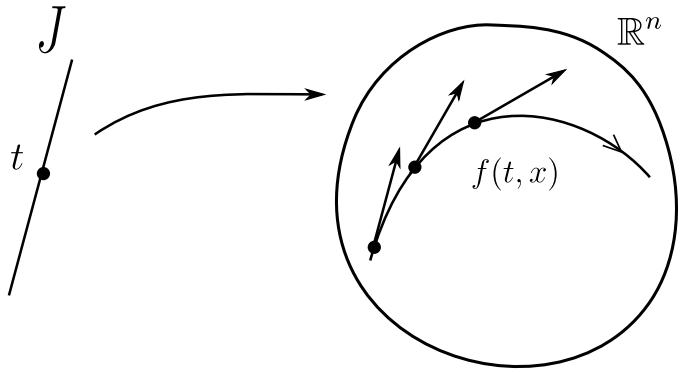
Aqui, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial de uma variável independente (usualmente o tempo t) e $f : J \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^r, 1 \leq r < \infty$ definida sobre um subconjunto aberto não vazio $J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definição 2.5 *Seja $J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto. Um* ***campo vetorial*** *de classe $\mathcal{C}^r, 1 \leq r < \infty$ em U é uma aplicação $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$. Ao campo vetorial f associamos a equacão diferencial*

$$\dot{x} \quad = \quad f(t, x).$$

Observação:
Fisicamente, podemos interpretar o campo vetorial como uma condição que fixa a velocidade $\dot{x} = f(t, x(t))$ de uma partícula na posição x no instante t e geometricamente, podemos pensar que existe um vetor $f(t, x)$ na posição x no instante t. Veja a Figura 1.

Figura 1 – O campo vetorial f.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Definição 2.6 *A aplicação $\dot{x} = f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ com $x \in \mathbb{R}^2$ é um campo* ***Hamiltoniano*** *se existe*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \mathcal{H}(u, v) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^2$ verificando

$$f_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v}(u, v) \quad e \quad f_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(u, v). \tag{2.3}$$

Definição 2.7 *Uma função $\gamma(t) : J_0 \subset J \to \mathbb{R}^n$, sendo J um intervalo aberto não vazio de $\mathbb{R}$ e γ é de classe $\mathcal{C}^1$ nesse intervalo, é uma solução de (2.2) se satisfaz*

$$\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t)).$$

Isto é, $\gamma(t)$ é uma solução do sistema (2.2) se, e somente se a trajetória da partícula é tangente ao campo vetorial em cada um de seus pontos.

Definição 2.8 *Dizemos que o campo vetorial f* ***gera um fluxo*** *$\phi_t : J \times U \to \mathbb{R}^n$, onde $\phi_t = \phi(t, x)$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^r, 1 \leq r < \infty$ definida para todo (t, x) em $J \times U$ e satisfaz (2.2) no sentido que*

$$\frac{d}{dt}(\phi(t, x))|_{t=\tau} = f(\phi(\tau, x)). \tag{2.4}$$

para todo $(t, x) \in J \times U$. Neste domínio de definição ϕ_t satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\phi_0 = \phi(0, x) = x$.

(ii) $\phi_{t+s} = \phi(t + s, x) = \phi(t, (\phi(s, x)) = \phi_t \circ \phi_s, \quad \forall \ \ t, s \in J.$

Definição 2.9 *Seja x_0 um ponto no retrato de fase para (2.1). Pela órbita através de x_0, denotado por $\mathcal{O}(x_0)$, queremos dizer o conjunto de pontos no retrato de fase que encontra-se numa trajectória que passa através de x_0. Mais precisamente, para $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, então a órbita através x_0 é dada pelo seguinte conjunto*

$$\mathcal{O}(x_0) \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t, x_0) \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Observação:
Uma diferença entre a solução e a órbita de uma equação diferencial ordinária é que a solução explicita a velocidade com que se caminha na órbita.

Sistemas da forma (2.2), na qual o campo vetorial não contém o tempo na forma explícita, ou seja, sistemas de equações diferenciais ordinárias na forma $\dot{x} = f(x)$ são chamados **sistemas autônomos**.

Definição 2.10 *Dizemos que $x \in U$ é um* ***ponto de equilíbrio*** *do campo vetorial f quando $f(x) = 0$. Um ponto que não é de equilíbrio é chamado* ***ponto regular*** *do f.*

Definição 2.11 *Seja $\bar{x} \in U$ um ponto de equilíbrio do campo vetorial f. Então $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio* ***estável*** *se para toda vizinhança V de $\bar{x}$ contida em U existe uma vizinhança V_1 de $\bar{x}$ contida em U tal que toda solução $\gamma(t)$ com $\gamma(0) \in V_1$ está definida e pertence a V para todo $t > 0$.*

Definição 2.12 *Seja $\bar{x} \in U$ um ponto de equilíbrio do campo vetorial f. Então $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio* ***instável*** *se existe uma vizinhança V de $\bar{x}$ contida em U tal que para toda vizinhança V_1 de $\bar{x}$ contida em U, existe pelo menos, uma solução $\gamma(t)$ com $\gamma(0) \in V_1$ e que não se mantém completamente em V para algum $t > 0$.*

Problemas em que procura-se a trajetória de uma partícula seguindo um campo vetorial dado e que em algum instante inicial está localizado em uma posição particular, serão chamados **Problemas de Valor Inicial (P.V.I).**

Teorema 2.4 ***(De existência e unicidade)***
Considere o seguinte (P.V.I)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

definido para $(t,x),(t_0,x_0) \in J \times U$*, onde* f *é de classe* $\mathcal{C}^1$ *em* U*. Tem-se*

(i) para cada ponto $(t_0,x_0) \in J \times U$ *existe uma solução* $x = \gamma(t)$ *do sistema (2.5) tal que:* $\gamma(t_0) = x_0$*.*

(ii) se duas soluções $x = \gamma(t)$ *e* $y = \psi(t)$ *do sistema (2.5) são iguais para um valor* $t = t_0$ *isto é* $\gamma(t_0) = \psi(t_0)$*, então elas continuam iguais para todos os valores de* t *em que ambas estão definidas; para todo* $|t - t_0|$ *pequeno.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [10] pp. 19-24.

2.3 SISTEMAS LINEARES

Definição 2.13 *Seja* A *uma matriz* $n \times n$ *com entradas constantes reais ou complexas. Então, os* ***valores próprios*** *de* A *são* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *tais que*

$$(A - \lambda I_{n\times n})\vec{u} = 0$$

têm soluções não triviais. Além disso, as soluções correspondentes $\vec{u}$ *são os* ***vetores próprios*** *de* A *associados a* λ*.*

Definição 2.14 *Seja* A *uma matriz* $n \times n$ *com entradas constantes reais ou complexas. Então, o* ***espectro*** *de* A*, denotado por* $\sigma(A)$ *é dado pelo seguinte conjunto*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I_{n\times n} - A \ \text{não tem inversa}\}.$$

Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas constantes reais ou complexas, então vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \ , \ x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

o seguinte resultado vai garantir a existência e unicidade da solução para o P.V.I. (2.6).

Teorema 2.5 ***(Fundamental para Sistemas Lineares)*** *Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas constantes reais ou complexas. Então fixado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema de valor inicial (2.6) tem uma única solução da forma:*

$$x(x_0, t) = e^{tA}x_0. \tag{2.7}$$

onde e^{tA} é uma matriz $n \times n$ obtida pela exponencial de A como a série uniformemente convergente sobre um conjunto compacto para $|t| \leq t_0$ com $t_0 > 0$. Ou seja,

$$e^{tA} = [I_{n\times n} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots]. \tag{2.8}$$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [11](pp. 17-18).
Uma solução geral para o sistema (2.6) pode ser obtido pela superposição linear de n soluções linearmente independentes $\{x^1(t), \cdots, x^n(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j(t),$$

onde as n constantes c_j são determinadas pelas condições iniciais.

Se a matriz A $n \times n$ tem n vetores próprios linearmente indepedentes v^j com $j = 1, \cdots, n$, então podemos tomar como base para o espaço de soluções as funções vetoriais

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t}v^j$$

onde λ_j é o valor próprio associado com v^j. Para valores próprios complexos sem multiplicidade, λ_j, isto é, $\lambda_j = \alpha_j \pm \beta_j$, tendo vetores próprios $v^R \pm iv^I$, podemos tomar

$$x^j = e^{\alpha_j t}(v^R cos\beta t - v^I sen\beta t)$$
$$x^{j+1} = e^{\alpha_j t}(v^R cos\beta t + v^I sen\beta t)$$

como o par associado de soluções reais linearmente independentes.

Fluxos e Subespaços Invariantes

Dado qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x_0, t) = e^{tA}x_0$ é o ponto no qual a solução do sistema (2.6) no ponto x_0 encontra-se após o tempo t. Portanto o operador $e^{tA} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contém a informação global sobre o conjunto de todas as soluções de (2.6) já que (2.8) se verifica em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$.
Temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : J \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto \phi(t, x) = e^{tA}x \end{aligned}$$

define um fluxo em $\mathbb{R}^n$, pois satisfaz

i) $\phi(0, x_0) = e^{0A}x_0 = x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$

ii) $\phi(t+s, x_0) = e^{(t+s)A}x_0 = e^{tA}.e^{sA}x_0 = e^{tA}(\phi(s, x_0)) = \phi(t, \phi(s, x_0)), \quad \forall \ \ t, s \in J.$

e este fluxo é gerado por um campo vetorial Ax definido em $\mathbb{R}^n$.
O fluxo $e^{tA} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ descreve todas as soluções do sistema (2.6). Neste conjunto certas soluções tem um papel muito importante; aqueles que se encontram nos subespaços lineares gerado pelo vetores próprios.

Definição 2.15 *Um subespaço $E \subset \mathbb{R}^n$ é dito* ***subespaço invariante*** *com respeito ao fluxo $e^{tA} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $e^{tA}E \subset E$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Estes subespaços são invariantes sob e^{tA}, em particular, se v^j é um vetor próprio real de A e, portanto de e^{tA}, então a solução baseada no ponto $c_j v^j \in \mathbb{R}^n$ permanecem no $span\{v^j\}$ para todo tempo; de fato

$$x(cv^j, t) = cv^j e^{\lambda_j t}.$$

Similarmente, os espaços bidimensionais gerados por $Re\{v^j\}, Im\{v^j\}$, quando v^j é um vetor próprio complexo, é invariante sob e^{tA}.
Dividimos os espaços próprios gerados pelos vetores próprios em três classes:

$$\text{O subespaço estável, } E^s = span\{v^1, \cdots, v^{n_s}\}$$
$$\text{O subespaço instável, } E^u = span\{u^1, \cdots, u^{n_u}\}$$
$$\text{O subespaço central, } E^c = span\{w^1, \cdots, w^{n_c}\}$$

onde $v^1, \cdots, v^{n_s}$ são os n_s vetores próprios associados aos valores próprios com a parte real negativa, $u^1, \cdots, u^{n_u}$ são os n_u vetores próprios estão associados aos valores próprios com a parte real positiva e $w^1, \cdots, w^{n_u}$ são os n_c vetores próprios associados aos valores próprios que tem a parte real igual a zero. Além disso, temos que $n_s + n_u + n_c = n$.

Teorema 2.6 ***(Decomposição Primária)*** *Seja A uma matriz real $n \times n$ diagonalizável em $\mathbb{C}$. Então*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c \tag{2.9}$$

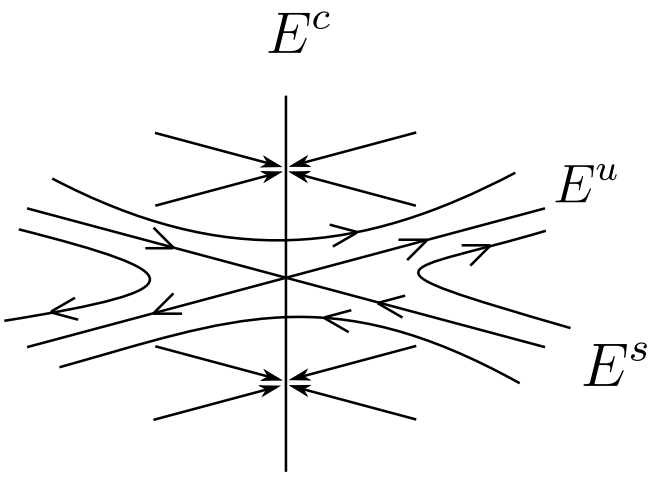
onde E^s, E^u e E^c são os espaços estável, instável e central de (2.6), respectivamente. Além disso E^s, E^u e E^c são invariantes com respeito ao fluxo e^{tA} de (2.6) respectivamente.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [11](pp. 55).
Este teorema diz que qualquer solução que começa em E^s, E^u ou E^c em um tempo $t = 0$ permanece em E^s, E^u ou E^c, respectivamente, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação:
As soluções que se encontram em E^s são caracterizadas pelo decaimento exponencial (seja monótona ou oscilatória), os que se encontram em E^u estão caracterizados pelo crescimiento exponencial e as soluções que se encontram em E^c não tem a característica como em E^s ou E^u. Veja a **Figura 2**.

Agora vamos considerar o sistema linear

Figura 2 – Os subespaços E^s, E^u e E^c.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

$$\dot{x} = Ax,$$

onde A é uma matriz 2×2 com entradas constantes reais, de modo que podemos obter importante informação qualitativa sobre as soluções a partir dos valores próprios de A. Vamos considerar os casos mais importantes.

a) A tem valores próprios reais de sinais opostos. Neste caso dizemos que o origem é um ponto de **sela**.

b) Todos os valores próprios de A tem a parte real negativa. Então dizemos que o origem é um ponto de **nó**.

c) Todos os valores próprios de A tem a parte real positiva. Então dizemos que o origem é um ponto de **foco**.

d) Os valores próprios de A são imaginarios puros. Neste caso dizemos que o origem é um ponto de **centro**.

O seguinte teorema vai caracterizar os pontos de equilíbrio mais importantes.

Teorema 2.7 *Seja*

$$\dot{x} = Ax$$

um sistema linear, onde A é uma matriz de ordem 2×2 com entradas constantes de modo que $\alpha = det(A) \neq 0$ e $\beta = tr(A)$.

i) Se $\alpha < 0$. Então o sistema linear acima tem na origem um ponto de sela

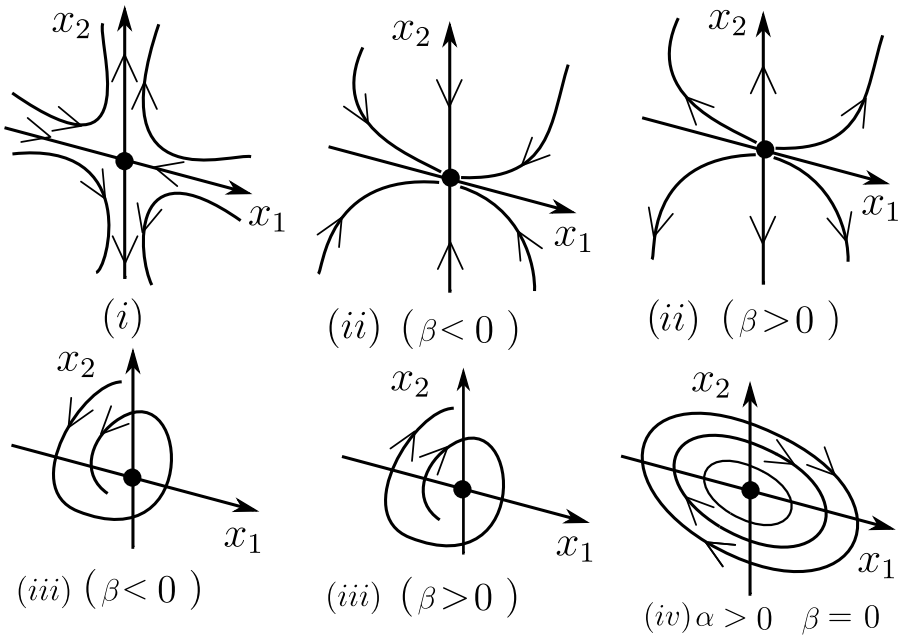
ii) Se $\alpha > 0$ e $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$. Então o sistema linear acima tem na origem um ponto de nó. Além disso, se $\beta < 0$, dizemos que a origem é um nó estável e se $\beta > 0$, dizemos que a origem é um nó instável.

iii) Se $\alpha > 0, \beta^2 - 4\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$. Então o sistema linear acima tem na origem um ponto de foco. Além disso, se $\beta < 0$, dizemos que a origem é um foco estável e se $\beta > 0$, dizemos que a origem é um foco instável.

iv) $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. Então o sistema linear acima tem na origem um ponto de centro.

Veja a **Figura 3.**
A demonstração deste teorema pode ser vista em [11](pp. 25-26).

Figura 3 – Pontos de equilíbrio para o sistema linear $\dot{x} = Ax$.



Fonte: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.

2.4 SISTEMAS NÃO LINEARES

Na seção acima vimos que para aplicações suaves de classe $\mathcal{C}^1$ segundo o teorema de existência e unicidade a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x); \;\; x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

está definida, pelo menos, em uma vizinhança $t \in \;]-c, c[$ de $t = 0$. Isto é, o fluxo local $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é definido por $\phi_t(x_0) = x(t, x_0)$. De forma análoga no caso linear mas pode não ter a formula geral e^{tA}.
Agora, suponhamos que temos um ponto de equilíbrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Vamos estudar o comportamento das soluções numa vizinhança $\mathcal{V}$ do ponto $\bar{x}$ fazendo uma linearização do sistema (2.10) em $\bar{x}$. Isto é, estudando o sistema linear

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi; \;\; \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

onde $Df = [\frac{\partial}{\partial x_j} f_i]$ é a matriz Jacobiana das primeiras derivadas parciais da função $f = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ e $x = \bar{x} + \xi, \;\; |\xi| \ll 1$. Como (2.11) é um sistema linear da forma (2.6), o mapa do fluxo linearizado $D\phi_t(\bar{x})\xi$ resultante de (2.11) em um ponto $\bar{x}$ é obtido de (2.11) através da integração

$$D\phi_t(\bar{x})\xi = e^{tDf(\bar{x})\xi}.$$

Agora, mediante dois resultados fundamentais em sistemas dinâmicos podemos estudar o comportamento das soluções do sistema (2.10) numa vizinhança $\mathcal{V}$ do ponto de equilíbrio $\bar{x}$, baseado no comportamento das soluções do sistema linearizado (2.11). No entanto precisamos de algumas definições prévias.

Definição 2.16 *Sejam f_1 e f_2 dois campos vetoriais definidos nos abertos de $\mathbb{R}^n$, U_1 e U_2, respectivamente. Diz-se que f_1 é **topologicamente equivalente** a f_2 quando existe um homeomorfismo $h : U_1 \longrightarrow U_2$ que leva as órbitas de f_1 nas órbitas de f_2 preservando a orientação.*

Definição 2.17 *Sejam $\phi_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dois fluxos gerados pelos campos vetoriais $f_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Diz-se que f_1 é **topologicamente conjugado** a f_2 quando existe um homeomorfismo $h : U_1 \longrightarrow U_2$ de modo que $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in V_1$.*

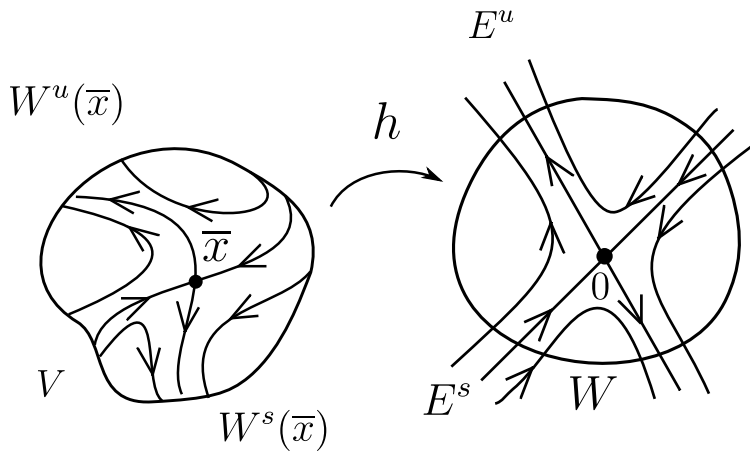
Definição 2.18 *Dizemos que $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio **hiperbólico** para um campo vetorial $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, 1 \leq r < \infty$ se $Df(\bar{x})$ não tem valores próprios com a parte real zero.*

Teorema 2.8 ***(Hartman-Grobman)*** *Sejam $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^r, 1 \leq r < \infty$ e $\bar{x} \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de f. Então f e $Df(\bar{x})$ são topologicamente conjugados. Mais precisamente, existe uma vizinhança V de $\bar{x}$ em U e uma vizinhança W de 0 em $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $h : V \to W$ tal que*

$$h \circ f = Df(\bar{x}) \circ h.$$

O esboço da demonstração deste teorema pode ser vista em [11](pp. 121-123).
Este teorema diz que numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ existe um homeomorfismo h que leva as órbitas do sistema não linear (2.10) nas órbitas do sistema linear (2.11). Veja a **Figura 4.**

Figura 4 – Teorema(Hartman-Grobman)



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields

Definição 2.19 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança do ponto de equilíbrio $\bar{x}$. A* ***variedade estável local*** *e* ***variedade instável local*** *de $\bar{x}$, denotados por $W^s_{loc}(\bar{x})$ e $W^u_{loc}(\bar{x})$, são respectivamente:*

$$W^s_{loc}(\bar{x}) = \{x \in U : \phi_t(x) \longrightarrow \bar{x}, t \longrightarrow \infty, \ \ \phi_t(x) \in U \ \ \forall \ \ t \geq 0\} \tag{2.12}$$

$$W^u_{loc}(\bar{x}) = \{x \in U : \phi_t(x) \longrightarrow \bar{x}, t \longrightarrow -\infty, \ \ \phi_t(x) \in U \ \ \forall \ \ t \leq 0\} \tag{2.13}$$

No entanto, apesar de $W^s_{loc}(\bar{x})$ e $W^u_{loc}(\bar{x})$ serem chamados variedades são definidos como conjuntos sem nenhuma estrutura de variedade. Mas o teorema a seguir garante que tais conjuntos são, de fato variedades.

Teorema 2.9 ***(Da variedade estável e instável para um ponto de equilíbrio)*** *Suponhamos que $\dot{x} = f(x)$ tem um ponto de equilíbrio hiperbólico $\bar{x}$. Então existe uma*

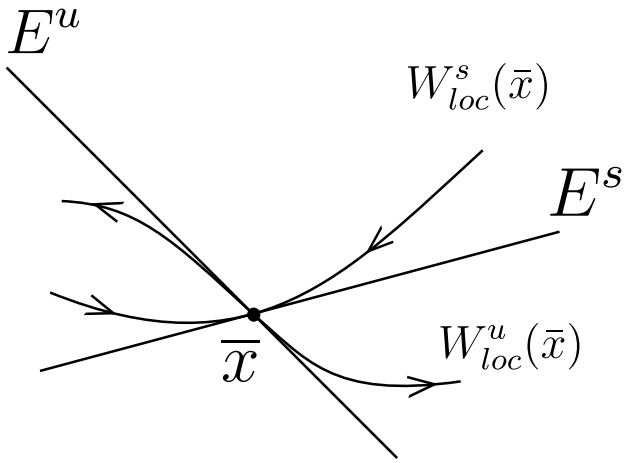
n_s-variedade estável local $W^s_{loc}(\bar{x})$ tangente ao espaço próprio E^s no ponto $\bar{x}$ e uma n_u-variedade instável local $W^u_{loc}(\bar{x})$ tangente ao espaço próprio E^u no ponto $\bar{x}$. $W^s_{loc}(\bar{x})$ e $W^u_{loc}(\bar{x})$ são da mesma classe de diferenciabilidade da função f.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [11](pp. 107-108).

Observação:

As variedades $W^s_{loc}(\bar{x}), W^u_{loc}(\bar{x})$ são o gráfico de uma função de domínio em E^s, E^u e imagem em E^u, E^s respectivamente. Veja a **Figura 5.**

Figura 5 – As variedades estável e instável locais $W^s_{loc}(\bar{x})$ e $W^u_{loc}(\bar{x})$ de um ponto de equilíbrio hiperbólico $\bar{x}$.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

As variedades invariantes locais W^s_{loc} e W^u_{loc} tem variedades globais análogas $W^s(\bar{x})$ e $W^u(\bar{x})$ obtidos deixando pontos em W^s_{loc} percorrendo o fluxo para trás no tempo e os pontos em W^u_{loc} percorrendo o fluxo para o frente no tempo, isto é:

Definição 2.20 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança do ponto de equilíbrio $\bar{x}$. Então a* ***variedade estável global*** *e* ***variedade instável global*** *de $\bar{x}$ denotados por $W^s(\bar{x})$ e $W^u(\bar{x})$ são respectivamente:*

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{t\leq 0} \phi_t(W^s_{loc}(\bar{x})) \tag{2.14}$$

$$W^u(\bar{x}) = \bigcup_{t\geq 0} \phi_t(W^u_{loc}(\bar{x})) \tag{2.15}$$

A existência e unicidade das soluções do sistema não linear (2.10) garante que $W^s(\bar{x}_1)$ e $W^s(\bar{x}_2)$ com $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ não podem se intersectar. De maneira análoga $W^s(\bar{x}_1)$ e $W^s(\bar{x}_2)$ com $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ não podem se intersectar. Além disso, $W^s(\bar{x}_1)$ não pode se autointersectar, similarmente $W^u(\bar{x}_1)$ não podem se autointersectar. No entanto as interseções das variedades estável e instável de pontos de equilíbrio distintos ou do mesmo ponto de equilíbrio

podem ocorrer e de fato são uma fonte de uma maior parte do comportamento complexo que se encontram em sistemas dinâmicos.

Definição 2.21 *Dizemos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equlíbrio* ***não hiperbólico*** *para um campo vetorial $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r, 1 \leq r < \infty$ se $Df(\bar{x})$ tem algum valor próprio com a parte real igual a zero.*

Agora vamos enunciar um teorema importante para os pontos de equilíbrio não hiperbólicos.

Teorema 2.10 ***(Da variedade central para um ponto de equilíbrio não hiperbólico)***.
Suponhamos que $\dot{x} = f(x)$ tem um ponto de equilíbrio não hiperbólico $\bar{x}$. Então existe uma n_c-variedade central local $W^c_{loc}(\bar{x})$ tangente ao espaço próprio E^c no ponto $\bar{x}$.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [3](pp. 319-321).

Observação:
As varidades estável e instável de um ponto de equilíbrio existem e são únicas, a variedade central de um ponto de equilíbrio existe mas pode não ser única. Além disso a variedade central do ponto de equilíbrio é localmente o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^k$.

A aplicacão de Primeiro Retorno de Poincaré.

Seja γ uma órbita periódica de algum fluxo $\phi_t \in \mathbb{R}^n$ gerado pelo campo vetorial não linear $f(x)$. Tomamos uma seção transversal local $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $n-1$. A hipersuperficie Σ não é necessariamente planar, mas deve ser escolhido de modo que o fluxo é transversal sempre a Σ. Isto é conseguido se $f(x).\eta(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$, onde $\eta(x)$ é a unidade normal á Σ em x. Denotamos por p o único ponto onde γ intersecta Σ e $U \subset \Sigma$ uma vizinhança de p. (Se γ tem várias interseções com Σ, então encolhemos Σ até que γ intersecte à Σ uma vez só). Então a **aplicacão de primeiro retorno de Poincaré** $\mathcal{P} : U \to \Sigma$ é definido para um ponto $q \in U$ por:

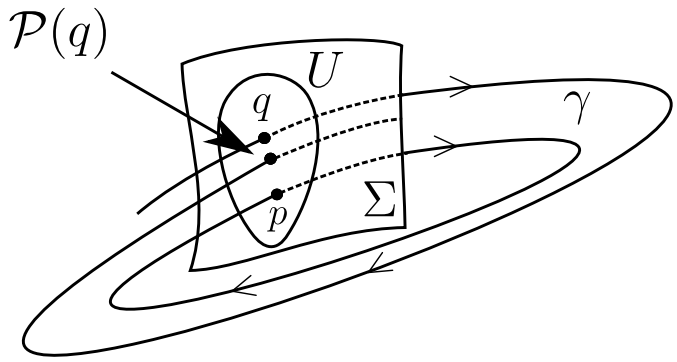
$$\mathcal{P}(q) = \phi_\tau(q),$$

onde $\tau = \tau(q)$ é o tempo para que a órbita $\phi_t(q)$ baseada em q, volta a intersectar novamente a seção Σ. Ver a **Figura 6.**

Definição 2.22 *Dizemos que $f = O(g)$ quando $x \to x_0$ sempre que exista uma constante $C > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Figura 6 – A Aplicação de Poincaré e a seção transversal local Σ.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

para x suficientemente perto de x_0.
Por outro lado dizemos que $f = o(g)$ quando $x \to x_0$ sempre que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

3 BIFURCAÇÕES DE TIPO SELA-NÓ E A INTEGRAL DE MELNIKOV.

O termo **bifurcação** foi originalmente usado por Henri Poincaré $(1854 - 1912)$ para descrever a divisão das soluções de equilíbrio em uma família de equações diferenciais da forma

$$\dot{x} = f_\mu(x); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k \tag{3.1}$$

que depende de um parâmetro $k-$dimensional μ. Então as soluções de equlíbrio do sistema (3.1) estão dados pela equação $f_\mu(x) = 0$. Conforme μ varia, o Teorema da Aplicação Implícita implica que estes equilíbrios são descritos por funções suaves de μ longe dos pontos no quais o Jacobiano de $\dot{x} = f_\mu(x)$ com respeito a x tem valor próprio com parte real zero.

Definição 3.1 *Seja (x_0, μ_0) um ponto de equilíbrio de uma família de equações diferenciais da forma (3.1), onde $D_x f_\mu(x_0, \mu_0)$ tem um valor próprio 0. Então, dizemos que (x_0, μ_0) é um **ponto de bifurcação** e que μ_0 é **valor de bifurcação**.*

3.1 BIFURCAÇÃO DE TIPO SELA-NÓ

Vamos caracterizar mediante o teorema a seguir quando um sistema de equações diferenciais ordinárias tem uma bifurcação de tipo sela-nó.

Teorema 3.1 *Seja $\dot{x} = f_\mu(x)$ um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ dependendo só de um parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. Quando $\mu = \mu_0$, assumimos que existe um equilíbrio p para o qual as seguintes hipóteses são satisfeitas*

SN1) Zero é um valor próprio simples de $D_x f_{\mu_0}(p)$ com vetores próprios v e w pela direita e esquerda, respectivamente. $D_x f_{\mu_0}(p)$ tem k valores próprios com a parte real negativa e $(n - k - 1)$ valores próprios com a parte real positiva (contando multiplicidades.)

SN2) $w.\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(p, \mu_0) \neq 0.$

SN3) $w.D_x^2 f_{\mu_0}(p)(v, v) \neq 0.$

Então:

1) Existe uma curva de equilíbrios em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ passando através de (p, μ_0), tangente ao hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$

2) Dependendo dos sinais das expresões $(SN2)$ e $(SN3)$, não existem equilíbrios perto de (p, μ_0) quando $\mu < \mu_0 (\mu > \mu_0)$ e existem dois equilíbrios perto de (p, μ_0) para cada valor do parâmetro $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$.

Os equilíbrios para $\dot{x} = f_\mu(x)$ perto de (p, μ_0) são hiperbólicos e tem variedade estáveis de dimensão k e $k+1$, respectivamente.

Demonstração:
Seja $\dot{x} = f_\mu(x)$ um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ dependendo só de um parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$, de modo que para $\mu = \mu_0$, existe um ponto de equilíbrio, p, isto é:

$$f_{\mu_0}(p) = 0, \tag{3.2}$$

e que satisfaz $(SN1), (SN2)$ e $(SN3)$. Queremos utilizar o Teorema da Aplicação Implícita. De fato definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, \mu) & \longmapsto & F(x, \mu) = f_\mu(x), \end{array}$$

onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que:

$$F(p, \mu_0) = f_{\mu_0}(p) = 0. \tag{3.3}$$

Escrevendo $D_x f_{\mu_0}(p) = \frac{\partial f_\mu}{\partial x}(p, \mu_0)$ na forma canônica de Jordan, temos:

$$D_x f_{\mu_0}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_n \end{pmatrix}_{\beta,}$$

onde cada J_i com $1 \leq i \leq n$ é um bloco de Jordan associado a um valor próprio com a parte real não nula, por $(SN1)$. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz $D_x f_{\mu_0}(p)$ é uma matriz de Jordan. Como

$$DF(p, \mu_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_\mu}{\partial x}(p, \mu_0) & \frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(p, \mu_0) \end{pmatrix}_{\beta,}$$

temos que

$$DF(p, \mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & J_1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n & a_n \end{pmatrix}_{\beta,}$$

onde $a_1 = w.\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(p, \mu_0) \neq 0$, por $(SN2)$. Fazemos a identificação de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$ da seguinte forma:
Seja $(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (x, \mu) & = & (x_1 w + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n, \mu) \\ & = & (x_1, (x_2, \cdots, x_n, \mu)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \end{array}$$

então, temos que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é tal que

$$D_2F(p,\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ J_1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n & a_n \end{pmatrix}_{n\times n,}$$

logo $D_2F(p,\mu_0)$ é um isomorfismo linear. Pelo Teorema de Aplicação Implícita, existem abertos V de p_1 em $\mathbb{R}$ e W de $(p_2,\cdots,p_n,\mu_0)$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

i) $V \times W \subset U$.

ii) $(p,\mu_0) \cong (p_1,(p_2,\cdots,p_n,\mu_0)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

iii) para cada $t \in V$, existe um único $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que $(t,\xi(t)) \in U$ e $F(t,\xi(t)) = 0$.

Temos, ainda, que ξ é de classe $\mathcal{C}^r$ com $r \geq 1$ e

$$\dot{\xi}(t) = -\Big[D_2F(t,\xi(t))\Big]^{-1} \circ D_1F(t,\xi(t)), \quad \forall t \in V.$$

Em particular

$$\dot{\xi}(p_1) = -\Big[D_2F(t,\xi(t))\Big]^{-1} \circ D_1F(t,\xi(t)), \quad \forall t \in V.$$

Como $D_1F((p_1,(p_2,\cdots,p_n,\mu_0))) = D_1F(p,\mu_0)$ e $D_1F(p,\mu_0).h = (0,\cdots,0)$ para todo $h \in V$. Então $\dot{\xi}(p_1) = 0$. Mas a curva formada pelos pontos de equilíbrio é dada por

$$\begin{array}{rccc} \sigma : V & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ t & \longmapsto & \sigma(t) = (t,\xi(t)) \end{array}$$

logo $\dot{\sigma}(t) = (1,\dot{\xi}(t))$ e, então, $\dot{\sigma}(p_1) = (1,0,\cdots,0) = \lambda w$. Então $\dot{\sigma}(p_1)$ é tangente ao plano $\mu = \mu_0$.
Portanto, a curva formada pelos pontos de equilíbrio é tangente ao hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$.
Finalmente como

$$\ddot{\xi}(t) = -\Big[D_2F(t,\xi(t))\Big]^{-1} \circ \Big[D_1^2F(t,\xi(t)) + 2D_{12}^2F(t,\xi(t)).\dot{\xi}(t) + D_2^2F(t,\xi(t)).(\dot{\xi}(t))^2\Big].$$

Então

$$\ddot{\xi}(t) = -\Big[D_2F(t,\xi(t))\Big]^{-1} \circ D_1^2F(t,\xi(t)).$$

Mas $D_1^2F(p,\mu_0) = D_x^2F(p,\mu_0)(v,v)$.
Logo seja $\beta(t)$ a última coordenada de $\sigma(t)$, então p_1 é um ponto crítico pois $\dot{\beta}(p_1) = 0$.
Agora suponhamos que $\ddot{\beta}(p_1) = 0$, então teríamos que

$$\ddot{\xi}(p_1) = (\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-2},0).$$

Então

$$-\Big[D_2F(p,\mu_0)\Big]^{-1}.(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-2},0) \;=\; D_x^2F(p,\mu_0)(v,v),$$

logo

$$D_x^2F(p,\mu_0)(v,v) \;=\; (0,J_1\alpha_2,\cdots,J_n\alpha_{n-2}),$$

então $w.D_x^2F(p,\mu_0)(v,v)=0$, sendo uma contradição. ■

Definição 3.2 *Uma família de equações diferenciais ordinárias da forma $\dot{x}=f_\mu(x)$, com $x\in\mathbb{R}^n$ e $\mu\in\mathbb{R}$ que tem um ponto de equilíbrio (x_0,μ_0) tal que satisfaz as condiçãoes $(SN1),(SN2)$ e $(SN3)$ do teorema anterior. Dizemos que $\dot{x}=f_\mu(x)$ tem uma* ***bifurcação de tipo sela-nó*** *no ponto (x_0,μ_0).*

Bifurcação de Sela-nó para uma família de equações unidimensionais.

Seja $\dot{x}=f_\mu(x)$, com $x\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$, uma família de equações diferenciais a um parâmetro tal que as seguintes condições são satisfeitas

1) (x_0,μ_0) é ponto de equilíbrio não hiperbólico, isto é, $D_xf_\mu(x_0,\mu_0)=0$.

2) $\frac{\partial}{\partial\mu}f_\mu(x_0,\mu_0)\neq 0$.

3) $\frac{d}{dx}\mu(\mu_0)=0$.

4) $\frac{d^2}{dx^2}\mu(\mu_0)\neq 0$.

Então dizemos que a família de equações diferenciais $\dot{x}=f_\mu(x)$ tem bifurcação do tipo sela-nó em (x_0,μ_0).

Exemplo

Consideramos o seguinte campo vetorial

$$\dot{x}=f(\mu,x)=\mu-x^2;\quad x\in\mathbb{R}\ \text{ e }\ \mu\in\mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Então,

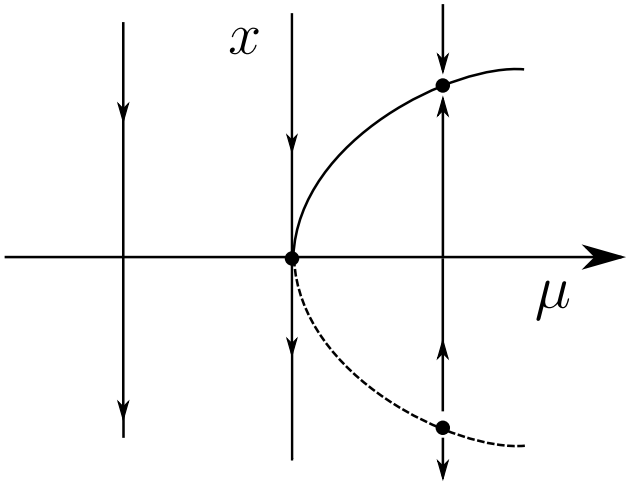
$$f(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\ \text{ e }\ \frac{\partial f}{\partial\mu}(0,0)=1\neq 0. \tag{3.5}$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio do sistema (3.4) é dado pela curva

$$\mu=x^2 \tag{3.6}$$

representado pela parábola no plano $\mu-x$ como mostra a **Figura 7.** Nesta figura as linhas verticais representam o fluxo gerado pelo campo vetorial (3.4) ao longo da direção x.

Figura 7 – Bifurcação de Tipo Sela-Nó.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Isto é, para $\mu < 0$, (3.4) não tem pontos de equilíbrio e o campo vetorial é decrescente em x. Para $\mu > 0$, o campo vetorial (3.4) tem dois pontos de equilíbrio $x = \sqrt{\mu}$ e $x = -\sqrt{\mu}$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, x) = -2x. \tag{3.7}$$

avaliando o ponto de equilíbrio $x = \sqrt{\mu}$ na igualdade acima, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, \sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu}.$$

Então os equilíbrios para $\sqrt{\mu}$ positivo são estáveis (representada pelo ramo contínuo da parábola $\mu = x^2$), e de forma similar avaliando o ponto de equilíbrio $x = -\sqrt{\mu}$ na igualdade (3.7) temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, -\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu}.$$

Então os equilíbrios para $x = -\sqrt{\mu}$ são instáveis (representada pelo ramo pontilhada da parábola $\mu = x^2$).

Agora como $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 1 \neq 0$ então pelo Teorema da Aplicação Implícita, existe uma única função $\mu = \mu(x)$ com $\mu(0) = 0$ definida para x suficientemente pequeno de modo que $f(x, \mu(x)) = 0$.

Logo, temos que:

$$\frac{d}{dx} f(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu(x)}{dx}. \tag{3.8}$$

avaliando em ponto $(0, 0)$ a igualdade acima, obtemos

$$\frac{d\mu(0)}{dx} = 0.$$

Ou seja, a curva de pontos de equilíbrio é tangente à linha $\mu = 0$ em $x = 0$.
Em forma similar diferenciando a igualdade (3.8) com respeito à x, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dx^2}(x,\mu(x)) = 0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\mu(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x,\mu(x))\frac{d\mu}{dx}(x) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x,\mu(x))\Big(\frac{d\mu}{dx}(x)\Big)^2 + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu(x))\frac{d^2\mu}{dx^2}.\end{aligned}$$

Logo avaliando a igualdade acima no ponto $(0,0)$, obtemos

$$\frac{d^2\mu(0)}{dx^2} \neq 0.$$

Observação:
Para este tipo de bifurcação temos que em um lado do valor de bifurcação ($\mu < 0$) o sistema $\dot{x} = f_\mu(x)$ não possui pontos de equilíbrio e no outro lado ($\mu > 0$) o sistema possui dois pontos de equilíbrio hiperbólicos.

3.2 A INTEGRAL DE MELNIKOV PARA UMA SELA-NÓ HIPERBÓLICA.

Nesta seção queremos estudar a aplicação de primeiro retorno de Poincaré para sistemas da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

onde:

i) f é um campo vetorial Hamiltoniano de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 2$.

ii) g é uma aplicação periódica de período T de classe $C^r, r \geq 2$ e $\epsilon g(x,t)$ é uma ϵ-perturbação onde $\epsilon > 0$.

As aplicações f e g são limitadas em conjuntos limitados.

Definição 3.3 *Seja p_0 um ponto hiperbólico do sistema (3.9) para $\epsilon = 0$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, tal que $p \in W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$ é dito ponto* ***homoclínico****. Se $W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$ tem interseção transversal, então o ponto é chamado de ponto homoclínico* ***transversal****.*

Definição 3.4 *Se $p \in W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$ com $p \neq p_0$, então qualquer solução na órbita de p do sistema (3.9) para $\epsilon = 0$. Aproxima-se para p_0, quando $t \to \pm\infty$. A órbita de p é chamada órbita* ***homoclínica.***

Vamos desenvolver um método que permita provar a existência ou não existência de pontos homoclínicos transversais da aplicação de primeiro retorno de Poincaré para uma órbita periódica. Então, para nosso estudo vamos supor as seguintes hipóteses:

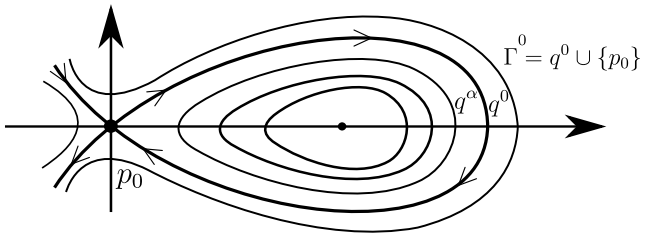
A_1) Para $\epsilon = 0$, em (3.9) possui uma órbita homoclínica $q^0(t)$ para o ponto de equilíbrio hiperbólico de sela p_0.

A_2) $\Gamma^0 = \{q^0(t) \setminus t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\}$ e tal que o $int(\Gamma^0)$ está preenchida de uma família contínua $\{q^\alpha\}_{\alpha \in]-1,0[}$ de órbitas periódicas.

A_3) $h_\alpha = \mathcal{H}(q^\alpha(t))$ é constante para todo t e $q^\alpha(t + T_\alpha) = q^\alpha(t)$. Então T_α é uma função diferenciável de h_α e $\frac{dT_\alpha}{dh_\alpha} > 0$ no $int(\Gamma^0)$, onde $\mathcal{H}$ é a função Hamiltoniana do campo f.

Veja a **Figura 8.**

Figura 8 – Espaço de fase associado para as hipóteses $(A_1), (A_2)$ e (A_3).



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Observação:

De A_2) e A_3) temos que $T_\alpha \to \infty$ monotonicamente quando $\alpha \to 0$.
Agora fazendo $\theta = t \mod(T)$ com $t \in \mathbb{R}$, então o sistema (3.9) transforma-se em um sistema autônomo equivalente da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, \theta) \\ \\ \dot{\theta} = 1 \qquad\qquad\qquad (x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1; \ \text{ com } \ S^1 = \mathbb{R} \mod(T) \end{cases}$$

Considere a aplicação de primeiro retorno de Poincaré

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\epsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} &\to \Sigma^{t_0} \\ p &\longmapsto \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p) \end{aligned}$$

para o sistema de equações diferenciais ordinárias (3.9) onde o conjunto

$$\Sigma^{t_0} = \{(x,t) \ \mid \ t = t_0 \in [0,T]\} \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$$

é uma seção transversal global no tempo t_0 para o fluxo autônomo.
De (A_1) temos que $\mathcal{P}_0^{t_0}$ tem um ponto hiperbólico de sela p_0. (A_2) implica que $\Gamma^0 = W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$ esta preenchida de pontos homoclínicos não transversais para $P_0^{t_0}$. **Note** que 0 aqui implica que $\epsilon = 0$ no sistema (3.9).

Lema 3.1 *Sob as hipóteses $(A_1), (A_2)$ e (A_3) acima, para $0 < \epsilon << 1$, (3.9) tem uma única órbita hiperbólica periódica $\gamma_\epsilon^0(t) = p_0 + O(\epsilon)$. Analogamente a aplicação de Poincaré $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}$ tem um único ponto de sela hiperbólica $p_\epsilon^{t_0} = p_0 + O(\epsilon)$.*

Demonstração:
Queremos utilizar o Teorema da Aplicação Implícita. De fato, se define

$$\begin{aligned} F : U \subset]0,1[\times\Sigma^{t_0} &\longrightarrow \Sigma^{t_0} \\ (\epsilon, p) &\longmapsto F(\epsilon,p) = p - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p), \end{aligned}$$

onde U é um subconjunto aberto de $]0,1[\times\Sigma^{t_0}$.
Note que $G(x,\theta,\epsilon) = (f(x) + \epsilon g(x,\theta), 1)$ é diferenciável, pois estamos assumindo que f e g são de classe $\mathcal{C}^2$. Então, a aplicação de primeiro retorno de Poincaré $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}$ é diferenciável, logo F é diferenciável.
Observe que $F(0,p_0) = p_0 - \mathcal{P}_0^{t_0}(p_0) = p_0 - p_0 = 0$ e

$$DF(\epsilon,p) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial\epsilon}(p - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p)) & Id - D\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p) \end{array} \right).$$

Avaliando em $(0,p_0)$:

$$DF(0,p_0) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial\epsilon}(p - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p)) \mid_{(\epsilon,p)=(0,p_0)} & Id - D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0) \end{array} \right).$$

Como $D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0)$ é hiperbólica, temos que $1 \notin \sigma(D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0))$. Portanto $Id - D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0)$ é invertível.
Agora $D_2F(0,p_0) : \Sigma^{t_0} \longrightarrow \Sigma^{t_0}$ representado por $Id - D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0)$ é um isomorfismo linear, e de acordo com o Teorema da Aplicação Implícita, existem $\mathcal{V}, \mathcal{Z}$ abertos (onde $\epsilon \in \mathcal{V}, p_0 \in \mathcal{Z} \subset U$) com a seguinte propriedade:
Para cada $t \in \mathcal{V}$ há um único $\xi(t) \in \Sigma^{t_0}$ tal que $(t,\xi(t)) \in \mathcal{Z}$ e $F(t,\xi(t)) = p_0 - \mathcal{P}_0^{t_0}(p_0) = 0$.

$$\xi(t) - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(\xi(t)) = 0 \Longrightarrow \xi(t) = \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(\xi(t)).$$

Logo para cada t existe uma única órbita periódica hiperbólica $\gamma_\epsilon^0(t)$ perto de p_0 e portanto, existe um único ponto de sela hiperbólico $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0} = p_0 + O(\epsilon)$. ■

Lema 3.2 *As variedades estável e instável locais $W^s_{loc}(\gamma_\epsilon)$ e $W^u_{loc}(\gamma_\epsilon)$ da órbita perturbada γ_ϵ estão $\mathcal{C}^r-$perto das variedades estável e instável locais da órbita periódica não-perturbada $p_0 \times S^1$. Além disso, as órbitas $q^s_\epsilon(t,t_0)$ e $q^u_\epsilon(t,t_0)$ estão contidas em $W^s(\gamma_\epsilon)$ e $W^u(\gamma_\epsilon)$ respectivamente, podem ser expressas por:*

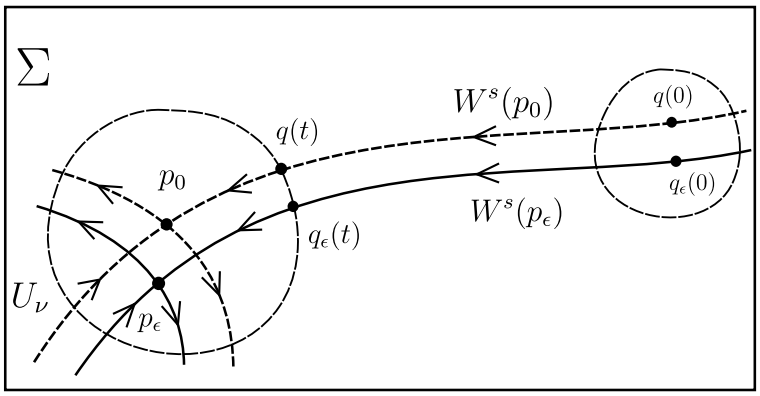
$$q^s_\epsilon(t,t_0) \;=\; q^0(t-t_0) + \epsilon q^s_1(t,t_0) + O(\epsilon^2); \quad t \in [t_0, \infty[. \tag{3.10}$$

$$q^u_\epsilon(t,t_0) \;=\; q^0(t-t_0) + \epsilon q^u_1(t,t_0) + O(\epsilon^2); \quad t \in]-\infty, t_0[. \tag{3.11}$$

Demonstração:
Pelo **Teorema 2.9** temos que, as variedades locais do sistema perturbado existem. Agora fixamos uma $\nu-$ vizinhança com, $0 < \epsilon << \nu << 1$, $\mathcal{U}_\nu$ de p_0 de modo que: para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $W^s_{loc}(\gamma_\epsilon)$ e $W^u_{loc}(\gamma_\epsilon)$ são $\epsilon-$perto de $W^s_{loc}(p_0)$ e $W^u_{loc}(p_0)$ respectivamente. Veja a **Figura 9.**

Agora para todo $t \in [0,T]$. Seja $q^s_\epsilon(t) \in W^s_\epsilon(p_\epsilon)$ e $q^s(t) \in W^s(p_0)$, temos que:

Figura 9 – $W^s_{loc}(\gamma_\epsilon)$ e $W^u_{loc}(\gamma_\epsilon)$ são $\epsilon-$pertos de $W^s_{loc}(p_0)$ e $W^u_{loc}(p_0)$.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

$$q^s(t) \;=\; q^s(0) + \int_0^t f(q^s(r))dr \tag{3.12}$$

e

$$q^s_\epsilon(t) \;=\; q^s_\epsilon(0) + \int_0^t f(q^s_\epsilon(r))dr + \epsilon \int_0^t g(q^s_\epsilon(r), r)dr. \tag{3.13}$$

Note que: $q^s_\epsilon(0) = q^s(0) + O(\epsilon)$. Logo subtraindo (3.13) e (3.12), obtemos

$$q^s_\epsilon(t) - q^s(t) = q^s_\epsilon(0) - q^s(0) + \int_0^t [f(q^s_\epsilon(r)) - f(q^s(r))]dr + \epsilon \int_0^t g(q^s_\epsilon(r), r)dr, \tag{3.14}$$

aplicando a desigualdade triangular na igualdade (3.14) temos que:

$$\begin{aligned} \mid q_\epsilon^s(t) - q^s(t) \mid &= \left| q_\epsilon^s(0) - q^s(0) + \int_0^t [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))]dr + \epsilon \int_0^t g(q_\epsilon^s(r), r)dr \right| \\ &\leq \mid q_\epsilon^s(0) - q^s(0) \mid + \left| \int_0^t [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))]dr \right| + \left| \epsilon \int_0^t g(q_\epsilon^s(r), r)dr \right| \\ &\leq \mid q_\epsilon^s(0) - q^s(0) \mid + \int_0^t \mid [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))] \mid dr + \\ &\quad + \epsilon \int_0^t \mid g(q_\epsilon^s(r), r) \mid dr. \end{aligned}$$

Agora, para facilitar as contas, usaremos as seguintes notações: $\xi(t) = q_\epsilon^s(t) - q^s(t)$, L é a constante de Lipschitz de f e C o valor máximo de g, na desigualdade acima. Então a desigualdade acima transforma-se em:

$$\mid \xi(t) \mid \leq \mid \xi(0) \mid + L \int_0^t \mid \xi(r) \mid dr + \epsilon C t.$$

Utilizando o **Lema de Gronwall** [4] para $c(t) = \mid \xi(0) \mid + \epsilon C t$ e $u(r) = L$, logo obtemos

$$\begin{aligned} \mid \xi(t) \mid &\leq \mid \xi(0) \mid e^{Lt} + \int_0^t \epsilon C e^{L(t-r)} dr \\ &= \mid \xi(0) \mid e^{Lt} + \frac{\epsilon C}{L}(e^{Lt} - 1) \\ &= \Big[\mid \xi(0) \mid + \frac{\epsilon C}{L} \Big] e^{Lt} - \frac{\epsilon C}{L} = O(\epsilon). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mid q_0^s(t - t_0) - q_\epsilon^s(t - t_0) \mid = \mid q_0^s(t - t_0) - p_0^s + p_0^s - p_\epsilon^s + p_\epsilon^s - q_\epsilon^s(t - t_0) \mid .$$

Utilizando a desigualdade triangular temos que:

$$\mid q_0^s(t - t_0) - q_\epsilon^s(t - t_0) \mid \leq \mid \underbrace{q_0^s(t - t_0) - p_0^s}_{O(\epsilon)} \mid + \mid \underbrace{p_0^s - p_\epsilon^s}_{O(\epsilon)} \mid + \mid \underbrace{p_\epsilon^s - q_\epsilon^s(t - t_0)}_{O(\epsilon)} \mid,$$

logo, como cada parcela no lado direito da desigualdade é de $O(\epsilon)$. Temos que:

$$\mid q_0^s(t - t_0) - q_\epsilon^s(t - t_0) \mid = O(\epsilon)$$

para $t \in \ ]t_0, \infty[$.
De forma similar, obtemos que

$$\mid q_0^u(t - t_0) - q_\epsilon^u(t - t_0) \mid = O(\epsilon)$$

para $t \in \ ]-\infty, t_0]$.
Este lema implica que a solução encontrada na variedade estável é uniformemente aproximada, isto é, para $t \geq t_0$ fazemos a substituição da igualdade (3.10) no sistema (3.9) obtendo

$$\dot{q}^0(t, t_0) + \epsilon \dot{q}_1^s(t, t_0) = f(q_\epsilon^s(t, t_0)) + \epsilon g(q_\epsilon^s(t, t_0), t). \tag{3.15}$$

Utilizando a **Fórmula de Taylor** com resto infinitesimal de primeira ordem para f no ponto $q^0(t,t_0)$, obtemos que:

$$f(q^s_\epsilon(t,t_0)) \;=\; f(q^0(t,t_0)) + \epsilon Df(q^0(t,t_0))q^s_1(t,t_0) \tag{3.16}$$

e

$$g(q^s_\epsilon(t,t_0),t) \;=\; g(q^0(t,t_0),t) + \epsilon Dg(q^0(t,t_0))q^s_1(t,t_0). \tag{3.17}$$

Agora substituindo as igualdades (3.16) e (3.17) na igualdade (3.15) obtemos que:

$$\begin{aligned}\dot{q}^0(t,t_0) + \epsilon\dot{q}^s_1(t,t_0) \;&=\; f(q^0(t,t_0)) + \epsilon Df(q^0(t,t_0))q^s_1(t,t_0) + \epsilon(g(q^0(t,t_0),t) + \\ &+\; \epsilon Dg(q^0(t,t_0))q^s_1(t,t_0)).\end{aligned}$$

Como $\dot{q}^0(t,t_0) = f(q^0(t,t_0))$ e $Dg(q^0(t,t_0)) = 0$, obtemos a seguinte igualdade

$$\dot{q}^s_1(t,t_0) \;=\; Df(q^0(t-t_0))q^s_1(t,t_0) + g(q^0(t-t_0),t). \tag{3.18}$$

De maneira similar para $t \leq t_0$ obtemos que:

$$\dot{q}^u_1(t,t_0) \;=\; Df(q^0(t-t_0))q^u_1(t,t_0) + g(q^0(t-t_0),t). \tag{3.19}$$

■

Observação:

Estes lemas garantem a existência de um ponto hiperbólico perto de p_0 e a proximidade entre as variedades invariantes dos sistemas perturbado e não perturbado sob influência de pequenas perturbações.

Definição 3.5 *Considere a seção Σ^{t_0} e o ponto $q^0(0) \in \Sigma^{t_0}$. Sabemos que $f(q^0(0))$ é um vetor tangente à órbita homoclínica em $\mathcal{P}^0$ em $q^0(0)$. Vamos considerar, então, a reta normal à $f(q^0(0))$ em $q^0(0)$, e, cuja direção é dada por*

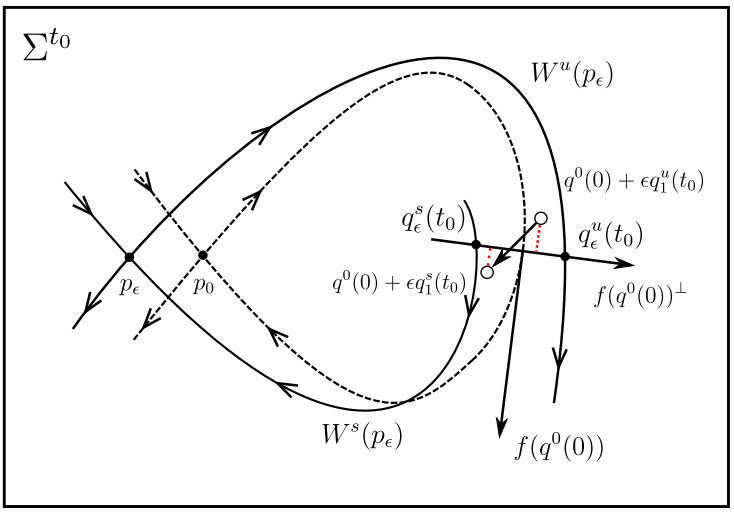
$$f^\perp(q^0(0)) = (-f_2(q^0(0)), f_1(q^0(0)))^\top.$$

Como as variedades invariantes $W^u(p^{t_0}_\epsilon)$ e $W^s(p^{t_0}_\epsilon)$ estão $\mathcal{C}^r-$perto de Γ^0, essas variedades cruzam a reta L. Sejam $q^u_\epsilon(t_0) = q^u_\epsilon(t_0,t_0)$ e $q^s_\epsilon(t_0) = q^s_\epsilon(t_0,t_0)$ os pontos em $W^u(p^{t_0}_\epsilon) \cap L$ e $W^s(p^{t_0}_\epsilon) \cap L$ cuja distância a $p^{t_0}_\epsilon$ é mínima, respectivamente. Definimos a separação das variedades $W^u(p^{t_0}_\epsilon)$ e $W^s(p^{t_0}_\epsilon)$ na seção Σ^{t_0} em $q^0(0)$ por

$$d(t_0) = q^u_\epsilon(t_0) - q^s_\epsilon(t_0).$$

*Veja a **Figura 10**.*

Figura 10 – Separação das variedades $W^u(p_\epsilon^{t_0})$ e $W^s(p_\epsilon^{t_0})$.



Fonte: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Como

$$d(t_0) = q_\epsilon^u(t_0) - q_\epsilon^s(t_0) \in f^\perp(q^0(0)),$$

então

$$\frac{f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))}{\| f(q^0(0)) \|}$$

é a projeção de $q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0)$ sobre $f^\perp(q^0(0))$. Pelo **Lema 3.2**, temos que:

$$d(t_0) = \epsilon(q_\epsilon^u(t_0) - q_\epsilon^s(t_0)) + O(\epsilon^2) \in f^\perp(q^0(0)).$$

Logo temos que:

$$\frac{f(q^0(0)) \wedge d(t_0)}{\| f(q^0(0)) \|} = d(t_0) = \epsilon \frac{f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))}{\| f(q^0(0)) \|} + O(\epsilon^2).$$

Portanto,

$$d(t_0)) \quad = \quad \epsilon \frac{f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))}{\| f(q^0(0)) \|} + O(\epsilon^2). \tag{3.20}$$

Aqui o **produto** $a \wedge b$, está definido por: $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$ com $a, b \in \mathbb{R}^2$ e $f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))$ é a projeção de $q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0)$ sobre $f^\perp(q^0(0))$. Finalmente definimos a **função de Melnikov**, por:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt,$$

onde, $q^0(t)$ é a órbita homoclínica do sistema não perturbado. Para maiores informações ver [5], e se $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ temos

$$f \wedge g = (f_1, f_2) \wedge (g_1, g_2) = f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1$$

podemos medir, então, a distância entre as variedades estável e instável do sistema perturbado. Dessa maneira, quando a função de Melnikov se anula, temos uma interseção das variedades estável e instável.

Teorema 3.2 *Se a função de Melnikov tem um zero simples em t_0, isto é, $M(t_0) = 0$ e $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$, então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $W^u(p_\epsilon)$ e $W^s(p_\epsilon)$ se cruzam transversalmente. Se a função de Melnikov não possui zeros, então $W^u(p_\epsilon) \cap W^s(p_\epsilon) = \emptyset$.*

Demonstração:
Vamos considerar a função distância dependente do tempo:

$$\begin{aligned} \triangle(t, t_0) &= f(q^0(t-t_0)) \wedge (q_1^u(t, t_0) - q_1^s(t-t_0)) \\ &= f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) - f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \\ &:= \triangle^u(t, t_0) - \triangle^s(t, t_0). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Logo substituindo a igualdade (3.21) na igualdade (3.20), temos que:

$$d(t_0) = \epsilon \frac{\triangle(t_0, t_0)}{\|f(q^0(0))\|} + O(\epsilon^2).$$

Agora derivando $\triangle^s(t, t_0)$ com respeito a t, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\triangle^s(t, t_0)] &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^s(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \frac{d}{dt} q^0(t-t_0) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^s(t, t_0)] \\ &= Df(q^0(t-t_0)) \dot{q}^0(t-t_0) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^s(t, t_0). \end{aligned}$$

Usando (3.18) e o fato que $\dot{q}^0(t-t_0) = f(q^0(t-t_0))$, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{\triangle}^s(t, t_0) &= Df(q^0(t-t_0)) f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^s(t, t_0) \\ &= Df(q^0(t-t_0)) f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge \Big(Df(q^0(t-t_0)) q_1^s(t, t_0) + g(q^0(t-t_0), t) \Big) \\ &= Df(q^0(t-t_0)) f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge Df(q^0(t-t_0)) q_1^s(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t). \end{aligned}$$

Da igualdade $Av \wedge w + v \wedge Aw = tr(A) v \wedge w$ e a definição de $\triangle^s(t, t_0)$, obtemos

$$\dot{\triangle}^s(t, t_0) = tr(Df(q^0(t-t_0))) \triangle^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Logo como f é um campo Hamiltoniano, então $Df(q^0(t-t_0)) = 0$. Assim

$$\dot{\triangle}^s(t, t_0) = f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Integrando de t_0 até ∞, temos

$$\triangle^s(\infty, t_0) - \triangle^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt.$$

No entanto

$$\triangle^s(\infty, t_0) = \lim_{t\to\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0).$$

Como $q_1^s(t, t_0)$ é limitado pelo **Lema 3.2** então:

$$\triangle^s(\infty, t_0) = 0.$$

Portanto

$$-\triangle^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt. \tag{3.22}$$

Agora derivando $\triangle^u(t, t_0)$ com respeito t, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\triangle^u(t, t_0)] &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0)] \\
&= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^u(t, t_0)] \\
&= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))]\frac{d}{dt}q^0(t-t_0) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^u(t, t_0)] \\
&= Df(q^0(t-t_0))\dot{q}^0(t-t_0) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^u(t, t_0).
\end{aligned}$$

Usando (3.19) e o fato que $\dot{q}^0(t-t_0) = f(q^0(t-t_0))$, temos que:

$$\begin{aligned}
\dot{\triangle}^u(t, t_0) &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^u(t, t_0) \\
&= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + \\
&\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge \Big(Df(q^0(t-t_0))q_1^u(t, t_0) + g(q^0(t-t_0), t)\Big) \\
&= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + \\
&\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge Df(q^0(t-t_0))q_1^u(t, t_0) \\
&\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).
\end{aligned}$$

Da igualdade $Av \wedge w + v \wedge Aw = tr(A)v \wedge w$ e a definição de $\triangle^u(t, t_0)$, obtemos

$$\dot{\triangle}^u(t, t_0) = tr(Df(q^0(t-t_0)))\triangle^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Logo como f é um campo Hamiltoniano, então $Df(q^0(t-t_0)) = 0$. Assim

$$\dot{\triangle}^u(t, t_0) = f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Integrando de $-\infty$ até t_0, temos

$$\triangle^u(t_0, t_0) - \triangle^u(-\infty, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt.$$

No entanto

$$\triangle^u(-\infty, t_0) = \lim_{t\to-\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0),$$

e como $q_1^u(t, t_0)$ é limitado pelo **Lema 3.2** então:

$$\triangle^u(-\infty, t_0) = 0.$$

Portanto

$$\triangle^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt. \tag{3.23}$$

Agora, somando (3.22) e (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} M(t_0) = \triangle^u(t_0, t_0) + \triangle^s(t_0, t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Finalmente

$$d(t_0) = \epsilon \frac{M(t_0)}{\| f(q^0(0)) \|} + O(\epsilon^2). \tag{3.25}$$

Fixando $\epsilon > 0$, logo da hipótese $M(t_0) = 0$ e $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$ então o sinal de $M(t_0)$ oscila numa vizinhança $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$, que implica que o sinal de $d(t_0)$ também oscila numa vizinhança. Então existe um $c \in\ ]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ tal que $d(c) = 0$, logo $q_\epsilon^u = q_\epsilon^s$.
Portanto

$$W^u(p_\epsilon) \cap W^s(p_\epsilon) \neq \emptyset. \tag{3.26}$$

Agora suponhamos que a interseção não é transversal, então $q_\epsilon^u(r) = q_\epsilon^s(r)$ para todo $r \in\ ]c - \delta, c + \delta[$ com $\delta > 0$, então $d(r) = 0$ para todo $r \in\ ]c - \delta, c + \delta[$ que implica que $M(r) = 0$ numa vizinhança, pois M é independente de ϵ e $\frac{o(\epsilon^2)}{\epsilon} = \frac{M(r)}{\|f(q^0(0))\|}$.
Mas $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$, logo podemos assumir que $\frac{\partial M}{\partial t}(r) \neq 0$ para todo $r \in\ ]c - \delta, c + \delta[\subset\ ]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$, sendo uma contradição. ■

Observação:

Na seção acima estudamos a integral de Melnikov para uma sela-nó hiperbólica em um campo Hamiltoniano.
Agora, suponhamos que o sistema definido em (3.9) verifica $(A_1), (A_2)$ e (A_3), mas f não é um campo Hamiltoniano [5].
Então, temos que a integral de Melnikov está dada pela seguinte igualdade:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_{t_0}^{t} divDf(q^0(r-t_0)dr} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)dt,$$

3.3 A INTEGRAL DE MELNIKOV PARA UMA SELA-NÓ NÃO HIPERBÓLICA.

Nesta seção vamos estudar a integral de Melnikov para campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ que admitem um equilíbrio do tipo sela-nó com um laço separatriz.
Mais precisamente, vamos considerar o campo

$$\dot{x} = f(x), \;\; x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.27}$$

com $p \in \mathbb{R}^2$ ponto de equilíbrio de tipo sela-nó e Γ laço separatriz, conforme a **Figura 11**, e vamos considerar um sistema a dois parâmetros associado a (3.27), da seguinte forma

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, \nu_1, \nu_2), \;\; x \in \mathbb{R}^2 \; e \; \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.28}$$

Vamos supor também as seguintes condições:

(i) p é um ponto de equilíbrio, isto é, $f(p) = 0$.

(ii) $Df(p)$ tem os valores próprios 0 e $-\lambda$ com $\lambda > 0$. Seja $\vec{u}$ o valor próprio associado a 0 com a primeira coordenada positiva($\vec{u}$ é valor próprio à direita de 0.) Seja também, $\vec{w}$ é valor próprio de 0 à esquerda de 0.

(iii) $\vec{w}.D^2 f(p)(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

(iv) $\dot{x} = f(x)$ tem um laço separatriz Γ em p.

(v) $\tilde{f}(x, \nu_1, \nu_2)$ é de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ com $k \geq 5$.

(vi) $\vec{w}.D_{\nu_1}\tilde{f}(p, 0, 0) > 0$.

Das hipóteses (i)-(iii) temos que $\dot{x} = f(x)$ tem um ponto de equilíbrio de tipo sela-nó em $p \in \mathbb{R}^2$. Isto é, $Df(p)$ tem um valor próprio negativo e outro igual a zero. Além disso, estas hipóteses dizem que $\vec{u}$ é tangente a Γ no ponto p.
Seja $\vec{v}$ um vetor próprio associado ao valor próprio $-\lambda$, escolhido de modo que $\vec{v}$ é também tangente a Γ no ponto p. Veja a **Figura 12.**

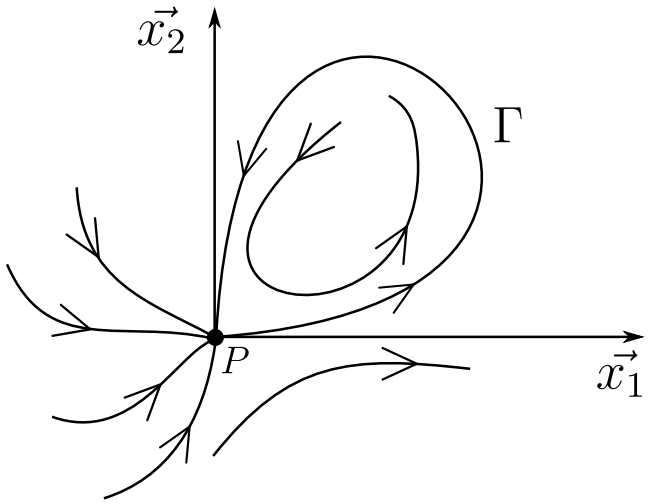
As hipóteses (iii) e (vi) implicam que a perturbação na direção positiva ν_1 elimina o equilíbrio, enquanto que a perturbação na direção negativa ν_1 divide o equilíbrio em dois. Ver a **Figura 13.** Então existe uma função de classe $\mathcal{C}^k$, $\alpha(\nu_2)$, tal que $\alpha(0) = 0$, de modo que $\dot{x} = \tilde{f}(x, \nu_1, \nu_2)$ têm um equilíbrio de tipo sela-nó perto de p se somente se $\nu_1 = \alpha(\nu_2)$. Para maiores detalhes ver [14].
Seja $f(x, \mu_1, \mu_2) = \tilde{f}(x, \nu_1, \nu_2)$, onde (μ_1, μ_2) e (ν_1, ν_2) estão relacionados pela seguinte:

$$\mu_1 = \nu_1 - \alpha(\nu_2), \;\; \mu_2 = \nu_2.$$

Então

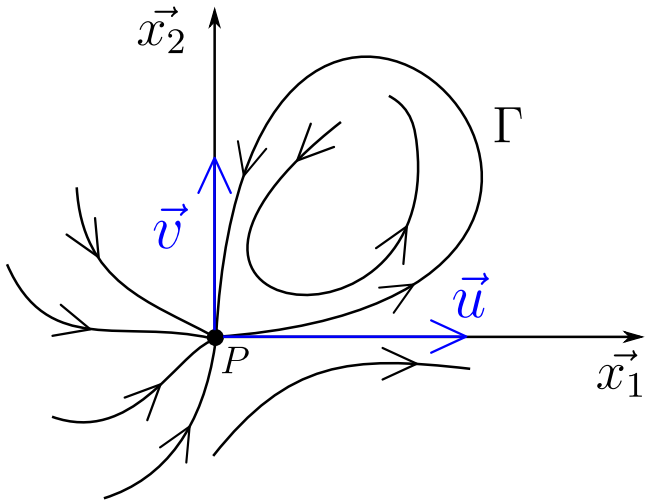
$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2) \tag{3.29}$$

Figura 11 – Equilíbrio de tipo sela-nó com laço separatriz Γ.



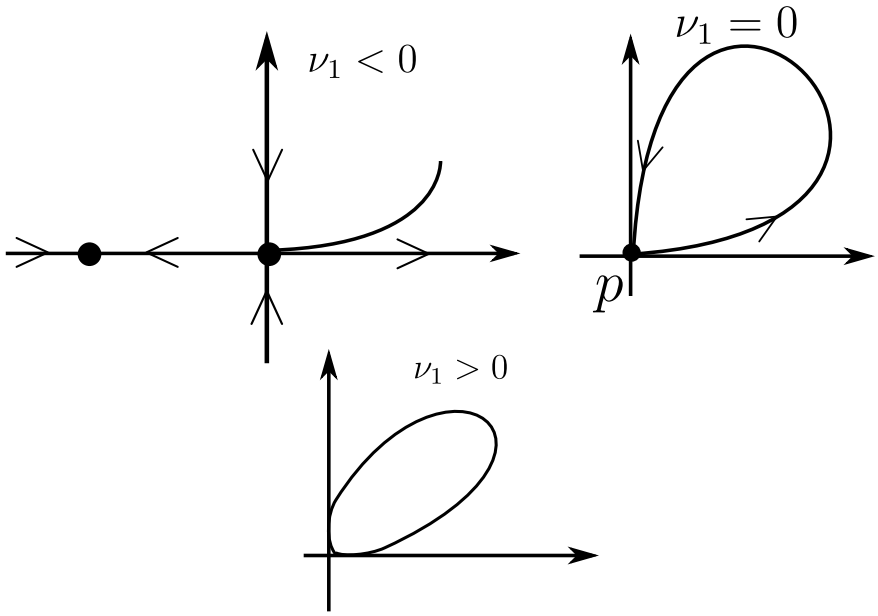
Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

Figura 12 – Sistema (3.27) associado as hipóteses (i)-(vi).



Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

Figura 13 – Sistema (3.28) para os valores de ν_1 com $\nu_2 = 0$.



Fonte: Elaboração própria.

é de classe $\mathcal{C}^k$, e tem um ponto de equlíbrio de tipo sela-nó perto de p se somente se $\mu_1 = 0$. Definimos como $p(\mu_2)$ o equilíbrio de tipo sela-nó perto de p de $\dot{x} = f(x, 0, \mu_2)$, de modo que $p(\mu_2)$ é de classe $\mathcal{C}^k$. Se $\mu_1 < 0$, então existe uma sela e um nó estável para (3.29) perto de p; se $\mu_1 > 0$, não existe equilíbrio para (3.29) perto de p.
Assim como definimos no capítulo acima, para $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, seja $\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Se $q(t)$ é a solução de $\dot{x} = f(x, 0, 0)$ com $q(0) \in \Gamma$, consideramos a seguinte expressão:

$$I = \frac{dp}{d\mu_2}(0) \wedge \lim_{t_1 \to \infty} f(q(t_1), 0, 0) exp\Big[- \int_0^{t_1} div f(q(s), 0, 0) ds \Big] +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} exp\Big[- \int_0^t div f(q(s), 0, 0) ds \Big] f(q(t), 0, 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t), 0, 0) dt. \qquad (3.30)$$

Observação:
I é a integral de Melnikov para a órbita Γ. Ela mede o afastamento entre as variedades central e estável do ponto de equilíbrio p, conforme o teorema abaixo:

Teorema 3.3 *O limite em* (3.30) *existe e é um múltiplo negativo de* $\vec{v}$. *A integral imprópria em (3.30) é convergente. Se* $I \neq 0$, *então existe uma curva* $\mathcal{C}^{k-2}$, $\mu_1 = \psi(\mu_2) = -\mathcal{B}^2 \mu_2^2 + o(\mu_2^2)$, *com* $\mathcal{B} \neq 0$, *tal que para* μ_1 *e* μ_2 *pequenos, (3.29) tem um laço separatriz perto de* Γ *se e somente se* $\mu_1 = \psi(\mu_2)$ *e* $I \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \mu_2 \geq 0$.

Demonstração:
O equilíbrio $(p,0,0)$ do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\mu_1,\mu_2) \\ \dot{\mu}_1 = 0 \\ \dot{\mu}_2 = 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

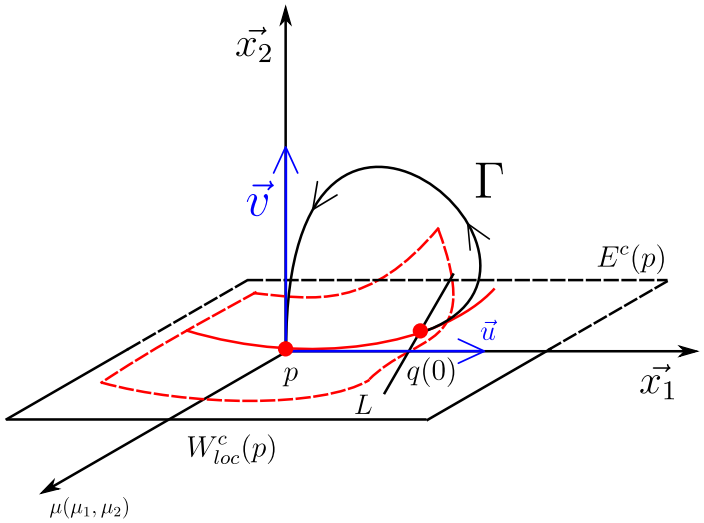
admite um subespaço central de dimensão 3, denotado por $E^c(p,0,0)$. Logo, pelo Teorema da Variedade Central [5], existe uma 3−variedade central local de classe $\mathcal{C}^k$ de $(p,0,0)$

$$W^c_{loc}(p,0,0) \;\; = \;\; \{(x_1,x_2,\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = \phi(x_1,\mu_1,\mu_2)\},$$

o qual é tangente ao subespaço central $E^c(p,0,0)$ no ponto $(p,0,0)$. Logo $W^c_{loc}(p,0,0)$ intersecta com cada plano $\mathbb{R}^2 \times (\mu_1,\mu_2)$, para μ_1,μ_2 muito pequenos, em uma curva, isto é, $W^c_{loc}(p,0,0) \cap \mathbb{R}^2 \times (0,0)$ e contém uma porção de $\Gamma \times (0,0)$ que é tangente ao vetor $(\vec{u},0,0)$ no ponto $(p,0,0)$. Veja a **Figura 14.**

Seja $W^c(p,0,0)$ a variedade central que contém a $W^c_{loc}(p,0,0)$. Isto é, a união de todas as

Figura 14 – A variedade central do ponto p.



Fonte: Elaboração própria.

curvas integrais do sistema (3.31) que intersectam $W^c_{loc}(p,0,0)$. $W^c_{loc}(p,0,0)$ encontra-se com cada plano $\mathbb{R}^2 \times \{(\mu_1,\mu_2)\}$ em uma curva, a qual denotamos por $N(\mu_1,\mu_2) \times \{(\mu_1,\mu_2)\}$. Isto é, $N(\mu_1,\mu_2)$ é uma curva em $\mathbb{R}^2$. Seja L um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$, perpendicular a Γ em $q(0)$. Então para μ_1,μ_2 muito pequenos, $N(\mu_1,\mu_2)$ se intersecta transversalmente com L perto de $q(0)$. Portanto, para μ_1,μ_2 muito pequenos existe uma função

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mu_1,\mu_2) &\longmapsto \chi(\mu_1,\mu_2), \end{aligned}$$

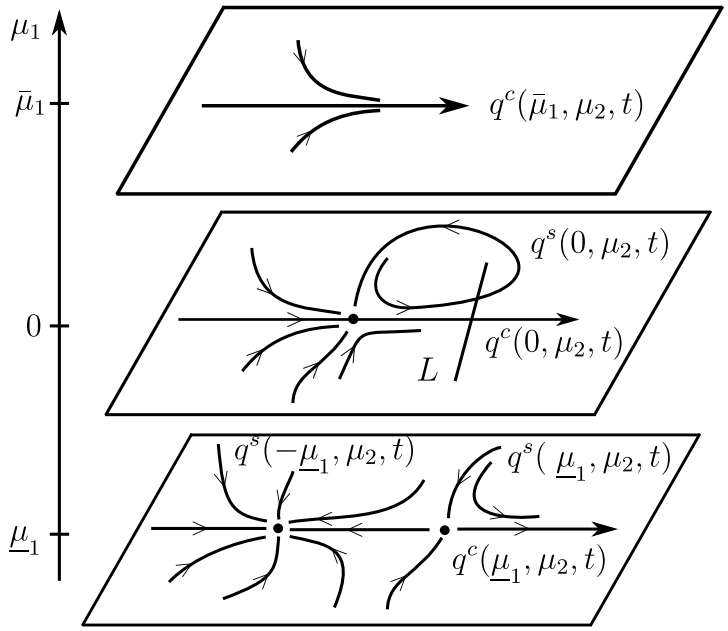
de modo que: $\chi(0,0) = q(0)$ e $\chi(\mu_1,\mu_2) \in N(\mu_1,\mu_2) \cap L$. Como o campo vetorial de classe $\mathcal{C}^k$ gera um fluxo de classe $\mathcal{C}^k$, então existe uma família de soluções de classe $\mathcal{C}^k$ do sistema (3.29)

$$q^c(\mu_1,\mu_2,t), \quad \text{com} \quad \mu_1,\mu_2 \quad \text{pequenos.}$$

tal que $q^c(\mu_1,\mu_2,0) = \chi(\mu_1,\mu_2)$. Então $q^c(0,0,t) = q(t)$ e cada curva está contida em $N(\mu_1,\mu_2)$. Para $\mu_1 < 0$, $q^c(\mu_1,\mu_2,t)$ é um ramo da variedade instável da sela do sistema (3.29) perto de p. Similarmente, $q^c(0,\mu_2,t)$ é um ramo da separatriz instável da sela-nó de $\dot{x} = f(x,0,\mu_2)$ perto de p. Veja a **Figura 15.**

Vamos agora definir uma $\mu-$dependente mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$, para que nossos

Figura 15 – Sistemas perturbados pertos do sistema (3.29).



Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

cálculos sejam possíveis [3]. De acordo com o Teorema da Variedade Central [5], há uma mudança de coordenadas de classe $\mathcal{C}^k$.

$$\begin{aligned} y : U \subset \mathbb{R}^4 &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^4 \\ (x_1,x_2,\mu_1,\mu_2) &\longmapsto y(x_1,x_2,\mu_1,\mu_2) = (y_1,y_2,\mu_1,\mu_2), \end{aligned}$$

definida para (x,μ_1,μ_2) em uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de $(p,0,0)$ em uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $(0,0,0,0)$ da seguinte forma

$$\begin{cases} y_1 = r(x_1,x_2,\mu_1,\mu_2) \\ y_2 = x_2 - \phi(x_1,\mu_1,\mu_2) \\ \mu_1 = \mu_1 \\ \mu_2 = \mu_2, \end{cases}$$

em forma vetorial

$$y(x,\mu_1,\mu_2) \;=\; (y_1(x,\mu_1,\mu_2), y_2(x,\mu_1,\mu_2)), \tag{3.32}$$

de modo que:

(a) $y(p,0,0) = (0,0,0,0)$,

(b) $W^c_{loc}(p,0,0) \cap \mathbb{R}^2 \times \{(\mu_1,\mu_2)\}$ é transformada na linha $y_2 = 0$, a qual é invariante

(c) As linhas $y_1 = constante$, são aplicadas umas nas outras pelo fluxo.

Em outras palavras, nas novas coordenadas temos um sistema de equações diferenciais de classe $\mathcal{C}^k$ da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_1,\mu_1,\mu_2) \\ \dot{y}_2 = y_2 b(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2) \\ \dot{\mu_1} = 0 \\ \dot{\mu_2} = 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Como $p(\mu_2)$, definido acima, é de classe $\mathcal{C}^k$, podemos assumir que $p(\mu_2)$ é transformado em $(0,0)$ para todo μ_2. Em outras palavras, $a(0,0,\mu_2) \equiv 0$. Uma vez que a variedade estável do $\dot{x} = f(x,0,0)$ em p é necessariamente transformada na linha $y_1 = 0$, temos:

$$D_x y(p,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial x_2}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial \mu_1}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(p,0,0) & 1-\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(p,0,0) & -\frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(p,0,0) & -\frac{\partial \phi}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1}(p,0,0) & \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2}(p,0,0) & \frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_1}(p,0,0) & \frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x_1}(p,0,0) & \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2}(p,0,0) & \frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_1}(p,0,0) & \frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_2}(p,0,0) \end{pmatrix}_{4\times 4.}$$

Então

$$D_x y(p,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial x_2}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial \mu_1}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(p,0,0) & 1-\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(p,0,0) & -\frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(p,0,0) & -\frac{\partial \phi}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4.}$$

Logo, como se pode verificar que

$$D_x y(p,0,0)(\vec{u},0,0) = (1,0,0,0) \;\text{ e }\; D_x y(p,0,0)(\vec{v},0,0) = (0,1,0,0), \tag{3.34}$$

temos que a matriz $D_x y(p,0,0)$ é da seguinte forma

$$D_x y(p,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial r}{\partial \mu_1}(p,0,0) & \frac{\partial r}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ 0 & 1 & -\frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(p,0,0) & -\frac{\partial \phi}{\partial \mu_2}(p,0,0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4.}$$

Note que $\frac{\partial r}{\partial \mu_1}(p,0,0)$, $\frac{\partial r}{\partial \mu_2}(p,0,0)$, $-\frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(p,0,0)$ e $-\frac{\partial \phi}{\partial \mu_2}(p,0,0)$ podem assumir qualquer valor em $\mathbb{R}$, logo temos que o novo sistema verifica (i)-(iii) e (vi). Isto é,

(i) $y(p,0,0) = (0,0,0,0)$. Isto é, $(p,0,0)$ é um ponto de equilíbrio y

(ii) $Dy(p,0,0)$ tem valores próprios 0 e $-\lambda$ com $\lambda > 0$.

(iii) $\vec{w}D^2y(p,0,0)(\vec{u},\vec{u}) > 0$.

Agora usando o **Teorema Fórmula de Taylor** com resto infinitesimal temos que

$$a(y_1,\mu_1,\mu_2) = a(y_1,0,\mu_2) + \mu_1\Big[\frac{\partial a}{\partial \mu_1}(y_1,0,\mu_2) + R_1(0,\mu_1,0)\Big].$$

Fazemos $h(y_1,\mu_1,\mu_2) = \frac{\partial a}{\partial \mu_1}(y_1 0,\mu_2) + R_1(0,\mu_1,0)$, com $h(0,0,0) > 0$ pois da hipótese (vi) temos que $\frac{\partial a}{\partial \mu_1}(y_1,0,\mu_2) > 0$. Logo

$$\begin{aligned} a(y_1,0,\mu_2) &= a(0,0,\mu_2) + y_1\frac{\partial a}{\partial y_1}(0,0,\mu_2) + \\ &+ y_1^2\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}(0,0,\mu_2) + y_1^3\Big[\frac{\partial^3 a}{\partial y_1^3}(0,0,\mu_2) + R_2(0,0,\mu_2)\Big] \end{aligned}$$

como $a(0,0,\mu_2) = 0$, e $\frac{\partial a}{\partial y_1}(0,0,\mu_2) = 0$, logo pondo em evidência y_1^2, obtemos que

$$a(y_1,0,\mu_2) = y_1^2\Big[\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}(0,0,\mu_2) + y_1\Big(\frac{\partial^3 a}{\partial y_1^3}(0,0,\mu_2) + R_2(0,0,\mu_2)\Big)\Big]$$

finalmente fazendo que $\eta(\mu_2) = \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}(0,0,\mu_2)$ e $\eta(\mu_2)g(y_1,\mu_2) = \Big[\frac{\partial^3 a}{\partial y_1^3}(0,0,\mu_2) + R_2(0,0,\mu_2)\Big]$, pois da hipótese (iii), temos que

$$\eta(0) = \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}(0,0,0) > 0.$$

Isto é, $\eta(0) > 0$ numa vizinhança de $(0,0,0,0)$.
Portanto

$$a(y_1,\mu_1,\mu_2) = \eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1,\mu_2)) + \mu_1 h(y_1,\mu_1,\mu_2).$$

Por outro lado, temos que

$$b(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = b(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) + y_2 \frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) + y_2^2 R_0(0, y_2, 0, 0).$$

Reescrevendo de outra forma a igualdade acima obtemos que

$$b(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = b(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) + y_2 \frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1, 0, \mu_1, \mu_2)\Big[1 + y_2 \frac{R_0(0, y_2, 0, 0)}{\frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1, 0, \mu_1, \mu_2)}\Big]$$

pois da hipótese (ii) temos que $\frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) < 0$. Agora fazendo

$$\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2) = -\frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) \text{ e } k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{R_0(0, y_2, 0, 0)}{\frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1, 0, \mu_1, \mu_2)}$$

sendo a função k bem definida. Por outro lado,

$$b(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) = b(0, 0, 0, 0) + y_1 \frac{\partial b}{\partial y_1}(0, 0, 0, 0) + y_1 R_2(y_1, 0, \mu_1, \mu_2).$$

Mas $b(0, 0, 0, 0) = 0$. Pela hipótese (ii) temos que $\frac{\partial b}{\partial y_1}(0, 0, 0, 0) = 0$.
Portanto,

$$b(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = -\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2) y_2 (1 + y_2 k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2))$$

com

$$\frac{\partial b}{\partial y_2}(0, 0, 0, 0) \;\; = \;\; -\lambda(0, 0, 0) = -\lambda.$$

Finalmente com as igualdades o sistema (3.33) transforma-se no sistema seguinte

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \eta(\mu_2) y_1^2 (1 + y_1 g(y_1, \mu_2)) + \mu_1 h(y_1, \mu_1, \mu_2) \\ \dot{y_2} = -\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2) y_2 (1 + y_2 k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2)) \end{cases} \tag{3.35}$$

com $\eta > 0, h(0, 0, 0) > 0, \lambda(0, 0, 0) = \lambda$.

Lema 3.3 *Existe uma aplicação de classe $\mathcal{C}^{k-2}$, $p(\delta, \mu_2)$, definido para (δ, μ_2) perto $(0, 0)$, com valores em $\mathbb{R}^2$, tal que $p(0, 0) = p$, e $p(\delta, \mu_2)$ é:*

(1) uma sela-nó de $\dot{x} = f(x, 0, \mu_2)$ se $\delta = 0$,

(2) uma sela de $\dot{x} = f(x, -\delta^2, \mu_2)$ se $\delta > 0$

(3) um nó estável de $\dot{x} = f(x, -\delta^2, \mu_2)$ se $\delta < 0$.

Além disso, a aplicação $(\delta, \mu_2) \longrightarrow (p(\delta, \mu_2), \delta^2, \mu_2)$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ de uma vizinhança de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$ sobre uma vizinhança de $(p, 0, 0)$ em o conjunto de equilíbrios de (3.31) perto $(0, 0, 0)$.

Demonstração:
O equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1, \mu_2)) + \mu_1 h(y_1, \mu_1, \mu_2) \\ \dot{y_2} = -\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2)y_2(1 + y_2 k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2)) \\ \dot{\mu_1} = 0 \\ \dot{\mu_2} = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

perto de $(0, 0, 0, 0)$ é determinado fazendo o sistema (3.36) igual a zero. Isto é,

$$\begin{aligned} \eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1, \mu_2)) + \mu_1 h(y_1, \mu_1, \mu_2) = 0 \\ -\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2)y_2(1 + y_2 k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2)) = 0 \end{aligned}$$

da primeira igualdade obtemos que

$$\mu_1 h(y_1, \mu_1, \mu_2) = -\eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1, \mu_2))$$

logo $h(y_1, \mu_1, \mu_2) \neq 0$ para todo $y_1, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\mu_1 = \frac{-\eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1, \mu_2))}{h(y_1, \mu_1, \mu_2)} \tag{3.37}$$

e da segunda igualdade temos que

$$\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2) = 0 \text{ o}u \ y_2 = 0 \text{ o}u \ (1 + y_2 k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2)) = 0$$

mas $\lambda(y_1, \mu_1, \mu_2) \neq 0$ numa vizinhança de $(0, 0, 0)$ e $1 + y_2 k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) \neq 0$, pois y_2 é muito pequeno e $k(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2)$ teria que ser muito grande, sendo isto impossível numa vizinhança de $(0, 0, 0, 0)$, então $y_2 = 0$. Portanto, o conjunto de equilíbrios do sistema (3.36) é da forma seguinte:

$$\mathcal{S} = \{(y_1, 0, \mu_1, \mu_2) : \mu_1 = \mu_1(y_1, \mu_2)\}$$

onde

$$\mu_1(y_1, \mu_2) = \frac{-\eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1, \mu_2))}{h(y_1, \mu_1, \mu_2)}$$

e verifica a condição

$$\mu_1(0, \mu_2) = 0. \tag{3.38}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial y_1}(y_1, \mu_2) &= \frac{[-2\eta(\mu_2)y_1(1 + y_1 g(y_1, \mu_2)) - \eta(\mu_2)y_1^2(g(y_1, \mu_2)}{(h(y_1, \mu_1, \mu_2))^2} + \\ &+ \frac{y_1 \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1, \mu_2)]h(y_1, \mu_1, \mu_2)}{(h(y_1, \mu_1, \mu_2))^2} \\ &+ \frac{\eta(\mu_2)y_1^2(1 + y_1 g(y_1, \mu_2))\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1, \mu_1, \mu_2)}{(h(y_1, \mu_1, \mu_2))^2}. \end{aligned}$$

Logo avaliando no ponto $(0,\mu_2)$, na igualdade acima, obtemos

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial y_1}(0,\mu_2)=0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y_1^2}(y_1,\mu_2)=\frac{\partial}{\partial y_1}\Big[\frac{\partial\mu_1}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)\Big] &= \frac{\partial}{\partial y_1}\Big[\frac{(-2\eta(\mu_2)y_1(1+y_1g(y_1,\mu_2))}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^2}\\ &- \frac{\eta(\mu_2)y_1^2(g(y_1,\mu_2)+y_1\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)))h(y_1,\mu_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^2}\\ &+ \frac{\eta(\mu_2)y_1^2(1+y_1g(y_1,\mu_2))\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^2}\Big],\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y_1^2}(y_1,\mu_2) &= \Big(\frac{[-2\eta(\mu_2)(1+y_1g(y_1,\mu_2))-2\eta(\mu_2)y_1g(y_1,\mu_2)+y_1\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}\\ &+ \frac{-2\eta(\mu_2)y_1(g(y_1,\mu_2)+y_1\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2))-\eta(\mu_2)y_1^2(2\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}+\\ &+ \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2}(y_1,\mu_2))](h(y_1,\mu_1,\mu_2))}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}\\ &+ \frac{[-2\eta(\mu_2)y_1(1+y_1g(y_1,\mu_2))-\eta(\mu_2)y_1^2(g(y_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}+\\ &+ \frac{y_1\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)]\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2))}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}\\ &+ \frac{2\eta(\mu_2)y_1(1+y_1g(y_1,\mu_2)+\eta(\mu_2)y_1^2(g(y_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}+\\ &+ \frac{y_1\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2))\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}+\\ &+ \frac{\eta(\mu_2)y_1^2(1+y_1g(y_1,\mu_2))\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(y_1,\mu_1,\mu_2)\Big)(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^2}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}\\ &+ 2\Big(\frac{[2\eta(\mu_2)y_1(1+y_1g(y_1,\mu_2))+\eta(\mu_2)y_1^2(g(y_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}+\\ &+ \frac{y_1\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)]h(y_1,\mu_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}\\ &- \frac{\eta(\mu_2)y_1^2(1+y_1g(y_1,\mu_2)))(\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2))\Big)(h(y_1,\mu_1,\mu_2))(\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2)}{(h(y_1,\mu_1,\mu_2))^4}.\end{aligned}$$

Avaliando no ponto $(0,\mu_2)$ tem-se

$$\frac{\partial^2\mu_1}{\partial y_1^2}(0,\mu_2) = -\frac{2\eta(\mu_2)}{h(0,\mu_1,\mu_2)}.$$

Como $h(0,\mu_1,\mu_2)>0$ em uma vizinhança de $(0,0,0,0)$,

$$\mu_1(0,\mu_2)=\frac{\partial\mu_1}{\partial y_1}(0,\mu_2)=0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2\mu_1}{\partial y_1^2}(0,\mu_2)<0, \tag{3.39}$$

portanto

$$\mu_1 \;=\; -y_1^2(A(\mu_2)+y_1B(y_1,\mu_2)),\quad A=\frac{\eta(\mu_2)}{h(y_1,\mu_1,\mu_2)}, B=\frac{\eta(\mu_2)g(y_1,\mu_2)}{h(y_1,\mu_1,\mu_2)}$$

onde $A(\mu_2)>0$ e $A(\mu_2)+y_1B(y_1,\mu_2)$ é de classe $\mathcal{C}^{k-2}$. Para μ_1, seja $\mu_1=-\delta^2$. então

$$\delta = y_1(A(\mu_2)+y_1B(y_1,\mu_2))^{1/2}.$$

Agora utilizando o Teorema da Aplicação Implícita, podemos resolver para y_1 perto de $y_1=0,\;\;\delta=0,\;\;\mu_2=0$. Obtendo

$$y_1=\widehat{p}(\delta,\mu_2)\;\;\text{com}\;\;\widehat{p}(0,\mu_2)=0,\quad \frac{\partial\widehat{p}}{\partial\delta}(0,\mu_2)>0. \tag{3.40}$$

Logo, linearizando o sistema (3.36), temos que

$$DF(y_1,y_2)=\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2) & \frac{\partial b}{\partial y_1}(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2) \\ \\ \frac{\partial a}{\partial y_2}(y_1,\mu_1,\mu_2) & \frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2) \\ \\ \end{pmatrix}_{2\times 2,}$$

onde

$$\frac{\partial a}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2) \;=\; \eta(\mu_2)y_1\Big[2+3y_1g(y_1,\mu_2)+y_1^2\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)\Big]+\mu_1\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2),$$

$$\frac{\partial a}{\partial y_2}(y_1,\mu_1,\mu_2)=0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial y_1}(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2) &= -\frac{\partial\lambda}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2)y_2\Big[1+y_2k(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2)\Big]\\ &- \lambda(y_1,\mu_1,\mu_2)y_2^2\frac{\partial k}{\partial y_1}(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2)\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2) \;=\; -\lambda(y_1,\mu_1,\mu_2)\Big[1+2y_2k(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2)+y_2^2\frac{\partial k}{\partial y_2}(y_1,y_2,\mu_1,\mu_2)\Big].$$

Então para μ_1 e μ_2 muito pequenos e avaliando o sistema linearizado no ponto de equilíbrio $\widehat{p}(\delta,\mu_2,0)$, obtemos que

$$DF(\widehat{p}(\delta,\mu_2,0))=$$

$$=\begin{pmatrix} \eta(\mu_2)y_1\left[2+3y_1g(y_1,\mu_2)+y_1^2\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,\mu_2)\right]+\mu_1\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1,\mu_1,\mu_2) & 0 \\ \\ 0 & -\lambda(y_1,\mu_1,\mu_2) \\ \\ \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

De $\eta>0$ e (3.40) temos que o equilíbrio $(\widehat{p}(\delta,\mu_2),0)$ de (3.35) com $\mu_1=-\delta^2$ é sela-nó se $\delta=0$, uma sela se $\delta>0$, e um nó estável se $\delta<0$. ■

Seja

$$x = x(y, \mu_1, \mu_2)$$

a mudança de coordenadas inverso de (3.32). Se define

$$p(\delta, \mu_2) = x((\widehat{p}(\delta, \mu_2), 0), -\delta^2, \mu_2). \tag{3.41}$$

Então $p(\delta, \mu_2)$ satisfaz as hipóteses do lema.
Note que

$$\frac{\partial p}{\partial \delta}(0,0)$$

é um múltiplo positivo de $\vec{u}$. para ver isso, temos de

$$\frac{\partial p}{\partial \delta}(0,0) = D_y x((0,0),0,0)(\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \delta}(0,0),0). \tag{3.42}$$

Como $\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \delta}(0,0) > 0$, logo $\frac{\partial p}{\partial \delta}(0,0)$ é um múltiplo positivo de $\vec{u}$.
Para cada vetor $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, seja $w^{\perp}(-w_1, w_2)$.
Definimos $d^c(\mu_1, \mu_2)$ e $d^s(\alpha, \mu_2)$ pelas seguintes igualdades

$$\begin{aligned} q^c(\mu_1, \mu_2, 0) &= q(0) + [\frac{d^c(\mu_1, \mu_2)}{\| f(q(0),0,0) \|}] f^{\perp}(q(0),0,0) \\ q^s(\alpha, \mu_2, 0) &= q(0) + [\frac{d^s(\alpha, \mu_2)}{\| f(q(0),0,0) \|^2}] f^{\perp}(q(0),0,0) \end{aligned}$$

Então d^c é de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ e d^s é de classe $\mathcal{C}^{k-2}$. Os números $d^c(\mu_1, \mu_2)$ e $d^s(\alpha, \mu_2)$ determinam sobre a linha L as curvas $q^c(\mu_1, \mu_2, t)$ e $q^s(\alpha, \mu_2, t)$ começa respectivamente. Temos

$$\begin{aligned} d^c(\mu_1, \mu_2) &= f^{\perp}(q(0),0,0).[q^c(\mu_1, \mu_2, 0) - q(0)] \\ &= f(q(0),0,0) \wedge [q^c(\mu_1, \mu_2, 0) - q(0)]. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} d^s(\alpha, \mu_2) &= f^{\perp}(q(0),0,0).[q^s(\alpha, \mu_2, 0) - q(0)] \\ &= f(q(0),0,0) \wedge [q^s(\alpha, \mu_2, 0) - q(0)]. \end{aligned}$$

Existe um laço separatriz de $\dot{x} = f(x, -\delta^2, \mu_2)$ baseado em $p(\delta, \mu_2)$ se somente se $\delta \leq 0$ e

$$d(\delta, \mu_2) \stackrel{def}{=} d^c(\delta^2, \mu_2) - d^s(\delta, \mu_2) = 0 \tag{3.43}$$

Logo $d(\delta, \mu_2)$ é de classe $\mathcal{C}^k$ pois, d^c é de classe $\mathcal{C}^k$ e d^s é de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ respectivamente e em particular d^c e de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.
Vamos mostar que $\frac{\partial d}{\partial \delta}(0,0)$ é um múltiplo negativo de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\frac{\partial d}{\partial \delta}(0,0) = I$.
De fato, temos as seguintes equações variacionais para $q^c(-\delta^2, \mu_2, t)$ e $q^s(\delta, \mu_2, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) &= D_x f(q(t),0,0)\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) + \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0), \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial q^s}{\partial \delta}(0,0,t) &= D_x f(q(t),0,0)\frac{\partial q^s}{\partial \delta}(0,0,t), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t) = D_x f(q(t),0,0)\frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t) + \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0).$$

Como em [5], nós definimos

$$\begin{aligned}
\Delta^c_{\mu_2}(t) &= f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t),\\
\Delta^s_{\delta}(t) &= f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \delta}(0,0,t),\\
\Delta^s_{\mu_2}(t) &= f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t).
\end{aligned}$$

Para $d^c(-\alpha^2,\mu_2)$ e $d^s(\alpha,\mu_2)$, temos as seguintes igualdades

$$\frac{\partial d^c}{\partial \delta}(0,0) = \frac{\partial d^c}{\partial \mu_1}(0,0).\frac{\partial d\mu_1}{\partial \delta}(0) = 0, \quad \frac{\partial d^c}{\partial \mu_2}(0,0) = \Delta^c_{\mu_2}(0),$$
$$\frac{\partial d^s}{\partial \delta}(0,0) = \Delta^s_{\delta}(0), \quad \frac{\partial d^s}{\partial \mu_2}(0,0) = \Delta^s_{\mu_2}(0).$$

Usando as equacões para q^c e q^s, nós calculamos de forma similar como em [5] temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta^c_{\mu_2}(t) &= \frac{d}{dt}[f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t)]\\
&= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) + f(q(t),0,0) \wedge \frac{d}{dt}\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t).
\end{aligned}$$

Substituindo a igualdade

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) = D_x f(q(t),0,0)\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) + \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)$$

na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta^c_{\mu_2}(t) = &= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t)\\
&+ f(q(t),0,0) \wedge [D_x f(q(t),0,0)\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) + \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)]\\
&= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) +\\
&+ f(q(t),0,0) \wedge D_x f(q(t),0,0)\frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t)\\
&+ f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)\\
&= divf(q(t),0,0).f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) +\\
&+ f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)\\
&= divf(q(t),0,0).\Delta^c_{\mu_2}(t) + f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)dt \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

De maneira análoga afirmamos que:

$$\frac{d}{dt}\Delta^s_{\delta}(t) = divf(q(t),0,0).\Delta^s_{\delta}(t).$$

De fato:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta^s_\delta(t) &= \frac{d}{dt}[f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\delta}(0,0,t)]\\ &= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\delta}(0,0,t)+f(q(t),0,0)\wedge\frac{d}{dt}\frac{\partial q^s}{\partial\delta}(0,0,t)\\ &= divf(q(t),0,0).\Delta^s_\delta(t). \qquad (3.45)\end{aligned}$$

Finalmente afirmamos que:

$$\frac{d}{dt}\Delta^s_{\mu_2}(t) = \mathrm{d}ivf(q(t),0,0).\Delta^s_{\mu_2}(t)+f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t).$$

De fato:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta^s_{\mu_2}(t) &= \frac{d}{dt}[f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)]\\ &= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)+f(q(t),0,0)\wedge\frac{d}{dt}\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t).\end{aligned}$$

Fazendo a substituição da igualdade

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t) = D_xf(q(t),0,0)\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)+\frac{\partial f}{\partial\mu_2}(q(t),0,0)$$

na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta^s_{\mu_2}(t) &= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)\\ &+ f(q(t),0,0)\wedge[D_xf(q(t),0,0)\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)+\frac{\partial f}{\partial\mu_2}(q(t),0,0)]\\ &= \frac{d}{dt}f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)+\\ &+ f(q(t),0,0)\wedge D_xf(q(t),0,0)\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)\\ &+ f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t)\\ &= divf(q(t),0,0).\Delta^s_{\mu_2}(t)+f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial q^s}{\partial\mu_2}(0,0,t). \qquad (3.46)\end{aligned}$$

Resolvendo a igualdade (3.44), isto é:

$$\frac{d}{dt}\Delta^c_{\mu_2}(t) = divf(q(t),0,0).\Delta^c_{\mu_2}(t)+f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial f}{\partial\mu_2}(q(t),0,0),$$

e mudando o termo $divf(q(t),0,0).\Delta^c_{\mu_2}(t)$ para o lado esquerdo da igualdade acima, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\Delta^c_{\mu_2}(t)-divf(q(t),0,0).\Delta^c_{\mu_2}(t) = f(q(t),0,0)\wedge\frac{\partial f}{\partial\mu_2}(q(t),0,0).$$

Multiplicando pelo fator integrante $exp(-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds)$ na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}\Delta^c_{\mu_2}(s)] &= e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} \\ &\cdot \quad f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0).\end{aligned}$$

Logo integrando de t_1 até 0, isto é:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^0 \frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}\Delta^c_{\mu_2}(s)] &= \int_{t_1}^0 e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} \\ &\cdot \quad f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Delta^c_{\mu_2}(0) &= \Delta^c_{\mu_2}(t_1)e^{-\int_{t_1}^0 divf(q(t),0,0)dt} \\ &+ \int_{t_1}^0 e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0). \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Agora resolvendo a igualdade (3.45):

$$\frac{d}{dt}\Delta^s_\delta(t) = divf(q(t),0,0).\Delta^s_\delta(t).$$

De fato temos:

$$\frac{d}{dt}\Delta^s_\delta(t) - divf(q(t),0,0).\Delta^s_\delta(t) = 0.$$

Multiplicando pelo fator integrante $exp(-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds)$ na igualdade acima, obtemos que:

$$exp^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}[\frac{d}{dt}\Delta^s_\delta(t) - divf(q(t),0,0).\Delta^s_\delta(t)] = 0, \qquad (3.48)$$

Obtem-se

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}\Delta^s_\delta(t)] = 0.$$

Integrando de t_1 até 0, temos

$$\int_{t_1}^0 \frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}\Delta^s_\delta(s)] = 0,$$

obtendo

$$-\Delta^s_\delta(0) = -\Delta^s_\delta(t_1)e^{-\int_0^{t_1} divf(q(t),0,0)dt}.$$

De maneira análoga, resolvendo a igualdade (3.46):

$$\frac{d}{dt}\Delta^s_{\mu_2}(t) = divf(q(t),0,0).\Delta^s_{\mu_2}(t) + f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t) \qquad (3.49)$$

da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\Delta^s_{\mu_2}(t) - divf(q(t),0,0).\Delta^s_{\mu_2}(t) \;=\; f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t),$$

multiplicando pelo fator integrante $exp(-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds)$ na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}[\frac{d}{dt}\Delta^s_{\mu_2}(t) - divf(q(t),0,0).\Delta^s_{\mu_2}(t)] &= e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} \\ &\cdot \quad [f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t)] \end{aligned}$$

obtendo

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}\Delta^s_{\mu_2}(s)] \;=\; e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}[f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t)].$$

Integrando de t_1 até 0, isto é:

$$\int_{t_1}^0 \frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}\Delta^s_{\mu_2}(s)] \;=\; \int_{t_1}^0 e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds}[f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t)]$$

obtemos que

$$\begin{aligned} -\Delta^s_{\mu_2}(0) &= -\Delta^s_{\mu_2}(t_1)\int_{t_1}^0 e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} + \\ &+ \int_0^{t_1} e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} - f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t). \end{aligned}$$

Agora queremos avaliar quando $t_1 \to \infty$. Usando a definição de Δ^s_δ, podemos escrever

$$-\Delta^s_\delta(0) \;=\; \frac{\partial q^s}{\partial \delta}(0,0,t_1) \wedge f(q(t_1),0,0)e^{-\int_0^{t_1} divf(q(s),0,0)ds} \tag{3.50}$$

Lema 3.4 *Se verificam os seguintes limites:*

(a) $\lim_{t\to\infty} \frac{\partial q^s}{\partial \delta}(0,0,t) = \frac{\partial p}{\partial \delta}(0,0)$,

(b) $\lim_{t\to\infty} \frac{\partial q^s}{\partial \mu_2}(0,0,t) = \frac{\partial p}{\partial \mu_2}(0,0)$.

Demonstração:
Usando as coordenadas

$$y(x,\mu_1,\mu_2) \;=\; (y_1(x,\mu_1,\mu_2), y_2(x,\mu_1,\mu_2)) \tag{3.51}$$

e definindo

$$\begin{aligned} \widetilde{q}^s(\delta,\mu_2,t) &= y(q^s(\delta,\mu_2,t), -\delta^2, \mu_2) \\ &= (\widehat{p}(\delta,\mu_2), y_2(\delta,\mu_2,t)) \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde $\widehat{p}(\delta,\mu_2)$ está definida em (3.40) e $y_2(\delta,\mu_2,t)$ está definida em (3.52).
Como $q^s(\delta,\mu_2,t)\to p(\delta,\mu_2)$ quando $t\to\infty$, para cada (δ,μ_2) perto de $(0,0)$, $\widetilde{q}^s(\delta,\mu_2,t)$ e $y_2(\delta,\mu_2,t)$ são definidos para um t suficientemente grande.
Segue de (3.34) que $y_2(\delta,\mu_2,t)>0$ para um t suficientemente grande, e de (3.35) temos que $y_2(\delta,\mu_2,t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dz}{dt} = -\lambda(\delta,\mu_2)z(1+zG(z,\delta,\mu_2)) \tag{3.53}$$

onde $\lambda(0,0)=\lambda$. Aqui λ e zG são de classe $\mathcal{C}^{k-3}$.
Para provar o lema, vamos estudar o comportamento assintótico das soluções de equação diferencial (3.53), quando $t\to\infty$. Seja

$$z^{-1}[1+zG(z,\delta,\mu_2)]^{-1} = z^{-1}+H(z,\delta,\mu_2) \tag{3.54}$$

então H é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$ e fixando $z_0>0$. Definimos

$$J(z,\delta,\mu_2) = \int_{z_0}^{z} H(s,\delta,\mu_2)ds, \tag{3.55}$$

como H é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$ então J é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$. Agora, substituindo a igualdade (3.54) na igualdade (3.53), obtemos

$$[z^{-1}+H(z,\delta,\mu_2)]dz = -\lambda(\delta,\mu_2)dt.$$

Integrando a equação diferencial, obtem-se

$$[lnz+J(z,\delta,\mu_2)] = -\lambda(\delta,\mu_2)t+A(\delta,\mu_2).$$

Aplicando a exponencial dos dios lados da igualdade acima, obtemos

$$zexp(J(z,\delta,\mu_2)) = B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t).$$

Aqui $B(\delta,\mu_2)$ é determinado pelo valor de $y_2(\delta,\mu_2,t)$ em algum $t=t_0$. Uma vez que B é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$ e $B>0$ temos

$$\frac{\partial}{\partial z}[zexp(J(z,\delta,\mu_2))](0,\delta,\mu_2) \neq 0.$$

Logo aplicando o Teorema da Aplicação Implícita, podemos resolver a equação para z quando z,v estão perto de 0. Isto é,

$$zexp(J(z,\delta,\mu_2))=v. \tag{3.56}$$

Obtendo $z=K(v,\delta,\mu_2)$, onde K é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$, com

$$K(0,\delta,\mu_2)=0, \tag{3.57}$$

fazendo $z=y_2$ e $v=B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t)$ tem-se:

$$y_2=K(B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t),\mu_2,t). \tag{3.58}$$

Das igualdades (3.58) e (3.57) temos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\partial y_2}{\partial\delta}(\delta,\mu_2,t) &= \lim_{t\to\infty}\Big[\frac{\partial K}{\partial v}(B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t),\mu_2,t).\frac{\partial v}{\partial\delta}\\ &+ \frac{\partial K}{\partial\mu_1}(B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t),\mu_2,t).\frac{\partial\mu_1}{\partial\delta}\\ &+ \frac{\partial K}{\partial\mu_2}(B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t),\mu_2,t).\frac{\partial\mu_2}{\partial\delta}\Big]. \qquad (3.59)\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial\mu_1}{\partial\delta}=1$, $\frac{\partial\mu_2}{\partial\delta}=0$ e $\frac{\partial v}{\partial\delta}=-B(\delta,\mu_2)\lambda(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t)$ a igualdade acima transforma-se em:

$$\begin{aligned}&= \lim_{t\to\infty}\Big[-B(\delta,\mu_2)\lambda(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t)\frac{\partial K}{\partial v}(B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t),\mu_2,t)\\ &+ \frac{\partial K}{\partial\mu_1}(B(\delta,\mu_2)exp(-\lambda(\delta,\mu_2)t),\mu_2,t)\Big].\end{aligned}$$

Avaliando quando $t\to\infty$ na igualdade acima, obtemos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial y_2}{\partial\delta}(\delta,\mu_2,t) = \frac{\partial K}{\partial\mu_1}(B(0,\mu_2,t)).$$

Utilizando a igualdade (3.57) obtemos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial y_2}{\partial\delta}(\delta,\mu_2,t)=0.$$

De maneira análoga mostra-se que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial y_2}{\partial\mu_2}(\delta,\mu_2,t)=0.$$

Portanto

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial y_2}{\partial\delta}(\delta,\mu_2,t)=0 \text{ e } \lim_{t\to\infty}\frac{\partial y_2}{\partial\mu_2}(\delta,\mu_2,t)=0. \qquad (3.60)$$

■

Logo, substituindo as duas igualdades de (3.60) na igualdade (3.52), obtemos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial\widetilde{q}^s}{\partial\delta}(\delta,\mu_2,t) = (\frac{\widehat{p}}{\partial\delta}(\delta,\mu_2),0) \qquad (3.61)$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial\widetilde{q}^s}{\partial\mu_2}(\delta,\mu_2,t) = (\frac{\widehat{p}}{\partial\mu_2}(\delta,\mu_2),0).$$

Agora usando a igualdade (3.57), obtemos que

$$\frac{\partial q^s}{\partial\delta}(\delta,\mu_2,t) = \frac{\partial}{\partial\delta}x(\widetilde{q}^s(\delta,\mu_2,t),-\delta^2,\mu_2)$$

onde $x(y,\mu_1,\mu_2)$ é dado por (3.41). Portanto,

$$\frac{\partial q^s}{\partial\delta}(0,0,t) = D_y x(\widetilde{q}^s(0,0,t),0,0)\frac{\partial\widetilde{q}^s}{\partial\delta}(0,0,t) \qquad (3.62)$$

De (3.61) e (3.42) temos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\partial q^s}{\partial\delta}(0,0,t) &= D_yx((0,0),0,0)\Big(\frac{\partial\widehat{p}}{\partial\delta}(0,0),0\Big)\\ &= \frac{\partial p}{\partial\delta}(0,0).\end{aligned}\tag{3.63}$$

Similarmente, a segunda igualdade do lema segue-se da igualdade (3.62) e a igualdade (3.41)

$$\frac{\partial p}{\partial\mu_2}(0,0) = D_yx((0,0),0,0)\Big(\frac{\widehat{p}}{\partial\mu_2}(0,0),0\Big)+\frac{\partial x}{\partial\mu_2}((0,0),0,0).\tag{3.64}$$

Agora vamos usar os cálculos que provamos no lema acima para estudar os outros termos da igualdade(3.50).
Da igualdade (3.51) temos que

$$\widetilde{q}^s(\delta,\mu_2,t) = D_xy(q^s(\delta,\mu_2,t),-\delta^2,\mu_2)\dot{q^s}(\delta,\mu_2,t).\tag{3.65}$$

Seja $\delta=\mu_2=0$ em (3.65). Como $\dot{q}^s(0,0,t)=q(t)=f(q(t),0,0)$ tem-se

$$f(q(t),0,0) = [D_xy(q(t),0,0)]^{-1}\widetilde{q}^s(0,0,t).$$

De (3.52), (3.57) e (3.58) temos que

$$q(t)=p+O(exp(-\lambda t)) \text{ e } \widetilde{q}^s(t)=(0,-Cexp(-\lambda t)+O(-\lambda t)))\tag{3.66}$$

onde $C>0$. Portanto, fazendo $t=t_1$, temos que

$$f(q(t_1),0,0)=\{[D_xy(p,0,0)]^{-1}+O(exp(-\lambda t))\}.(0,-Cexp(-\lambda t)+o(-\lambda t))).\tag{3.67}$$

Assim de (3.66) obtemos que

$$divf(q(t),0,0) = -\lambda+O(exp(-\lambda t)).$$

Portanto

$$exp[-\int_0^{t_1}divf(q(s),0,0)ds] = exp(\lambda t_1).exp-\int_0^{t_1}O(exp(-\lambda s))ds.\tag{3.68}$$

Logo de (3.66) e (3.68) resulta que

$$\begin{aligned}&\lim_{t_1\to\infty}f(q(t_1),0,0)exp[-\int_0^{t_1}divf(q(s),0,0)ds]\\ &=[D_xy(p,0,0)]^{-1}.\Big(0,-Cexp(\int_0^{\infty}O(-\lambda s))ds\Big),\end{aligned}\tag{3.69}$$

onde a integral converge. Então (3.50), **Lema 3.4** e (3.69) implicam que

$$-\Delta_\delta^s(0) = \frac{\partial p}{\partial\delta}(0,0)\wedge\lim_{t_1\to\infty}f(q(t_1),0,0)exp[-\int_0^{t_1}divf(q(s),0,0)ds],\tag{3.70}$$

onde o limite existe.
Notemos que de (3.34), segue que $-\Delta^s_\delta(0)$ é um múltiplo negativo de $\vec{v}$. Então (3.42) implica que (3.50) é um múltiplo negativo de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Por (3.43) e (3.44), $\frac{\partial d}{\partial \delta}(0,0)$ é também um múltiplo negativo de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
Agora afirmamos que

$$-\Delta^s_{\mu_2}(0) = \frac{\partial p}{\partial \mu_2}(0,0) \wedge \lim_{t_1 \to \infty} f(q(t_1),0,0) exp[-\int_0^{t_1} divf(q(s),0,0)ds] + \int_0^\infty exp[-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds] f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(s),0,0)dt. \quad (3.71)$$

Utilizando o modelo da igualdade (3.69) e usando o **Lema 3.4** vamos mostrar primeiro que o primeira parcela da igualdade (3.71) aproxima-se à primeira parcela da igualde acima, quando $t_1 \to \infty$, onde o limite existe. Então, como $-\Delta^s_{\mu_2}(0)$ é finito, a segunda parcela de igualdade (3.50), a integral aproxima-se a limite quando $t_1 \to \infty$.
Finalmente vamos mostrar o seguinte:

Lema 3.5 *Se verifica o seguinte:*
$\lim_{t \to -\infty} \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0,0,t) = 0$

Demonstração:
Mais uma vez vamos usar as coordenadas da igualdade (3.33). Definimos

$$\widetilde{q}^c(\mu_2,t) = y(q^c(0,\mu_2,t),0,\mu_2) = (y_1(\mu_2,t),0).$$

Como $q^c(0,\mu_2,t) \to p(0,\mu_2)$ quando $t \to \infty$, para cada μ_2 perto de 0, temos que $\widetilde{q}^c(\mu_2,t)$, e portanto $y_1(\mu_2,t)$ está definido para t suficientemente negativo. Desta definição, $y_1(\mu_2,t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{dz}{dt} = \eta(\mu_2)z^2(1+zG(z,\mu_2)), \quad (3.72)$$

onde η e zG são de classe $\mathcal{C}^k$.
Seja

$$z^{-2}(1+zG(z,\mu_2))^{-1} = z^{-2} + A(\mu_2)z^{-1} + H(z,\mu_2) \quad (3.73)$$

onde A é de classe $\mathcal{C}^{k-3}$ e H é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$. Agora fixando um $z_0 > 0$. Seja

$$J(z,\mu_2) = \int_{z_0}^z H(s,\mu_2)ds. \quad (3.74)$$

Desta forma J é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$. Então, resolvindo (3.72) usando o método de separação de variaveis e (3.73) fornece

$$-z^{-1} + A(\mu_2)lnz - zJ(z,\mu_2) = \eta(\mu_2)t + B(\mu_2)$$

onde $B(\mu_2)$ é determinado pelo valor de $y_1(\mu_2, t)$ em algum $t = t_0$. Logo B é de classe $\mathcal{C}^{k-4}$. Ordenando adequadamente a igualdade acima, temos que

$$z[1 - A(\mu_2)zlnz - zJ(z, \mu_2)]^{-1} = -[\eta(\mu_2)t + B(\mu_2)]^{-1}. \tag{3.75}$$

Fazendo $\Theta(z, \mu_2) = z[1 - A(\mu_2)zlnz - zJ(z, \mu_2)]^{-1}$. Temos que $\Theta(z, \mu_2)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ definida para (z, μ_2) perto de $(0, 0)$ em $S = \{(z, \mu_2) : z \geq 0\}$; de modo que

$$\Theta(z, \mu_2) = 0 \text{ e } \frac{\partial \Theta}{\partial z}(0, \mu_2) = 1.$$

Agora pelo Teorema da Aplicação Implícita, podemos resolver a equação $\Theta(z, \mu_2) = v$ para z quando z e v são perto de 0, com $v \geq 0$. Obtendo

$$z = v + R(v, \mu_2),$$

onde $R(v, \mu_2)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, com $R(0, \mu_2) = 0$ e R é o(v). Fazendo $z = y_1$ e $v = -[\eta(\mu_2)t + B(\mu_2)]^{-1}$, para um t suficientemente pequeno e negativo, obtemos

$$y_1 = -[\eta(\mu_2)t + B(\mu_2)]^{-1} + R(-[\eta(\mu_2)t + B(\mu_2)]^{-1}, \mu_2).$$

Segue

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\partial y_1}{\partial \mu_2}(\mu_2, t) = 0.$$

Portanto

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\partial \bar{q}^c}{\partial \mu_2}(\mu_2, t) = 0. \tag{3.76}$$

■

para avaliar (3.47), usamos a definição de $\Delta^c_{\mu_2}(0)$ e escrevemos (3.47) como

$$\begin{aligned} \Delta^c_{\mu_2}(0) &= f(q(t_1), 0, 0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0, 0, t_1) e^{-\int_{t_1}^0 divf(q(t),0,0)dt} \\ &+ \int_{t_1}^0 e^{-\int_0^t divf(q(s),0,0)ds} f(q(t), 0, 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t), 0, 0)dt. \end{aligned} \tag{3.77}$$

De fato,

$$\lim_{t_1 \to -\infty} f(q(t), 0, 0) = 0 \tag{3.78}$$

Além disso

$$divf(q(t), 0, 0) = -\lambda + O([\eta(0)t + c(0)]^{-1}) \tag{3.79}$$

quando $t \to -\infty$.
Pelo **Lema 3.5**, (3.76) e (3.77) temos que

$$\lim_{t_1 \to -\infty} f(q(t_1), 0, 0) \wedge \frac{\partial q^c}{\partial \mu_2}(0, 0, t_1) e^{-\int_{t_1}^0 divf(q(s),0,0)ds} = 0.$$

Portanto, a segunda parcela da integral (3.76) aproxima-se ao limite quando $t_1 \to -\infty$. Logo, temos que

$$\Delta^c_{\mu_2}(0) \;=\; \int_{-\infty}^{0} e^{-\int_0^t div f(q(s),0,0)ds} f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)dt. \tag{3.80}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} I = \frac{\partial d}{\partial \mu_2}(0,0) = \frac{\partial d^c}{\partial \mu_2}(0,0) - \frac{\partial d^s}{\partial \mu_2}(0,0) = \Delta^c_{\mu_2}(0) - \Delta^s_{\mu_2}(0) = \\ \frac{dp}{d\mu_2}(0) \wedge \lim_{t_1 \to \infty} f(q(t_1),0,0) e^{-\int_0^{t_1} div f(q(s),0,0)ds} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_0^t div \quad f(q(s),0,0)ds} f(q(t),0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(q(t),0,0)dt. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Agora, se $I \neq 0$, então o conjunto $\mathcal{S} = \{(\delta, \mu_2) : d(\delta, \mu_2) = 0\}$ é uma curva de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ baseada no ponto $(0,0)$, da seguinte forma

$$\delta = \mathcal{B}\mu_2 + \vartheta(\mu_2) \text{ e } \mathcal{B} = -\frac{I}{\frac{\partial d}{\partial \delta}(0,0)}. \tag{3.82}$$

Passando a raiz quadrada em ambos lados da primeira igualdade de (3.82) obtemos que

$$\mu_1 \;=\; -\mathcal{B}\mu_2^2 + o(\mu_2^2)$$

aplicamos a condição $\delta \geq 0$ na primeira igualdade de (3.82) de onde obtemos que $\mu_2 = 0$ ou $\mathcal{B}$ e μ_2 têm o mesmo sinal, mas $\mathcal{B}$ tem o sinal de $I.(u \wedge v)$. ■

Queremos dar uma condição analítica para determinar se a família (3.28) é tranversal a Σ em $(\nu_1, \nu_2) = (0,0)$.
Se a condição de transversalidade é satisfeita, então existe uma mudança suave e não singular de coordenadas no espaço de parâmetros:

$$(\nu_1, \nu_2) \longleftrightarrow (\mu_1, \mu_2) \; e \; (0,0) \longleftrightarrow (0,0).$$

De modo que:

$$\dot{x} = f(x, \nu_1(\mu_1,\mu_2), \nu_2(\mu_1,\mu_2)) \stackrel{def}{=} f(x, \mu_1, \mu_2) \tag{3.83}$$

tem um diagrama de bifurcação em uma vizinhança de $(\mu_1, \mu_2) = (0,0)$. A curva $\mathcal{C}$ encontra-se em $\mathcal{R} = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 \leq 0, \mu_2 \geq 0\}$. Além disso, $\mathcal{C}$ tem uma tangencia quadrática com o eixo μ_2 no ponto $(0,0)$
O retrato de fase de (3.83) em uma vizinhança de Γ que é positivamente invariante para cada campo vetorial (3.83) é a seguinte. Veja a **Figura 16.**

(1) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$; uma sela-nó e um laço separatriz.

(2) $\mu_1 > 0$; não é equilíbrio, uma única órbita fechada estável perto de Γ.

(3) $\mu_1 = 0, \mu_2 < 0$; uma sela-nó.

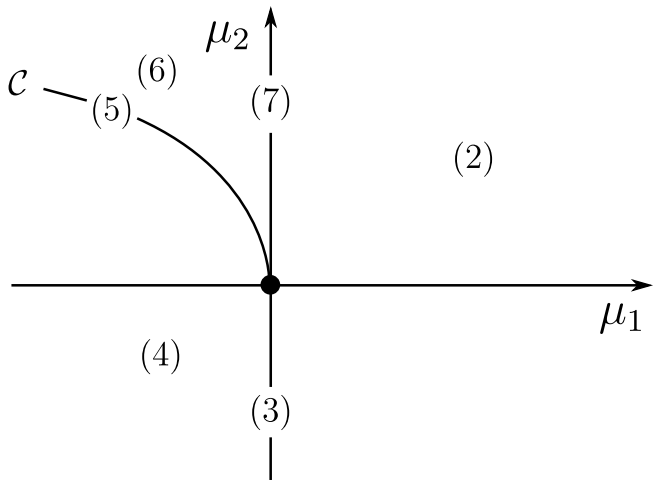
(4) $\mu_1 < 0, (\mu_1, \mu_2)$ encontra-se abaixo de $\mathcal{C}$; uma sela e um nó

(5) $\mu_1 < 0, (\mu_1, \mu_2)$; encontra-se em $\mathcal{C}$; uma sela e um nó,a sela tem um laço separatriz.

(6) $\mu_1 < 0, (\mu_1, \mu_2)$; encontra-se acima de $\mathcal{C}$; uma sela e um nó, esta é uma única órbita estável fechada perto de Γ.

(7) $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$; uma sela-nó e uma única órbita estável fechada perto de Γ.

Figura 16 – Configuração dos campos vetoriais numa vizinhança de Γ.



Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

dependendo dos valores de μ_1 e μ_2, temos os seguintes sistemas perturbados de campo vetorial f. Ver as **Figuras 17, 18 e 19.**

Teorema 3.4 *A família $\dot{x} = \tilde{f}(x, \nu_1, \nu_2)$ é transversal a Σ em $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$ se e somente se $I \neq 0$.*

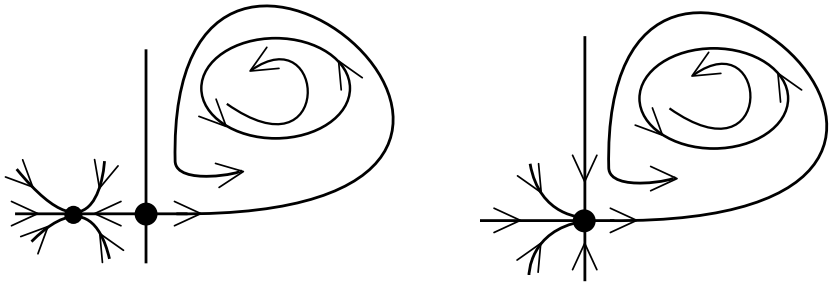
Demonstração:
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto compacto não vazio e definimos

$$E = \{f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 : f \text{ é campo vetorial de classe } \mathcal{C}^{k+1}, k \geq 5\}$$

munido da topologia $\mathcal{C}^{k+1}$.
Seja $\Sigma' \subset E$, tal que para cada $f \in \Sigma'$ satisfaz as seguintes

(1) Existe um único $p \in int(D)$ verificando (i)-(iii) de (3.28).

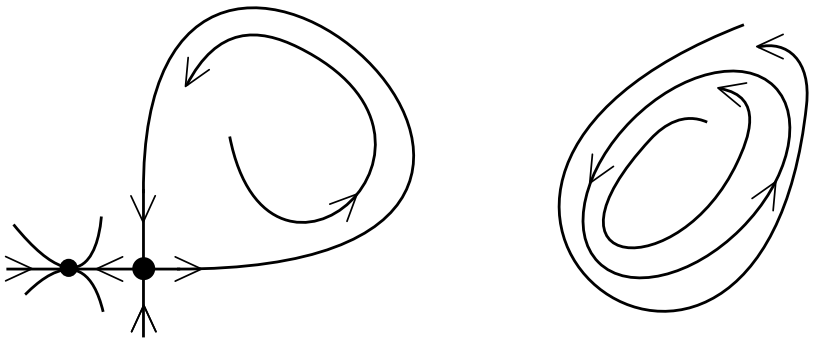
Figura 17 – Campos vetoriais (6) e (7).



(6) (7)

Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

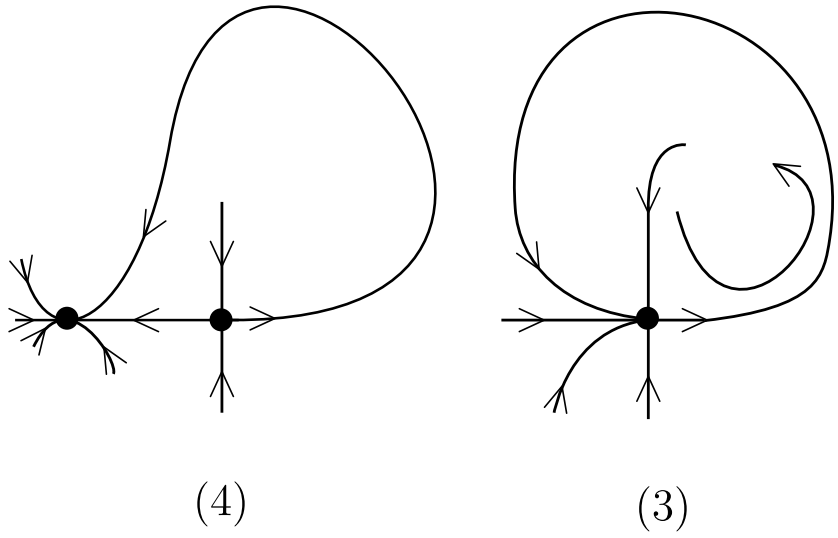
Figura 18 – Campos vetoriais (5) e (2).



(5) (2)

Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

Figura 19 – Campos vetoriais (4) e (3).



Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

(2) Outra singularidade distinta de p é hiperbólica.

De acordo com [14], temos que $\Sigma^{'}$ é uma subvariedade de classe $\mathcal{C}^k$ e codimensão 1 de E. Seja

$$\Sigma = \{f \in \Sigma^{'} : f \text{ verifica (iv) de } (3.28) \text{ e } \Gamma \subset int(D)\}.$$

Para todo $\epsilon > 0$, como $\Sigma^{'}$ é uma subvariedade de E, existe $g \in \Sigma^{'}$ tal que $\|f - g\|_{k+1} < \epsilon$. Seja $\mathcal{V}_p$ uma vizinhança de p, $\mathcal{V}_p \nsubseteq D$.
Então o conjunto $F = D - \mathcal{V}_p$ é um conjunto compacto, logo pelo **Teorema de Weierstrass**, f atende mínimo em F. Como $p \in D$ é a única singularidade de f, temos que

$$0 < M \leq \|f(x)\| \; ; \forall x \in F$$

Se tomamos $\epsilon < M$, temos que

$$||f(x) - g(x)|| \leq ||f - g||_{k+1} < \epsilon.$$

Mas

$$\Big|\|g(x)\| - \|f(x)\|\Big| \;\; \leq \;\; \|g(x) - f(x)\| < \epsilon.$$

Então

$$\|g(x)\| - \|f(x)\| \;\; \geq \;\; -\|f(x) - g(x)\|$$

Logo

$$||g(x)|| - |||f(x)|| > -\epsilon.$$

Finalmente, temos

$$||g(x)|| > M - \epsilon > 0.$$

Portanto g não possui singularidades em F. Logo pela hiótese g só tem singularidades em $\mathcal{V}_p$. Isto é, existe uma única sela-nó $p_g \in \mathcal{V}_p$ tal que $g(p_g) = 0$.
Portanto, se g está perto de f, então p_g está perto de p; p_g é uma $\mathcal{C}^k$ função de $g \in \Sigma'$ [14]. As variedades estável e central de p_g também dependem de g. Isto é, as interseções com L são $\mathcal{C}^k$ funcões de g. Portanto a função $d(0, \mu_2)$ definida no **Teorema 4.1** extende à uma $\mathcal{C}^k$ função $d(g)$ definida para $g \in \Sigma'$ perto de f : $d(g)$ é a medida da separação dos pontos de interseção das variedades estável e central com a linha L.
Logo temos que $d(g) = 0$ se e somente se $g \in \Sigma$. Agora, seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança de f, então para um ϵ pequeno podemos encontrar uma perturbação de f em Σ' de tipo (3) ou (7) $\in \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0\} \subset \mathcal{R}$, de modo que $f + \epsilon h \in \Sigma'$ tal que

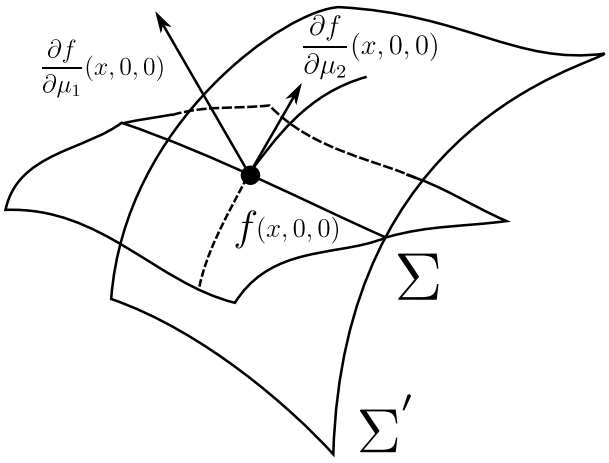
$$\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} d(f + \epsilon h) \neq 0$$

logo a função $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} d(f + \epsilon h)$ é sobrejetiva, isto é, 0 é um valor regular de d.
Portanto, $d^{-1}(0) = \mathcal{V} \cap \Sigma$, então Σ é uma subvariedade de classe $\mathcal{C}^k$ e codimensão 1 de Σ'.
Vamos mostrar que $f(x, \mu_1, \mu_2)$ é tranversal a Σ no ponto $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ se e somente se $I \neq 0$. Como $f(x, 0, \mu_2) \in \Sigma'$ para todo suficientemente pequeno μ_2, então $\frac{\partial f}{\partial \mu_2}(x, 0, 0)$ é tangente a Σ'. E como

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu_1}(x, 0, 0) \;\; = \;\; \frac{\partial f}{\partial \mu_1}(x, 0, 0) - \beta \frac{\partial f}{\partial \mu_2}(x, 0, 0) \;\; \text{com} \;\; \beta \neq 0.$$

temos que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu_1}(x, 0, 0)$ é transversal a Σ' pela hipótese (vi), e $\frac{\partial f}{\partial \mu_2}(x, 0, 0)$ é tangente a Σ', então $\frac{\partial f}{\partial \mu_1}(x, 0, 0)$ é transversal a Σ'. Veja a **Figura 20.**
Logo, como $\frac{\partial d}{\partial \mu_2}(0, 0) = I$, então $\frac{\partial f}{\partial \mu_2}(x, 0, 0)$ é transversal a Σ se e somente se $I \neq 0$. ■

Figura 20 – $\frac{\partial f}{\partial \mu_1}(x,0,0)$ é transversal a Σ'.



Fonte: The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation.

Trabalhos Futuros.

Nesta secão queremos indicar que podemos estudar a integral de Melnikov órbitas heteroclínicas [13].

Definição 3.6 *Se a variedade estável $W^s(p_1)$ e a variedade instável $W^u(p_2)$ de dois pontos de equilíbrio, com $p_1 \neq p_2$, interceptam-se, dizemos que a órbita resultante é uma* ***órbita heteroclínica****, sendo p_1 e p_2 chamados pontos* ***heteroclínicos****.*

Vamos estudar sistemas de equações diferenciais ordinárias da seguinte forma

$$\dot{x} = H(x,\theta) \tag{3.84}$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}^{r+1}$ e H é $\mathcal{C}^\infty$. Sejam $p(\theta)$ e $q(\theta)$ famílias de classe $\mathcal{C}^r$ de equilíbrios. supondo as seguintes condições:

(1) $q(\theta)$ é uma sela hiperbólica $\forall\ \theta$, com variedade estável $W^s(q(\theta))$,

(2) $p(\theta)$ é semi hiperbólica com valores próprios 0 e $\lambda > 0$, de modo que para cada θ $p(\theta)$ tem uma única variedade instável $W^u(p(\theta))$ tangente ao vetor próprio associado ao valor próprio λ.

(3) Existe a solução $\gamma(t)$ de $\dot{x} = H(x,0)$ contida em $W^u(p(0)) \cap W^s(q(0))$.

Seja L um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ baseado em $\gamma(0)$ tal que é transversal em $H(\gamma(0),0)$.
Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{r+1}$.
Seja $\gamma^i : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, com $i = 1,2$ que satisfaz

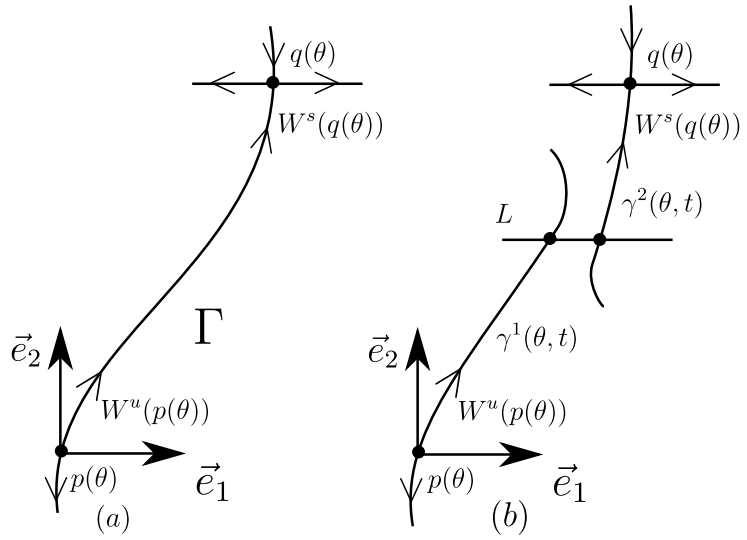
(i) $\gamma^1(\theta,t)$ é solução de $\dot{x} = H(x,\theta)$, com $\gamma^1 \subset W^u(p(\theta))$ e $\gamma^2(\theta,t)$ é solução de $\dot{x} = H(x,\theta)$, com $\gamma^2 \subset W^s(q(\theta))$.

(ii) $\gamma^i(0,t) = \gamma(t)$.

(iii) $\gamma^i(\theta,0) \in L$.

Veja a **Figura 21.** Então γ^1 é $\mathcal{C}^r$ e γ^2 é $\mathcal{C}^\infty$.

Figura 21 – (a) Órbita Heteroclínica , (b)Afastamento de $W^u(p(\theta))$ e $W^s(q(\theta))$.



Fonte: Simultaneous Equilibrium and Heteroclinic Bifurcation of Planar Vector Fields via the Melnikov Integral.

Definimos $Sep : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ por

$$Sep(\theta) = H(\gamma(0),0) \wedge (\gamma^1(\theta,0)) - \gamma^2(\theta,0))$$

Note que: $Sep(\theta) = 0$ se e somente se $\gamma^1(\theta,0) = \gamma^2(\theta,0)$.
Agora de acordo com [5] temos que:

$$R = \frac{\partial Sep}{\partial \theta_j}(0) \quad = \quad \lim_{t_1 \to \infty} \Big[K(t_1)H(\gamma(t_1,0))\Big] \wedge \frac{\partial p}{\partial \theta_j}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)H(\gamma(t),0) \wedge \frac{\partial H}{\partial \theta_j}(\gamma(t),0)dt.$$

onde $K(t) = exp\Big[- \int_0^t divH(\gamma(s),0)ds\Big]$ e $K(t_1) = e^{\lambda t_1} exp\Big(\int_{t_1}^0 \vartheta(e^{\lambda t})dt\Big)$.

Observação:

R é a integral de Melnikov para a órbita Γ. Ela mede o afastamento entre a variedade estável de $q(\theta)$ e a variedade instável de $p(\theta)$.

4 UMA APLICAÇÃO NA COMBUSTÃO EM UM MEIO POROSO.

A maior parte dos recursos de petróleo em todo o mundo são óleos viscosos e pesados, eles são difíceis e caros de produzir e refinar. Ainda assim, a importância do óleo de alta viscosidade está aumentando. A primeira razão é que, dada a situação atual, muitos reservatórios de óleo com alta viscosidade podem agora ser explorados de forma lucrativa. A segunda razão, é que esses recursos são abundantes. Isto é, os recursos totais de óleo do mundo é de aproximadamente de 9 a 13×10^{12} trilhões de barris ou de $1,4$ a 2.1 trilhões de m^3. O óleo convencional representa apenas cerca de 30 % desse total.

Então temos que essa alta viscosidade do combustível sólido gera muitas dificuldades para a produção.

Neste sentido para reduzir a alta viscosidade do combustível sólido presente no reservatório, vamos utilizar o Método Não Convencional Térmico (combustão in situ), em outras palavras recuperação melhorada de óleo(Enhanced Oil Recovery (E.O.R.)).

A **combustão in situ** é um método que consiste em injetar ar ou oxigênio para induzir ignição no reservatório com a presença de combustível sólido e permitir um regime de combustão. À medida que a frente de combustão avança através do reservatório, gera-se calor suficiente e gás de combustão para reduzir a viscosidade do óleo que está a frente do mesmo, e, assim, para empurra-lo aos poços produtores [6].

4.1 MODELO MATEMÁTICO

Nesta seção, vamos estudar o modelo matemático [2], que descreve o processo da reação provocada pela combustão in-situ em uma camada do reservatório.

$$\begin{aligned} \partial_t\theta + a\partial_x\theta &= \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi && (4.1)\\ \partial_t\rho &= -\rho Y\Phi && (4.2)\\ \partial_t Y + a\partial_x Y &= -\rho Y\Phi && (4.3) \end{aligned}$$

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} exp(-1\backslash\theta), & \text{se } \theta > 0. \\ 0, & \text{se } \theta \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Existem três variáveis dependentes adimensionais:

1) θ é a **temperatura**.

2) ρ é a **concentração de combustível sólido**.

3) Y é a **concentração de oxigênio**.

Estamos assumindo que oxigênio (componente do gás) e o calor estão se movendo com velocidade $a > 0$. Uma reação exotérmica envolvendo o oxigênio e o combustível sólido pode ocorrer somente quando a temperatura estiver acima da temperatura limiar, que assumimos ser $\theta = 0$. Devido a essa convenção, a temperatura pode ser negativa.
A taxa de reação é dada em (4.4) por $\Phi(\theta)$. A equação (4.1) representa o transporte e difusão de temperatura e a geração de energia termal pela reação.
A equação (4.2) representa o consumo de combustível sólido.
A equação (4.3) representa o transporte de oxigênio e o consumo de oxigênio na reação.
Estamos interessados em soluções com $\rho \geq 0$ e $Y \geq 0$ em todos os lugares.
Consideramos (4.1) e (4.2) em $-\infty < x < \infty,\ \ t \leq 0$, com condições constantes de fronteira.

$$(\theta, \rho, Y)(-\infty) = (\theta^L, \rho^L, Y^L), \quad (\theta, \rho, Y)(\infty) = (\theta^R, \rho^R, Y^R). \tag{4.5}$$

Assumimos que a reação não ocorre nas condições de fronteira. Há três razões para as quais a reação pode desaparecer:

(1) O **controle de temperatura (TC)**. A reação cessa devido à baixa temperatura. Isto é, $\theta \leq 0$;

(2) O **controle de combustível (FC)**. A reação cessa devido à falta de combustível. Isto é, $\rho = 0$;

(3) O **controle de oxigênio (OC)**. A reação cessa devido à falta de oxigênio. Isto é, $Y = 0$.

Naturalmente, dois ou todos os três destas condições podem ocorrer simultaneamente. Limitamo-nos a condições de contorno genérico:

(L) Exatamente uma das seguintes condições acontece: $\theta^L \leq 0$, ou $\rho^L = 0$, ou $Y^L = 0$. As outras duas são números positivos.

(R) Exatamente uma das seguintes condições acontece: $\theta^R \leq 0$, ou $\rho^R = 0$, ou $Y^R = 0$. As outras duas são números positivos.

Uma "onda de combustão" significa uma onda viajante não trivial contínua com a velocidade $c > 0,\ \ c \neq a$, isto é, uma solução do sistema (4.1)-(4.3) com velocidade c. Não consideramos ondas com velocidade $c < 0$, uma vez que temos em mente a injeção de ar em uma extremidade de um meio poroso.
Denotamos por $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$ uma onda de combustão de velocidade c que conecta o estado esquerdo (θ^-, ρ^-, Y^-) com o estado direito (θ^+, ρ^+, Y^+). Nestes estados são chamados estados finais da onda, onde os termos de reação desaparecem.

Estados no quais e em que os termos de reação desaparecem podem ser classificados como $TC, FC, OC, TC \cap FC, TC \cap OC, FC \cap OC$, ou $TC \cap FC \cap OC$. O tipo do estado indica exatamente quais condições são satisfeitas naquele estado; por exemplo, um estado do tipo $TC \cap FC$ tem $\theta \leq 0, \quad \rho = 0$ e $Y > 0$. Uma onda de velocidade c de um estado de tipo $FC \cap OC$ para um do tipo TC, por exemplo, seria indicado por $FC \cap OC \xrightarrow{c_f} TC$. Estados diferentes de TC, FC, e OC. não pode ser o primeiro ou o último estado de uma onda por causa de suposições (L) e (R).

Os teoremas a seguir descrevem as ondas de combustão:

Teorema 4.1 ***(Ondas de Combustão Rápida)*** *Fixando $a > 0$. Seja (θ^+, ρ^+, Y^+) um estado de tipo TC, ou seja, $\theta^+ \leq 0, \rho^+ > 0, Y^+ > 0$. Suponha que $\theta^+ + Y^+ > 0$. Então, existe um estado (θ^-, ρ^-, Y^-) e uma velocidade $c_f > 0$ tal que há uma onda de combustão $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c_f} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$ que se aproxima de seu estado de direito exponencialmente. Temos $\theta^- > 0$, e ρ^- ou Y^- ou ambos iguais a 0. Mais precisamente, para um ponto (θ^+, ρ^+) fixado, existe um único Y^* com $\theta^+ + Y^* > 0$ tal que*

1) Se $\theta^+ + Y^+ < Y^*$, então existe uma onda de combustão do tipo $OC \xrightarrow{c_f} TC$;

2) Se $Y^+ = Y^*$, então existe uma onda de combustão do tipo $FC \cap OC \xrightarrow{c_f} TC$;

3) Se $Y^+ > Y^*$, então existe uma onda de combustão do tipo $FC \xrightarrow{c_f} TC$.

Em todos os casos $\theta^+ + Y^+ = \theta^- + Y^-$ e $c_f = \frac{aY^+ - aY^-}{Y^+ - Y^- + \rho^- - \rho^+}$.
Não existem ondas de combustão com $c > a$ e $\theta^+ + Y^+ \leq 0$.

O teorema acima garante que se o estado direito possui pouco oxigênio ($\theta^+ + Y^+ \leq 0$) então a reação não ocorre. Se o estado direito possui uma quantidade moderada de oxigênio, então existe uma onda de combustão na qual todo o oxigênio é usado na reação, e se ele possui bastante oxigênio, então existe uma onda de combustão na qual todo o combustível é usado na reação.

Teorema 4.2 ***(Ondas de Combustão Lenta)***

(1) Existem ondas viajantes de tipo $FC \xrightarrow{c_s} OC$ e $FC \cap TC \xrightarrow{c_s} OC$. Fixando $a > 0$. Seja $(\theta^-, 0, Y^-)$ com $\theta^- \geq 0$ e $Y^- > 0$. Então para cada $\rho^+ > 0$, existe um único θ^+ e c_s com $0 < c_s < a$, tal que existe uma onda viajante de velocidade c_s de $(\theta^-, 0, Y^-)$ até $(\theta^+, \rho^+, 0)$. Isto é

$$\theta^+ = \theta^- + Y^-, \quad c_s = \frac{Y^-}{\rho^+ + Y^-} a.$$

Estas ondas viajantes aproxima-se do estado direito exponencialmente, e do estado esquerdo exponencialmente se somente se $\theta^- > 0$. Isto é se somente se o estado esquerdo é de tipo FC.

(2) Existe uma onda viajante de tipo $TC \xrightarrow{c_s} OC$. *Fixando* $a > 0$. *Sejam* $\theta^- < 0, Y^-$ *com* $\theta^- + Y^- > 0$, *e* $\rho^+ > 0$. *Então existem* $\rho^- > 0, \theta^+ > 0$, *e* c_s *com* $0 < c_s < a$, *tal que existe uma onda viajante de velocidade* c_s *de* (θ^-, ρ^-, Y^-) *até* $(\theta^+, \rho^+, 0)$.
Portanto $\theta^+ = \theta^- + Y^-$, *e* c_s *e* ρ^- *estan relacionadas pela seguinte*

$$c_s = \frac{aY^-}{Y^- - \rho^- + \rho^+}$$

Estas ondas viajantes aproxima-se para ambos estados exponencialmente.

(3) Não exitem outros tipos de ondas viajantes para $0 < c < a$. *Em particular, não existe onda viajante lenta com* $\theta^- + Y^- \leq 0$.

O teorema acima garante em (1) que para o estado esquerdo do tipo FC e para o estado esquerdo $(0, 0, Y^-)$ com $Y^- > 0$, existe uma família a um parâmetro de estados direitos do tipo OC com os quais o estado esquerdo pode ser conectado por uma onda de combustão lenta.
Em (2) o teorema garante que para haver uma onda de combustão lenta de velocidade c_s de (θ^-, ρ^-, Y^-) do tipo TC para $(\theta^+, \rho^+, 0)$ do tipo OC a terna ordenada (θ^-, ρ^-, Y^-) pode ser escolhido arbitráriamente e, portanto, pode-se encontrar uma terna ordenada correspondente (ρ^-, θ^+, c_s). Há nove tipos de problemas de valor de contorno, dependendo se os estados de esquerda e direita são temperatura controlada (TC), combustível controlada (FC), ou oxigénio controlado (OC).

(1) Combustível controlado no estado direito. Uma onda de combustão movendo para a direita não pode ocorrer porque não há combustível à direita e nenhum mecanismo para trazer combustível para a direita. A combustão pode ocorrer por um tempo em certas regiões (por exemplo, regiões onde o combustível, oxigênio e alta temperatura estão inicialmente presente), mas, eventualmente, pára.

(2) Oxigênio controlado no estado direito. Uma onda de combustão movendose para o estado direito não pode ocorrer. Além disso, a temperatura controlada e o combustível controlado nos estados esquerdos permitem uma onda de combustão lenta (latente). Quando há um certo estado direito com o oxigênio controlado, então a combustão deve, eventualmente, terminar, a menos que o oxigênio é constantemente trazida para a direita; isso só pode acontecer quando o estado esquerdo tem uma concentração positiva de oxigênio.

(3) Temperatura controlada no estado direito. Uma onda de combustão movendose para o estado direito não pode ocorrer. Além disso, há um rico conjunto de outras possibilidades.

a) O estado direito é "pré-misturada ", pois o oxigénio e combustível estão presentes. Se a combustão começa em qualquer lugar na região pré-misturada (pois, por

exemplo, uma temperatura alta é inicialmente presente lá), então o processo de combustão produz-se uma onda de alta temperatura, evoluindo para o pré-misturada.

b) Um estado esquerdo com temperatura controlada permite uma única onda de combustão. O oxigênio que chega da esquerda leva para uma onda de combustão lenta precedido por uma região que não tem oxigênio: o oxigênio que chega da esquerda na totalidade, é queimado na reação, e o oxigênio inicialmente presente na direita é arrastado antes de que a chama pode alcançá-lo. Assim, temos latente apesar de um certo estado pré-misturado.

c) Finalmente, os estados esquerdos com temperatura controlada e oxigênio controlado permitem uma onda de combustão lenta e uma onda de combustão rápida.

Estudo do Modelo Matemático.

Vamos reescrever o sistema (4.1)-(4.3) da seguinte forma equivalente

$$\begin{aligned} \partial_t\theta + a\partial_x\theta &= \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi(\theta) && (4.6)\\ \partial_t(\theta+\rho) + a\partial_x\theta &= \partial_{xx}\theta && (4.7)\\ \partial_t(Y-\rho) + a\partial_x Y &= 0 && (4.8) \end{aligned}$$

onde a equação (4.7) é obtida pela substituição da soma das igualdes (4.1) e (4.2) e a igualdade (4.8) é a diferença das igualdades (4.3) e (4.2).
Em (4.6)-(4.8), fazemos a substituição da coordenada espacial x por ξ que se está movendo com velocidade $c : \xi = x - ct$, obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{array}{lll} \partial_t\theta = -c\partial_\xi\theta + \partial_t\theta & \partial_t\rho = -c\partial_\xi\rho + \partial_t\rho, & \partial_t Y = -c\partial_\xi Y + \partial_t Y \\ \partial_x\theta = \partial_\xi\theta & & \partial_x Y = \partial_\xi Y. \\ \partial_{xx}\theta = \partial_{\xi\xi}\theta, & & \end{array}$$

Logo substituindo as igualdades acima no sistema (4.6)-(4.8) obtemos

$$\begin{aligned} -c\partial_\xi\theta + \partial_t\theta + a\partial_\xi\theta &= \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y\Phi(\theta),\\ -c\partial_\xi\theta + \partial_t\theta - c\partial_\xi\rho + \partial_t\rho + a\partial_\xi\theta &= \partial_{\xi\xi}\theta,\\ -c\partial_\xi Y + \partial_t Y + c\partial_\xi\rho - \partial_t\rho + a\partial_\xi Y &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente pondo em evidência os termos $\partial_t\theta, \partial_t(\theta+\rho)$ e $\partial_t(Y-\rho)$ respectivamente no sistema acima, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t\theta &= (c-a)\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y\Phi(\theta) && (4.9)\\ \partial_t(\theta+\rho) &= (c-a)\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + c\partial_\xi\rho && (4.10)\\ \partial_t(Y-\rho) &= (c-a)\partial_\xi Y - c\partial_\xi\rho && (4.11) \end{aligned}$$

As soluções estacionarias de (4.9)-(4.11) são as soluções de tipo onda viajante de (4.1)-(4.3) com a velocidade c. As soluções estacionarias de (4.9)-(4.11) satisfazem o sistema de E.D.O.s.

$$\begin{aligned} 0 &= (c-a)\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y\Phi(\theta) && (4.12)\\ 0 &= (c-a)\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + c\partial_\xi\rho && (4.13)\\ 0 &= (c-a)\partial_\xi Y - c\partial_\xi\rho && (4.14) \end{aligned}$$

Em (4.12) fazemos que $v_1 = \partial_\xi\theta$ e integrando (4.12)-(4.14) com respeito a ξ obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v_1 && (4.15)\\ \dot{v_1} &= (a-c)v_1 - \rho Y\Phi(\theta) && (4.16)\\ w_1 &= (c-a)\theta + v_1 + c\rho && (4.17)\\ w_2 &= (c-a)Y - c\rho && (4.18) \end{aligned}$$

onde w_1 e w_2 são constantes de integração, Assumimos que $a \neq c$. Então podemos resolver para Y usando (4.18), obtendo

$$Y = \frac{c\rho + w_2}{c-a}. \quad (4.19)$$

Para v_1 resolvemos usando (4.17), obtendo

$$\dot{\theta} = v_1 = (a-c)\theta - c\rho + w_1. \quad (4.20)$$

Finalmente derivando a equação (4.17) com respeito a ξ, tem-se

$$0 = (c-a)\dot{\theta} + \dot{v_1} + c\dot{\rho},$$

Agora, substituindo o valor de $\dot{v_1}$ dado pela equação (4.16) e a igualdade (4.15), obtemos

$$c\dot{\rho} = Y\rho\ \Phi(\theta)$$

logo substituindo o valor de Y dada pela igualdade (4.19) e dividindo por c, na igualdade acima, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a-c)\theta - c\rho + w_1 \\ \dot{\rho} = \frac{c\rho + w_2}{c(c-a)}\rho\Phi(\theta) \end{cases} \quad (4.21)$$

onde (w_1, w_2) é um vetor de parâmetros.
Os pontos de equilíbrio para o sistema (4.21) são dados pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (c-a)\theta - c\rho + w_1 &= 0 && (4.22)\\ \frac{c\rho + w_2}{c(c-a)}\rho\Phi(\theta) &= 0 && (4.23) \end{aligned}$$

Então, os pontos de equilíbrio do sistema (4.21) são:

$$\begin{aligned} ((c-a)\theta - c\rho + w_1, \Phi(\theta)) &= (0,0) && (4.24)\\ ((c-a)\theta - c\rho + w_1, \rho) &= (0,0) && (4.25)\\ ((c-a)\theta - c\rho + w_1, \rho) &= (0, -\frac{w_2}{c}) && (4.26) \end{aligned}$$

Todos os equilíbrios se encontram na linha H definida pela seguinte igualdade

$$H : (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0.$$

Note que a linha H tem inclinação positiva, se $0 < c < a$ e inclinação negativa se $c > a$.

Em termos das variáveis (θ, v_1, ρ, Y), com $v_1 = \theta$, H corresponde a $v_1 = 0$. A porção de H em $\theta \leq 0$ é TC; a parcela em $\theta > 0$ é a união disjunta de $FC(\rho = 0$ somente), $OC(Y =$ apenas $0)$, e $FC \cap OC(\rho = Y = 0)$. Ver a **Figuras 22 e 23.**
Da igualdade (4.19), o sistema (4.21) tem as seguintes linhas invariantes.

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \rho = -\frac{w_2}{c} \tag{4.27}$$

A parte fisicamente relevante do retrato de fase do sistema (4.21), denotado por $\mathcal{P}$, tem $\rho \geq 0$ e $Y \geq 0$
De (4.19) temos que

1). $0 < c < a,\ Y \geq 0$ se e somente se $\rho \leq -\frac{w_2}{c}$.

2). $c > a,\ Y \geq 0$ se e somente se $\rho \geq -\frac{w_2}{c}$.

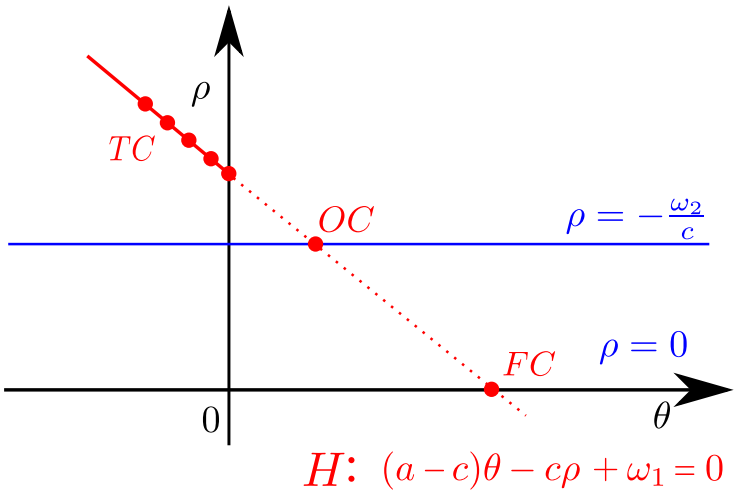
No primeiro caso, $\mathcal{P}$ é não vazio se $w_2 < 0$, logo $\mathcal{P} = \{(\theta, \rho) : 0 \geq \rho \geq -\frac{w_2}{c}\}$. No segundo caso $\mathcal{P} = \{(\theta, \rho) : \rho \geq max(0, -\frac{w_2}{c})\}$. Note que ambos conjuntos são invariantes.
O conjunto de equilíbrios do sistema (4.21) é a união de quatro subconjuntos

$$\begin{aligned} FC &= \{(\theta,\rho) : \theta > 0, \rho = 0, c\rho + w_2 > 0 \text{ e } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\},\\ OC &= \{(\theta,\rho) : \theta > 0, \rho > 0, c\rho + w_2 = 0 \text{ e } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\},\\ FC \cap OC &= \{(\theta,\rho) : \theta > 0, \rho = 0, c\rho + w_2 = 0 \text{ e } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\},\\ TC^* &= \{(\theta,\rho) : \theta \leq 0, \text{ e } (a-c)\theta - c\rho + w_1 = 0\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

A linearização do sistema (4.21) no ponto (θ, ρ) tem a matriz:

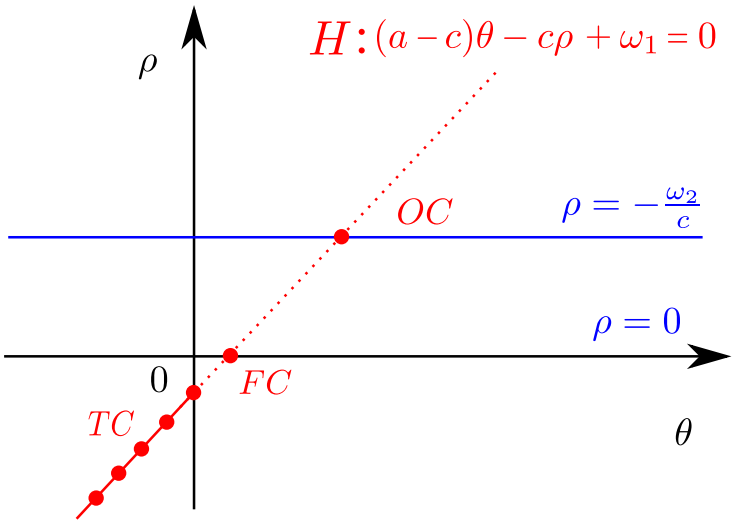
$$DF(\theta,\rho) = \begin{pmatrix} a-c & -c \\ \frac{c\rho + w_2}{c(c-a)}\rho\Phi'(\theta) & \frac{2c\rho + w_2}{c(c-a)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.29}$$

Figura 22 – Distribuição dos equilibrios do sistema (4.21), para 0<a<c.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 23 – Distribuição dos equilibrios do sistema (4.21), para 0<c<a



Fonte: Elaboração própria.

Agora vamos caracterizar os pontos de equilíbrio do sistema (4.21), mediante a seguinte proposição:

Proposição 4.1 *Para todo equilíbrio (θ, ρ) do sistema (4.21), se satisfazem as seguintes:*

1) Se $(\theta, \rho) \in TC^*$, então um valor próprio é $a - c$ o qual está associado ao vetor próprio $(1, 0)$ e o outro valor próprio é 0.

2) Se $(\theta, \rho) \in FC$ ou $FC \cap OC$, então um valor próprio é $a - c$ o qual está associado ao vetor próprio $(1, 0)$. Este vetor aponta ao longo da linha invariante $\rho = 0$. O outro valor próprio é positivo em FC e 0 em $FC \cap OC$. Seu vetor próprio associado é transversal à linha invariente $\rho = 0$.

3) Se $(\theta, \rho) \in OC$ é uma sela, um valor próprio é $a - c$ associado ao vetor próprio $(1, 0)$. Este vetor próprio está na linha invariante $\rho = -\frac{w_2}{c}$ correspondente a $Y = 0$. O outro vetor próprio é transversal na linha invariante.

Demonstração:

(1) Seja $(\theta, \rho) \in TC^*$. Então, avaliando o ponto de equilíbrio no sistema linearizado (4.29) temos que

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

logo os valores próprios do sistema linearizado são:

$$\lambda = a - c \ \text{ e } \ \lambda = 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$ está associado ao valor próprio 0.

(2) Seja $(\theta, \rho) \in FC$ ou $FC \cap OC$. Então, avaliando o ponto de equilíbrio no sistema linearizado (4.29) temos que

$$DF(\theta, 0) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & \frac{w_2}{c(c-a)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

No conjunto FC temos que $Y > 0$ logo

$$w_2 \ = \ (c - a)Y - c\rho = (c - a)Y. \tag{4.30}$$

Portanto w_2 tem o mesmo sinal de $c - a$.
Logo os valores próprios do sistema linearizado acima são:

$$\lambda = a - c \ \text{ e } \ \lambda = 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$ está associado ao valor próprio 0.
no conjunto $FC \cap OC$ temos que $Y = 0$, logo tem-se que $w_2 = 0$. Então avaliando $(\theta, \rho) \in FC \cap OC$ na matriz da linearização do sistema (4.29), obtemos

$$DF(\theta, 0) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Logo os valores próprios do sistema linearizado acima são:

$$\lambda = a - c \ \text{ e } \ \lambda = 0$$

o vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$ está associado ao valor próprio 0.

(3) Seja $(\theta, \rho) \in OC$. Então, avaliando o ponto de equilíbrio no sistema linearizado (4.29), temos que

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & \frac{w_2}{c(a-c)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Como $\rho > 0$ e $c\rho + w_2 = 0$, então $w_2 < 0$, logo os valores próprios são:

$$\lambda = a - c \ \text{ e } \ \lambda = \frac{w_2}{c(a-c)}\Phi(\theta),$$

de acordo com o **Teorema 2.7 (i)**, temos que o ponto de equilíbrio no conjunto OC é um ponto de sela. O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$, está ao longo da linha invariante $\rho = -\frac{w_2}{c}$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c} - \frac{w_2\Phi(\theta)}{c^2(a-c)})$ está associado ao valor próprio $\frac{w_2}{c(a-c)}\Phi(\theta)$. sendo transversal à linha $\rho = -\frac{w_2}{c}$.

■

Como as linhas invariantes $\rho = 0$ e $\rho = -\frac{w_2}{c}$, Cada uma, contém somente um ponto de equilíbrio respectivamente. Assim elas não contém ondas viajantes com limites finitos na suas extremidades.

Portanto, a partir da **Proposição 4.1** da acima conclui-se que para encontrar soluções para o sistema (4.21) que se aproximam aos estados finais exponencialmente,vamos estudar os seguintes casos.

(1) $0 < a < c$; estado esquerdo em FC ou OC, estado direito em TC^*.

(2) $0 < c < a$; estado esquerdo em FC ou TC^*, estado direito em OC.

Dizemos que (1) é uma **onda viajante rápida** e que (2) é uma **onda viajante lenta**. Nas próximas seções estudamos istos casos.

4.2 ONDAS VIAJANTES RÁPIDAS (0<a<c).

Nesta seção vamos provar o **Teorema 4.1**. Suponhamos que o estado direito de uma onda viajante para (4.1)-(4.3) é (θ^+, ρ^+, Y^+) com $\theta^+ \leq 0$. Supondo (R) e note que estamos interessados estudar somente o caso em que $\rho^+ > 0$ e $Y^+ > 0$. Isto é, o estado direito pertence a TC. Isto se deve por razões físicas, que se o combustível está em falta no lado direito, ela não pode ser transportado para lá; se o oxigênio está faltando à direita, ele não pode ser transportado para lá rápido o suficiente para suportar uma velocidade de onda de combustão maior do que a.

O estado direito (θ^+, ρ^+, Y^+) corresponde a:

$$\begin{aligned}(\theta, v, \rho, Y) &= (\theta^+, 0, \rho^+, Y^+) \text{ e} \\ (\theta, \rho, w_1, w_2) &= (\theta^+, \rho^+, (c-a)\theta^+ + c\rho^+, (c-a)Y^+ - c\rho^+).\end{aligned}$$

Logo temos que:

$$(w_1, w_2) = ((c-a)\theta^+ + c\rho^+, (c-a)Y^+ - c\rho^+). \tag{4.31}$$

Agora substituindo (4.31) no sistema (4.21), obtemos

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a-c)(\theta - \theta^+) - c(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{c-a} + \frac{Y^+}{c}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.32}$$

A linha invariante $Y = 0$ corresponde a

$$\rho = -\frac{w_2}{c} = \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+.$$

Como $c > a$, esta linha se encontra abaixo da linha $\rho = \rho^+$. Esta linha se encontra acima(abaixo) de $\rho = 0$ se $\rho^+ > \frac{(c-a)}{c}Y^+$(respectivamente. $\rho^+ < \frac{(c-a)}{c}Y^+$.) As linhas $\rho = 0$ e $Y = 0$ coincidem se $\rho^+ = \frac{(c-a)}{c}Y^+$, isto é $c = \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}$. O sistema (4.32) tem um vetor de parâmetros $(a, c, \theta^+, \rho^+, Y^+)$. Fixando (a, θ^+, ρ^+) com $a > 0, \theta^+ \leq 0$ e $\rho^+ > 0$, definimos:

$$\textbf{Região C} = \{(Y^+, c) : \rho^+ < Y^+ < \infty \text{ e } c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\}. \tag{4.33}$$

$$\textbf{Região 1} = \{(Y^+, c) : \rho^+ < Y^+ < \infty \text{ e } c > \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\}. \tag{4.34}$$

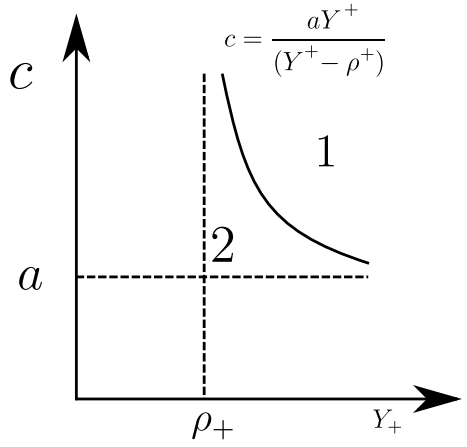
$$\textbf{Região 2} = \{(Y^+, c) : Y^+ > 0, \ c > a, \text{ e } c < \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\}. \tag{4.35}$$

Veja a **Figura 24**.

Na **Região C** as linhas $\rho = 0$ e $Y = 0$ coincidem, logo fazendo a substituição de $c = \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}$ no sistema (4.32) obtemos que

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Big(a - \frac{aY_+}{Y_+ - \rho_+}\Big)(\theta - \theta_+) - \frac{aY_+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \Big(\frac{\rho - \rho^+}{\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+} - a} + \frac{Y^+}{\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}}\Big)\rho\Phi(\theta).\end{aligned}$$

Figura 24 – Diagrama das região C, Região 1 e Região 2.



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam

Logo

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Big(\frac{a(Y^+ - \rho^+) - aY^+}{Y^+ - \rho^+}\Big)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+)\\ \dot{\rho} &= \Big(\frac{\rho - \rho^+}{\frac{aY^+ - a(Y^+ - \rho^+)}{Y^+ - \rho^+}} + \frac{Y^+}{\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}}\Big)\rho\Phi(\theta).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Big(\frac{-a\rho^+}{Y^+ - \rho^+}\Big)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+)\\ \dot{\rho} &= \Big(\frac{(\rho - \rho^+)(Y^+ - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+(Y^+ - \rho^+)}{aY^+}\Big)\rho\Phi(\theta).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Big(\frac{-a\rho^+}{Y^+ - \rho^+}\Big)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+)\\ \dot{\rho} &= \Big(\frac{(\rho - \rho^+)(Y^+ - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+(Y^+ - \rho^+)}{aY^+}\Big)\rho\Phi(\theta)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{a}{(Y^+ - \rho^+)}\Big(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)\Big)\\ \dot{\rho} &= \frac{(Y^+ - \rho^+)}{a}\Big(\frac{\rho - \rho^+}{\rho^+} + 1\Big)\rho\Phi(\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{a}{(Y^+ - \rho^+)}\Big(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)\Big)\\ \dot{\rho} &= \frac{(Y^+ - \rho^+)}{a\rho^+}(\rho - \rho^+)\rho^2\Phi(\theta)\end{aligned}$$

Agora multiplicando o termo $a\rho^+(Y^+-\rho^+)>0$ ao sistema (4.32) tem-se

$$\begin{aligned} a\rho^+(Y^+-\rho^+)\dot{\theta} &= a^2\rho^+\Big(\rho^+(\theta^+-\theta)+Y^+(\rho_+-\rho)\Big) \\ a\rho^+(Y^+-\rho^+)\dot{\rho} &= (Y^+-\rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta), \end{aligned}$$

e fazendo uma mudança de escala, isto é, se $\tau = a\rho^+(Y^+-\rho^+)t$, então $\frac{d\tau}{dt} = a\rho^+(Y^+-\rho^+)$,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} := \frac{d\theta}{d\tau}.\frac{d\tau}{dt} &= a^2\rho^+\Big(\rho^+(\theta^+-\theta)+Y^+(\rho^+-\rho)\Big) \\ \dot{\rho} := \frac{d\rho}{d\tau}.\frac{d\tau}{dt} &= (Y^+-\rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a^2\rho^+\Big(\rho^+(\theta^+-\theta)+Y^+(\rho^+-\rho)\Big) \\ \dot{\rho} = (Y^+-\rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.36}$$

Note que quando $\rho>0$ temos que $\dot{\rho}=0$ para $\theta\leq 0$ e $\dot{\rho}>0$ para $\theta>0$, logo as órbitas, nessa região, são horizontais.
Para $\rho>0$, temos que $\dot{\theta}$ muda de positivo para negativo quando a linha

$$H:\rho^+(\theta^+-\theta)+Y^+(\rho^+-\rho)=0,$$

é cruzada a partir da esquerda para a direita.
Os equilíbrios do sistema (4.36), são (θ,ρ) tais que verificam as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} a^2\rho^+\Big(\rho^+(\theta^+-\theta)+Y^+(\rho^+-\rho)\Big)=0 \\ (Y^+-\rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta)=0. \end{aligned}$$

Destas igualdades obtemos que

$$(\theta,\rho)=(\theta^+,\rho^+) \ \text{ com } \ \theta^+\leq 0 \ \text{ e } \ (\theta,\rho)=(\theta^++Y^+,0) \tag{4.37}$$

são os equilíbrios do sistema (4.36). Fazendo a linearização no ponto (θ,ρ), obtemos:

$$DF(\theta,\rho)=\begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ (Y^+-\rho^+)^2\rho^2\dot{\Phi}(\theta) & 2(Y^+-\rho^+)^2\rho\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.38}$$

Avaliando o sistema (4.38) no ponto (θ^+,ρ^+) tem-se

$$DF(\theta^+,\rho^+)=\begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.39}$$

Logo os valores próprios associados ao (4.39) são:

$$\lambda=-a^2(\rho^+)^2<0 \ \text{ e } \ \lambda=0.$$

Então o vetor próprio $\vec{u}=(1,0)$ está associado ao valor próprio $-a^2(\rho^+)^2$ e o vetor próprio $\vec{v}=(1,-\frac{\rho^+}{Y^+})$. está associado ao valor próprio 0.

Existe a variedade estável unidimensional $W^s(\theta^+, \rho^+)$ de modo que é tangente a $\vec{u}$ no ponto (θ^+, ρ^+) e também existe uma variedade central unidimensional $W^c(\theta^+, \rho^+)$ o qual é tangente a $\vec{v}$ no ponto (θ^+, ρ^+) [5].
De forma análoga avaliando o ponto $(\theta^+ + Y^+, 0)$ em (4.39), obtem-se

$$DF(\theta^+ + Y^+, 0) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.40}$$

Então os valores próprios associados a (4.40) são:

$$\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0 \ \text{ e } \ \lambda = 0.$$

Para os valor próprio $-a^2(\rho^+)^2$ está associado o vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ e para o valor próprio 0 está associado o vetor próprio $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$.
Então, existe uma variedade estável umdimensional $W^s(\theta^+ + Y^+, 0)$ e existe uma variedade central unidimensional $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ os quais são tangentes aos vetores próprios $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no ponto $(\theta^+ + Y^+, 0)$, respectivamente [5].
Se $\theta^+ + Y^+ < 0$, não existe onda viajante com estado direito no ponto (θ^+, ρ^+) que ligue os pontos $(\theta^+ + Y^+, 0)$ e (θ^+, ρ^+), pois teríamos uma contradição com o Teorema de Existência e Unicidade para E.D.O′s.
Se $\theta^+ + Y^+ > 0$, o equilíbrio $(\theta^+ + Y^+, 0)$ é de tipo $FC \cap OC$ pois $\rho = Y = 0$. Para $\rho > 0$ existe uma variedade central $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$, a qual é tangente a $\vec{v}$ no ponto $(\theta^+ + Y^+, 0)$. Isto é, $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ encontra-se acima ou abaixo da linha H, sendo a última impossível, pois o fluxo atravessa a linha H de esquerda a direita. Portanto as soluções em $\rho > 0$ deixam a linha H por cima e é tangente a $\vec{v}$ no ponto $(\theta^+ + Y^+, 0)$. Veja a **Figura 25**.

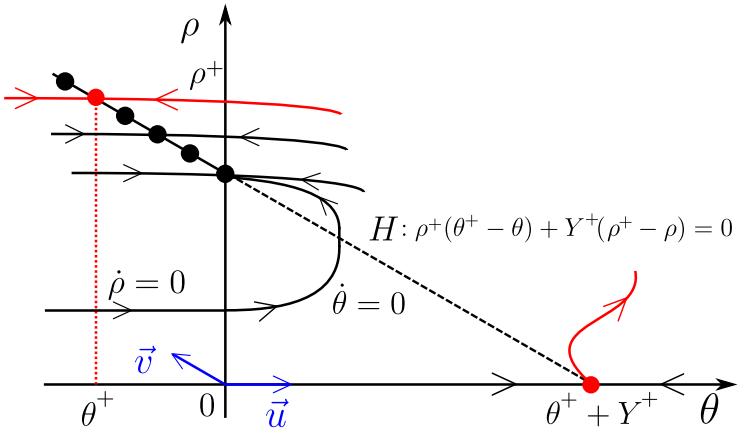
Proposição 4.2 *Seja $a > 0$ e $\theta^+ \leq 0$.*

(1) Suponhamos que $\rho^+ \geq -\theta^+$. Então existe um único Y^*, $\rho^+ < Y^* < \infty$ tal que, para o sistema (4.36) a variedade estável de (θ^+, ρ^+) contém um ramo da variedade central de $(\theta^+ + Y^*, 0)$. Para $\rho^+ < Y^+ < Y^*$, a $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se acima da $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$; para $Y^* < Y^+ < \infty$, a $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se abaixo da $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$.

(2) Suponhamos que $\rho^+ < -\theta^+$. Então existe um único Y^*, $-\theta^+ < Y^* < \infty$ tal que, para o sistema (4.36) a variedade estável de (θ^+, ρ^+) contém um ramo da variedade central de $(\theta^+ + Y^*, 0)$. Para $-\theta^+ < Y^+ < Y^*$, a $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se acima da $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$; para $Y^* < Y^+ < \infty$, a $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se abaixo da $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$.

Demonstração:
Em ambos casos da proposição vamos considerar somente que $Y^+ > -\theta^+$, pois para quando

Figura 25 – Retrato de fase associado ao sistema (4.36).



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

$Y^+ \leq -\theta^+$ teríamos que, nessa região, as órbitas são horizontais, tornando impossível a conexão.

No caso (1) vamos considerar o valor limite $Y^+ = \rho^+$ no sistema (4.36):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a^2(\rho^+)^2\Big((\theta^+ - \theta) + (\rho^+ - \rho)\Big) \\ \dot{\rho} = 0. \end{cases} \tag{4.41}$$

Logo o sistema (4.41) tem os seguintes pontos de equilíbrio

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \;\text{ e }\; (\theta, \rho) = (\theta^+ + \rho^+, 0).$$

Fazendo a linearização de (4.41) no ponto (θ, ρ) tem-se:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.42}$$

Substituindo $(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+)$ em (4.42), obtemos

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.43}$$

Então (4.43) tem os seguintes valores próprios $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$ e $\lambda = 0$.

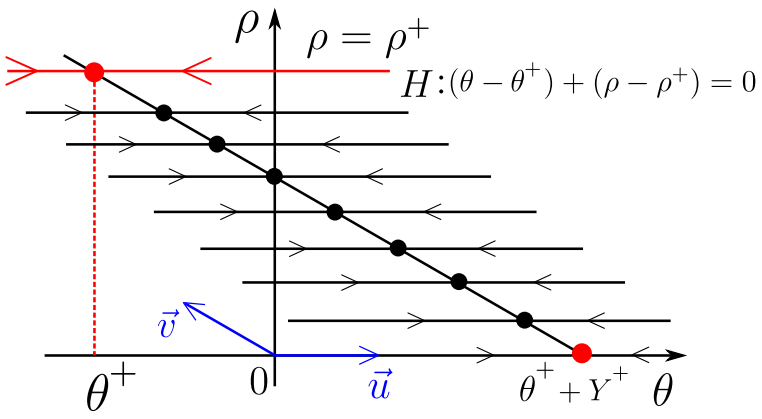
Para o valor próprio $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$ está associado ao vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ e para o valor próprio $\lambda = 0$ está associado ao vetor próprio $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$.

Agora, substituindo $(\theta, \rho) = (\theta^+ + \rho^+, 0)$ em (4.42) obtemos

$$DF(\theta^+ + \rho^+, 0) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.44}$$

Então o sistema linearizado (4.44) tem os seguintes valores próprios: $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$ e $\lambda = 0$.
O valor próprio $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$ está associado ao vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ e para o valor próprio $\lambda = 0$ está associado ao vetor próprio $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$.
Como $\dot{\rho} = 0$, então a linha $H : (\theta^+ - \theta) + (\rho^+ - \rho) = 0$ é uma linha de equilíbrios atratores. A variedade estável desses pontos são linhas horizontais. Em particular a $W^s(\theta^+, \rho^+)$ é a linha $\rho = \rho^+$, e a $W^c(\theta^+ + \rho^+, 0)$ é a linha $H : (\theta^+ - \theta) + (\rho^+ - \rho) = 0$, $\theta^+ < \theta$. Nesta região não é possível a existência de uma onda viajante que ligue o ponto $(\theta^+ + \rho^+, 0)$ ao ponto (θ^+, ρ^+). Veja a **Figura 26.** Note que para $Y^+ >> \rho^+$ e como o fluxo varia continuamente

Figura 26 – Retrato de fase associado ao sistema (4.41).



Fonte: Elaboração própria.

tem-se que $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se acima de $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$. Veja a **Figura 27.**
Para o caso (2) vamos considerar o valor limite $Y^+ = -\theta^+$ em (4.41) Obtemos:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a^2(\rho^+)^2(-\rho^+\theta + \theta^+\rho) \\ \dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.45}$$

O sistema (4.45) tem os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ e } (\theta, \rho) = (0, 0).$$

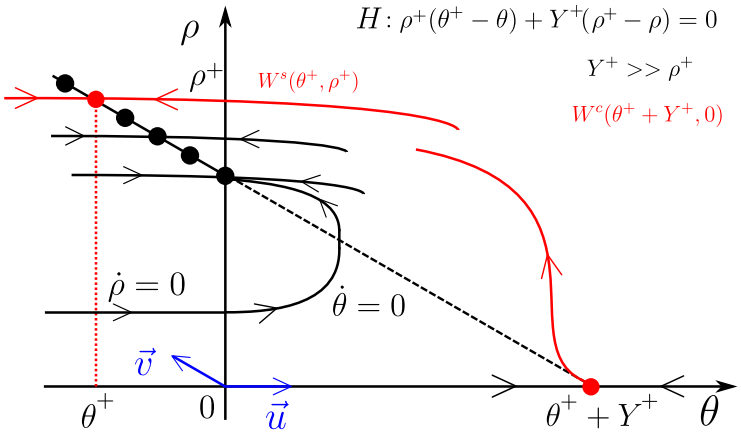
Fazendo a linearização de (4.45) no ponto (θ, ρ), obtemos:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^3 & a^2(\rho^+)^2\theta^+ \\ (\theta^+ + \rho^+)^2\rho^2\dot{\Phi}(\theta) & 2(\theta^+ + \rho^+)^2\rho\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.46}$$

Substituindo $(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+)$ em (4.46), obtemos

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^3 & a^2(\rho^+)^2\theta^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.47}$$

Figura 27 – Retrato de fase associado ao sistema (4.36).



Fonte: Elaboração própria.

Então (4.47) tem os seguintes valores próprios: $\lambda = -a^2(\rho^+)^3$ e $\lambda = 0$. E esses valores próprios estão associados aos vetores próprios $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{\theta^+})$, respectivamente. Em forma análoga substituindo $(\theta, \rho) = (0, 0)$ em (4.46) obtemos:

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^3 & a^2(\rho^+)^2\theta^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.48}$$

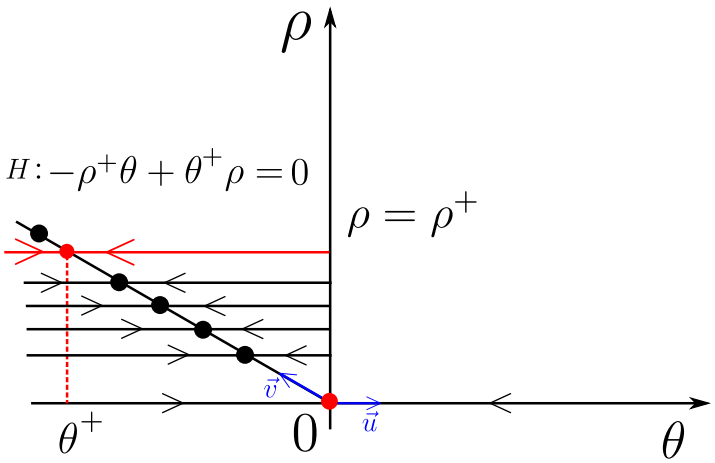
Então do sistema linearizado (4.48) obtemos os seguintes valores próprios: $\lambda = -a^2(\rho^+)^3$ e $\lambda = 0$. E estes valores próprios estão associados aos vetores próprios $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{\theta^+})$, respectivamente.

Nesta região não existe onda viajante com estado direito no ponto (θ^+, ρ^+) e que ligue os pontos $(0, 0)$ e (θ^+, ρ^+), pois teríamos uma contradição com o Teorema de Existência e Unicidade para E.D.O's. Veja a **Figura 28.** Note que para $Y^+ >> -\theta^+$ e como o fluxo varia continuamente tem-se que $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se acima de $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$.

Agora vamos mostrar para cada caso que para $Y^+ >> 0$, existem órbitas que começando na linha $H : \rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho) = 0$, as quais separam a variedade estável de (θ^+, ρ^+) da variedade central de $(\theta^+ + Y^+, 0)$. Isto é, $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se abaixo de $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$. Veja a **Figura 29.** De fato, seja ϵ fixo tal que $0 < \epsilon < \rho^+$ e vamos considerar o sistema (4.36) sobre o subconjunto $[-\theta^+ + \epsilon, -\theta^+ + 2\epsilon] \times [\rho^+ - \epsilon, \rho^+]$. Para (θ, ρ) nesta região tem-se.

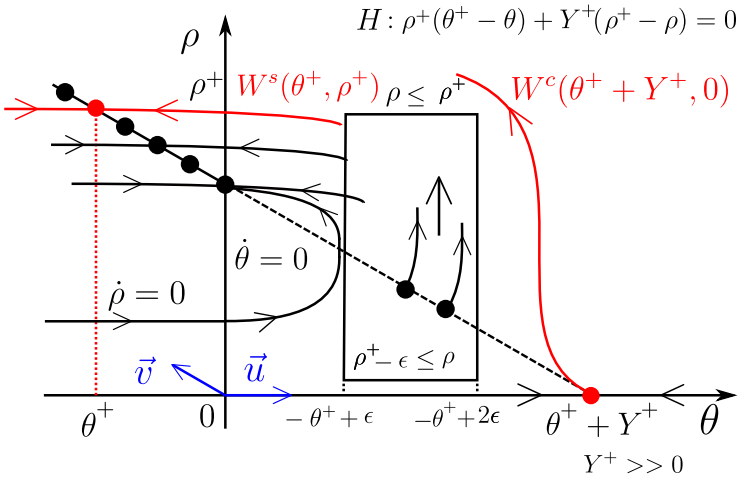
$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{a^2\rho^+}{(Y^+ - \rho^+)^2} \frac{\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)}{\rho^2\Phi(\theta)}.$$

Figura 28 – Retrato de fase associado ao sistema (4.45).



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

Figura 29 – Retrato de fase associado ao sistema (4.36).



Fonte: Elaboração própria.

Para todo (θ, ρ) neste subconjunto verifica que:

$$\begin{aligned} 2\theta^+ - 2\epsilon \leq (\theta^+ - \theta) \leq 2\theta^+ - \epsilon, \\ \frac{1}{\Phi(-\theta^+ + 2\epsilon)} \leq \frac{1}{\Phi(\theta)} \leq \frac{1}{\Phi(-\theta^+ + \epsilon)}, \\ 0 \leq (\rho^+ - \rho) \leq \epsilon, \\ \frac{1}{(\rho^+)^2} \leq \frac{1}{(\rho)^2} \leq \frac{1}{(\rho^+ - \epsilon)^2}. \end{aligned}$$

com estas relações acima sobre o conjunto $[-\theta^+ + \epsilon, -\theta^+ + 2\epsilon] \times [\rho^+ - \epsilon, \rho^+]$, obtem-se:

$$\frac{a^2\rho^+}{(Y^+ - \rho^+)^2} \frac{\rho^+(2\theta^+ - 2\epsilon)}{(\rho^+)^2\Phi(-\theta^+ + 2\epsilon)} \leq \frac{d\theta}{d\rho} \leq \frac{a^2\rho^+}{(Y^+ - \rho^+)^2} \frac{\rho^+\Big((2\theta^+ - \epsilon) + Y^+\epsilon\Big)}{(\rho^+ - \epsilon)^2\Phi(-\theta^+ + \epsilon)}.$$

Notemos que $(2\theta^+ - 2\epsilon) < 0$ e $(2\theta^+ - \epsilon) + Y^+\epsilon > 0$. Portanto o lado direito da relação é positivo e o lado esquerdo é negativo.
Agora fazendo Y^+ tender para $+\infty$ na desigualdade acima obtemos que os lados esquerdo e direito tendem para zero, logo pelo **Teorema do Sanduíche**. Segue que $\frac{d\theta}{d\rho}$ tende para zero.
Neste conjunto compacto temos que $\frac{d\theta}{d\rho}$ aponta para cima verticalmente, então para qualquer órbita baseada num ponto da linha H é dirigida para cima acompanhando a $\frac{d\theta}{d\rho}$ e separa a variedade estável $W^s(\theta^+, \rho^+)$ da variedade central $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$. Portanto, a variedade central $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ encontra-se acima da variedade estável $W^s(\theta^+, \rho^+)$.
Portanto, para o sistema (4.36) existe Y^* com $\rho^+ < Y^* < \infty$ para o caso (1) e $-\theta^+ < Y^* < \infty$ para o caso (2) tal que, para o sistema (4.36), a variedade estável $W^s(\theta^+, \rho^+)$ comtém um ramo da variedade central $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$.

Unicidade da solução para o sistema (4.36)

Agora vamos mostrar que existe um único Y^*; de fato suponhamos que existe Y^+ tal que a conexão de $(\theta^+ + Y^+, 0)$ com (θ^+, ρ^+) exista, logo utilizando a **integral de Melnikov** dada pela seguinte igualdade

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{+\infty} exp\Big[-\int_0^\tau r(\eta)d\eta\Big](-\dot{\rho}, \dot{\theta}) \frac{\partial}{\partial Y^+} \begin{pmatrix} F_1(\theta, \rho) \\ F_2(\theta, \rho) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} exp\Big[-\int_0^\tau r(\eta)d\eta\Big](-\dot{\rho}, \dot{\theta}) \begin{pmatrix} a^2\rho^+(\rho^+ - \rho) \\ 2(Y^+ - \rho^+)\rho^2\Phi(\theta) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} exp\Big[-\int_0^\tau r(\eta)d\eta\Big]\Big(2(Y^+ - \rho^+)\rho^2\Phi(\theta)\dot{\theta} - a^2\rho^+(\rho^+ - \rho)\dot{\rho}\Big)d\tau \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{pmatrix} F_1(\theta, \rho) = a^2\rho^+\Big(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)\Big) \\ F_2(\theta, \rho) = (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta)) \end{pmatrix},$$

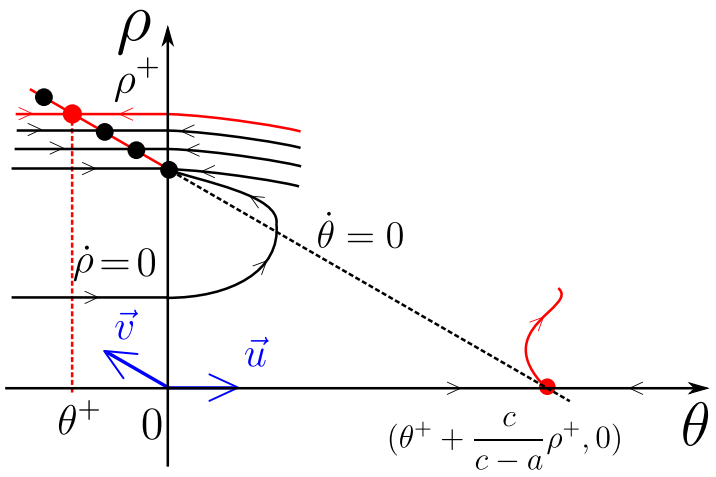
$$(\theta,\rho)(\tau) \text{ a órbita de conexão e } r(\tau) = divF(\theta,\rho)(\tau).$$

Como qualquer conexão de $(\theta^+ + Y^+, 0)$ com (θ^+, ρ^+) encontra-se no primeiro quadrante do plano $\theta\rho$ e acima da linha H, então $\rho^+ > \rho$, $\dot{\rho} > 0$ e $\dot{\theta} < 0$. Logo temos que $M < 0$, e como $M < 0$, então a variedade central de $(\theta^+ + Y^+, 0)$ cruza de baixo para cima a variedade estável de (θ^+, ρ^+) quando Y^+ aumenta e passa Y^*. Logo existe um Y_1^+, com $Y^* < Y_1^+ < Y^+$ e existe conexão da variedade central de $(\theta^+ + Y_1^+, 0)$ e a variedade estável do ponto (θ^+, ρ^+). Mas a função de Melnikov é positiva, sendo uma contradição, pois $M < 0$. Portanto Y^* é único. ■

Região 1

Na região 1, a linha $Y = 0$ encontra-se abaixo de $\rho = 0$. Veja a **Figura 30.** Uma onda viajante com estado direito no ponto (θ^+, ρ^+) existe, se a variedade central de $(\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+, 0)$ se encontra com a variedade estável de equilíbrio (θ^+, ρ^+).

Figura 30 – Retrato de fase associado à Região 1.



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

Proposição 4.3 *Seja $a > 0$ e $\theta^+ \leq 0$. Seja Y^* dado pela* ***Proposição 4.2.***

(1) Suponhamos que $\rho^+ \geq -\theta^+$. Para $Y^* < Y^+ < \infty$, todos os pontos (Y^+, c) na região 1 são tais que $\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+ > 0$, (portanto o retrato de fase de (4.32) é dado pela ***Figura 30.****) Para cada Y^+ existe uma velocidade c, $\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+} < c < \infty$, de modo que a variedade central de $(\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+, 0)$ intersecta a variedade estável do equilíbrio degenerado (θ^+, ρ^+).*

(2) Suponhamos que $\rho^+ < -\theta^+$. Para $Y^* < Y^+ < \infty$, todos os pontos (Y^+, c) na região 1 são tais que $\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+ > 0$, (portanto o retrato de fase de (4.32) é dado pela

Figura 30.) *se e somente se* $\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+} < c < \frac{a\theta^+}{\theta^++\rho^+}$, *Para cada* Y^+ *existe a velocidade* c, $\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+} < c < \frac{a\theta^+}{\theta^++\rho^+}$, *de modo que a variedade central de* $(\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+, 0)$ *intersecta a variedade estável do equilíbrio degenerado* (θ^+, ρ^+).

Demonstração:
Fixando $Y^+ > Y^*$.
Caso (1), vamos estudar o (4.32) quando $c \to \infty$, isto é, dividindo dos dois lados do sistema (4.32) por c. obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\dot{\theta}}{c} = \frac{(a-c)}{c}(\theta - \theta^+) - (\rho - \rho^+) \\ \frac{\dot{\rho}}{c} = \Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{c(c-a)} + \frac{Y^+}{c^2}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.49}$$

Agora fazendo uma mudança de escala para o sistema (4.49), Isto é, seja $\tau = \frac{t}{c}$ e $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c}$ tem-se:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau}\frac{1}{c} = \frac{(a-c)}{c}(\theta - \theta^+) - (\rho - \rho^+) \\ \frac{d\rho}{d\tau}\frac{1}{c} = \Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{c(c-a)} + \frac{Y^+}{c^2}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Fazendo no sistema acima que $c \to \infty$, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -(\theta - \theta^+) - (\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = 0. \end{cases} \tag{4.50}$$

Agora o sistema (4.50) tem os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \ \text{ e } \ (\theta, \rho) = (\theta^+ + \rho^+, 0),$$

Note que este sistema é o sistema (4.41) dividido por $a^2(\rho^+)^2$. Logo, nessa região temos que todas as órbitas são linhas atratoras conforme a **Figura 26,** sendo impossível a existência de uma conexão da variedade estável do ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) e a variedade central do ponto de equilíbrio $(\theta^+ + \rho^+, 0)$. Agora como o fluxo varia continuamente temos que para um c muito grande, a variedade estável de (θ^+, ρ^+) encontra-se acima da variedade central de $(\theta^+ + \rho^+, 0)$.
Por outro lado, vamos estudar o sistema (4.32) quando $c = \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}$, ou seja, substituindo $c = \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}$ no sistema (4.32), temos que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+})(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}-a)} + \frac{Y^+}{\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Logo pondo em evidência o termo $(Y^+ - \rho^+)$ no lado direito do sistema acima, obtemos que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{Y^+-\rho^+}\Big(- a\rho^+(\theta - \theta^+) - aY^+(\rho - \rho^+)\Big) \\ \dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)\Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Agora multiplicando o sistema acima por $(Y^+ - \rho^+)$, obtemos que:

$$\begin{cases} (Y^+ - \rho^+)\dot{\theta} = (-a\rho^+(\theta - \theta^+) - aY^+(\rho - \rho^+) \\ (Y^+ - \rho^+)\dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Fazendo um reescalamento do tempo, isto é, fazendo $\tau = \frac{t}{(Y^+-\rho^+)}$ e $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(Y^+-\rho^+)}$, então o sistema acima transforma-se em:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (-a\rho^+(\theta - \theta^+) - aY^+(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.51}$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (4.51) são:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ e } (\theta, \rho) = (\theta^+ + Y^+).$$

Fazendo a linearização do sistema (4.51) no ponto (θ, ρ), obtemos que:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & -aY^+ \\ (Y^+ - \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho-\rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+}\Big)\rho\dot{\Phi}(\theta) & (Y^+ - \rho^+)^2\Big(\frac{2\rho-\rho^+}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+}\Big)\Phi(\theta). \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Agora avaliando o ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) no sistema linearizado acima, obtemos que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & -aY^+ \\ 0 & 0. \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Os valores próprios associado ao sistema linearizado acima são:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ e } \lambda = 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = -a\rho^+ < 0$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$. Em forma similar avaliando o ponto de equilíbrio $(\theta^+ + Y^+, 0)$ no sistema linearizado, obtemos que:

$$DF(\theta^+ + Y^+, 0) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & -aY^+ \\ 0 & 0. \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Os valores próprios associado ao sistema linearizado acima são:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ e } \lambda = 0.$$

Logo o vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = -a\rho^+ < 0$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$.
Como para $c = \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}$, temos que existe um único Y^* tal que a variedade estável de (θ^+, ρ^+) intersecta com a variedade central de $(\theta^+ + Y^+, 0)$, então como o fluxo varia continuamente temos que para $c > \frac{aY^+}{Y^+-\rho^+}$, a variedade estável de (θ^+, ρ^+) encontra-se abaixo da variedade central de $(\theta^+ + Y^+, 0)$.

Portanto, para um valor de c, com $\frac{aY^+}{Y^+-\rho^+} < c < \infty$, temos que a variedade estável de (θ^+, ρ^+) intersecta a variedade central de $(\theta^+ + Y^+, 0)$.
No caso (2) vamos estudar o sistema (4.32) quando $c = \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$, isto é, substituindo o valor de $c = \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$ no sistema (4.32), obtemos que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+})(\theta - \theta^+) - \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \Big(\frac{(\rho - \rho^+)}{\frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+} - a)} + \frac{Y^+}{\frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Logo pondo em evidência o termo $(\theta^+ + \rho^+)$ no lado direito do sistema acima, temos que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{(\theta^+ + \rho^+)}\Big(a\rho^+(\theta - \theta^+) - a\theta^+(\rho - \rho^+)\Big) \\ \dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)\Big(\frac{(\rho - \rho^+)}{-a\rho^+} + \frac{Y^+}{a\theta^+}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Agora multiplicando o sistema acima por $-(\theta^+ + \rho^+) > 0$, obtemos que:

$$\begin{cases} -(\theta^+ + \rho^+)\dot{\theta} = \Big(- a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+)\Big) \\ -(\theta^+ + \rho^+)\dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Agora fazendo uma mudança de escala $\tau = -(\theta^+ + \rho^+)t$, logo $\frac{d\tau}{dt} = -(\theta^+ + \rho^+)$, temos que:

$$\begin{cases} -\frac{d\theta}{d\tau}(\theta^+ + \rho^+) = -a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+) \\ -\frac{d\rho}{d\tau}(\theta^+ + \rho^+) = (\theta^+ + \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+}\Big)\rho\Phi(\theta), \end{cases}$$

obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.52}$$

O sistema (4.52) tem os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ e } (\theta, \rho) = (0, 0).$$

Linearizando o sistema (4.52) no ponto (θ, ρ), obtemos que:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & aY^+ \\ (\theta^+ + \rho^+)^2\Big(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+}\Big)\rho\dot{\Phi}(\theta) & (\theta^+ + \rho^+)^2\Big(\frac{(2\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+}\Big)\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Agora avaliando o ponto de equilíbrio θ^+, ρ^+ no sistema linearizado acima, obtemos que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & aY^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Logo os valores próprios associados ao sistema linearizado são:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ e } \lambda = 0.$$

Então o vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = -a\rho^+ < 0$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{Y^+}{\rho^+})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$.
em forma análoga avaliando o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ no sistema linearizado, obtemos que:

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & aY^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

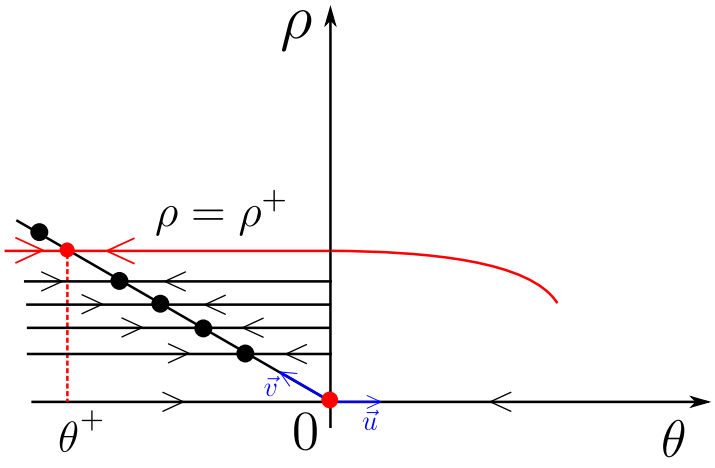
Os valores próprios associados ao sistema linearizado são:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \quad \text{e} \quad \lambda = 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = -a\rho^+ < 0$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{Y^+}{\rho^+})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$.
Como $\theta^+ \leq 0$, então nessa região as órbitas são linhas atratatoras, em particular nessa região, temos que a variedade estável de (θ^+, ρ^+) é a linha $\rho = \rho^+$ e a variedade central $(0, 0)$ está contida na reta H definida por $H : -a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+) = 0$, com $\theta < 0$. Logo como o fluxo varia continuamente temos que a variedade estável de (θ^+, ρ^+) encontra-se acima da variedade central de $(0, 0)$.
O retrato de fase é mostrado na **Figura 31.**

Por outro lado, temos que: que para o valor de c, com $c > \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$ a variedade estável de

Figura 31 – Retrato de fase do sistema (4.52)



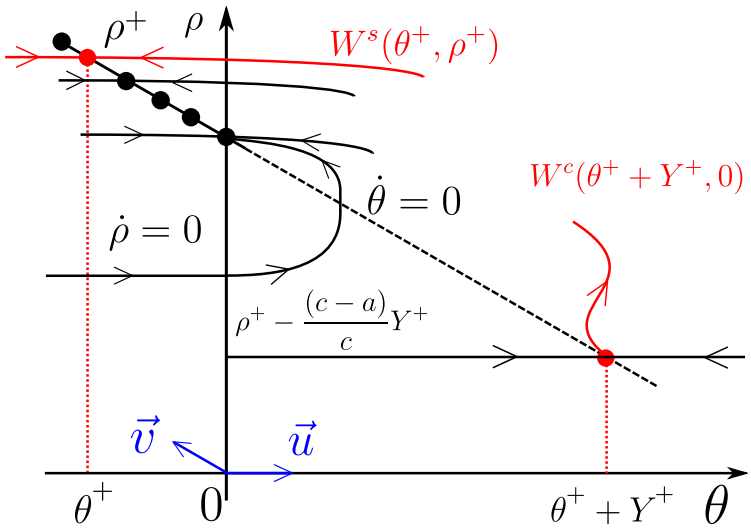
Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

(θ^+, ρ^+) encontra-se abaixo da variedade central $(\theta^+ + \rho^+, 0)$.
Portanto, para um $Y^+ > Y^*$ existe um valor de c, com $\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} < c < \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$ tal que a variedade estável de (θ^+, ρ^+) intersecta com a variedade central de $(0, 0)$.
Em ambos casos, usando a **Proposição 4.2**, mostramos que para $Y^* < Y^+ < \infty$, as configurações das variedades invariantes para c muito grande e em **C** são opostos. Isto é, se mostra a existência de c. ■

Região 2

Para (Y^+, c) na Região 2, a linha $Y = 0$ encontra-se entre $\rho = 0$ e $\rho = \rho^+$. veja a **Figura 32.** Temos ($\rho \geq \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+ > 0$, ou seja, em $Y \geq 0$), supondo que $\theta^+ + Y^+ > 0$. Uma onda viajante com estado direito no ponto (θ^+, ρ^+), existe se a variedade instável de $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ intersecta com a variedade estável do equilíbrio degenerado (θ^+, ρ^+).

Figura 32 – Retrato de fase do sistema (4.36) para a Região 2.



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

Proposição 4.4 *Para $a > 0$, $\theta^+ \leq 0$, e $-\theta^+ < Y^+ < Y^*$, Y^* dado pela* ***Proposição 4.2****, existe uma velocidade $c > a$ tal que o ponto(Y^+, c) que pertence à Região 2 e a variedade estável de (θ^+, ρ^+) contém um ramo da variedade instável de $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$.*

Demonstração:
Assumimos que $\rho^+ > -\theta^+$. A **Proposição 4.2 (1)** fornece a posição relativa da variedade estável de (θ^+, ρ^+) da variedade central de $(\theta^+ + Y^+, 0)$, isto é, a $W^s(\theta^+, \rho^+)$ encontra-se acima da $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$.
para (Y^+, c) em **C**.
Para $-\theta^+ < Y^+ < \rho^+$, quando $c \to \infty$, o equilíbrio $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ aproximam-se do equilíbrio $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - Y^+)$. Usando argumento análogo na demonstração da **Proposição 4.2 (1)**, mostra-se que para um c muito grande a variedade estável de (θ^+, ρ^+) encontra-se acima da variedade instável de $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$.
Agora para estudarmos o sistema quando $c \to a$ positivamente para um Y arbitrário,

multiplicamos o sistema (4.32) por $(c-a)$ e obtemos que:

$$\begin{cases} (c-a)\dot{\theta} = -(a-c)^2(\theta-\theta^+) + (c-a)(\rho=\rho^+) \\ (c-a)\dot{\rho} = \Big[(\rho-\rho^+) + (c-a)\frac{Y^+}{c}\Big]\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Logo fazendo uma mudança de escala no sistema acima isto é, seja $\tau = \frac{t}{(c-a)}$ de modo que $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(c-a)}$. Obtemos que:

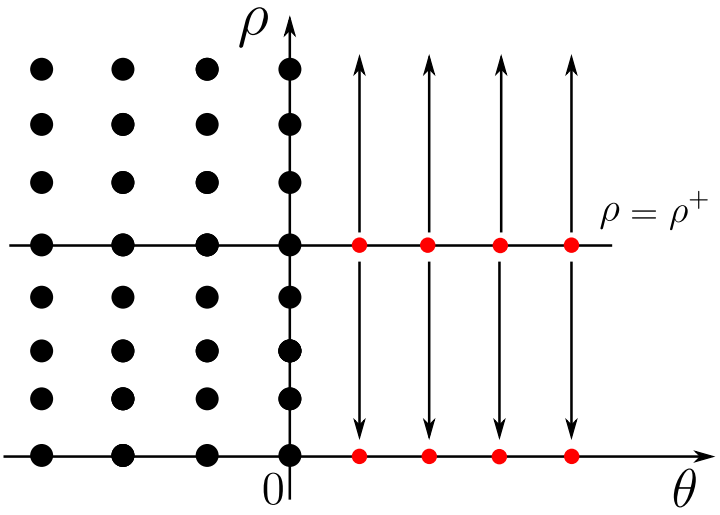
$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -(a-c)^2(\theta-\theta^+) + (c-a)(\rho=\rho^+) \\ \dot{\rho} = \frac{\rho}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \Big[(\rho-\rho^+) + (c-a)\frac{Y^+}{c}\Big]\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Finalmente fazendo que $c = a$ no sistema acima, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\rho} = (\rho-\rho^+)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.53}$$

O diagrama de fase do sistema (4.53) é dado pela **Figura 33.** Em particular a linha de equilíbrios $\rho = \rho^+$, com $\theta > 0$ é uma linha hiperbólica, e a variedade instável de um ponto $(\rho^+, \theta^\triangle)$ sobre o semi eixo $\rho = \rho^+$ é a linha $\theta = \theta^\triangle$, com $\rho > 0$. Mas quando $\theta \leq 0$ não existem equilíbrios. Segue-se que, para um c maior que a, mais perto de a, a variedade instável de $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ encontra-se perto da linha vertical, e portanto a variedade estável de (θ^+, ρ^+) encontra-se abaixo da variedade instável de $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$.
Logo como o fluxo varia continuamente, temos que existe um $c > a$ de modo que a variedade estável de (θ^+, ρ^+) contém um ramo da variedade instável de $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$. ■

Figura 33 – Retrato de fase para o sistema (4.53)



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

4.3 ONDAS VIAJANTES LENTAS (0<c<a).

Nesta seção vamos provar o **Teorema 4.2.**
Sendo aqui $0 < c < a$, assumimos que o estado direito da onda viajante do sistema (4.1)-(4.3) é de tipo OC, isto é, um ponto de equilíbrio $(\theta^+, \rho^+, 0)$ com $\theta^+ > 0$ e $\rho^+ > 0$. Fazendo a substituição de $(\theta^+, \rho^+, 0)$ na igualdade (4.31), obtemos

$$(w_1, w_2) = ((c-a)\theta^+ + c\rho^+, -c\rho^+). \tag{4.54}$$

Logo, utilizando a igualdade (4.54) no sistema (4.21) obtemos a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a-c)(\theta - \theta^+) - c(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \left(\frac{\rho^+ - \rho}{a-c}\right)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.55}$$

A linha invariante $Y = 0$ corresponde a

$$\rho = -\frac{w_2}{c} = \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+. \tag{4.56}$$

Como $Y^+ = 0$, em (4.56), temos que a linha invariante $Y = 0$ corresponde $\rho = \rho^+$. A região $\mathcal{P}$ é $0 \leq \rho \leq \rho^+$.
Seja $\theta^\sharp = \theta^+ - \frac{c}{c-a}\rho^+ < \theta^+$ e $\rho^\diamond = \rho^+ - \frac{a-c}{c}\theta^+ < \rho^+$.

Proposição 4.5 *Seja $a > 0$, $\theta^+ > 0$ e $\rho^+ > 0$. Para cada c com $0 < c < a$, um ponto de equilíbrio de (4.55) é o ponto de sela (θ^+, ρ^+), o qual corresponde ao ponto $(\theta, \rho, Y) = (\theta^+, \rho^+, 0)$. Além disso:*

(i) Se $0 < c < \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a$, então $\theta^\sharp > 0$ e $\rho^\diamond < 0$, $(\theta^\sharp, 0)$ é um nó instável, e existe uma única órbita que conecta o ponto $(\theta^\sharp, 0)$ e o ponto (θ^+, ρ^+), de tipo $FC \xrightarrow{c_s} OC$. A linha H não intersecta a parte de $\mathcal{P}$ com $\theta \leq 0$, portanto o conjunto TC^* é vazio. Não existem outras órbitas conectoras em $\mathcal{P}$.

(ii) Se $c = \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a$, então $\theta^\sharp = \rho^\diamond = 0$ e o ponto $(0,0)$ tem um valor próprio positivo e outro zero, e existe uma única órbita que conecta o ponto $(0,0)$ e o ponto (θ^+, ρ^+), de tipo $TC \cap FC \xrightarrow{c_s} OC$. A interseção da linha H e $\mathcal{P}$ é o origem. Não existem outras órbitas conectoras em $\mathcal{P}$.

(iii) Se $\frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a < c < a$, então $\theta^\sharp < 0$ e $\rho^\diamond > 0$, e H intersecta $\mathcal{P}$ na linha de equilíbrio

$$TC^* \;=\; \{(\theta, \rho) : \theta^\sharp \leq \theta \leq 0 \;\; e \;\; \rho = \rho^+ + \frac{a-c}{c}(\theta - \theta^+)\}. \tag{4.57}$$

Os pontos finais de TC^* são $(\theta^\sharp, 0)$ e $(0, \rho^\diamond)$. O equilíbrio em TC^* tem um valor próprio 0 e um valor próprio positivo.

Demonstração:

(i) Seja $0 < c < \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+} a$. Então, $c(\theta^+ + \rho^+) < \theta^+ a$, logo pela definição de $\theta^\sharp$, temos que: $\theta^\sharp = \theta^+ - \frac{c}{a-c}\rho^+$, logo como $0 < \theta^+ - \frac{c}{a-c}\rho^+$. Portanto, $\theta^\sharp > 0$.
Em forma análoga da desigualdade $c(\theta^+ + \rho^+) < \theta^+ a$ e a definição de $\rho^\diamond$, temos que, $\rho^\diamond = \rho^+ - \frac{(a-c)}{c}\theta^+$ e como $\rho^+ - \frac{(a-c)}{c}\theta^+$. Portanto, $\rho^\diamond < 0$.
Agora vamos estudar o sistema (4.55). De fato os pontos de equilíbrio do sistema (4.55) são:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ e } (\theta^\sharp = \theta^+ - \frac{c}{a-c}\rho^+, 0)$$

onde $\theta^\sharp = \theta^+ - \frac{c}{a-c}\rho^+ > 0$. agora fazendo a linearização do sistema (4.55) no ponto (θ, ρ) temos que

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a-c & -c \\ \left(\frac{\rho^+ - \rho}{a-c}\right)\rho\dot{\Phi}(\theta) & \left(-\frac{\rho}{a-c} + \frac{\rho^+ - \rho}{a-c}\right)\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.58}$$

Avaliando o ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) na matriz da linearização do sistema (4.55), obtemos que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} a-c & -c \\ 0 & -\frac{\rho^+}{a-c}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Pelo **Teorema 2.7 (i)** temos que o ponto de equiilíbrio (θ^+, ρ^+) é um ponto de sela, sendo os seguintes valores próprios:

$$\lambda = a - c > 0 \text{ e } \lambda = -\frac{\rho^+}{a-c}\Phi(\theta) < 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{(a-c)^2 + \rho^+\Phi(\theta^+)}{c(a-c)})$ está associado ao valor próprio $\lambda = -\frac{\rho^+}{a-c}\Phi(\theta) < 0$.
Em forma análoga avaliando o ponto de equilíbrio $(\theta^\sharp, 0)$ na matriz da linearização (4.58) obtemos

$$DF(\theta^\sharp, 0) = \begin{pmatrix} a-c & -c \\ 0 & \frac{\rho^+}{a-c}\Phi(\theta^\sharp) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

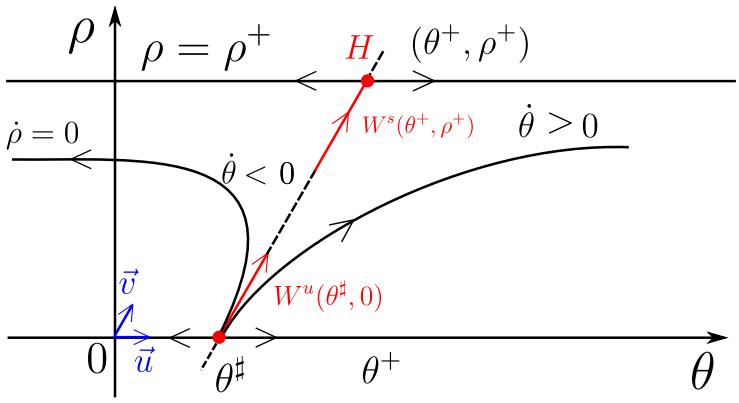
De acordo com o **Teorema 2.7 (ii)** o ponto de equilíbrio $(\theta^\sharp, 0)$ é um nó instável, com os seguintes valores próprios:

$$\lambda = a - c > 0 \text{ e } \lambda = \frac{\rho^+}{a-c}\Phi(\theta^\sharp) > 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c > 0$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{(a-c)^2 - \rho^+\Phi(\theta^\sharp)}{c(a-c)})$ está associado ao valor próprio $\lambda = \frac{\rho^+}{a-c}\Phi(\theta^\sharp) > 0$.
Agora se $\rho = 0$, implica que $\dot{\rho} = 0$, logo a linha $\rho = 0$ é invariante, de forma análoga se $\rho = \rho^+$ implica que $\dot{\rho} = 0$, logo temos que a linha $\rho = \rho^+$ é uma linha invariente.

Logo temos que $\dot{\theta}$ é negativo, zero e positivo quando a linha $H : (a-c)(\theta-\theta^+) - c(\rho-\rho^+) = 0$. é cruzada de esquerda à direita.
Portanto, não é possível uma conexão do ponto de equilíbrio $(\theta^\sharp, 0)$ e o ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) na esquerda e direita da linha H, pois numa vizinhança $\mathcal{U}$ do ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) as órbitas contidas na vizinhança $\mathcal{U}$ afastam-se do ponto de equilíbrio no pasado e no futuro, respectivamente.
Portanto, existe uma única conexão do ponto de equilíbrio $(\theta^\sharp, 0)$ e o ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+), sendo esta conexão contida na linha H. Veja a **Figura 34.**

Figura 34 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $0 < c < \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a$..



Fonte: Elaboração própria.

(ii) Seja $c = \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a$, então $c(\theta^+ + \rho^+) = a\theta^+$, logo pela definição de $\theta^\sharp$, temos que: $\theta^\sharp = \theta^+(a-c) - c\rho^+ = a\theta^+ - c(\theta^+ + \rho^+) = 0$. Por outro lado, pela definição de $\rho^\diamond$, temos que: $\rho^\diamond = \rho^+ - \frac{(a-c)}{c}\theta^+ = c\rho^+ - (a-c)\theta^+ = c(\theta^+ + \rho^+) - a\theta^+ = 0$.
Portanto $\theta^\sharp = \rho^\diamond = 0$.
Vamos estudar o sistema (4.55) quando $c = \frac{\theta^+ a}{\theta^+ + \rho^+}$. Isto é, substituindo $c = \frac{\theta^+ a}{\theta^+ + \rho^+}$ no sistema (4.55) obtendo

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - \frac{\theta^+ a}{\theta^+ + \rho^+})(\theta - \theta^+) - \frac{\theta^+ a}{\theta^+ + \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \Big(\frac{\rho^+ - \rho}{a - \frac{\theta^+ a}{\theta^+ + \rho^+}}\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Multiplicando o sistema acima por $(\theta^+ + \rho^+)$ e simplificando, obtemos que:

$$\begin{cases} (\theta^+ + \rho^+)\dot{\theta} = a\rho^+(\theta - \theta^+) - a\theta^+(\rho - \rho^+) \\ (\theta^+ + \rho^+)\dot{\rho} = \Big(\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{a\rho^+}(\rho^+ - \rho)\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Agora fazendo um reescalamento do tempo por $(\theta^+ + \rho^+) > 0$, isto é, seja $\tau = \frac{t}{(\theta^+ + \rho^+)}$ e $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(\theta^+ + \rho^+)}$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \rho^+ a(\theta - \theta^+) - \theta^+ a(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \Big(\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{\rho^+ a}(\rho^+ - \rho)\Big)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.59}$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (4.59) são:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ e } (\theta, \rho) = (0, 0),$$

logo linearizando o sistema (4.59) obtemos

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} \rho^+ a & -\theta^+ a \\ \Big(\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{\rho^+ a}(\rho^+ - \rho)\Big)\rho\dot{\Phi}(\theta) & \Big(-\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{\rho^+ a}\rho + \frac{(\rho^+ - \rho)(\theta^+ + \rho^+)^2}{\rho^+ a}\Big)\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Agora avaliando o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ no sistema linearizado (4.60), obtemos que:

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \rho^+ a & -\theta^+ a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Os valores próprios do sistema linearizado acima são:

$$\lambda = \rho^+ a > 0 \text{ e } \lambda = 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = \rho^+ a$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{\rho^+}{\theta^+})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$.
De forma análoga avaliando o ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) no sistema linearizado (4.60), obtemos que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} \rho^+ a & -\theta^+ a \\ 0 & -(\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{a})\Phi(\theta^+) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

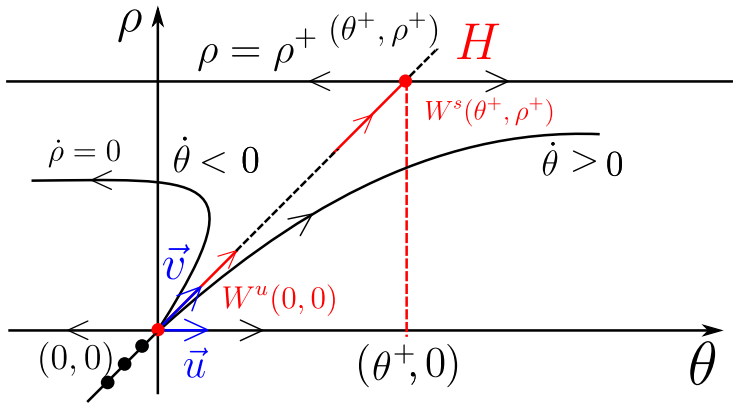
De acordo com o **Teorema 2.7 (i)** o ponto de equilíbrio (θ^+, ρ^+) é um ponto de sela.
Os valores próprios do sistema linearizado acima são:

$$\lambda = \rho^+ a > 0 \text{ e } \lambda = -(\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{a})\Phi(\theta^+) < 0,$$

então o vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = \rho^+ a$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{(\theta^+ + \rho^+)^2\Phi(\theta^+) + \rho^+ a^2}{\rho^+ a^2})$. está associado ao valor próprio $\lambda = -(\frac{(\theta^+ + \rho^+)^2}{a})\Phi(\theta^+)$.
Agora se $\rho = 0$, implica que $\dot{\rho} = 0$, logo a linha $\rho = 0$ é invariante, de forma análoga se $\rho = \rho^+$ implica que $\dot{\rho} = 0$, logo, temos que a linha $\rho = \rho^+$ é uma linha invariante. Agora temos que $\dot{\theta}$ é negativo, zero e positivo quando a linha $H : a\rho^+(\theta - \theta^+) - \theta^+ a(\rho - \rho^+) = 0$. é cruzada de esquerda para a direita.

Logo, não é possível uma conexão do ponto de equilíbrio $(0,0)$ e o ponto de equilíbrio (θ^+,ρ^+) pela esquerda e direita la linha H, pois numa vizinhança $\mathcal{U}$ do ponto de equilíbrio (θ^+,ρ^+) as órbitas contidas na vizinhança afastam-se do ponto de equilíbrio no pasado e no futuro, respectivamente.
Portanto, existe uma única conexão do ponto de equilíbrio $(0,0)$ e o ponto de equilíbrio (θ^+,ρ^+), sendo esta conexão contida na linha H. Veja a **Figura 35.**

Figura 35 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $c=\frac{\theta^+}{\theta^+\rho^+}a$.



Fonte: Elaboração própria.

(iii) Seja $\frac{\theta^+}{\theta^+\rho^+}a<c<a$, então, temos que $a\theta^+<c(\theta^++\rho^+)<a(\theta^++\rho^+)$, logo, pela definição de $\theta^\sharp$, temos que $\theta^\sharp=\theta^+(a-c)-c\rho^+=a\theta^+-c(\theta^++\rho^+)<0$. Portanto, $\theta^\sharp<0$.
Em forma análoga pela definição de $\rho^\diamond$, obtemos que: $\rho^\diamond=\rho^+-\frac{(a-c)}{c}\theta^+=c\rho^+-(a-c)\theta^+=c(\theta^++\rho^+)-a\theta^+$ e como $a\theta^+<c(\theta^++\rho^+)<a(\theta^++\rho^+)$. Portanto, $\rho^\diamond>0$.
Do sistema (4.55), temos que, seus equilíbrios são: $(\theta,\rho)=(\theta^\sharp,0)$, $(\theta,\rho)=(0,\rho^\diamond)$ e $(\theta,\rho)=(\theta^+,\rho^+)$.
Agora linearizando o sistema (4.55) no ponto (θ,ρ), obtemos que:

$$DF(\theta,\rho)=\begin{pmatrix} a-c & -c \\ \frac{(\rho^+-\rho)}{(a-c)}\rho\dot\Phi(\theta) & \left(-\frac{\rho}{a-c}+\frac{(\rho^+-\rho)}{a-c}\right)\Phi(\theta)\end{pmatrix}_{2\times 2.} \tag{4.60}$$

Logo avaliando o ponto de equilíbrio $(\theta^\sharp,0)$ em (4.60,) obtemos que

$$DF(\theta^\sharp,0)=\begin{pmatrix} a-c & -c \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Tendo os seguintes valores próprio: $\lambda = a - c > 0$ e $\lambda = 0$.
O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$.
Similarmente avaliando o ponto de equilíbrio $(0, \rho^{\diamond})$ na matriz da linearização do sistema (4.60), obtemos que:

$$DF(0, \rho^{\diamond}) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Tendo os seguintes valores próprio: $\lambda = a - c > 0$ e $\lambda = 0$.
O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a - c$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$ está associado ao valor próprio $\lambda = 0$.

■

Demonstração:(Do Teorema 4.2)

(1) Seja $a > 0$ fixo, seja $(\theta^-, 0, Y^-)$ com $\theta^- \geq 0$ e $Y^- > 0$, então pela hipótese geral da **Proposição 4.5**, temos que, o ponto $(\theta^+, \rho^+, 0)$ com $\theta^+ > 0$ e $\rho^+ > 0$ é um ponto de tipo TC, logo, temos que:

$$w_2 = (c - a)Y^+ - c\rho^+ \text{ e } w_2 = (c - a)Y^- - c\rho^-.$$

Então, temos que:

$$(c - a)Y^+ - c\rho^+ \;\; = \;\; (c - a)Y^- - c\rho^-,$$

Logo substituindo $Y^+ = 0$ e $\rho^- = 0$, na igualdade acima, obtemos que:

$$(c - a)Y^- = -c\rho^+. \tag{4.61}$$

Agora, pondo em evidência o termo aY^-, obtemos que:

$$c(\rho^+ + Y^-) \;\; = \;\; aY^-,$$

Como $(\rho^+ + Y^-)$, temos que:

$$c \;\; = \;\; \frac{aY^-}{\rho^+ + Y^-}.$$

Portanto,

$$c_s \;\; = \;\; \frac{aY^-}{\rho^+ + Y^-}. \tag{4.62}$$

Em forma similar, temos que:

$$w_1 = (c - a)\theta^+ + c\rho^+ \text{ e } w_1 = (c - a)\theta^- + c\rho^-,$$

ou seja,

$$(c-a)\theta^+ + c\rho^+ \;=\; (c-a)\theta^- + c\rho^-.$$

Substituindo $\rho^- = 0$, na igualdade acima, obtemos que:

$$(c-a)\theta^- = (c-a)\theta^+ + c\rho^+.$$

Agora, pondo em evidência o termo $(c-a)\theta^+$, na igualdade acima, obtemos que:

$$(c-a)\theta^+ \;=\; (c-a)\theta^- - c\rho^+.$$

Logo como $c - a \neq 0$, temos que:

$$\theta^+ \;=\; \theta^- - \frac{c\rho^+}{c-a}.$$

Finalmente substituindo a igualdade (4.61), na igualdade acima, obtemos que:

$$\theta^+ \;=\; \theta^- + Y^-.$$

Afirmamos que:

$$c_s \leq \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}.$$

De fato, seja $Y^- \leq \theta^+$, então

$$\frac{c_s}{a-c_s}\left(\frac{a-c_s}{c_s}Y^-\right) \;\leq\; \theta^+,$$

substituindo a igualdade (4.62), na desigualdade acima, obtemos que:

$$\frac{c_s}{a-c_s}\rho^+ \;\leq\; \theta^+$$

Multiplicando a desigualdade acima por $a - c_s$, temos que:

$$c_s\rho^+ \;\leq\; (a-c_s)\theta^+,$$

logo pondo em evidência o termo $a\theta^+$, na desigualdade acima, temos que:

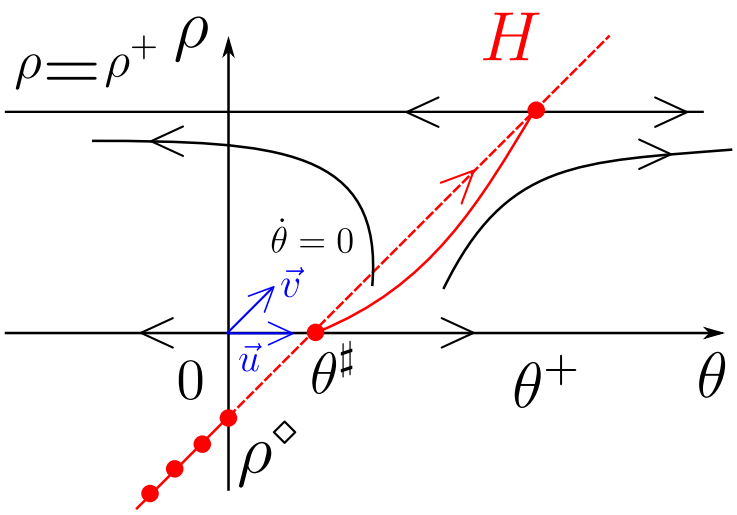
$$c_s(\rho^+ + \theta^+) \;\leq\; a\theta^+,$$

agora, multiplicando o termo $\theta^+ + \rho^+ > 0$, na desigualdade acima, obtemos que:

$$c_s \;\leq\; \frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}a.$$

De acordo com a **Proposição 4.5 (i)-(ii)**, temos que, existe uma única onda viajante de velocidade c_s, que conecta o ponto $(\theta^-, 0, Y^-)$ e o ponto $(\theta^+, \rho^+, 0)$. Veja a **Figura 36.**

Figura 36 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $0 < c < a$.



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

(2) Seja $a > 0$ fixo, $\theta^- < 0$, Y^- de modo que $\theta^+ + Y^- > 0$ e $\rho^+ > 0$. Logo da igualdade (4.31) temos que w_1 em um ponto (θ, v_1, ρ, Y) é:

$$(c-a)\theta^- + c\rho^- = w_1 = (c-a)\theta^+ + c\rho^+ \tag{4.63}$$

e w_2 em um ponto (θ, v_1, ρ, Y) é

$$(c-a)Y^- - c\rho^- = w_2 = -c\rho^+, \tag{4.64}$$

pois, $Y^+ = 0$, logo pondo em evidência o termo $c\rho^-$, na igualdade (4.64), obtemos que:

$$c\rho^- \quad = \quad c\rho^+ + (c-a)Y^-,$$

dividindo por $c > 0$, a igualdade acima, temos que:

$$\rho^- \quad = \quad \rho^+ - \frac{(a-c)}{c}Y^- > 0, \tag{4.65}$$

da igualdade (4.63), obtemos que:

$$(c-a)\theta+ \quad = \quad c(\rho^- - \rho^+) + (c-a)\theta^-.$$

Agora substituindo a igualdade (4.65), na igualdade acima, obtemos que:

$$(c-a)\theta^+ \quad = \quad c(-\frac{(a-c)}{c}Y^-) + (c-a)\theta^-,$$

logo pondo em evidência o termo θ^+, na igualdade acima, obtemos que:

$$\theta^+ \quad = \quad Y^- + \theta^-. \tag{4.66}$$

Note que

$$\frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+} < \frac{Y^-}{Y^- + \rho^+} \Longleftrightarrow \theta^+ < Y^-. \tag{4.67}$$

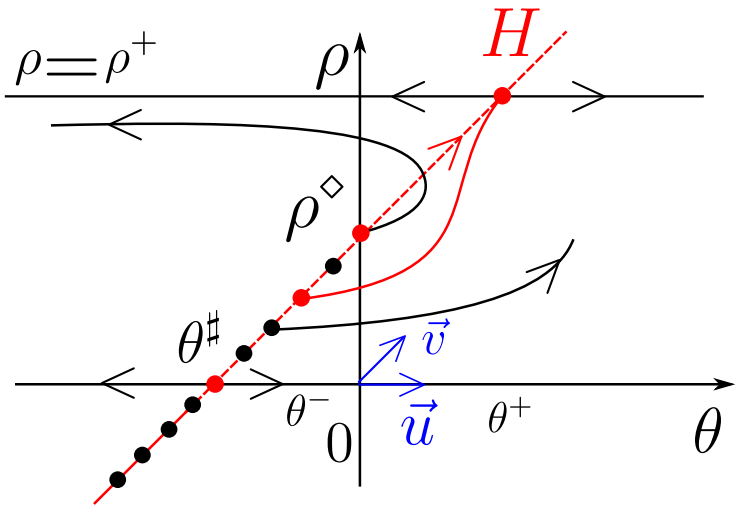
E da igualdade (4.65), obtemos que:

$$\frac{Y^-}{\rho^+ + Y^-} a < c < a.$$

logo pela **Proposição 4.5 (iii)**, temos que o diagrama de fase associado ao sistema (4.55) é a **Figura 37.**

Fazemos uma substituição das igualdades (4.65)-(4.66) no sistema (4.55), obtendo

Figura 37 – Retrato de fase do sistema (4.55) para $\frac{\theta^+}{\theta^+ + \rho^+} < c < a$.



Fonte: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Poros Foam.

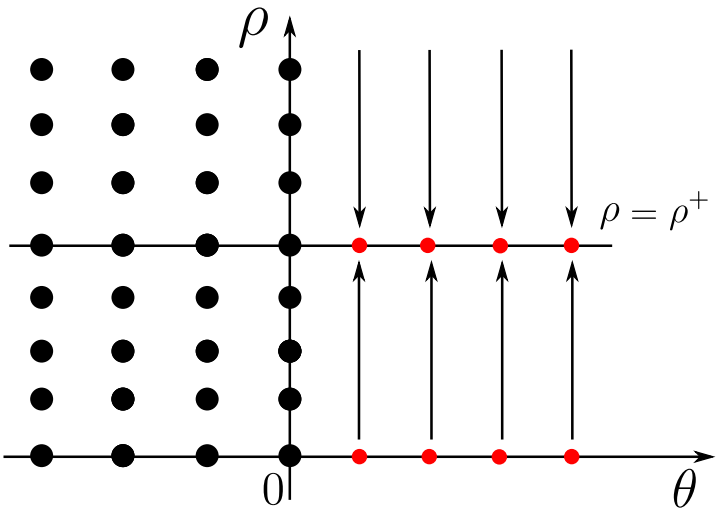
$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a-c)\Big(\theta - (\theta^- + Y^-)\Big) - c(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \frac{\rho^+ - \rho}{a-c}\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.68}$$

Vamos considerar o sistema (4.68) para $\frac{Y^-}{\rho^+ + Y^+} a < c < a$. Para estudar o caso quando $c \to a$ pela direita, mas perto de a, vamos multiplicar o sistema (4.68) por $a - c > 0$, obetndo:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a-c)^2\Big(\theta - (\theta^- + Y^-)\Big) - c(c-a)(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = (\rho^+ - \rho)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.69}$$

Quando fazemos que $c = a$ obtemos o sistema (4.53) multiplicado por -1. Então o retrato de fase é dado pela **Figura 38** com as setas invertidas. Isto é, os semi-eixos $\rho = 0, \ \theta > 0$ e $\rho = \rho^+, \ \theta > 0$ são, respectivamente, uma linha normalmente

Figura 38 – Semi-eixo de equilíbrios normalmente atratores.



Fonte: Elaboração própria.

repulsora e uma linha normalmente atratora, com órbitas $\theta = constante$. Para $c < a$ e c perto de a, o fluxo lento em $\theta > 0$, $\rho = 0$, o qual é dado pela primeira igualdade do sistema (4.69) com $c = a$ está na direita. Destes fatos pelos sinais de $\dot{\theta}$ e $\dot{\rho}$, segue que para c perto e menor de a, o ramo inferior da variedade estável do ponto de sela (θ^+, ρ^+) aproxima-se da linha $\rho = 0$ e apromxima-se para um equilíbrio em TC com ρ perto de 0. Então esse ramo está abaixo do ramo direito da variedade instável do ponto (θ^-, ρ^-) em TC.
Para estudar quando $c = \frac{Y^-}{\rho^+ + Y^-}a$, substituimos este valor no sistema (4.68), obtemos que:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (a - \frac{Y^- a}{\rho^+ + Y^-})\Big(\theta - (\theta^- + Y^-)\Big) - \frac{Y^- a}{\rho^+ + Y^-})(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \frac{\rho^+ - \rho}{a - \frac{Y^- a}{\rho^+ + Y^-}}\rho\Phi(\theta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\frac{\rho^+ a}{\rho^+ + Y^-})\Big(\theta - (\theta^- + Y^-)\Big) - \frac{Y^- a}{\rho^+ + Y^-})(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \frac{(\rho^+ - \rho)}{\rho^+ a}(\rho^+ + Y^-)\rho\Phi(\theta), \end{aligned}$$

Agora multiplicando por $(\rho^+ + Y^-) > 0$ e fazendo uma mudança de escala, no sistema acima, temos que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a\rho^+(\theta - \theta^-) - a\rho Y^- \\ \dot{\rho} = \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a\rho^+}(\rho^+ - \rho)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \tag{4.70}$$

O sistema (4.70), tem os seguintes equilíbrios:

$$(\theta^-, 0) \text{ e } (\theta^- + Y^-, \rho^+).$$

Logo linearizando o sistema (4.70) no ponto (θ, ρ), obtemos que:

$$DF(\theta,\rho) = \begin{pmatrix} a\rho^+ & -aY^- \\ \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a\rho^+}(\rho^+ - \rho)\rho\dot{\Phi}(\theta) & \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a\rho^+}(\rho^+ - 2\rho)\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Avaliando o ponto de equilíbrio $(\theta^-, 0)$, na linearização do sistema (4.70), temos que:

$$DF(\theta^-,0) = \begin{pmatrix} a\rho^+ & -aY^- \\ 0 & \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a}\Phi(\theta^-) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

De acordo com o **Teorema 2.7 (ii)**, o ponto de equilíbrio $(\theta^-, 0)$ é um nó instável. Tendo os seguintes valores próprios:

$$\lambda = a\rho^+ > 0 \text{ e } \lambda = \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a}\Phi(\theta^-) > 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a\rho^+$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, -\frac{(\rho^+ + Y^-)^2\Phi(\theta^-) - a^2\rho^+}{Y^-})$ está associado ao valor próprio $\lambda = \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a}\Phi(\theta^-)$.
Em forma similar, avaliando o equilíbrio (θ^+, ρ^+), na linearização do sistema (4.70), obtemos que:

$$DF(\theta^+,\rho^+) = \begin{pmatrix} a\rho^+ & -aY^- \\ 0 & -\frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a}\Phi(\theta^+) \end{pmatrix}_{2\times 2.}$$

Logo, pelo **Teorema 2.7 (i)**, o ponto equilíbrio (θ^+, ρ^+) é uma sela.
Tendo os seguintes valores próprios:

$$\lambda = a\rho^+ > 0 \text{ e } \lambda = \frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a}\Phi(\theta^-) > 0.$$

O vetor próprio $\vec{u} = (1, 0)$ está associado ao valor próprio $\lambda = a\rho^+$ e o vetor próprio $\vec{v} = (1, \frac{(\rho^+ + Y^-)^2\Phi(\theta^+) + a^2\rho^+}{Y^-})$ está associado ao valor próprio $\lambda = -\frac{(\rho^+ + Y^-)^2}{a}\Phi(\theta^+)$.
Para este sistema, o ponto em TC com $\theta = \theta^-$ é só $(\theta^-, 0)$ Isto é, a variedade instável é o eixo θ, acima do qual é a variedade estável do ponto (θ^+, ρ^+). Portanto, pela continuidade do fluxo existe, uma onda de combustão para algum c no intervalo $\frac{Y^-}{\rho^+ + Y^-}a < c < a$.

■

REFERÊNCIAS

[1] ARNOLD, V. I. *Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom*, Sov. Math. Dooklady 5, 1964. pp 342-355.

[2] CHAPIRO, G. ; MARCHESIN, D. ; SCHECTER, S. *Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam*, USA: Journal of Hiperbolic Differential Equations vol 11 N 2, pp. 295-328, 2014.

[3] CHOW, S. N; HALE, J. K. *Methods of Bifurcation Theory* New York: Springer-Verlag, 1982.

[4] CODDINGTON, E. A; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, pp. 37, 1955.

[5] GUCKENHEIRMER, JOHN; HOLMES, PHILIP. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, Texts in Applied Mathematics 42, 1985.

[6] HUSSEIN, ALBOUDWAREJ et al. *Highlighting Heavy Oil*, Canadá: Oilfield Review vol 18 N 2, pp. 34-53, 2006.

[7] LIMA, E. L. *Curso de Análise II*, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981.

[8] LIMA, E. L. *Análise Real I*, Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2014.

[9] MELNIKOV. K. *On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations*, Trans. Moscow Math. Soc. 12, 1963. pp 1-57.

[10] OLIVA, W. M. *Equações Diferenciais Ordinárias*, São Paulo, pp 1-70, 1971.

[11] PERKO, LAWRENCE. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, Texts in Applied Mathematics 7, pp. 1-490, 2001.

[12] SCHECTER, S. *The Saddle-Node Separatrix-loop Bifurcation*, USA: Journal of Mathetmatics Analisys vol 18, pp. 1142-1156, 1987.

[13] SCHECTER, S. *Simultaneous Equilibrium and Heteroclinic Bifurcation of Planar Vector Fields via the Melnikov Itegral*, USA: Journal of Mathetmatics Analisys vol 18, pp. 79-99, 1990.

[14] SOTOMAYOR, J. *Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds*, Publications Mathematiques Institut des Hautes Etudes Scientifiques , pp. 5-46, 1974.

[15] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 1979.

[16] VOLPERT, A. I; Volpert, V. A; Volpert V. A *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Translations of mathematical Monographs, vol 140 USA: AMS, 2000.