

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Juan Antonio Pacheco Cruz

Espaços de Moduli de complexos quadráticos e de suas superfícies singulares

Juiz de Fora

2015

Juan Antonio Pacheco Cruz

Espaços de Moduli de complexos quadráticos e de suas superfícies singulares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pacheco Cruz, Juan Antonio.

Espaços de Moduli de complexos quadráticos e de suas superfícies
singulares / Juan Antonio Pacheco Cruz. – 2015.

72 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Complexos de retas quadráticos. 2. Símbolos de Segre. 3. Superfícies
singulares. 4. Espaços de Moduli. I. Ribeiro, Flaviana, orient. II. Título.

Juan Antonio Pacheco Cruz

Espaços de Moduli de complexos quadráticos e de suas superfícies singulares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro
(Orientadora)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Dan Avritzer
Universidade Federal de Minas Gerais

Professora Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Universidade Federal de Juiz de Fora

RESUMO

Um complexo de retas quadrático, ou simplesmente um complexo quadrático, é um conjunto de retas do espaço projetivo \mathbb{P}^n ($n = 3$, no nosso caso) que satisfazem uma equação quadrática. Um complexo quadrático também pode ser considerado como um feixe de quádricas e portanto tem um símbolo de Segre bem definido. Sabe-se que as retas de um dado complexo, passando por um ponto $p \in \mathbb{P}^3$, formam em geral um cone quadrático. Os pontos nos quais esses cones são a união de dois planos formam uma superfície em \mathbb{P}^3 , chamada Superfície Singular do complexo. O objetivo desse trabalho é, fixado um símbolo de Segre, construir o espaço de Moduli dos complexos quadráticos, o espaço de Moduli das superfícies singulares desses complexos e então estudar a relação entre esse espaços.

Palavras-chave: Complexo de retas quadrático, símbolos de Segre, Superfícies Singulares, espaços de Moduli.

ABSTRACT

A quadratic line complex, or a quadratic complex, is by definition a set of lines in a projective space \mathbb{P}^n ($n = 3$, in our case) which satisfy a given quadratic equation. A quadratic complex can also be considered as a pencil of quadrics. Hence, it has a well defined Segre symbol. It is a classical fact that lines of a given complex through any point $p \in \mathbb{P}^3$ form in general a quadratic cone. The points such that these cones break up into two planes form a surface, the Singular Surface of the complex. The objective of this work is, for a fixed Segre symbol, to construct the Moduli space of quadratic complex, the Moduli space of corresponding singular surfaces and to study the relation between them.

Key-words: Quadratic line complex, Segre symbols, Singular Surfaces, Moduli spaces.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	QUÁDRICAS EM \mathbb{P}^n	9
2.1	Matriz associada a uma quádrlica	9
2.2	Mudança de coordenadas	9
2.3	Forma canônica de uma quádrlica	10
2.4	Espaço tangente de uma quádrlica	10
2.5	Quádrlicas singulares	11
3	GRASSMANNIANA DE RETAS	13
3.1	Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^n	13
3.2	Quádrlica de Plücker	15
4	SÍMBOLOS DE SEGRE	20
4.1	Discriminante de um feixe	20
4.2	Símbolo de Segre de um feixe	21
4.3	Forma normal de um feixe	22
4.4	Relação entre complexos de retas quadráticos e feixes de quádrlicas . . .	23
4.5	Relação entre os símbolos de Segre e as quádrlicas singulares de um feixe	24
5	COMPLEXOS QUADRÁTICOS SEMI-ESTÁVEIS	28
6	ESPAÇOS DE MODULI DE COMPLEXOS QUÁDRÁTICOS	35
6.1	Quocientes categóricos	35
6.2	Espaço de Moduli dos complexos quadráticos	37
7	SUPERFÍCIES SINGULARES	45
8	QUÁRTICAS SEMI-ESTAVEIS EM \mathbb{P}^3	52
9	RELAÇÃO ENTRE $\mathcal{M}(\sigma)$ E $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$	57
9.1	Isomorfismo entre $PSL(4)$ e $PSO(G)$	57
9.2	Relação entre $\mathcal{M}(\sigma)$ e $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$	63
9.3	Algumas superfícies singulares	64
	REFERÊNCIAS	69

APÊNDICE A – AÇÃO DE GRUPOS	70
---------------------------------------	----

1 INTRODUÇÃO

Nosso objetivo principal é construir os espaços de Moduli de um complexo de retas quadrático, com símbolo de Segre σ fixo, e o Moduli das suas respectivas superfícies singulares, como em [1]. Todos os espaços de Moduli estudados nesse trabalho serão obtidos por meio de quocientes categóricos. Para isto, precisaremos estudar as ações dos grupos algébricos $SO(G)$ e $SL(4)$ nos complexos de retas quadráticos e nas superfícies quárticas, respectivamente.

Posteriormente encontraremos uma relação entre os espaços de moduli dos complexos de retas quadráticos, $\mathcal{M}(\sigma)$, e das suas superfícies singulares associadas, $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$.

No **Capítulo 2** apresentaremos algumas definições fundamentais sobre quádricas em \mathbb{P}^n , tais como a relação entre as matrizes simétricas e as quádricas, mudança de coordenadas, quádricas singulares, espaços tangentes, posto de uma quádrica e as coordenadas de Klein.

No **Capítulo 3** faremos o estudo da Grassmanniana de retas de \mathbb{P}^n , em especial, a quádrica de Plücker, e de seus subespaços.

No **Capítulo 4** faremos o estudo dos complexos de retas quadráticos, ou simplesmente chamados complexos quadráticos, que é a interseção completa de uma quádrica F em \mathbb{P}^5 com a quádrica de Plücker $G = Gr(1, \mathbb{P}^3)$. Os complexos quadráticos podem ser considerados como feixes de quádricas $\lambda F + \mu G$. Assim, associamos a cada complexo quadrático, $X = F \cap G$, um símbolo de Segre $\sigma(X)$.

No **Capítulo 5** mostraremos que o conjunto dos complexos quadráticos de \mathbb{P}^5 é uma variedade projetiva irredutível, denotada por LC , de dimensão 19. Veremos que o grupo $SO(G)$ dos automorfismos de \mathbb{P}^5 que fixam G , age naturalmente em LC . Caracterizaremos os complexos semi-estáveis por esta ação e veremos que a semi-estabilidade depende do número de parêntese do símbolo de Segre associado ao complexo.

No **Capítulo 6** descreveremos os complexos quadráticos com símbolo de Segre σ e a variedade quasi-projetiva $R(\sigma)$ que os parametriza. Finalmente, construiremos o espaço de Moduli $\mathcal{M}(\sigma)$ destes complexos. Veremos que a dimensão de $\mathcal{M}(\sigma)$ depende exclusivamente do número de parênteses de σ .

No **Capítulo 7** introduziremos a definição de superfície singular associado a um complexo quadrático X , denotada $S(X)$, que é uma quártica de \mathbb{P}^3 , não necessariamente irredutível.

No **Capítulo 8** descreveremos a coleção de todas as quárticas do tipo σ , denotado por Z_σ . Uma das propriedades interessantes de Z_σ é que ela possui estrutura de variedade quasi-projetiva além de ser $SL(4)$ -invariante. Veremos que a semi-estabilidade das superfícies quárticas depende só do tipo de singularidade das mesmas e o espaço de Moduli das quárticas é a variedade quociente de $Z_\sigma/SL(4)$.

No **Capítulo 9** mostraremos que existe um isomorfismo entre os grupos $PSO(6)$ e $PSL(4)$ e uma aplicação $\pi : R(\sigma) \rightarrow Z(\sigma)$ que nos dá uma relação entre os espaços de Moduli $\mathcal{M}(\sigma)$ e $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$. Finalizamos o capítulo escolhendo alguns símbolos de Segre σ e calculando as superfícies singulares do tipo σ .

2 QUÁDRICAS EM \mathbb{P}^n

Definição 2.1. Uma **quádrlica** em \mathbb{P}^n é uma **variedade** projetiva dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2 em $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$.

Frequentemente identificaremos uma quádrlica em \mathbb{P}^n com o polinômio homogêneo de grau 2 que a define, a menos de multiplicação por uma constante não nula.

2.1 Matriz associada a uma quádrlica

Uma quádrlica F em \mathbb{P}^n induz uma forma bilinear simétrica em \mathbb{C}^{n+1} dada por

$$B(X, Y) = \frac{1}{2}(F(X + Y) - F(X) - F(Y)).$$

Dada uma base $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{C}^{n+1} , associamos a F uma matriz simétrica dada por

$$A = \begin{pmatrix} B(v_0, v_0) & B(v_0, v_1) & \dots & B(v_0, v_n) \\ B(v_1, v_0) & B(v_1, v_1) & \dots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_0) & \dots & \dots & B(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Definição 2.2. A matriz A definida anteriormente é chamada **matriz associada à quádrlica** F na base $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Fixada uma base $\{v_0, \dots, v_n\}$ de \mathbb{C}^{n+1} , e denotando por $X = (X_0, \dots, X_n)^t$ o vetor de coordenadas de um ponto de \mathbb{C}^{n+1} nessa base, podemos escrever a quádrlica F como

$$F(X_0, \dots, X_n) = X^t A X = \sum B(v_i, v_j) X_i X_j \quad (2.1)$$

e dizer que F esta representada, nas **coordenadas** da base $\{v_0, \dots, v_n\}$, pelo polinômio dado em (2.1).

Observamos ainda que fixada uma base podemos fazer uma identificação entre o espaço projetivo das matrizes simétricas não nulas de ordem $n + 1$ e o conjunto de quádrlicas em \mathbb{P}^n . Quando não for especificado, a base usada será a base canônica de \mathbb{C}^{n+1} .

2.2 Mudança de coordenadas

Nesta seção veremos a relação entre duas matrizes associadas a uma mesma quádrlica.

Sejam F uma quádrlica em \mathbb{P}^n e A e B as matrizes associadas a F nas bases $\{v_0, \dots, v_n\}$ e $\{u_0, \dots, u_n\}$, respectivamente. Seja $P = [p_{ij}]$ a matriz de mudança da base $\{u_0, \dots, u_n\}$ para a base $\{v_0, \dots, v_n\}$, isto é,

$$v_j = p_{0j}u_0 + \dots + p_{nj}u_n, \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n.$$

Então, P é não singular e $A = P^tBP$. Logo, o posto de A é igual ao posto de B e portanto podemos definir o posto de uma quádrlica F .

Definição 2.3. O posto de uma quádrlica F é o posto da matriz A associada à F em alguma base de \mathbb{C}^{n+1} .

Observação 2.1. Com frequência, usaremos a mesma letra para denotar a quádrlica em \mathbb{P}^n , o polinômio que a define e a matriz que a representa em alguma base fixada.

Definição 2.4. Dizemos que uma quádrlica F em \mathbb{P}^n é **suave** se seu posto é igual a $n + 1$.

2.3 Forma canônica de uma quádrlica

Teorema 2.1. Dada uma quádrlica F em \mathbb{P}^n de posto r , existe uma base de \mathbb{C}^{n+1} tal que a matriz associada à F é da forma

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_r é a matriz identidade de ordem r .

Demonstração. Ver [10], p.184. ■

Definição 2.5. Dizemos que a matriz A é a **forma canônica** da quádrlica F .

É claro que, duas quádrlicas possuem o mesmo posto se e somente se elas possuem a mesma forma canônica.

Definição 2.6. Se F for uma quádrlica suave sua forma canônica é a matriz identidade de ordem $n + 1$. Nesse caso, dizemos F está representada nas **coordenadas de Klein**. Ou seja, $F = X^tX$.

2.4 Espaço tangente de uma quádrlica

Nesta seção faremos uso da teoria dos espaços tangentes de variedades algébricas.

Sejam $F = X^tAX = \sum a_{ij}X_iX_j$ uma quádrlica em \mathbb{P}^n e $p = (p_0 : \cdots : p_n)$ um ponto de F . O espaço tangente a F em p , denotado por T_pF , é por definição

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(p)(X_i - p_i) = 0.$$

Calculando as derivadas parciais de F em p e usando a notação de matrizes temos que

$$T_pF = \{X \in \mathbb{P}^n : (X - p)^tAp = 0\}.$$

Observe que os pontos singulares da quádrlica F , isto é, $p \in F$ tais que

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(p) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n,$$

são os pontos que satisfazem $Ap = 0$. Os pontos não singulares de F são tais que $Ap \neq 0$.

Podemos concluir então que:

- i) p é um ponto singular de F , se e somente se, $T_p F = \mathbb{P}^n$.
- ii) p é um ponto não singular de F , se e somente se, $\dim T_p F = n - 1$. Neste caso, o espaço tangente é um hiperplano.

2.5 Quádricas singulares

Usaremos o conceito de cone para dar uma descrição das quádrlicas singulares em \mathbb{P}^n .

Sejam $\Lambda \simeq \mathbb{P}^{n-r} \subset \mathbb{P}^n$ e $\Delta \simeq \mathbb{P}^{r-1}$ subespaços lineares complementares. Seja $X \subset \Delta$ uma variedade fechada qualquer. Definimos o cone $\overline{X, \Lambda}$ sobre a diretriz X com vértice em Λ

$$\overline{X, \Lambda} = \bigcup_{q \in X} \overline{q\Lambda},$$

onde $\overline{q\Lambda}$ é o subespaço linear gerado por q e Λ .

Para classificar as quádrlicas singulares, note que uma quádrlica F em \mathbb{P}^n de posto $r < n + 1$, pode ser escrita na forma

$$F(X_0, \dots, X_n) = X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2, \quad (2.2)$$

em alguma base de \mathbb{C}^{n+1} .

Logo, F é um cone cujo vertice é o subespaço linear $\Lambda \simeq \mathbb{P}^{n-r}$, definido por

$$\Lambda = \{(X_0 : \dots : X_n) \in \mathbb{P}^n : X_0 = \dots = X_{r-1} = 0\},$$

sobre a diretriz $\overline{F}(X_0, \dots, X_{r-1}) := X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2 = 0$ que é uma quádrlica suave em \mathbb{P}^{r-1} .

Definição 2.7. Uma quádrlica singular F , como em (2.2), é chamada um d -**cone**, onde $d = n - r$ é a dimensão do vértice Λ .

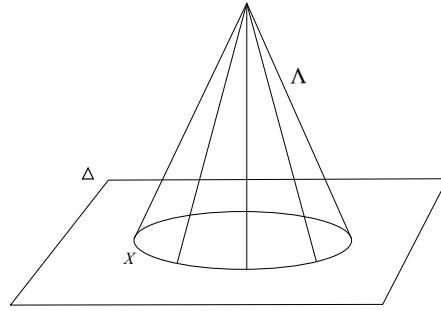


Figura 1 – cone

3 GRASSMANNIANA DE RETAS

Um dos objetivos deste trabalho é construir o espaço de Moduli de complexos de retas quadrático em \mathbb{P}^5 . Como veremos mais adiante, um complexo de retas em \mathbb{P}^5 é a interseção da Grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 com uma hipersuperfície. Por isso, nesse capítulo apresentaremos a Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^n e, em particular, a quádrlica de Plücker que é a Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3 .

3.1 Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^n

Seja \mathcal{R} a coleção de todas as retas de \mathbb{P}^n que pode ser identificada com o conjunto dos subespaços vetoriais de \mathbb{C}^{n+1} de dimensão 2. Veremos a seguir que \mathcal{R} tem estrutura de variedade quasi-projetiva.

Sejam L um elemento de \mathcal{R} e $\{w_0, w_1\}$ uma base de L . Se $w_i := (a_{i0}, \dots, a_{in})$, para $i = 0, 1$, definimos

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Para cada par $\sigma := (i_0, i_1)$ que satisfaz $0 \leq i_0 < i_1 \leq n$, seja p_σ o determinante da submatriz de A , de ordem 2×2 , obtida usando as colunas i_0, i_1 , isto é,

$$p_\sigma = \det \begin{pmatrix} a_{0i_0} & a_{0i_1} \\ a_{1i_0} & a_{1i_1} \end{pmatrix} = a_{0i_0}a_{1i_1} - a_{0i_1}a_{1i_0}.$$

Como os vetores w_0, w_1 são linearmente independentes, segue que $p_\sigma \neq 0$, para algum σ . Podemos então definir a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{R} &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ L &\mapsto \pi(L) = (\dots : p_\sigma : \dots) \end{aligned}$$

onde $N = \binom{n+1}{2} - 1$.

Veremos que π não depende da escolha da base de L , seja $\{w'_0, w'_1\}$ outra base de L . Suponhamos $w'_i := (a'_{i0}, \dots, a'_{in})$, para $i = 0, 1$, e

$$p'_\sigma = \det \begin{pmatrix} a'_{0i_0} & a'_{0i_1} \\ a'_{1i_0} & a'_{1i_1} \end{pmatrix}.$$

Então $p_\sigma = c p'_\sigma$, onde c é o determinante da matriz de mudança da base $\{w'_0, w'_1\}$ para a base $\{w_0, w_1\}$ e $(\dots : p_\sigma : \dots) = (\dots : p'_\sigma : \dots)$. Logo $\pi(L)$ não depende da escolha da base de L e a função π está bem definida.

Afirmamos que π é injetora e que sua imagem é o subconjunto fechado de \mathbb{P}^N dado pelas equações

$$\sum_{\lambda=0}^2 (-1)^\lambda p_{i_0 j_\lambda} p_{j_0 \widehat{j_\lambda} j_2} = p_{i_0 j_0} p_{j_1 j_2} - p_{i_0 j_1} p_{j_0 j_2} + p_{i_0 j_2} p_{j_0 j_1} = 0,$$

onde $0 \leq i_0, j_0, j_1, j_2 \leq n$ e o símbolo $\widehat{j_\lambda}$ significa que j_λ foi removido.

No aberto $U_{ij} \subset \mathbb{P}^N$, com $0 \leq i < j \leq n$, definido por

$$U_{ij} = \{(\cdots : p_\sigma : \cdots) : p_\sigma \neq 0 \text{ onde } \sigma = (i, j)\},$$

podemos escolher uma base de modo a representar L pela seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ 0 & 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente cada matriz como a anterior corresponde a um único elemento de U_{ij} . Logo, existe uma bijeção entre $\mathbb{C}^{2(n-1)}$ e $U_{ij} \cap \pi(\mathcal{R})$ donde concluimos que $Gr(1, \mathbb{P}^n)$ é uma variedade fechada de dimensão $2(n-1)$.

Definição 3.1. A função π é chamada **mergulho de Plücker**. A variedade $\pi(\mathcal{R}) \subset \mathbb{P}^N$ é chamada **Grassmaniana de retas** de \mathbb{P}^n e será denotada por $Gr(1, \mathbb{P}^n)$. As coordenadas de $\pi(L) = (\cdots : p_\sigma : \cdots)$ são chamadas **coordenadas de Plücker** de L . Frequentemente identificaremos o conjunto \mathcal{R} com $Gr(1, \mathbb{P}^n)$.

Usando produto exterior, podemos dar uma outra versão do mergulho de Plücker.

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão $n+1$. Uma base $\{v_0, \dots, v_n\}$ de V induz uma base de $\wedge^2 V$ denotada por

$$\{v_i \wedge v_j : 0 \leq i < j \leq n\}.$$

Logo a dimensão de $\wedge^2 V$ é $N+1 = \binom{n+1}{2}$.

Dado $w \in \wedge^2 V$, existem únicos $(p_{ij}) \in \mathbb{C}^{N+1}$, chamadas coordenadas de Plücker do vetor w , tais que

$$w = \sum_{0 \leq i < j \leq n} p_{ij} v_i \wedge v_j.$$

Definição 3.2. Os vetores da forma $u \wedge v$, onde $u, v \in V$, são chamados vetores decomponíveis de $\wedge^2 V$.

Observação 3.1. É um resultado da Álgebra Exterior que um vetor $w \in \wedge^2 V$ é decomponível, se e somente se, $w \wedge w = 0$.

Seja $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^n$ a projetivização do espaço V e seja $L \in Gr(1, \mathbb{P}(V))$. Dadas duas bases $\{v_1, v_2\}$ e $\{u_1, u_2\}$ de L , é fácil ver que $v_1 \wedge v_2 = \lambda u_1 \wedge u_2$, onde λ é o determinante da matriz de mudança da base $\{u_1, u_2\}$ para a base $\{v_1, v_2\}$. Logo, a cada L podemos fazer corresponder um elemento $[v_1 \wedge v_2] \in \mathbb{P}(\wedge^2 V) \simeq \mathbb{P}^N$, onde $[v_1 \wedge v_2]$ representa a classe do vetor $v_1 \wedge v_2$ no espaço projetivo $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$.

Observação 3.2. Identificaremos $Gr(1, \mathbb{P}(V))$ com o conjunto de vetores decomponíveis de $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$.

Então, o mergulho de Plücker é dado por

$$\begin{aligned} \pi : \quad Gr(1, \mathbb{P}(V)) &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_0, \dots, x_n) \wedge (y_0, \dots, y_n) &\mapsto (\dots, x_i y_j - x_j y_i, \dots) \end{aligned}$$

3.2 Quádrica de Plücker

Para o caso $n = 3$, o mergulho de Plücker é dado por

$$\begin{aligned} \pi : \quad Gr(1, \mathbb{P}^3) &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) \wedge (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}) &\mapsto (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \end{aligned}$$

onde $p_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$, para $1 \leq i < j \leq 4$, e $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ é a hipersuperfície quádrlica em \mathbb{P}^5 dada pela equação

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

É fácil ver que $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ é uma quádrlica suave de dimensão 4.

A quádrlica $G = Gr(1, \mathbb{P}^3)$ em \mathbb{P}^5 é chamada **quádrica de Plücker**.

Definição 3.3. Dizemos que uma quádrlica suave em \mathbb{P}^5 está representada nas **coordenadas de Plücker** se sua matriz for a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

em alguma base de \mathbb{C}^6 .

Subespaços lineares de $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ de dimensão 1 e 2 serão fundamentais para definir as superfícies singulares associadas aos complexos de retas quadráticos. Por isso, faremos a seguir a descrição destes subespaços.

Primeiro observe que, a cada $x \in Gr(1, \mathbb{P}^3)$ corresponde uma única reta de \mathbb{P}^3 que será denotada por l_x .

Lema 3.1. *Sejam $x, y \in Gr(1, \mathbb{P}^3)$. Então, $l_x \cap l_y \neq \emptyset$, se e somente se, $\overline{xy} \subset Gr(1, \mathbb{P}^3)$.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{P}^3$ tais que $x = v_1 \wedge v_2$ e $y = u_1 \wedge u_2$, ou seja, tais que $\{v_1, v_2\}$ geram l_x e $\{u_1, u_2\}$ geram l_y . Suponhamos $l_x \cap l_y = \emptyset$, então $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ geram \mathbb{P}^3 . Mostraremos que \overline{xy} não está contida em $Gr(1, \mathbb{P}^3)$. De fato, w pertence a reta \overline{xy} , se existirem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tais que

$$w = \lambda_1 v_1 \wedge v_2 + \lambda_2 u_1 \wedge u_2.$$

Então $w \in Gr(1, \mathbb{P}^3)$ se

$$\begin{aligned} 0 = w \wedge w &= (\lambda_1 v_1 \wedge v_2 + \lambda_2 u_1 \wedge u_2) \wedge (\lambda_1 v_1 \wedge v_2 + \lambda_2 u_1 \wedge u_2) \\ &= 2\lambda_1 \lambda_2 (v_1 \wedge v_2 \wedge u_1 \wedge u_2), \end{aligned}$$

ou seja, se $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Portanto, $\overline{xy} \cap Gr(1, \mathbb{P}^3) = \{x, y\}$.

Reciprocamente, se $l_x \cap l_y = \{p\}$, existem $v_1, v_2 \in \mathbb{P}^3$ tais que $x = p \wedge v_1$ e $y = p \wedge v_2$. Dado $w \in \overline{xy}$, podemos escrever

$$w = \lambda_1 (p \wedge v_1) + \lambda_2 (p \wedge v_2)$$

e demonstrar que w é decomponível observando que

$$\begin{aligned} w \wedge w &= [\lambda_1 p \wedge v_1 + \lambda_2 p \wedge v_2] \wedge [\lambda_1 p \wedge v_1 + \lambda_2 p \wedge v_2] \\ &= \lambda_1^2 (p \wedge v_1) \wedge (p \wedge v_1) + 2\lambda_1 \lambda_2 (p \wedge v_1) \wedge (p \wedge v_2) + \lambda_2^2 (p \wedge v_2) \wedge (p \wedge v_2) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $w \in Gr(1, \mathbb{P}^3)$. ■

Lema 3.2. *Dados um ponto $p \in \mathbb{P}^3$ e um plano $h \subset \mathbb{P}^3$, os conjuntos*

$$\alpha(p) = \{x \in Gr(1, \mathbb{P}^3) : p \in l_x\} \quad e \quad \beta(h) = \{x \in Gr(1, \mathbb{P}^3) : l_x \subset h\}$$

são subespaços lineares de $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ de dimensão 2.

Demonstração. Seja $x \in \alpha(p)$. Então, x pode ser escrito da forma $p \wedge v$ para algum $v \in \mathbb{P}^3$. Seja $\{p, v_1, v_2, v_3\}$ uma base de \mathbb{C}^4 . Então, $p \wedge v_1, p \wedge v_2, p \wedge v_3 \in \alpha(p)$ o que implica que

$$\lambda_1 (p \wedge v_1) + \lambda_2 (p \wedge v_2) + \lambda_3 (p \wedge v_3) = p \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \in \alpha(p),$$

para todo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, não todos nulos. Logo, $\{p \wedge v_1, p \wedge v_2, p \wedge v_3\}$ é um conjunto de geradores de $\alpha(p)$. Como os vetores $p \wedge v_1, p \wedge v_2$ e $p \wedge v_3$ são linearmente independentes temos que $\alpha(p)$ é um subespaço linear de $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ de dimensão 2.

Analogamente ao caso anterior, seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de geradores de h . Afirmamos que $\{v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3\}$ é um conjunto de geradores de $\beta(h)$. De fato, seja $x \in \beta(h)$. Existem $p, q \in h$ tais que $x = p \wedge q$. Logo,

$$\begin{aligned} x = p \wedge q &= \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_{1i} v_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{2j} v_j \right) \\ &= (\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{21} \lambda_{12}) v_1 \wedge v_2 - (\lambda_{11} \lambda_{23} - \lambda_{13} \lambda_{21}) v_1 \wedge v_3 + (\lambda_{12} \lambda_{23} - \lambda_{22} \lambda_{13}) v_2 \wedge v_3. \end{aligned}$$

Portanto $\beta(h)$ é um espaço linear de dimensão 2. ■

Logo, temos duas colecções de planos contidos em $Gr(1, \mathbb{P}^3)$. A saber,

$$\alpha = \{\alpha(p) : p \in \mathbb{P}^3\} \quad \text{e} \quad \beta = \{\beta(h) : h \text{ é um plano em } \mathbb{P}^3\}.$$

Os elementos de α (respectivamente β) são ditos α -planos (respectivamente β -planos).

Lema 3.3. *Os conjuntos α e β são tais que*

$$\alpha \cap \beta = \emptyset \quad \text{e} \quad \alpha \cup \beta = \{\gamma \subset Gr(1, \mathbb{P}^3) : \gamma \text{ é um plano}\}.$$

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{P}^3$ um ponto e $h \subset \mathbb{P}^3$ um plano. Existe uma reta de \mathbb{P}^3 que contém p e não está contida em h . Logo, $\alpha(p) \neq \beta(h)$ e, portanto, $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Para mostrar a outra afirmação, sejam γ um plano de $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ e $\{x, y, z\}$ um conjunto de geradores de γ . Pelo Lema 3.1, as retas l_x, l_y e l_z de \mathbb{P}^3 se intersectam duas a duas, isto é,

$$l_x \cap l_y = \{p\} \quad l_x \cap l_z = \{q\} \quad l_y \cap l_z = \{r\}.$$

Observe que se p, q, r são pontos distintos eles não são colineares pois, caso contrário, teríamos $x = y = z$, o que é absurdo. Agora temos duas possibilidades:

- i) Se p, q e r são pontos distintos, então estes três pontos geram um plano h . Como $l_x = \overline{pq}$, $l_y = \overline{pr}$ e $l_z = \overline{rq}$ temos que l_x, l_y e l_z estão contidas em h . Portanto, $x, y, z \in \beta(h)$, ou seja, $\beta(h) = \gamma$.
- ii) Se $p = q = r$, então $\{p\} = l_x \cap l_y \cap l_z$, ou seja, $x, y, z \in \alpha(p)$. Como $\alpha(p)$ é um plano de \mathbb{P}^3 , temos que $\alpha(p) = \gamma$.

■

Lema 3.4. *Dados p_1 e p_2 dois pontos distintos de \mathbb{P}^3 , então $\alpha(p_1) \cap \alpha(p_2) = \{x\}$, onde $l_x = \overline{p_1 p_2}$.*

Demonstração. Segue da definição de α -plano. ■

Como consequência disto, temos uma aplicação bijetora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3 &\rightarrow \alpha \\ p &\mapsto \alpha(p) \end{aligned}$$

Lema 3.5. *Dados h_1 e h_2 dois planos distintos de \mathbb{P}^3 , então $\beta(h_1) \cap \beta(h_2) = \{y\}$, onde $l_y = h_1 \cap h_2$.*

Demonstração. Segue da definição de β -plano. ■

Como consequência disto, temos uma aplicação bijetora

$$\begin{aligned} \{\text{planos de } \mathbb{P}^3\} &\rightarrow \beta \\ h &\mapsto \beta(h) \end{aligned}$$

Lema 3.6. *Sejam $p \in \mathbb{P}^3$ um ponto e $h \subset \mathbb{P}^3$ um plano.*

- i) *Se $p \in h$, então $\alpha(p) \cap \beta(h)$ é uma reta contida em $Gr(1, \mathbb{P}^3)$.*
- ii) *Se $p \notin h$, então $\alpha(p) \cap \beta(h) = \emptyset$.*

Demonstração.

- i) Suponhamos $p \in h$. Podemos encontrar vetores v_1 e v_2 tais que $\{p, v_1, v_2\}$ é uma base de h . Como visto na demonstração do Lema 3.2, $\{p \wedge v_1, p \wedge v_2, v_1 \wedge v_2\}$ gera $\beta(h)$, embora apenas $p \wedge v_1$ e $p \wedge v_2$ pertençam $\alpha(p)$. De fato, se $v_1 \wedge v_2$ estivesse em $\alpha(p)$, o plano $\beta(h)$ seria igual a $\alpha(p)$ o que é absurdo. Então, $\alpha(p) \cap \beta(h)$ é gerado pelo conjunto $\{p \wedge v_1, p \wedge v_2\}$, donde concluímos que $\alpha(p) \cap \beta(h)$ é uma reta.
- ii) Suponhamos $p \notin h$. Seja $x \in \alpha(p)$, então $p \in l_x \not\subset h$ e $x \notin \beta(h)$. Logo, $\alpha(p)$ e $\beta(h)$ são disjuntos. ■

Lema 3.7. *Seja L uma reta contida em $Gr(1, \mathbb{P}^3)$. Então, existem únicos $p \in \mathbb{P}^3$ e h plano de \mathbb{P}^3 tais que*

$$L = \alpha(p) \cap \beta(h).$$

Demonstração. Sejam x e y geradores da reta L . Pelo Lema 3.1, $l_x \cap l_y \neq \emptyset$. Sejam $p \in l_x \cap l_y$ e h o plano em \mathbb{P}^3 gerado pelas retas l_x e l_y . Logo, $x, y \in \alpha(p) \cap \beta(h)$. Pelo Lema 3.6, temos que $\alpha(p) \cap \beta(h)$ é uma reta. Então, $\alpha(p) \cap \beta(h) = \overline{xy} = L$. Para mostrar a unicidade, observe que $\alpha(p) \cap \beta(h) = \alpha(p') \cap \beta(h')$ implica

$$\alpha(p) \cap \beta(h) = \alpha(p') \cap \beta(h') \cap \alpha(p).$$

Mas se $p \neq p'$, pelo Lema 3.4, $\alpha(p') \cap \alpha(p)$ consiste de um único ponto, absurdo pois $\alpha(p) \cap \beta(h)$ é uma reta (Lema 3.6). ■

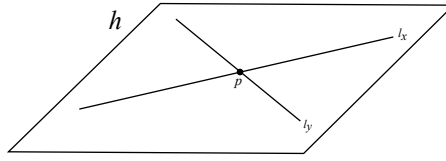


Figura 2 – plano

4 SÍMBOLOS DE SEGRE

Esse capítulo e os que seguem foram baseados em [1]. Vimos anteriormente que uma quádrlica em \mathbb{P}^n pode ser representada, após uma mudança de coordenadas, por uma matriz diagonal (forma canônica) cujas entradas são apenas 1 ou 0, portanto, uma quádrlica se classifica pelo posto. Quando se estuda um feixe de quádrlicas, e as matrizes dos seus geradores, não existe um resultado tão simples e, em geral, matrizes na forma diagonal não são suficientes para classificar os feixes. No entanto, é possível obter uma forma suficientemente simples, chamada forma normal, que pode ser lida a partir de um invariante do feixe chamado Símbolo de Segre.

Definição 4.1. Sejam F e G duas quádrlicas distintas em \mathbb{P}^n . O conjunto

$$\mathcal{F} = \{\lambda F + \mu G : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

é chamado **feixe de quádrlicas** gerado pelas quádrlicas F e G . Frequentemente denotaremos \mathcal{F} por $\lambda F + \mu G$.

O conjunto das quádrlicas em \mathbb{P}^n é parametrizado pelo espaço projetivo \mathbb{P}^N , onde $N + 1 = \binom{n+2}{2}$. Pela Definição 4.1, um feixe de quádrlicas em \mathbb{P}^n pode ser identificado como uma reta em \mathbb{P}^N . Logo, o conjunto de feixes de quádrlicas em \mathbb{P}^n , é identificado com a Grassmanniana de retas de \mathbb{P}^N .

4.1 Discriminante de um feixe

Definição 4.2. O **discriminante** do feixe $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$, com respeito aos geradores F e G , é definido como a uma forma binária de grau $n + 1$ dada por

$$\Delta(\lambda, \mu) = \det(\lambda F + \mu G).$$

Sejam F' e G' outros geradores de \mathcal{F} com discriminante Δ' . Veremos qual é a relação entre os discriminantes Δ e Δ' . Considerando os feixes como espaços vetoriais de dimensão 2, temos a matriz de mudança da base $\{F, G\}$ para a base $\{F', G'\}$ da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

onde $F' = a_{11}F + a_{21}G$ e $G' = a_{12}F + a_{22}G$. Então,

$$\Delta'(\lambda', \mu') = \det(\lambda' F' + \mu' G') = \det((\lambda' a_{11} + \mu' a_{12})F + (\lambda' a_{21} + \mu' a_{22})G)$$

$$\Delta'(\lambda', \mu') = \Delta(\lambda' a_{11} + \mu' a_{12}, \lambda' a_{21} + \mu' a_{22}) = \Delta(A(\lambda', \mu'))$$

$$\Delta' = \Delta \circ A.$$

Notemos que o autormorfismo de \mathbb{P}^1 definido por A , leva raízes de Δ' em raízes de Δ . Em particular, o automorfismo A preserva as multiplicidades das raízes. Logo, temos que o discriminante Δ de \mathcal{F} depende das escolhas das matrizes de F e G , mas as raízes de Δ são unicamente determinadas a menos de isomorfismo de \mathbb{P}^1 . Em particular, as multiplicidades das raízes são unicamente determinadas.

4.2 Símbolo de Segre de um feixe

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [7] e [8].

Seja $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$ um feixe em \mathbb{P}^n e Δ o discriminante com respeito aos geradores F e G . Suponha que Δ é não nulo e seja $(\lambda_0 : \mu_0)$ uma raiz de Δ . O posto da matriz $\lambda_0 F + \mu_0 G$ é igual a $n - d$, para algum $d \in \{0, \dots, n - 1\}$. Além disso, os determinantes das submatrizes de ordem $n + 1 - i$, com $i = 0, \dots, d$ da matriz $\lambda_0 F + \mu_0 G$ são todos nulos. Seja l_i a menor multiplicidade da raiz $(\lambda_0 : \mu_0)$ nos subdeterminantes de ordem $n + 1 - i$, para $i = 0, 1, \dots, d$.

É possível mostrar que $l_i > l_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, \dots, d$, onde l_{d+1} é igual a 0, por convenção. Então os números $e_i := l_i - l_{i+1}$ são positivos e a forma binária $\Delta(\lambda, \mu)$ pode ser fatorada como produto de fatores lineares,

$$\Delta(\lambda, \mu) = (\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_0} \dots (\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_d} \Delta_1(\lambda, \mu)$$

com $\Delta_1(\lambda_0, \mu_0) \neq 0$.

Os números e_0, \dots, e_d são chamados **números característicos** associados à raiz $(\lambda_0 : \mu_0)$.

Observação 4.1. Os números característicos estão ordenados da seguinte maneira $e_0 \geq e_1 \geq \dots \geq e_d \geq e_{d+1} = 0$. E a soma deles $e_0 + e_1 + \dots + e_d = l_0$ é a multiplicidade da raiz $(\lambda_0 : \mu_0)$.

Definição 4.3. Sejam $(\lambda_1 : \mu_1), \dots, (\lambda_r : \mu_r)$ as raízes de Δ e d_i o posto de $\lambda_i F + \mu_i G$, $1 \leq i \leq r$, ordenados tais que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$. Sejam $e_0^i, e_1^i, \dots, e_{d_i}^i$ os números característicos associados à raiz $(\lambda_i : \mu_i)$. O arranjo

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma = [(e_0^1, \dots, e_{d_1}^1), \dots, (e_0^r, \dots, e_{d_r}^r)]$$

é chamado de **símbolo de Segre** do feixe $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$. Quando $d_i = 1$, omitiremos os parênteses.

Agora, introduziremos a relação entre dois feixes de quádricas que preservam os símbolos da Segre.

Definição 4.4. Sejam $\mathcal{F}_1 = \lambda F_1 + \mu G_1$ e $\mathcal{F}_2 = \lambda F_2 + \mu G_2$ dois feixes de quádricas em \mathbb{P}^n . Dizemos que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são **projetivamente equivalentes** se existem constantes

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ e uma matriz não singular P de ordem $n + 1$, tais que

$$F_2 = P^t(\lambda_1 F_1 + \mu_1 G_1)P \quad \text{e} \quad G_2 = P^t(\lambda_2 F_1 + \mu_2 G_1)P.$$

Teorema 4.1. *Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 dois feixes de quádricas em \mathbb{P}^n , cujos discriminantes são não nulos. Sejam $(\lambda_i^1 : \mu_i^1)$ e $(\lambda_i^2 : \mu_i^2)$ as raízes dos discriminantes de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , respectivamente. Então \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são projetivamente equivalentes, se e somente se, $\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$ e existe um automorfismo de \mathbb{P}^1 que leva $(\lambda_i^1 : \mu_i^1)$ em $(\lambda_i^2 : \mu_i^2)$, para todo i , onde os parênteses correspondentes a $(\lambda_i^1 : \mu_i^1)$ e $(\lambda_i^2 : \mu_i^2)$ são do mesmo tipo.*

Demonstração. Ver [14], Teorema 3.26, p.36 ou [7], p.278. ■

4.3 Forma normal de um feixe

Veremos nesta seção como construir um feixe cujo símbolo de Segre é um dado arranjo σ .

Seja $\sigma = [(e_0^1, \dots, e_{d_1}^1), \dots, (e_0^r, \dots, e_{d_r}^r)]$ um arranjo satisfazendo as seguintes condições:

1. $e_j^i > 0$, para todo $i = 1, \dots, r$ e $j = 0, 1, \dots, d_i$
2. $e_0^i \geq \dots \geq e_{d_i}^i$ para todo $i = 1, \dots, r$
3. $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$.

Dados $(\lambda_1 : \mu_1), \dots, (\lambda_r : \mu_r)$ pontos distintos em \mathbb{P}^1 , com $\lambda_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, r$, sejam F_{ij} e G_{ij} , as matrizes de ordem $e_j^i \times e_j^i$, dadas por

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\mu_i}{\lambda_i} \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 & \ddots & 0 \\ \frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere as matrizes de ordem $e_i = e_0^i + \dots + e_{d_i}^i$, cujos blocos são os F_{ij} e os G_{ij}

$$F_i = \begin{pmatrix} F_{i0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_{i1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{id_i} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_i = \begin{pmatrix} G_{i0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & G_{i1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G_{id_i} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sejam F e G as matrizes de ordem $n + 1 = e_1 + \dots + e_r$, dadas por

$$F = \text{diag}(F_1, \dots, F_r) \quad \text{e} \quad G = \text{diag}(G_1, \dots, G_r). \quad (4.1)$$

É claro que F e G são diferentes, então podemos definir o feixe $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$.

Definição 4.5. Um feixe \mathcal{F} gerado por quádricas F e G na forma 4.1 é chamado um feixe na **forma normal**.

Teorema 4.2. O símbolo de Segre do feixe \mathcal{F} definido pelas quádricas dadas em (4.1) é $\sigma = [(e_0^1, \dots, e_{d_1}^1), \dots, (e_0^r, \dots, e_{d_r}^r)]$. Além disso, $(\lambda_i : \mu_i)$ é raiz de multiplicidade e_i do discriminante $\Delta(\lambda, \mu) = \det(\lambda F + \mu G)$, para todo $i = 1, \dots, r$.

Demonstração. Ver [7], p.278. ■

Observação 4.2. O ponto $(\lambda_i : \mu_i) \in \mathbb{P}^1$ é raiz do discriminante de $\lambda F - \mu G$, mas, por abuso de notação, dizemos que ele é raiz de $\lambda F + \mu G$.

Proposição 4.1. Um feixe $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$, onde G é uma quádrica suave, é projetivamente equivalente a um feixe na forma normal.

Demonstração. Seja $\sigma = [(e_0^1, \dots, e_{d_1}^1), \dots, (e_0^r, \dots, e_{d_r}^r)]$ o símbolo de Segre do feixe \mathcal{F} e sejam $(\lambda_1 : \mu_1), \dots, (\lambda_r : \mu_r)$ as raízes do discriminante $\Delta(\lambda, \mu) = \det(\lambda F + \mu G)$. Notemos que $\lambda_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, r$, pois G é uma quádrica suave. Seja $\mathcal{F}' = \lambda F' + \mu G'$, onde F' e G' são da forma 4.1. Usando o Teorema 4.2 temos que \mathcal{F} e \mathcal{F}' tem o mesmo símbolo de Segre. Usando o Teorema 4.1 concluímos o resultado. ■

4.4 Relação entre complexos de retas quadráticos e feixes de quádricas

No restante do trabalho, G denotará a quádrica de Plucker $G = Gr(1, \mathbb{P}^3)$.

Dada F uma quádrica em \mathbb{P}^5 , distinta de G , a interseção completa

$$X = X_F = F \cap G,$$

parametriza um conjunto de retas em \mathbb{P}^3 , que chamaremos **complexo de retas quadrático**, ou simplesmente **complexo quadrático**, definido por F .

Um complexo de retas quadrático $X = F \cap G$ determina um **feixe de quádricas** em \mathbb{P}^5 , dado por $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$. Reciprocamente, dado um feixe $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$, definiremos um complexo quadrático $X = F \cap G$. Observe que a definição de complexo X não depende da escolha das quádricas F e G no feixe \mathcal{F} , pois

$$X = F \cap G = \bigcap_{(\lambda:\mu) \in \mathbb{P}^1} Q(\lambda : \mu),$$

onde $Q(\lambda : \mu) = \lambda F + \mu G$.

Definição 4.6. O símbolo de Segre de um complexo quadrático é por definição o símbolo de Segre do feixe de quádricas associado.

As coordenadas de \mathbb{P}^5 podem ser escolhidas de modo que F e G são da forma (4.1). Chamaremos estas coordenadas de **coordenadas de Segre** do complexo quadrático $X = F \cap G$.

4.5 Relação entre os símbolos de Segre e as quádricas singulares de um feixe

Sejam $X = F \cap G$ um complexo quadrático em \mathbb{P}^5 e $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$ o seu feixe associado. Existe um número finito de quádricas singulares no feixe \mathcal{F} . A saber, as quádricas $Q(\lambda_i : \mu_i) = \lambda_i F + \mu_i G$, onde (λ_i, μ_i) é uma raiz do discriminante de \mathcal{F} , para $i = 1, \dots, r$. Observemos que as quádricas $Q(\lambda_i : \mu_i)$ são cones e que elas estão em bijeção com os parênteses do símbolo de Segre de \mathcal{F} .

Chamamos o cone $Q(\lambda_i : \mu_i)$, correspondente ao parêntese $(e_0^i, \dots, e_{d_i}^i)$, um d_i -cone

Os vértices de $Q(\lambda_i : \mu_i)$ formam um subespaço linear de dimensão d_i e sua diretriz é uma quádrica suave em um subespaço linear de dimensão $n - 1 - d_i$. Como $(\lambda_i : \mu_i)$ é uma raiz do discriminante Δ do complexo X de multiplicidade $e^i := e_0^i + \dots + e_{d_i}^i$, chamamos $Q(\lambda_i, \mu_i)$ de **d_i -cone de multiplicidade e^i** .

A seguinte tabela apresenta a dimensão dos vértices dos cones correspondente aos parênteses do símbolo de Segre e as interseções destes vértices com o complexo X .

Tabela 1

Parênteses	Dimensão do vértice	Vértices $\cap X$
1	0	\emptyset
2	0	1 ponto
3	0	1 ponto
4	0	1 ponto
(1 1)	1	2 pontos
(2 1)	1	1 ponto
(2 2)	1	1 ponto
(1 1 1)	2	cônica suave C
(2 1 1)	2	cônica C de posto 2

Caso 1: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (1).

Seja $(\lambda_0 : \mu_0)$ a raiz associada ao parênteses (1) para o feixe $Q(\lambda, \mu) = \lambda F + \mu G$ onde F e G estão na forma normal (4.1)

$$F = \begin{pmatrix} \widehat{F} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \widehat{G} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde \widehat{F} e \widehat{G} são matrizes não singulares de ordem 5. Logo,

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \widehat{F} + \mu_0 \widehat{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um zero-cone. Cujos vértices são $\{(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)\} \subset \mathbb{P}^5$. E portanto, a dimensão do vértice é zero. Além disso $X \cap \text{Vértice} = F \cap G \cap \{(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)\} = \emptyset$.

Caso 2: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (2).

Seja (λ_0, μ_0) a raiz associada ao parênteses (2) para o feixe $Q(\lambda, \mu) = \lambda F + \mu G$ onde F e G são da forma

$$F = \begin{pmatrix} \widehat{F} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \widehat{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde \widehat{F} e \widehat{G} são matrizes não singulares de ordem 4. Então,

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \widehat{F} + \mu_0 \widehat{G} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um zero-cone. Cujos vértices são $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^5$, daqui a dimensão do vértice é zero. Além disso $X \cap \text{Vértice} = F \cap G \cap \{(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)\} = \{(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)\}$.

Caso 3: Se o símbolo de Segre contém parênteses (3) ou (4).

Estes casos são análogos aos casos 1 e 2.

Caso 4: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (1 1).

Seja (λ_0, μ_0) a raiz associada ao parênteses (1 1) do feixe $Q(\lambda, \mu) = \lambda F + \mu G$, onde F e G são da forma

$$F = \begin{pmatrix} \widehat{F} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \widehat{G} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

\widehat{F} e \widehat{G} são matrizes não singulares de ordem 4. Logo,

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \widehat{F} + \mu_0 \widehat{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um 1-cone, cujo conjunto de vértices é a reta $L \subset \mathbb{P}^5$ gerada pelos pontos $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$. Então, a dimensão dos vértices é 1. Além disso $X \cap \text{Vértices} = F \cap G \cap L = \{(0 : 0 : 0 : 0 : -i : 1), (0 : 0 : 0 : 0 : i : 1)\}$ são dois pontos.

Caso 5: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (2 1).

Seja (λ_0, μ_0) a raiz associada ao parênteses (2 1) para o feixe $Q(\lambda, \mu) = \lambda F + \mu G$, onde

F e G são da forma

$$F = \begin{pmatrix} \widehat{F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \widehat{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde \widehat{F} e \widehat{G} são matrizes não singulares de ordem 3. Logo,

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \widehat{F} + \mu_0 \widehat{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um 1-cone, cujo conjunto de vértices é a reta $L \subset \mathbb{P}^5$ gerada pelos pontos $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$. Então, a dimensão dos vértices é 1. Nesse caso, $X \cap \text{Vértices} = F \cap G \cap L = \{(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)\}$.

Caso 6: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (2 2).

Este caso é análogo ao caso 5.

Caso 7: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (1 1 1).

Seja (λ_0, μ_0) a raiz associada ao parênteses (1 1 1) para o feixe $Q(\lambda, \mu) = \lambda F + \mu G$, onde F e G são da forma

$$F = \begin{pmatrix} \widehat{F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \widehat{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde \widehat{F} e \widehat{G} são matrizes não singulares de ordem 3. Então,

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \widehat{F} + \mu_0 \widehat{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um 2-cone, cujo conjunto de vértices é o plano $H \subset \mathbb{P}^5$ gerado pelos pontos $(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$. Logo, a dimensão dos vértices é 2. Nesse caso, $X \cap \text{Vértices} = F \cap G \cap H = \{(0 : 0 : 0 : r : s : t) \in \mathbb{P}^5 : r^2 + s^2 + t^2 = 0\}$ é uma cônica suave.

Caso 8: Se o símbolo de Segre contém o parênteses (2 1 1).

Seja (λ_0, μ_0) a raiz associada ao parênteses $(2 \ 1 \ 1)$ para o feixe $Q(\lambda, \mu) = \lambda F + \mu G$, onde F e G são da forma

$$F = \begin{pmatrix} \widehat{F} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{\lambda_0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \widehat{G} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde \widehat{F} e \widehat{G} são matrizes não singulares de ordem 2. Então,

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \widehat{F} + \mu_0 \widehat{G} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um 2-cone, cujo conjunto de vértices é o plano $H \subset \mathbb{P}^5$ gerado pelos pontos $(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ e a dimensão dos vértices é 2. Além disso, $X \cap \text{Vértices} = F \cap G \cap H = \{(0 : 0 : 0 : r : s : t) \in \mathbb{P}^5 : s^2 + t^2 = 0\}$ é uma cônica de posto 2.

5 COMPLEXOS QUADRÁTICOS SEMI-ESTÁVEIS

O objetivo deste capítulo é definir e determinar complexos quadráticos semi-estáveis em \mathbb{P}^5 .

Fixemos uma quádrlica suave em \mathbb{P}^5 , denotada por G , e considerada como a quádrlica de Plücker, $Gr(1, \mathbb{P}^3)$, que parametriza as retas de \mathbb{P}^3 .

Sabemos que o conjunto de quádrlicas em \mathbb{P}^5 é parametrizado pelo espaço projetivo \mathbb{P}^{20} . Então, identificando um complexo de retas quadrático, $X = F \cap G$, com um feixe de quádrlicas, temos que um complexo quádrático é uma reta em \mathbb{P}^{20} passando por G .

Lema 5.1. *O conjunto dos complexos de retas quadráticos de \mathbb{P}^5 ,*

$$LC = \{L \in Gr(1, \mathbb{P}^{20}) : G \in L\},$$

é um subconjunto fechado da Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^{20} .

Demonstração. Sejam (p_{ij}) as coordenadas de \mathbb{P}^{209} e

$$\begin{aligned} \pi : \quad Gr(1, \mathbb{P}^{20}) &\rightarrow \mathbb{P}^{209} \\ (x_0, \dots, x_{20}) \wedge (y_0, \dots, y_{20}) &\mapsto (\dots : x_i y_j - x_j y_i : \dots) \end{aligned}$$

o mergulho de Plücker.

Seja $(a_0 : \dots : a_{20})$ o ponto correspondente a G em \mathbb{P}^{20} . Afirmamos que

$$\pi(LC) = Z(a_k p_{ij} - a_j p_{ik} + a_i p_{jk}; 0 \leq i < j < k \leq 20).$$

De fato, para $L = (a_0, \dots, a_{20}) \wedge (x_0, \dots, x_{20}) \in LC$, temos que $\pi(L) = (p_{ij})$ onde $p_{ij} = a_i x_j - a_j x_i$, para todo $0 \leq i < j \leq 20$. Então,

$$a_k p_{ij} - a_j p_{ik} + a_i p_{jk} = a_k (a_i x_j - a_j x_i) - a_j (a_i x_k - a_k x_i) + a_i (a_j x_k - a_k x_j) = 0,$$

ou seja, $\pi(LC) \subset Z(a_k p_{ij} - a_j p_{ik} + a_i p_{jk}; 0 \leq i < j < k \leq 20)$.

Reciprocamente, dado $(p_{ij}) \in \mathbb{P}^{209}$ tal que

$$a_k p_{ij} - a_j p_{ik} + a_i p_{jk} = 0, \quad \forall 0 \leq i < j < k \leq 20,$$

seja $i \in \{0, \dots, 20\}$, tal $a_i \neq 0$. Então,

$$L = (a_0, \dots, a_{20}) \wedge (p_{0i}, \dots, p_{(i-1)i}, 0, p_{i(i+1)}, \dots, p_{i20}) \in LC$$

é tal que $\pi(L) = (p_{ij})$. ■

Definição 5.1. A variedade fechada $LC \subset \mathbb{P}^{209}$ é chamada espaço de parâmetros dos complexos quadráticos.

Definição 5.2. Dois complexos quadráticos X_1 e X_2 são ditos isomorfos se existe um automorfismo A de \mathbb{P}^5 tal que $X_2 = A(X_1)$ e que fixa a quádrlica G .

Seja $SO(G)$ o grupo das matrizes invertíveis de ordem 6 que fixam G , isto é,

$$SO(G) := \{g \in SL(6) : g^t G g = G\}.$$

O grupo de automorfismos de \mathbb{P}^5 que fixa a quádrlica G é a projetivação de $SO(G)$, e será denotado por $PSO(G)$. Sem perda de generalidade, podemos trabalhar com $SO(G)$ ao invés de $PSO(G)$.

O grupo $SO(G)$ age linearmente em LC por

$$\begin{aligned} LC \times SO(G) &\longrightarrow LC \\ (\lambda F + \mu G, g) &\mapsto \lambda(g^t F g) + \mu(g^t G g). \end{aligned}$$

Portanto, a noção de semi-estabilidade está bem definida para complexos quadráticos (para a definição de semi-estabilidade veja Apêndice A).

Para determinar os complexos de retas quadráticos semi-estáveis, usaremos, de acordo com a conveniência, as seguintes coordenadas em \mathbb{P}^5 :

1. Coordenadas de Klein, isto é, coordenadas tais que a representação matricial da quádrlica de Plücker, $G = Gr(1, \mathbb{P}^3)$, é a matriz identidade;
2. Coordenadas de Plücker, isto é, coordenadas tais que a representação matricial da quádrlica de Plücker é a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Coordenadas de Segre. Neste caso, dado o símbolo de Segre do complexo $X = F \cap G$, o feixe $\mathcal{F} = \lambda F + \mu G$ estará na forma normal, ou seja, as matrizes F e G estarão na forma (4.1).

Estudaremos a seguir, a relação entre os correspondentes grupos ortogonais especiais para a quádrlica G representada em coordenadas diferentes.

Sejam G e G' as matrizes da quádrlica de Plücker com respeito a dois sistemas de coordenadas. Normalizamos as matrizes de modo que os determinantes de G e G' sejam iguais

a 1 e denotamos seus correspondentes grupos por $SO(G)$ e $SO(G')$. Seja A a matriz de mudança de coordenadas, isto é, tal que $A^t G A = G'$. Então,

$$\begin{aligned} SO(G) &\longrightarrow SO(G') \\ g &\mapsto A^{-1} g A \end{aligned} \tag{5.1}$$

é um isomorfismo de grupos. Ou seja, $SO(G) \simeq SO(G')$.

Em particular, quando a quádriga G está nas coordenadas de Klein, temos que

$$SO(G) = SO(6) := \{g \in SL(6) : g^t g = I_6\}.$$

Seja S_0 o espaço das quádrigas em \mathbb{P}^5 com traço igual a 0, isto é, $S_0 \cup \{0\}$ é o espaço vetorial de matrizes simétricas de ordem 6 e traço 0.

É fácil ver que $S_0 \simeq \mathbb{P}^{19}$, pois $S_0 \subset \mathbb{P}^{20}$ é um hiperplano, definido pela função polinomial que calcula o traço de uma matriz. O grupo $SO(6)$ age em S_0 por

$$\begin{aligned} S_0 \times SO(6) &\longrightarrow S_0 \\ (M, g) &\mapsto g^t M g \end{aligned}$$

Proposição 5.1. *Existe um isomorfismo canônico*

$$\phi : LC \longrightarrow S_0$$

que é compatível com as ações de $SO(G)$ e $SO(6)$. Em particular, a variedade de complexos quadráticos é isomorfo a \mathbb{P}^{19} .

Demonstração. Dado um complexo quadrático $X = F \cap G$, escolha as coordenadas de Klein em \mathbb{P}^5 . Então, $G = I_6$ e o feixe de quádrigas associado $\{\lambda F + \mu G : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ contém exatamente uma quádriga de traço 0, a saber,

$$F_0 = F - \frac{\text{tr } F}{6} G.$$

De fato, se $F_1 = \lambda_1 F + \mu_1 G$ tem traço igual a zero, então

$$\begin{aligned} 0 = \text{tr}(F_1) &= \lambda_1 \text{tr}(F) + \mu_1 \text{tr}(G) = \lambda_1 \text{tr}(F) + 6\mu_1 \Rightarrow \mu_1 = -\frac{\lambda_1 \text{tr}(F)}{6} \\ \Rightarrow F_1 &= \lambda_1 F + \mu_1 G = \lambda_1 F - \left(\frac{\lambda_1 \text{tr}(F)}{6}\right) G = \lambda_1 \left(F - \frac{\text{tr } F}{6} G\right). \end{aligned}$$

Definimos então, $\phi(X) = F - \frac{\text{tr } F}{6} G$.

Para ver que ϕ é sobrejetora, seja F_0 uma matriz simétrica não nula de traço 0. Então, F_0 e $G = I_6$ são linearmente independentes ($\text{tr}(F_0) = 0$ e $\text{tr}(I_6) = 6$) e, portanto, determinam um complexo quadrático de retas. Claramente, as aplicações $X \mapsto F_0$ e $F_0 \mapsto X$ são algébricas e mutuamente inversas. Logo, ϕ é um isomorfismo.

Para concluir precisamos mostrar que ϕ é compátivel com as ações de $SO(G)$ e $SO(6)$ em LC e S_0 , respectivamente.

A definição de ϕ supõe G nas coordenadas de Klein e, neste caso, $SO(G) = SO(6)$. No entanto, qualquer que seja o sistema de coordenadas escolhido, $SO(G) \simeq SO(6)$ (5.1). Então, supondo $A^tGA = I_6$ (isto é $G = (A^{-1})^t A^{-1}$), para qualquer $g \in SO(6)$, temos

$$\begin{aligned}
\phi((\lambda F + \mu I_6)g) &= \phi(\lambda(A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) + \mu(A^{-1}gA)^t I_6 (A^{-1}gA)) \\
&= \phi(\lambda(A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) + \mu A^t g^t (A^{-1})^t A^{-1}gA) \\
&= \phi(\lambda(A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) + \mu A^t g^t G gA) \\
&= \phi(\lambda(A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) + \mu A^t G A) \\
&= \phi(\lambda(A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) + \mu I_6) \\
&= (A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) - \frac{\text{tr}((A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA))}{6} I_6 \\
&= (A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6 \\
&= (A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA) - \frac{\text{tr}(F)}{6} A^t g^t (A^{-1})^t I_6 (A^{-1}gA) \\
&=: (F - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6)g = (\phi(\lambda F + \mu I_6))g.
\end{aligned}$$

Nas igualdades acima, usamos que $A^{-1}gA \in SO(6)$ pelo isomorfismo (5.1), e que por isso, $\text{tr}((A^{-1}gA)^t F (A^{-1}gA)) = \text{tr}(F)$. Além disso, usamos que se $SO(G) \simeq SO(6)$, então,

$$(\lambda F + \mu I_6)g := (\lambda F + \mu I_6)(A^{-1}gA) = (A^{-1}gA)^t (\lambda F + \mu I_6) A^{-1}gA$$

ou seja,

$$(F - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6)g := (F - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6)(A^{-1}gA),$$

para todo $g \in SO(G)$. Logo, ϕ é compátivel com as ações de $SO(G)$ e $SO(6)$ em LC e S_0 , respectivamente, independente das coordenadas. ■

Corolário 5.1. *A variedade LC , que parametriza os complexos quadráticos, é irredutível e tem dimensão 19.*

Demonstração. Pela Proposição 5.1, temos que $LC \simeq S_0$. Mas, $S_0 \simeq \mathbb{P}^{19}$ e o resultado segue. ■

Como consequência da proposição anterior temos que um complexo quadrático é semi-estável com respeito à ação de $SO(G)$, se e somente se, a quádrlica associada de traço 0 em \mathbb{P}^5 for semi-estável com respeito à ação de $SO(6)$. A proposição a seguir nos dá um critério para que uma quádrlica arbitrária,

$$F = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 f_{ij} X_i X_j,$$

onde $f_{ij} = f_{ji}$, para todo $1 \leq i, j \leq 6$, seja semi-estável com relação à ação de $SO(6)$.

Proposição 5.2. *Uma quádrlica F em \mathbb{P}^5 é instável em relação à ação de $SO(6)$, se e somente se, F for equivalente, sob esta mesma ação, a uma quádrlica $Q = (q_{ij})$ com*

$$q_{ij} = 0, \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq 3, \quad e \quad q_{14} = q_{15} = q_{16} = q_{25} = q_{35} = q_{45} = 0.$$

Em outras palavras, uma quádrlica F em \mathbb{P}^5 é semi-estável em relação à ação de $SO(6)$, se e somente se, não existir $g \in SO(6)$, tal que

$$g^t F g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Demonstração. Escolhemos as coordenadas de \mathbb{P}^5 tal que

$$G = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Usando o critério de Hilbert-Mumford (Teorema A.1), $F \in S_0$ é instável com respeito a ação de $SO(6)$, se e somente se, existir $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow SO(6)$, 1-PS, tal que $\mu(F, \lambda) < 0$.

Para calcular $\mu(F, \lambda)$ devemos achar $\rho : SO(6) \rightarrow GL(\mathbb{C}^{21})$, representação de $SO(6)$, já que \mathbb{P}^{20} é o espaço de parâmetros das quádrlicas de \mathbb{P}^5 , tal que, escolhida a base que diagonaliza $\rho \circ \lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(\mathbb{C}^{21})$, tenhamos

$$F = \sum_{i=0}^{20} F_i e_i,$$

onde $\{e_0, \dots, e_{20}\}$ é a base canônica de \mathbb{C}^{21} . Logo,

$$\lambda(t)F := (\rho \circ \lambda)(t)F = \sum_{i=0}^{20} F_i t^{r_i} e_i \quad e$$

$$\mu(F, \lambda) = \max\{-r_i : F_i \neq 0\} < 0.$$

Como não estamos nas coordenadas de Klein, onde $G = I_6$, seja A tal que

$$A^t I_6 A = G = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $\lambda(t)F := (A^{-1}\lambda(t)A)F$, para todo $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow SO(6)$, 1-PS e

$$\mu(F, \lambda) := \mu(F, \gamma), \quad \text{onde } \gamma(t) = A^{-1}\lambda(t)A \in SO(G).$$

Seja $\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow SO(G)$ 1-PS, dado por

$$\gamma(t) = \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}, t^{r_4}, t^{r_5}, t^{r_6}),$$

com inteiros $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq 0$ e $r_4 = -r_1$, $r_5 = -r_2$, $r_6 = -r_3$. Se nas coordenadas de G F é dada por $F = \sum_{i,j=1}^6 f_{ij} X_i X_j$, então

$$\begin{aligned} \gamma(t)F &= (\gamma(t)^{-1})^t F \gamma(t)^{-1} = \gamma(t)^{-1} F \gamma(t)^{-1} \\ &= \sum_{i,j=1}^6 f_{ij} \gamma(t)^{-1} X_i X_j \gamma(t)^{-1} \\ &= \sum_{i,j=1}^6 f_{ij} t^{-r_i - r_j} X_i X_j \end{aligned}$$

e, por definição, $\mu = \mu(F, \gamma) = \max\{r_i + r_j : f_{ij} \neq 0\}$.

Suponhamos $\mu < 0$, como $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq 0$, temos

$$\left. \begin{array}{l} r_1 + r_1 \geq 0, \quad r_1 + r_2 \geq 0, \quad r_1 + r_3 \geq 0, \\ r_2 + r_2 \geq 0, \quad r_2 + r_3 \geq 0, \quad r_3 + r_3 \geq 0, \end{array} \right\} \Rightarrow f_{11} = f_{12} = f_{13} = f_{22} = f_{23} = f_{33} = 0,$$

$$r_1 + r_4 = 0 \Rightarrow f_{14} = f_{41} = 0,$$

$$r_2 + r_5 = 0 \Rightarrow f_{25} = f_{52} = 0,$$

$$r_3 + r_6 = 0 \Rightarrow f_{36} = f_{63} = 0,$$

$$r_1 \geq r_2 = -r_5 \Rightarrow r_1 + r_5 \geq 0 \Rightarrow f_{15} = f_{51} = 0,$$

$$r_1 \geq r_3 = -r_6 \Rightarrow r_1 + r_6 \geq 0 \Rightarrow f_{16} = f_{61} = 0,$$

$$r_2 \geq r_3 = -r_6 \Rightarrow r_2 + r_6 \geq 0 \Rightarrow f_{26} = f_{62} = 0,$$

donde concluímos que se F for instável, $\gamma(t)F := \gamma(t)^{-1} F \gamma(t)^{-1}$ tem a forma (5.2).

Reciprocamente, suponhamos $g^t F g = Q$ e Q como em (5.2). Então,

$$Q = 2q_{24}X_2X_4 + 2q_{34}X_3X_4 + 2q_{35}X_3X_5 + \sum_{i=4}^6 \sum_{j=4}^6 q_{ij}X_iX_j.$$

Escolha $\gamma(t) = \text{diag}(t^3, t^2, t, t^{-3}, t^2, t^{-1})$, $\forall t \in \mathbb{C}^*$. Então,

$$\mu(Q, \gamma) = \max\{-1, -2, -5, -4, -3 - 6\} = -1 < 0,$$

e F é instável. ■

Corolário 5.2. *Um complexo quadrático X é semi-estável com respeito a ação de $SO(G)$, se o discriminante $\Delta(X)$ de X , possui pelo menos de duas raízes diferentes, isto é, se seu símbolo de Segre consiste pelo menos de dois parênteses.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 5.1, um complexo quadrático $X = F \cap G$ é semi-estável com respeito de $SO(G)$, se e somente se, a quádrlica

$$\phi(X) = F - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6 := F_0 \in S_0$$

é semi-estável com respeito a ação de $SO(6)$. Sejam A e B matrizes mudança de coordenadas tais que $A^t G A = I_6$ (A muda das coordenadas iniciais para as coordenadas de Klein) e $B^t I_6 B = G'$, onde G' é a matriz (5.3) (B muda das coordenadas de Klein para coordenadas tais que G tem a forma (5.3)). Então, para $g \in SO(G)$, temos

$$\begin{aligned} \phi((\lambda F + \mu G)g) &= \phi((\lambda F + \mu I_6)(A^{-1} g A)) = (F - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6)(A^{-1} g A) \quad (\text{Prop. 5.1}) \\ &= (F - \frac{\text{tr}(F)}{6} I_6)(A^{-1} B^{-1} g B A) = F_0 (A^{-1} B^{-1} g B A). \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.2, F_0 é instável se e somente, é equivalente a uma matriz na forma (5.2). Como a multiplicidade das raízes de $\Delta(X)$ não se alteram por mudança de coordenadas, podemos supor que F_0 tem a forma (5.2). Logo,

$$\Delta(X) = \Delta(\lambda F + \mu G) = \Delta(\lambda F_0 + \mu G'),$$

$$\Delta(X) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & \mu \\ \mu & * & * & * & * & * \\ 0 & \mu & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \mu & * & * & * \end{pmatrix} = -\mu^6$$

ou seja, o símbolo de Segre de X tem uma única raiz. ■

Observação 5.1. Como veremos mais adiante, os complexos quadráticos irredutíveis que não são semi-estáveis são os que tem símbolo de Segre

$$[6], [(5\ 1)], [(4\ 2)], [(3\ 3)], [(4\ 1\ 1)], [(3\ 2\ 1)] \text{ ou } [(2\ 2\ 2)].$$

6 ESPAÇOS DE MODULI DE COMPLEXOS QUÁDRATICOS

Nesta seção, construiremos os espaços de Moduli de complexos quadráticos com um símbolo de Segre fixo.

A grosso modo, os espaços de Moduli são variedades algébricas que parametrizam um conjunto de objetos geométricos, módulo uma relação de equivalência. Tais espaços aparecem frequentemente como solução para problemas de classificação. A Teoria de Moduli é muito rica e teve início em 1857 com Riemann, mas a reestruturação da Geometria Algébrica, realizada por Grothendieck, Serre, e seus colaboradores, foi essencial para o desenvolvimento da mesma. A aplicação da Teoria dos Invariantes em problemas de Moduli na década de 60, por Mumford [11], nos forneceu uma receita para a construção em massa dos espaços de Moduli. Muitos deles são obtidos algebricamente através de variedades quocientes.

É no contexto da Teoria Geométrica dos Invariantes, ou seja, como variedades quocientes, que apresentaremos as construções dos espaços de Moduli dos complexos quadráticos e das suas superfícies singulares.

Primeiro precisaremos de alguns resultados preliminares.

6.1 Quocientes categóricos

Para que fique claro quais objetos serão os espaços de Moduli, que queremos construir nesse trabalho, vamos definir variedades quocientes. Para as definições relacionadas à ação de grupos ver Apêndice A.

Definição 6.1. Seja \mathcal{G} um grupo algébrico agindo na variedade X . Um quociente categórico de X por \mathcal{G} é um par (Y, ϕ) , onde Y é uma variedade quasi-projetiva e $\phi : X \rightarrow Y$ é um morfismo tais que:

- (i) ϕ é constante nas órbitas da ação, isto é, $\phi(gx) = \phi(x)$, para todo $x \in X$ e para todo $g \in \mathcal{G}$.
- (ii) Para toda variedade quasi-projetiva Z e todo morfismo $\psi : X \rightarrow Z$ constante nas órbitas, existe um único morfismo $\alpha : Y \rightarrow Z$ tal que $\alpha \circ \phi = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow \psi & \swarrow & \uparrow \exists! \alpha \\ Z & & \end{array}$$

Denotaremos a variedade Y por X/\mathcal{G} .

Definição 6.2. Sejam \mathcal{G} um grupo algébrico agindo na variedade X e (Y, ϕ) um quociente categórico de X por \mathcal{G} . Se $\phi^{-1}(y)$ consistir de uma única órbita, para todo $y \in Y$, chamaremos (Y, ϕ) de espaço de órbitas.

Proposição 6.1. *Seja \mathcal{G} um grupo algébrico agindo na variedade quasi-projetiva X . O quociente categórico de X por \mathcal{G} é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam (Y, ϕ) e (Z, Ψ) quocientes categóricos de X por \mathcal{G} . Como (Y, ϕ) é um quociente categórico e (Z, Ψ) é constante nas órbitas, pois também é um quociente categórico, temos que existe um único morfismo $\alpha : Y \rightarrow Z$ tal que $\alpha \circ \phi = \Psi$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow \Psi & \searrow \exists! \alpha & \\ Z & & \end{array}$$

Por outro lado, sendo (Z, Ψ) quociente categórico, e (Y, ϕ) constante nas órbitas, segue que existe um único morfismo $\beta : Z \rightarrow Y$ tal que $\beta \circ \Psi = \phi$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Psi} & Z \\ \downarrow \phi & \searrow \exists! \beta & \\ Y & & \end{array}$$

Então, temos que $(\beta \circ \alpha) \circ \phi = \beta \circ (\alpha \circ \phi) = \beta \circ \Psi = \phi$.

Logo, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow \phi & \searrow \beta \circ \alpha & \\ Y & & \end{array}$$

é comutativo. Como $Id_Y : Y \rightarrow Y$ também faz o diagrama comutar, segue da unicidade a aplicação α , na Definição 6.1 (ii), que $Id_Y = \beta \circ \alpha$.

Analogamente, mostramos que $Id_Z = \alpha \circ \beta$. Logo, Y é isomorfo a Z . ■

Definição 6.3. Sejam \mathcal{G} um grupo algébrico agindo em uma variedade X . Um **bom quociente** de X por \mathcal{G} é um par (Y, Φ) , onde Y é uma variedade e $\Phi : X \rightarrow Y$ é um morfismo afim satisfazendo:

- (i) Φ é constante nas órbitas da ação;
- (ii) Φ é sobrejetivo;
- (iii) se $U \subset Y$ for aberto afim, então

$$\Phi^* : A(U) \rightarrow A(\Phi^{-1}(U))$$

é um isomorfismo de $A(U)$ sobre $A(\Phi^{-1}(U))^{\mathcal{G}}$;

(iv) se $W \subset X$ é um fechado e invariante por G , então $\phi(W)$ é fechado;

(v) se W_1 e W_2 são fechados invariantes e disjuntos, então

$$\Phi(W_1) \cap \Phi(W_2) = \emptyset.$$

Um **quociente geométrico** é um bom quociente que é também um espaço de órbitas.

Proposição 6.2. *Seja (Y, Φ) um bom quociente de X por \mathcal{G} . Então,*

(i) (Y, Φ) é um quociente categórico de X por \mathcal{G} ;

(ii) $\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}(x_1)} \cap \overline{\mathcal{O}(x_2)} \neq \emptyset$;

(iii) se a ação de G em X for fechada, então (Y, Φ) é um quociente geométrico.

Demonstração. Ver [12], Prop. 3.11, p. 71. ■

Para garantir a existência dos espaços de Moduli precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 6.1. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade algébrica. Para toda ação linear de um grupo reductivo \mathcal{G} em X temos:*

(i) *Existe uma variedade projetiva Y e um morfismo $\Phi : X^{ss} \rightarrow Y$ tal que (Y, Φ) é o bom quociente de X^{ss} por \mathcal{G} .*

(ii) *Existe um aberto Y^s de Y tal que $\Phi^{-1}(Y^s) = X^s$ e (Y^s, Φ) é um quociente geométrico de X^s .*

(iii) *Para $x_1, x_2 \in X^{ss}$, $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, se e somente se, $\overline{\mathcal{O}(x_1)} \cap \overline{\mathcal{O}(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Ver [12], Teorema 3.14, p.74. ■

Observação 6.1. Quando a variedade X for o espaço de parâmetros dos complexos quadráticos com um símbolo de Segre fixo (resp. o espaço de parâmetros das superfícies singulares associadas a tais complexos), chamaremos o quociente geométrico $Y = X^{ss}/\mathcal{G}$ de **espaço de Moduli** dos complexos (resp. das superfícies singulares).

6.2 Espaço de Moduli dos complexos quadráticos

Nesta seção, vamos construir a variedade quasi-projetiva X que parametriza os complexos quadráticos com um símbolo de Segre fixo. Também mostraremos que o espaço de Moduli desses complexos existe.

Definição 6.4. Um complexo quadrático é chamado de irreduzível (resp., reduzido), se for irreduzível (resp., reduzido) como uma variedade de \mathbb{P}^5 .

Lema 6.1.

- (1) Um complexo quadrático é não reduzido, se e somente se, seu símbolo de Segre contém um parêntese de comprimento 5.
- (2) Um complexo quadrático é redutível, se e somente se, seu símbolo de Segre contém um parêntese de comprimento 4.

Demonstração. (1) Suponhamos que o símbolo de Segre σ , de um complexo quadrático X , contenha um parênteses de comprimento 5. Então, $\sigma = [(11111)1]$ ou $\sigma = [(21111)]$. Analisaremos separadamente cada caso.

Primeiro caso, $\sigma = [(11111)1]$. Usando a forma normal,

$$X = F \cap G = \bigcap_{(\lambda:\mu) \in \mathbb{P}^1} Q(\lambda, \mu),$$

onde $Q(\lambda, \mu) = \lambda F - \mu G$,

$$F = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $Q(1, \mu_1) = X_5^2 \in \mathcal{I}(X) := \{P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_5] : P(x) = 0, \forall x \in X\}$. Ou seja,

$$\overline{X_0} \in A[X] := \mathbb{C}[X_0, \dots, X_5]/\mathcal{I}(X)$$

é um elemento nilpotente, o que implica que X é reduzido.

Segundo caso, $\sigma = [(21111)]$. Usando a forma normal,

$$X = F \cap G = \bigcap_{(\lambda:\mu) \in \mathbb{P}^1} Q(\lambda, \mu),$$

onde $Q(\lambda, \mu) = \lambda F - \mu G$,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $Q(1, \mu_1) = X_0^2 \in \mathcal{I}(X) := \{P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_5] : P(x) = 0, \forall x \in X\}$. Ou seja,

$$\overline{X_5} \in A[X] := \mathbb{C}[X_0, \dots, X_5]/\mathcal{I}(X)$$

é um elemento nilpotente, o que implica que X é reduzido.

Reciprocamente, se X não for reduzida, pelo **critério de Jacobi** o feixe associado a X contém um plano duplo. Sem perda de generalidade, podemos supor que tal plano duplo é a quádrlica $F := X_5^2 = 0$, cuja representação matricial é $F = (f_{ij})$, com $f_{55} = 1$ e $f_{ij} = 0$, se $i \neq 5$ ou $j \neq 5$. Então, para mostrar que o símbolo de Segre de $X = F \cap G$ tem um parêntese de tamanho 5, vamos calcular os símbolos de Segre da raiz $(0 : 1)$ no discriminante de X . Escrevendo $G = (g_{ij})$ temos que,

$$\Delta(-\lambda F + \mu G) = \begin{pmatrix} \mu g_{00} & \mu g_{01} & \cdots & \mu g_{05} \\ \mu g_{01} & \mu g_{11} & \cdots & \mu g_{15} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \mu g_{50} & \mu g_{51} & \cdots & \mu g_{55} - \lambda \end{pmatrix} = \mu^6 \det(G) - \lambda \mu^5 \det(G_{55}),$$

onde G_{55} é a submatriz de G obtida tirando-se a linha 6 e a coluna 6. De acordo com as definições dos símbolos de Segre apresentadas na Seção 4.2, temos que $d = 4$, $l_0 = 6$ (resp. $l_0 = 5$) se $\det(G_{55}) \neq 0$ (resp. se $\det(G_{55}) = 0$) e $l_i = 5 - i$, para todo $i = 1, \dots, 4$. Logo, $e_0 = 2$ ou $e_0 = 1$ e $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 1$, donde concluímos que

$$\sigma(X) = [(21111)] \quad \text{ou} \quad \sigma(X) = [(11111)1].$$

(2) Agora, suponhamos que o símbolo de Segre de $X = F \cap G$ contenha um parêntese de comprimento 4. Então, usando a forma normal, o feixe $\lambda F - \mu G$ associado a X tem uma quádrlica singular da forma

$$Q(\lambda_0, \mu_0) = \lambda_0 F - \mu_0 G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} = (aX_4 + bX_5)(cX_4 + dX_5),$$

ou seja, é a união de dois hiperplanos. Logo, X é redutível.

Reciprocamente, suponhamos X redutível. Nenhuma componente de X pode ser de grau 1 pois, sendo G uma quádrlica suave em \mathbb{P}^5 , G não admite subespaços lineares de dimensão maior que $5/2$. Então, $X = X_1 \cup X_2$, onde X_1 e X_2 são variedades projetivas de grau 2 (Ver [6], Prop. 7.6, p. 52). Sejam $H_i (\simeq \mathbb{P}^4)$ hiperplanos em \mathbb{P}^5 tais que $X_i \subset H_i$, para $i = 1, 2$. Para ver a existência de tais hiperplanos ver [6], Ex. 7.8, p. 53. Defina $F_0 = H_1 \cup H_2$, que é uma quádrlica em \mathbb{P}^5 . Então, $X = F_0 \cap G$ e, como $H_1 \cap H_2 \simeq \mathbb{P}^3$, porque H_1 e H_2 são subespaços lineares distintos, temos que F_0 é um 3-cone cujo comprimento do parêntese no Símbolo de Segre é igual a 4. ■

Lema 6.2. *Sejam X e X' complexos quadráticos cujos feixes associados são*

$$\mathcal{F} = \{\lambda F + \mu G : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\} \quad e \quad \mathcal{F}' = \{\lambda' F' + \mu' G' : (\lambda' : \mu') \in \mathbb{P}^1\},$$

e sejam $(\lambda_i : \mu_i)$ e $(\lambda'_i : \mu'_i)$, as raízes dos seus correspondentes discriminantes. Então, os complexos quadráticos X e X' são isomorfos, se e somente se, eles tem o mesmo símbolo de Segre e existe um automorfismo de \mathbb{P}^1 , fixando $(0 : 1)$, e levando $(\lambda_i : \mu_i)$ em $(\lambda'_i : \mu'_i)$, para todo i , onde $(\lambda_i : \mu_i)$ e $(\lambda'_i : \mu'_i)$ correspondem à parênteses do mesmo tipo.

Demonstração. Pelo Teorema 4.1, dois feixes \mathcal{F} e \mathcal{F}' são isomorfos, se e somente se, eles tem o mesmo símbolo de Segre e se existir um automorfismo de \mathbb{P}^1 levando $(\lambda_i : \mu_i)$ a $(\lambda'_i : \mu'_i)$ para todo i , onde os parênteses de $(\lambda_i : \mu_i)$ e $(\lambda'_i : \mu'_i)$ são do mesmo tipo. Além disso, o isomorfismo de complexos quadráticos leva G em G' , ou seja, o automorfismo de \mathbb{P}^1 fixa o ponto $(0 : 1) \in \mathbb{P}^1$. ■

Corolário 6.1. *Seja σ um símbolo de Segre com no máximo 2 parênteses. Então, todos os complexos quadráticos com símbolo de Segre σ são isomorfos.*

Demonstração. Suponhamos que σ tenha apenas dois parênteses. Então, o discriminante de um complexo quadrático X com o símbolo de Segre σ tem apenas duas raízes. Como sempre existe um automorfismo de \mathbb{P}^1 que leva três pontos em posição geral em três pontos escolhidos, o resultado segue do Lema 6.2. ■

Como consequência do Corolário 6.1, temos que, fixado um símbolo de Segre σ com apenas dois parênteses, o espaço de Moduli dos complexos quadráticos com esse símbolo de Segre tem um único ponto.

Assumiremos no restante do capítulo que σ é um símbolo de Segre com as duas propriedades:

$$\sigma \quad \text{não contém nenhum parênteses de comprimento } \geq 4, \quad (6.1)$$

$$\sigma \quad \text{tem pelo menos de 3 parênteses.} \quad (6.2)$$

Segue do Lema 6.1, que um complexo quadrático com símbolo de Segre σ do tipo (6.1) é irredutível e reduzido. Como veremos mais adiante, os símbolos do tipo (6.2) darão espaços de Moduli de dimensão positiva.

Existem exatamente 23 símbolos de Segre com as propriedades (6.1) e (6.2) (ver tabela 2). Seja σ um deles. Queremos construir o espaço de Moduli, $\mathcal{M}(\sigma)$, dos complexos quadráticos com símbolo de Segre σ .

Lema 6.3. *Os complexos quadráticos com símbolo de Segre σ são parametrizados por uma subvariedade quasi-projetiva, $R(\sigma)$, da variedade $LC \simeq \mathbb{P}^{19}$, de todos os complexos quadráticos.*

Demonstração. Suponhamos que σ tenha r parênteses. Seja

$$\tilde{R}(\sigma) := \{X_N : X_N \text{ é um feixe na forma normal com símbolo de Segre } \sigma\}.$$

Então, $\tilde{R}(\sigma) \simeq (\mathbb{P}^1)^r \setminus D$, onde D é o subconjunto fechado de $(\mathbb{P}^1)^r$, definido por

$$D = \bigcup_{1 \leq i < j \leq r} D_{ij} \quad \text{e} \quad D_{ij} = \{((\lambda_1 : \mu_1), \dots, (\lambda_r : \mu_r)) \in (\mathbb{P}^1)^r : \lambda_i \mu_j - \mu_i \lambda_j = 0\}.$$

Seja π o morfismo definido por

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{R}(\sigma) \times SO(G) &\longrightarrow LC \\ (X_N, g) &\longmapsto g^t X_N g. \end{aligned}$$

Como todo complexo X com símbolo de Segre σ é isomorfo a um feixe na forma normal, temos que $R(\sigma) := \pi(SO(G) \times \tilde{R}(\sigma))$. Pelo Teorema de Chevalley, para conjuntos construtíveis (ver [6], Ex.3.19, p.94), temos que $R(\sigma)$ é uma subvariedade quasi-projetiva de LC . ■

A ação do grupo $SO(G)$ em LC se restringe a uma ação em $R(\sigma)$. Devemos agora determinar o estabilizador de um complexo $X \in R(\sigma)$.

Lema 6.4. *Seja σ um símbolo de Segre satisfazendo (6.1) e (6.2) e suponha que σ consiste de r_i parênteses de comprimento i , para $i = 1, 2, 3$. Então, o estabilizador de um complexo quadrático $X \in R(\sigma)$ em $SO(G)$ tem dimensão*

$$\dim \text{Stab}(X) = r_2 + 3r_3,$$

exceto no caso $\sigma = [(22)11]$, que tem dimensão 2. Em particular, a dimensão do estabilizador depende somente do símbolo de Segre de σ e não do complexo quadrático $X \in R(\sigma)$.

Demonstração. Uma matriz $A \in SO(G)$ está no estabilizador de X , se e somente se, $A^t G A = G$ e $A^t F A = F$. Já que o feixe está na forma normal de Segre, $G = G^{-1}$, as igualdades anteriores são equivalentes às

$$A^t = G A^{-1} G \quad \text{e} \quad G F A = A G F.$$

Suponha inicialmente que cada cone é um zero-cone, ou seja, que $r_2 = r_3 = 0$. Devemos mostrar que o estabilizador de X tem dimensão zero. Para isso, basta mostrar que o estabilizador de todo par de blocos correspondentes a um zero-cone de multiplicidade d tem dimensão zero.

A forma normal dos blocos G_i de G e dos blocos F_i de F são dadas pelas seguintes matrizes de ordem $d \times d$:

$$G_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \mu \\ 0 & \dots & 1 & \mu & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Considere que a matriz $d \times d$ $A = (a_{ij})$. Como

$$G_i F_i = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \mu & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \mu \end{pmatrix},$$

temos que $G_i F_i A = A G_i F_i$ implica que

$$\mu a_{ij} = \mu a_{ij} + a_{i(j+1)}, \quad \forall j = 1, \dots, d-1 \Rightarrow a_{i(j+1)} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, d-1,$$

$$\begin{aligned} a_{(k-1)j} + \mu a_{kj} &= \mu a_{kj} + a_{k(j+1)}, \quad \forall j = 1, \dots, d-1 \text{ e } \forall k = 2, \dots, d \\ \Rightarrow a_{(k-1)j} &= a_{k(j+1)}, \quad \forall j = 1, \dots, d-1 \text{ e } \forall k = 2, \dots, d \end{aligned}$$

$$a_{(k-1)d} + \mu a_{kd} = \mu a_{kd}, \quad \forall k = 2, \dots, d \Rightarrow a_{(k-1)d} = 0, \quad \forall k = 2, \dots, d,$$

ou seja, A é da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(d-1)1} & a_{(d-2)1} & \dots & a_{11} & 0 \\ a_{d1} & a_{(d-1)1} & \dots & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Usando a forma de A e $A^t G_i A = G_i$, temos que

$$G_i = \begin{pmatrix} 2a_{11}a_{d1} + 2a_{21}a_{(d-1)1} + \dots & \dots & \dots & \dots & 2a_{11}a_{21} & a_{11}^2 \\ 2a_{11}a_{(d-1)1} + 2a_{21}a_{(d-2)1} & \dots & \dots & \dots & a_{11}^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{11}a_{31} + a_{21}^2 & 2a_{11}a_{21} & a_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_{11}a_{21} & a_{11}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a submatriz de A , de tamanho $d \times d$, correspondente ao cone gerado por F_i e G_i , e denotada por A_d , é igual a $\pm I_d$. Além disso, como todos os cones do complexo são 0-cones,

os μ' s são distintos para os diferentes blocos F_i . Isto vai implicar que todo a_{ij} fora das submatrizes A_d são nulos. Logo, o $Stab(X)$ é finito e portanto de dimensão zero.

Observe que que o resultado não depende dos μ' s, o que significa que a dimensão do estabilizador não depende do complexo quadrático escolhido.

A demonstração para os outros casos é análogo, por isso, só faremos algumas observações.

Por exemplo, se o feixe tem k_1 1-cones, nenhum deles é do tipo (22) e todos os outros cones são 0-cones, então o estabilizador tem dimensão k_1 .

Se o feixe tiver um 2-cone, então só pode ter um 2-cone pela hipótese (6.2) e esse parênteses é (111), pela hipóteses (6.1). A forma normal desse feixe tem um destes tipos de blocos: $G_i = I_3$ e $F_i = \mu I_3$, ou

$$G_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad F_i = \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, a equação $A^t F_i A = F_i$ implica que $A^t = A^{-1}$ e o estabilizador é $SO(3)$, que tem dimensão 3. No segundo caso, o estabilizador também é de dimensão 3. Logo, se o feixe tiver k_0 0-cones e k_1 1-cones (nenhum com um parênteses do tipo (22)) e $k_2 (= 1)$ 2-cones, o estabilizador tem dimensão $k_1 + 3k_2$.

Finalmente, consideremos o caso $\sigma = [(22)11]$. A razão para o aumento da dimensão do estabilizador neste caso é que existem dois blocos correspondendo à mesma raiz do discriminante e ambos blocos não são diagonais. ■

Corolário 6.2. *Nas hipóteses do Lema 6.4, seja $r = r_1 + r_2 + r_3$, o número de parênteses em σ . Então,*

$$\dim R(\sigma) = r + 13 - \dim Stab(X),$$

onde X é qualquer complexo quadrático com símbolo de Segre σ .

Demonstração. Para o cálculo da dimensão de $R(\sigma)$, vamos aplicar o Teorema da Dimensão da Fibras (ver [13], Teorema 7, p.76) ao morfismo π dado no Lema 6.3. Antes porém, devemos calcular a dimensão de $\pi^{-1}(X)$, para $X \in R(\sigma)$. Seja $X = \pi(g, X_N)$, onde X_N é o feixe isomorfo a X na forma normal. Então, $X = g^t X_N g$ e, para todo $h \in Stab(X_N)$, temos que

$$(hg)^t X_N (hg) = g^t (h^t X_N h) g = g^t X_N g = X.$$

Além disso, se X'_N for um feixe obtido de X_N aplicando-se um automorfismo de \mathbb{P}^1 nas raízes do discriminante de X_N , temos que $X'_N \simeq X_N$, isto é, $X_N = g_1^t X'_N g_1$, para algum $g_1 \in SO(G)$. Logo, $\pi(g_1 g, X'_N) = X$. Como a dimensão do conjunto de automorfismo de \mathbb{P}^1 é igual a 2 e, $\dim Stab(X) = \dim Stab(X_N)$, temos que

$$\dim \pi^{-1}(X) = \dim Stab(X) + 2.$$

Aplicando o Teorema da Dimensão das Fibras, temos que

$$\dim R(\sigma) = \dim SO(G) + r - (\dim \text{Stab}(X) + 2).$$

Mas, $SO(G) \simeq SO(6)$ e $\dim SO(6) = 15$. Logo,

$$\dim R(\sigma) = 15 + r - \dim \text{Stab}(X) - 2 = 13 + r - \dim \text{Stab}(X).$$

■

Finalmente, temos todos os ingredientes para construirmos o espaço de Moduli dos complexos quadráticos com símbolo de Segre σ .

Teorema 6.2. *Seja σ um símbolo de Segre satisfazendo (6.1) e (6.2) e contendo r parênteses. Então, o espaço de Moduli $\mathcal{M}(\sigma)$ dos complexos quadráticos com símbolo de Segre σ existe e é uma variedade quasi-projetiva de dimensão $r - 2$.*

Demonstração. De acordo com o Lema 6.3, a variedade $R(\sigma)$ parametriza os complexos quadráticos com o símbolo de Segre σ . O grupo $SO(G)$ age sobre $R(\sigma)$ e, dois complexos quadráticos são isomorfos, se e somente se, eles estão na mesma órbita dessa ação. Pelo Corolário 5.2, todo elemento de $R(\sigma)$ é semi-estável com respeito a ação de $SO(G)$, isto é, $R(\sigma)^{ss} = R(\sigma)$. Logo, pelo Teorema 6.1, o bom quociente $\mathcal{M}(\sigma) := R(\sigma)/SO(G)$, existe e é uma variedade quasi-projetiva.

Além disso, pelo Lema 3.7, p.66 de [12],

$$\dim \mathcal{O}(X) = \dim SO(G) - \dim \text{Stab}(X). \tag{6.3}$$

Como, a dimensão do $\text{Stab}(X)$ depende somente do símbolo de Segre, temos que todas as órbitas tem a mesma dimensão e, novamente pelo Lema 3.7, p.66 de [12], todas as órbitas são fechadas. Assim, $\mathcal{M}(\sigma)$ é um espaço de órbitas, isto é, parametriza as classes de isomorfismo dos complexos quadráticos com símbolo de Segre σ . Para calcular a dimensão de $\mathcal{M}(\sigma)$, usamos o morfismo projeção $R(\sigma) \rightarrow \mathcal{M}(\sigma) := R(\sigma)/SO(G)$, o Teorema da Dimensão das Fibras e a igualdade (6.3). Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(\sigma) &= \dim R(\sigma) - (\dim SO(G) + \dim \text{Stab}(X)) \\ &= 13 + r - \dim \text{Stab}(X) - (15 - \dim \text{Stab}(X)) \\ &= r - 2. \end{aligned}$$

■

7 SUPERFÍCIES SINGULARES

Neste capítulo apresentaremos outro objeto de estudo desse trabalho, as superfícies singulares associadas aos complexos de retas quadráticos de \mathbb{P}^5 .

Fixemos um complexo de retas quadrático, $X = F \cap G$, em \mathbb{P}^5 , onde $G = Gr(1, \mathbb{P}^3)$.

Para um ponto genérico $p \in \mathbb{P}^3$, a interseção $\alpha(p) \cap F$ é uma cônica suave em $\alpha(p)$. De fato, a condição $\alpha(p)$ intercepta F em uma cônica singular é uma condição fechada em \mathbb{P}^3 . Para ver isso, observe que essa condição é equivalente a $p \in \mathbb{P}^3$ é tal que o determinante da matriz que representa a cônica $\alpha(p) \cap F$, que depende polinomialmente de p , é nulo.

Observação 7.1. A cônica $\alpha(p) \cap F$, denotada por $C(p)$, não depende da escolha de F e sim do complexo quadrático X , pois $\alpha(p) \subset G$ e

$$\alpha(p) \cap F = \alpha(p) \cap X.$$

Denotaremos por $rk(C(p))$ o posto da cônica $C(p)$.

Proposição 7.1. *O conjunto $S = \{p \in \mathbb{P}^3 : rk(C(p)) \leq 2\}$ é uma superfície de grau 4 em \mathbb{P}^3 .*

Demonstração. Dado $p = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4) \in \mathbb{P}^3$, seja

$$l_x = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

uma reta em \mathbb{P}^3 passando por p . Então,

$$\alpha(p) := \{\pi(l_x) = (p_1x_2 - p_2x_1 : \dots : p_3x_4 - p_3x_4), \forall (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \neq (p_1 : p_2 : p_3 : p_4)\},$$

onde π é o mergulho de Plücker. Sejam $(z_{12} : \dots : z_{34})$ as coordenadas de \mathbb{P}^5 e $F(Z_{12}, \dots, Z_{34}) := Z^t F Z = 0$ a quádrlica que define o complexo X . Então,

$$\alpha(p) \cap F = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^3 : F(p_1x_2 - p_2x_1 : \dots : p_3x_4 - p_3x_4) = 0\}.$$

Se $p \in U_1$, onde $U_1 = \{(p_1 : p_2 : p_3 : p_4) \in \mathbb{P}^3 : p_1 = 1\}$, temos que

$$\alpha(p) := \begin{cases} p_3Z_{12} - p_2Z_{13} + Z_{23} = 0 \\ p_4Z_{12} - p_2Z_{14} + Z_{24} = 0 \\ p_4Z_{13} - p_3Z_{14} + Z_{34} = 0. \end{cases}$$

Isolando Z_{23} , Z_{21} e Z_{34} temos que $\alpha(p) \cap F = (Z_{12}, Z_{13}, Z_{14})P^t F P(Z_{12}, Z_{13}, Z_{14})^t = 0$, onde

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_3 & -p_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 & 0 & -p_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$S = \{p \in \mathbb{P}^3 : \det(P^tFP) = 0\} \quad (7.1)$$

e, portanto, é uma hipersuperfície em \mathbb{P}^3 . Para ver que S tem grau 4, verificamos que $\det(P^tFP)$ é um polinômio de grau 4 nas coordenadas de p . ■

Definição 7.1. O conjunto $S = \{p \in \mathbb{P}^3 : rk(C(p)) \leq 2\} \subset \mathbb{P}^3$ é chamado **superfície singular** associada ao complexo quadrático.

Seja R o subconjunto de S definido por

$$R = \{p \in \mathbb{P}^3 : rk(C(p)) \leq 1\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Observação 7.2. Se $p \in S \setminus R$, o posto de $C(p)$ é igual a 2. Logo, $C(p)$ é a união de duas retas distintas L_1 e L_2 , ambas contidas em $\alpha(p)$. Portanto, $L_1 \cap L_2 = \{x\} \subset \alpha(p)$. Segue, do Lema 3.7, que existe um único plano h_1 (respectivamente h_2) tal que $L_1 = \alpha(p) \cap \beta(h_1)$ (respectivamente $L_2 = \alpha(p) \cap \beta(h_2)$). Então, L_i parametriza as retas de \mathbb{P}^3 que passam por p e estão contidas em h_i , para $i = 1, 2$, isto é, existe uma correspondência biunívoca entre

$$C(p) \longleftrightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^3$$

onde $\Gamma_i = \{l : l \subset \mathbb{P}^3 \text{ é uma reta e } p \in l \subset h_i\}$. O conjunto Γ_i é o feixe de retas que passam por p e estão contidas em h_i . Além disso, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{l_x\}$, $l_x = h_1 \cap h_2$. Neste caso dizemos que Γ_1 e Γ_2 são **feixes cofocais** cujo foco é o ponto p .

Observação 7.3. Se $p \in R$ e o posto de $C(p)$ é igual a 1, então $C(p)$ é uma reta dupla L contida em $\alpha(p)$. Pelo Lema 3.7, existe um único plano h tal que $L = \alpha(p) \cap \beta(h)$. Então L parametriza as retas de \mathbb{P}^3 que passam por p e estão contidas em h , ou seja, existe uma bijeção entre os conjuntos $C(p)$ e

$$C(p) \longleftrightarrow \Gamma \subset \mathbb{P}^3$$

onde $\Gamma = \{l : l \subset \mathbb{P}^3 \text{ é uma reta e } p \in l \subset h\}$. O conjunto Γ é o feixe de retas que passam por p e estão contidas em h . Neste caso dizemos que Γ é um feixe duplo.

Observação 7.4. Se $p \in R$ e o posto de $C(p)$ é igual a 0, ou seja, $C(p) = \alpha(p)$, então $C(p)$ parametriza as retas de \mathbb{P}^3 que passam por p .

Nosso objetivo agora é definir uma superfície $\Sigma \subset X \subset \mathbb{P}^5$ relacionada à superfície $S \subset \mathbb{P}^3$.

Definição 7.2. Dado $x \in X$, a reta l_x , é chamada **reta singular** do complexo quadrático X , em um ponto $p \in l_x$, se $\alpha(p) \subset T_xF$.

Lema 7.1. *Seja $x \in X$. Se l_x é reta singular em $p \in l_x$, então $p \in S$.*

Demonstração. Mostraremos que se a reta l_x for singular em $p \in l_x$ então a cônica $C(p)$ é singular em x , ou seja, que $T_x C(p) = \alpha(p)$ (ver Seção 2.4).

Temos $p \in l_x$, se e somente se, $x \in \alpha(p)$. Então, $x \in C(p) = \alpha(p) \cap X$ e $T_x C(p) = \alpha(p) \cap T_x F$. Mas, l_x singular em p significa $\alpha(p) \subset T_x F$. Logo, $T_x C(p) = \alpha(p)$ e x é um ponto singular de $C(p)$, e portanto, $rk(C(p)) \leq 2$. ■

Lema 7.2. *Seja $p \in S$.*

i) Se $p \in S \setminus R$, então existe um único $x \in X$ tal que l_x é singular em p .

ii) Se $p \in R$, l_x é singular em p , para todo $x \in C(p)$.

Demonstração.

Para demonstrar o primeiro item, observe que

$$p \in S \setminus R \Leftrightarrow rk(C(p)) = 2 \Leftrightarrow C(p) = L_1 \cup L_2,$$

onde L_1 e L_2 são duas retas distintas contidas no plano $\alpha(p)$. Seja $x \in C(p)$ o ponto de interseção de L_1 e L_2 . É claro que x é o único ponto singular de $C(p)$ e que $T_x C(p) = \alpha(p)$. Mas, $T_x C(p) = \alpha(p) \cap T_x F$. Logo, $\alpha(p) \subset T_x F$ e, portanto, l_x é reta singular em p .

A demonstração do segundo item será dividida em dois casos.

Se $rk(C(p)) = 1$, $C(p)$ é uma reta dupla em $\alpha(p)$. Logo, $C(p)$ é singular em todo ponto. E $T_x C(p) = \alpha(p)$. Mas, $T_x C(p) = \alpha(p) \cap T_x F$. Logo, $\alpha(p) \subset T_x F$, para todo ponto $x \in C(p)$ e, portanto, l_x é reta singular em p .

Se $rk(C(p)) = 0$, $\alpha(p) = C(p) \subset F$. Então, para todo $x \in \alpha(p) = C(p)$,

$$T_x C(p) = T_x \alpha(p) = \alpha(p) \subset T_x F,$$

e portanto, l_x é singular em p para qualquer $x \in C(p)$. ■

Definimos os conjuntos

$$\Sigma = \{x \in X : l_x \text{ é reta singular para algum ponto}\}$$

$$Sing(X) = \{x \in X : x \text{ é um ponto singular da variedade } X\}$$

Proposição 7.2. *Seja $x \in X$. Então,*

i) $x \in \Sigma$, se e somente se, existe um $p \in \mathbb{P}^3$ tal que x é um ponto singular de $C(p)$.

ii) $x \in Sing(X)$, se e somente se, $T_x G \subset T_x F$.

Demonstração.

i) Se $x \in \Sigma$, existe um $p \in l_x$, tal que l_x é singular em p . Então, $\alpha(p) \subset T_x F$ e $T_x C(p) = T_x F \cap \alpha(p) = \alpha(p)$. Logo, x é um ponto singular de $C(p)$. A recíproca é análoga.

ii) Se $x \in \text{Sing}(X)$, então

$$3 = \dim X < \dim T_x X = \dim(T_x F \cap T_x G) \leq \dim T_x G = 4.$$

Logo, $\dim(T_x F \cap T_x G) = \dim T_x G = 4$ e, portanto, $T_x G \cap T_x F = T_x G \subset T_x F$.

Reciprocamente, suponhamos $T_x G \subset T_x F$. Então,

$$T_x G = T_x F \cap T_x G = T_x X.$$

Como G é uma quádrlica suave, $\dim T_x G = 4$ e

$$3 = \dim X < \dim T_x X = \dim T_x G = 4.$$

Portanto, x é um ponto singular de X . ■

Corolário 7.1. *Se F for uma quádrlica suave em \mathbb{P}^5 , então x é ponto singular de X , se e somente se, $T_x F = T_x G$.*

Lema 7.3. *Seja $x \in X$.*

i) *Se $x \in \text{Sing}(X)$, então para qualquer $p \in l_x$, l_x é singular em p . Consequentemente temos $\text{Sing}(X) \subset \Sigma$.*

ii) *Se $x \in \Sigma \setminus \text{Sing}(X)$, então existe um único $p \in l_x$, tal que l_x é singular em p .*

Demonstração.

i) Seja $x \in \text{Sing}(X)$. Segue da Proposição 7.2 que $T_x G \subset T_x F$. Seja $p \in l_x$. Então,

$$\alpha(p) = T_x \alpha(p) \subset T_x G \subset T_x F,$$

pois $\alpha(p) \subset G$. Portanto l_x é singular em p .

ii) A existência segue da definição de Σ . Para demonstrar a unicidade, suponha que existam p e q pontos distintos de \mathbb{P}^3 , tais que l_x é singular em p e q . Então, $\alpha(p) \cup \alpha(q) \subset T_x F$. Pelo Lema 3.4, temos que $\alpha(p) \cap \alpha(q)$ é um ponto. Seja H o menor subespaço linear que contém $\alpha(p) \cup \alpha(q)$. Então, $H \subset T_x F$ e $H \subset T_x G$. É claro que H tem dimensão 4, pois

$$\dim H = \dim \alpha(p) + \dim \alpha(q) - \dim(\alpha(p) \cap \alpha(q)) = 2 + 2 - 0.$$

Por conseguinte, $H = T_x G$, pois $T_x G$ tem dimensão 4. Logo, $H = T_x G \subset T_x F$ e, pela Proposição 7.2, x é um ponto singular de X , o que é absurdo.

■

Observação 7.5. Como consequência dos Lemas 7.1 e 7.3, temos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma \setminus \text{Sing}(X) &\rightarrow S \\ x &\mapsto p, \end{aligned}$$

onde p é o único ponto em l_x , tal que l_x é singular em p .

Lema 7.4. *Seja H um hiperplano em \mathbb{P}^5 , tal que H é tangente a G em um ponto x . Então,*

$$H \cap G = \{y \in G : \overline{xy} \subset G\}.$$

Demonstração. Temos que H tangente a X em $x \in G$, significa que

$$H = T_x G = \{y \in \mathbb{P}^5 : y^t G x = 0\}.$$

Seja $y \in H \cap G$. Então, $y^t G x = 0$, $y^t G y = 0$ e, para todo $w \in \overline{xy}$, podemos escrever $w = \lambda x + \mu y$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Logo,

$$w^t G w = \lambda^2 x^t G x + 2\lambda\mu y^t G x + \mu^2 y^t G y = 0,$$

pois $x, y \in G$, ou seja, $\overline{xy} \subset G$.

Reciprocamente, dado um $y \in G$, tal que $\overline{xy} \subset G$, temos que $x + y \in \overline{xy} \subset G$, isto é,

$$0 = (x + y)^t G (x + y) = x^t G x + 2y^t G x + y^t G y = 2y^t G x.$$

Logo, $y^t G x = 0$ e, portanto, $y \in T_x G = H$. ■

Lema 7.5. *Seja $p \in \mathbb{P}^3$, então*

$$\{H \subset \mathbb{P}^5 : H \text{ é hiperplano e } \alpha(p) \subset H\} = \{T_x G : x \in \alpha(p)\}.$$

Demonstração. O conjunto $\{T_x G : x \in \alpha(p)\}$ está claramente contido no conjunto dos hiperplanos de \mathbb{P}^5 que contém $\alpha(p)$, porque

$$x \in \alpha(p) \subset G \Rightarrow \alpha(p) = T_x(\alpha(p)) \subset T_x G.$$

Para ver a inclusão contrária, vamos fixar coordenadas em \mathbb{P}^3 tais que $p = (1 : 0 : 0 : 0)$.

Seja

$$l_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

uma reta em \mathbb{P}^3 passando por p . Usando que $\alpha(p)$ parametriza as retas de \mathbb{P}^3 que passam por p , temos que

$$\alpha(p) := \{\pi(l_x) = (x_2 : x_3 : x_4 : 0 : 0 : 0), \forall (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \neq (1 : 0 : 0 : 0)\}.$$

Logo, um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^5$ tal que $\alpha(p) \subset H$ é da forma $H = a_4Z_4 + a_5Z_5 + a_6Z_6 = 0$, onde $(Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5 : Z_6)$ são as coordenadas de \mathbb{P}^5 . Finalmente, usando que $G := Z_1Z_6 - Z_2Z_5 + Z_3Z_4 = 0$, temos que, para $x = (a_6 : -a_5 : a_4 : 0 : 0 : 0) \in \alpha(p)$, $T_xG = H$. ■

Lema 7.6. *Seja $x \in X \setminus \text{Sing}(X)$. Então, $x \in \Sigma$, se e somente se, existe $y \in G \setminus \{x\}$ tal que $T_xF = T_yG$.*

Demonstração. Pelo Lema 7.3 existe um único $p \in l_x$, tal que l_x é singular em p , isto é $\alpha(p) \subset T_xF$. Por hipótese, temos que x é um ponto não singular de X e, pela Proposição 7.2, a dimensão de T_xF é igual a 4. Logo, T_xF é um hiperplano de \mathbb{P}^5 que contém a $\alpha(p)$. Pelo Lema 7.5, existe $y \in \alpha(p)$ tal que $T_yG = T_xF$. Além disso, $y \neq x$, pois x é um ponto não singular de X .

Reciprocamente, seja $y \in G \setminus \{x\}$, tal que $T_yG = T_xF$. Pelo Lema 7.4, $\overline{xy} \subset G$. Logo, pelo Lema 3.7, existe um único $p \in \mathbb{P}^3$ tal que $\overline{xy} \subset \alpha(p)$. Portanto, $\alpha(p) = T_y(\alpha(p)) \subset T_yG = T_xF$. ■

O Teorema a seguir mostra que Σ é uma interseção transversal de hipersuperfícies em \mathbb{P}^5 . Sem perda de generalidade, podemos supor que F é uma quádrlica suave no complexo quadrático $X = F \cap G$. De fato, como veremos a seguir, Σ depende só do complexo X e não da escolha da F . Vamos supor ainda que X é suave.

Teorema 7.1. *Seja F uma quádrlica suave e H a quádrlica definida pela matriz simétrica $H = FG^{-1}F$. Então,*

$$\Sigma = F \cap G \cap H.$$

Demonstração. Pelo Lema 7.6 e pelo Corolário 7.1, podemos concluir que $x \in \Sigma$, se e somente se, existe $y \in G$ tal que $T_yG = T_xF$. Devemos então mostrar que $x \in F \cap G \cap H$, se e somente se, existir $y \in G$, tal que $Gy = Fx$.

Suponhamos $Gy = Fx$, para algum $y \in G$. Então

$$\begin{aligned} Fx = Gy &\Rightarrow G^{-1}Fx = y \Rightarrow FG^{-1}Fx = Fy \Rightarrow \\ x^tFG^{-1}Fx &= x^tFy = y^tFx = y^tGy = 0 \Rightarrow x \in H. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $x \in F \cap G \cap H$, seja $y = G^{-1}Fx$. Vamos mostrar que $y \in G$. Para isso, calculamos

$$y^tGy = (G^{-1}Fx)^tG(G^{-1}Fx) = x^tFG^{-1}Fx = x^tHx = 0 \quad (x \in H).$$

Então, $\Sigma = F \cap G \cap H$.

Agora mostremos que a intersecção $F \cap G \cap H$ é transversal. Suponhamos por absurdo que existe $x \in \Sigma$ tal que $T_xF = Fx$, $T_xG = Gx$ e $T_xH = Hx$, como subespaços lineares

de \mathbb{C}^6 , sejam linearmente dependentes. Aplicando G^{-1} , temos que $\{x, G^{-1}Fx, (G^{-1}F)^2x\}$ é linearmente dependente.

Afirmção 1: $\{x, G^{-1}Fx, (G^{-1}F)^2x\} \subset G$.

De fato, é fácil ver que a reta gerada por x e $G^{-1}Fx$ está contida em G . Seja $y = G^{-1}Fx$. Então,

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu y)^t G(\lambda x + \mu y) &= \lambda^2 x^t G x + 2\lambda \mu x^t G y + \mu^2 (G^{-1}Fx)^t G(G^{-1}Fx) \\ &= \lambda^2 x^t G x + 2\lambda \mu x^t F x + \mu^2 x^t H x \\ &= 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Logo, $\overline{xy} \subset G$. Em particular, $y \in G$ e $(G^{-1}F)^2x \in G$.

Afirmção 2: $\{x, G^{-1}Fx, (G^{-1}F)^2x\} \subset F$.

Sabemos que $T_x F = T_y G$, pois $Fx = GG^{-1}Fx = Gy$. Então, $\{x, G^{-1}Fx\} \subset T_x F$, e o subespaço linear gerado por x e $G^{-1}Fx$ está contido em $T_x F$. Logo, $(G^{-1}F)^2x \in T_x F$. Mas,

$$(G^{-1}F)^2x \in T_x F \Rightarrow [(G^{-1}F)^2x]^t (Fx) = 0 \Rightarrow (x^t F G^{-1}) F(G^{-1}Fx) = 0 \Rightarrow G^{-1}Fx \in F.$$

Como $y = G^{-1}Fx \in F$, vamos mostrar que $\overline{xy} \subset F$.

$$(\lambda x + \mu y)^t F(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 x^t F x + 2\lambda \mu x^t F y + \mu^2 y^t F y = 0,$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Finalmente, seja $L = \langle \{x, G^{-1}Fx, (G^{-1}F)^2x\} \rangle \subset F \cap G$ e seja $M = G^{-1}F : L \rightarrow L$. Como M é um automorfismo de $L \simeq \mathbb{P}^1$, e todo automorfismo de \mathbb{P}^1 possui um ponto fixo. Então, existe $z \in L$, tal que $Mz = z$. Portanto, $Gz = Fz$, com $z \in F \cap G$, ou seja, $T_z G = T_z F$. Absurdo, porque X é suave. ■

Proposição 7.3. *Seja F uma quádrlica suave. Para todo $x \in \Sigma \setminus \text{Sing}(X)$, $Fx \in G \setminus \{x\}$. Além disso, a aplicação $\pi : \Sigma \setminus \text{Sing}(X) \rightarrow S$ é dada por*

$$\pi(x) = l_x \cap l_{Fx}.$$

Demonstração. Para demonstrar o resultado, usaremos as coordenadas de Klein, isto é, $G = I_6$. Devemos mostrar que $Fx \in G \setminus \{x\}$. Mas, pelo Lema 7.6, existe $y \in G \setminus \{x\}$, tal que $Fx = Gy = y$. Notemos que $x \in T_x F \cap G = T_y G \cap G$ e, pelo Lema 7.4, temos $\overline{xy} = \overline{xFx} \subset G$. Usando o Lema 3.7, existe um único ponto $p \in \mathbb{P}^3$, tal que $\overline{xFx} \subset \alpha(p)$, isto implica que $p \in l_x \cap l_{Fx}$. Para completar a demonstração mostremos que l_x é singular em p . De fato, se $y = Fx \in \alpha(p)$ então,

$$\alpha(p) = T_y \alpha(p) \subset T_y G = T_x F,$$

e, portanto, l_x é singular em p . ■

8 QUÁRTICAS SEMI-ESTAVEIS EM \mathbb{P}^3

Neste capítulo o objetivo é estudar a estabilidade das quárticas de \mathbb{P}^3 pela ação do grupo linear especial $SL(4)$.

Definição 8.1. Uma **superfície quártica**, ou simplesmente uma **quártica**, em \mathbb{P}^n é uma variedade projetiva dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 4 em $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$. Como no caso das quádricas, denotaremos uma superfície quártica e o polinômio homogêneo de grau 4 que a define com a mesma letra.

Focaremos nosso estudo nas quárticas em \mathbb{P}^3 . Então, a quártica estudada será da forma

$$S = \sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=4} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}. \quad (8.1)$$

Contando os coeficientes em (8.1), temos que o espaço projetivo \mathbb{P}^{34} parametriza as quárticas de \mathbb{P}^3 .

Definição 8.2. Dizemos que duas quárticas S e S' são isomorfas se existe um automorfismo de $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$, tal que $\varphi(S) = S'$.

Como o grupo dos automorfismos de \mathbb{P}^3 é isomorfo a $SL(4)$, temos que $SL(4)$ age linearmente no conjunto das quárticas, ou seja, no espaço projetivo \mathbb{P}^{34} que as parametriza, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} SL(4) \times \mathbb{P}^{34} &\rightarrow \mathbb{P}^{34} \\ (A, S) &\mapsto A(S). \end{aligned}$$

Com isso, temos bem definida a noção de semi-estabilidade de uma quártica em \mathbb{P}^3 .

Consideraremos a família de subgrupos a um parâmetro, $\lambda = \lambda_{r_0 r_1 r_2 r_3}$, definidos por:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C}^* &\rightarrow SL(4) \\ t &\mapsto \text{diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}), \end{aligned} \quad (8.2)$$

onde r_0, r_1, r_2, r_3 são inteiros tais que, $r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3$ e $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Esses subgrupos agem no espaço projetivo \mathbb{P}^{34} das quárticas em \mathbb{P}^3 como acima e, em particular, agem no monômio $X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$ de grau 4 por

$$\lambda(t)(X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}) = t^{-(r_0 i_0 + r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3)} X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}.$$

Definindo, para cada $S \in \mathbb{P}^{34}$,

$$\mu(S, \lambda) = \max\{r_0 i_0 + r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 : a_{i_0 i_1 i_2 i_3} \neq 0\},$$

como no critério de Hilbert-Mumford, temos o seguinte Lema.

Lema 8.1. *Dada uma quártica S , como em (8.1), existe um subgrupo a 1-parâmetro, $\lambda = \lambda_{r_0 r_1 r_2 r_3}$, tal que $\mu(S, \lambda) < 0$, se e somente se, os coeficientes $a_{i_0 i_1 i_2 i_3}$ satisfazem*

$$\begin{aligned} a_{4000} &= a_{3100} = a_{3010} = a_{3001} = a_{2200} = a_{2110} = a_{2101} = a_{2020} \\ &= a_{2011} = a_{2002} = a_{1300} = a_{1210} = a_{1201} = a_{1120} = a_{1111} = 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Demonstração. Suponhamos que exista $\lambda = \lambda_{r_0 r_1 r_2 r_3}$, tal que $\mu(S, \lambda) < 0$. Então, os coeficientes $a_{i_0 i_1 i_2 i_3}$ satisfazem (8.3). Por exemplo, se $a_{3100} \neq 0$ implicaria

$$\mu(S, \lambda) \geq 3r_0 + r_1 = 3r_0 - (r_0 + r_2 + r_3) = (r_0 - r_2) + (r_0 - r_3) \geq 0,$$

o que seria uma contradição. Se $a_{4000} \neq 0$ implicaria

$$\mu(S, \lambda) \geq 4r_0 \geq r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$

o que seria uma contradição. Similarmente, podemos verificar que os outros coeficientes são iguais a zero.

Reciprocamente, suponhamos que (8.3) é válido, então

$$S = \sum_{|I|=4} a_{0I} X^I + X_0(a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 + a_{1102} X_1 X_3^2),$$

onde $a_{jI} = a_{j i_1 i_2 i_3}$, $|I| = i_1 + i_2 + i_3$ e $X^I = X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$. Notemos que $i_0 \in \{0, 1\}$.

Sejam $r_0 = 8$, $r_1 = -1$, $r_2 = -3$, $r_3 = -4$, mostremos que $\mu(S, \lambda) = -1 < 0$

$$\mu(S, \lambda) = \max\{8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 : a_{i_0 i_1 i_2 i_3} \neq 0\}.$$

Caso 1: Se $i_0 = 0$, temos

$$8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -(i_1 + i_2 + i_3) - (2i_2 + 3i_3) \leq -4 - (2i_2 + 3i_3) < 0$$

Caso 2: Se $i_0 = 1$, temos 5 possibilidades,

$$a_{1030} \neq 0, 8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -1$$

$$a_{1003} \neq 0, 8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -4$$

$$a_{1012} \neq 0, 8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -3$$

$$a_{1021} \neq 0, 8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -2$$

$$a_{1102} \neq 0, 8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3 = -1.$$

Em ambos casos $8i_0 - i_1 - 3i_2 - 4i_3$ é negativo. E portanto $\mu(S, \lambda) = -1 < 0$. ■

Lema 8.2. *Uma quártica em \mathbb{P}^3 é não semi-estável com respeito à ação de $SL(4)$, se e somente se, é isomorfa a uma quártica satisfazendo (8.3).*

Demonstração. Seja S uma quártica não semi-estável com respeito à ação de $SL(4)$. Pelo critério de Hilbert-Mumford (Teorema A.1), existe $\lambda = \lambda_{r_0 r_1 r_2 r_3}$, como em (8.2), tal que $\mu(S_0, \lambda) < 0$. Então, pelo Lema 8.1, temos que S satisfaz (8.3).

Reciprocamente, seja S isomorfa a uma quártica S_0 satisfazendo (8.3). Pelo Lema 8.1, existe $\lambda = \lambda_{r_0 r_1 r_2 r_3}$, tal que $\mu(S, \lambda) = \mu(S_0, \lambda) < 0$. Logo, pelo critério de Hilbert-Mumford, S é não semi-estável. ■

Agora faremos um estudo das quárticas S . Seja

$$S = \sum_{|I|=4} a_{0I} X^I + X_0 \sum_{|I|=3} a_{1I} X^I + X_0^2 \sum_{|I|=2} a_{2I} X^I + X_0^3 \sum_{|I|=1} a_{3I} X^I + a_{4000} X_0^4, \quad (8.4)$$

onde $a_{jI} = a_{j i_1 i_2 i_3}$, $|I| = i_1 + i_2 + i_3$ e $X^I = X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}$.

Se usarmos as condições (8.3) em (8.4), veremos que S tem a forma

$$S = \sum_{|I|=4} a_{0I} X^I + X_0 (a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 + a_{1102} X_1 X_3^2). \quad (8.5)$$

Então, $p_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ é uma singularidade de S e p_0 tem como cone tangente a cúbica

$$TC(p_0) := a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 + a_{1102} X_1 X_3^2. \quad (8.6)$$

Mas, a cúbica $TC(p_0) \subset \mathbb{P}^3$ é um cone cuja diretriz é a curva plana de \mathbb{P}^2 dada por

$$\Theta = a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 + a_{1102} X_1 X_3^2.$$

Finalmente, notemos que $(1 : 0 : 0)$ é uma singularidade de Θ .

Desomogeneizando com respeito a X_1 , obtemos uma cúbica plana afim em \mathbb{C}^2 dada por

$$\theta(X_2, X_3) = a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 + a_{1102} X_3^2 = 0.$$

Veremos que dependendo do coeficiente a_{1102} , a cúbica afim será cuspidal ou degenerada. De fato,

i) se $a_{1102} = 0$,

$$\theta = a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 = 0$$

é uma forma binária de grau 3. Logo, Θ pode ser fatorada linearmente e, portanto, é uma cúbica afim degenerada.

ii) se $a_{1102} \neq 0$,

$$\theta = a_{1030} X_2^3 + a_{1003} X_3^3 + a_{1012} X_2 X_3^2 + a_{1021} X_2^2 X_3 + a_{1102} X_3^2 = 0$$

possui uma cúspide no ponto $(0, 0)$.

Como consequência temos o seguinte lema.

Lema 8.3. *A quártica S satisfaz (8.5), se e somente se, S possui um ponto triplo em $p_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ cujo cone tangente $TC(p_0)$ é*

$$TC(p_0) = a_{1030}X_2^3 + a_{1003}X_3^3 + a_{1012}X_2X_3^2 + a_{1021}X_2^2X_3 + a_{1102}X_1X_3^2.$$

A seguinte proposição permitirá mostrar que a instabilidade de uma quártica depende unicamente do tipo de singularidade que ela possui.

Proposição 8.1. *Seja S uma quártica em \mathbb{P}^3 . Então, S é semi-estável com respeito à ação de $SL(4)$, se e somente se, S não admite um ponto triplo cujo cone tangente é um cone que possui como diretriz uma cúbica cuspidal plana ou uma cúbica degenerada.*

Demonstração. Suponha S não semi-estável. Pelo Lema 8.2, S satisfaz (8.5) e pelo Lema 8.3, S possui um ponto triplo $p_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ cujo cone tangente é $TC(p_0)$. Além disso, a diretriz de $TC(p_0)$ é uma cúbica cuspidal plana ou uma cúbica degenerada.

Reciprocamente, já que toda cúbica plana irreduzível cuspidal são isomorfas, podemos supor que a quártica S é da forma (8.5), pois esta quártica satisfaz todas as hipótese. Pelo Lema 8.2, S não é semi-estável. ■

Mostraremos a seguir que o conjunto das quárticas de \mathbb{P}^3 isomorfas a uma quártica satisfazendo (8.3) é uma variedade quasi-projetiva.

Seja H o subespaço linear de \mathbb{P}^{34} dado por

$$\begin{aligned} H &= \{(a_{ijkl}) \in \mathbb{P}^{34} : a_{4000} = a_{3100} = a_{3010} = a_{3001} = a_{2200} = a_{2110} = a_{2101} \\ &= a_{2020} = a_{2011} = a_{2002} = a_{1300} = a_{1210} = a_{1201} = a_{1120} = a_{1111} = 0\} \end{aligned}$$

e seja ϕ o morfismo dado por

$$\begin{aligned} \phi : SL(4) \times H &\rightarrow \mathbb{P}^{34} \\ (A, S_0) &\mapsto A(S_0). \end{aligned}$$

Então, o conjunto das quárticas em \mathbb{P}^3 isomorfas a uma quártica satisfazendo (8.3) é a imagem de ϕ . Pelo Teorema de Chevalley para conjuntos construtíveis (ver [6], Ex.3.19, p.94), $\phi(SL(4) \times H)$ é uma variedade quasi-projetiva. Como consequência, temos que o conjunto das quárticas semi-estáveis, $Z = \mathbb{P}^{34} \setminus \phi(SL(4) \times H)$, é uma variedade quasi-projetiva (não necessariamente irreduzível).

Usaremos sem demonstrar que quárticas com o mesmo tipo de singularidade induzem uma estratificação de \mathbb{P}^{34} , e portanto de Z , em subconjuntos algébricos localmente fechados (não necessariamente irreduzíveis) e que a ação de $SL(4)$ se restringe a uma ação nesses estratos. Desde que a semi-estabilidade das quárticas depende somente do tipo de singularidade, chamaremos um estrato de semi-estável, se uma de suas quárticas o for.

Seja σ o símbolo de Segre satisfazendo (6.1) e (6.2), isto é, σ consiste de pelo menos três parênteses e não contém um parênteses de comprimento ≥ 4 . Segue das equações da forma normal das quárticas, dadas em [8] na Seção 7, que as quárticas que aparecem como superfícies singulares de complexos quadráticos com símbolo de Segre σ , possuem o mesmo tipo de singularidades. Seja $Z_\sigma \subset \mathbb{P}^{34}$ o correspondente estrato. Chamamos a quártica de Z_σ **superfície singular de tipo σ** .

Lema 8.4. *Seja σ o símbolo de Segre satisfazendo (6.1) e (6.2).*

- (a) *Os estratos Z_σ são subconjuntos localmente fechados do espaço projetivo \mathbb{P}^{34} .*
- (b) *Qualquer superfície singular S de um complexo quadrático do tipo σ é semi-estável com respeito à ação de $SL(4)$.*

Demonstração. Para a prova do item (a), ver [3], Corolários 0.2 e 0.3.

Para o item (b), temos, pela Proposição 8.1, que S não é semi-estável, se e somente se, admite um ponto triplo cujo cone tangente é um cone sobre uma cúbica cuspidal ou uma degeneração desta. Calculando, como no Capítulo 9 seção 9.3, as equações das superfícies singulares $S(X)$, para complexos X com símbolo de Segre σ , vemos que nenhuma delas é uma quártica como na Proposição 8.1. Portanto, são sempre semi-estáveis. ■

Teorema 8.1. *O espaço de moduli de superfícies singulares do tipo σ*

$$\mathcal{M}_{ss}(\sigma) = Z_\sigma / SL(4)$$

existe e é uma variedade quasi-projetiva.

Demonstração. De acordo com o Lema 8.4 todos os elementos de Z_σ são semi-estáveis. Então, $Z(\sigma)^{ss} = Z(\sigma)$ e, usando o Teorema 6.1, concluimos que existe o bom quociente $\mathcal{M}_{ss}(\sigma) = Z_\sigma / SL(4)$ e é uma variedade quasi-projetiva. ■

9 RELAÇÃO ENTRE $\mathcal{M}(\sigma)$ E $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$

Seja σ um símbolo de Segre satisfazendo (6.1) e (6.2), isto é, σ consiste de pelo menos 3 parênteses e não contém parênteses de comprimento ≥ 4 . No Teorema 6.2 mostramos a existência do espaço de Moduli $\mathcal{M}(\sigma)$ dos complexos de retas quadráticos do tipo σ e, no Teorema 8.1, mostramos a existência do espaço de Moduli $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$ das superfícies quárticas do tipo σ .

Sejam $R(\sigma)$ e Z_σ os espaços parametrizando complexos quadráticos e superfícies singulares do tipo σ , construídos nos Capítulos 6 e 8. Vimos no Capítulo 7 que podemos associar a cada complexo quadrático em $R(\sigma)$ uma superfície singular em Z_σ . Portanto, temos uma aplicação

$$\begin{aligned} \pi : R(\sigma) &\longrightarrow Z_\sigma \\ X = F \cap G &\longmapsto S(X), \end{aligned}$$

que certamente é um morfismo por (7.1). Vimos que os grupos $SO(G)$ e $SL(4)$ agem em $R(\sigma)$ e Z_σ , respectivamente, e certamente essas ações se fatoram via as ações de $PSO(G)$ e $PSL(4)$, respectivamente.

Veremos que existe um isomorfismo $\iota : PSO(G) \rightarrow PSL(4)$ tal que,

$$\pi(XA) = \iota(A)\pi(X), \quad \forall A \in SO(G) \text{ e } \forall X \in R(\sigma).$$

9.1 Isomorfismo entre $PSL(4)$ e $PSO(G)$

Sejam $V = \wedge^2 \mathbb{C}^4$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de \mathbb{C}^4 . Para $u, v \in V$, temos que $u \wedge v \in \wedge^4 \mathbb{C}^4$ e que $\wedge^4 \mathbb{C}^4$ é gerado por um único elemento $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, que denotaremos por e_{1234} . Logo, existe um único escalar $\langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$, tal que

$$u \wedge v = \langle u, v \rangle (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4).$$

Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Proposição 9.1. *A função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma bilinear simétrica não degenerada.*

Demonstração. É fácil ver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma bilinear simétrica. Mostremos que é não degenerada. De fato, se $u \wedge v_0 = 0$ para todo $u \in V$, em particular $v_0 \wedge v_0 = 0$. Então, v_0 é decomponível, isto é, existem $x, y \in \mathbb{C}^4$, tais que $v_0 = x \wedge y$. Suponhamos que $\{x, y\}$ é linearmente independente. Então, existem $z, w \in \mathbb{C}^4$ tais que $\{x, y, z, w\}$ é uma base \mathbb{C}^4 , ou seja,

$$z \wedge w \wedge x \wedge y \neq 0 \Rightarrow z \wedge w \wedge v_0 \neq 0,$$

o que é absurdo. Logo, $\{x, y\}$ é linearmente dependente e $v_0 = x \wedge y = 0$. ■

Seja $\rho : SL(4) \rightarrow GL(V)$, o homomorfismo de grupos definido por

$$\begin{aligned} \rho(g) : V &\rightarrow V \\ x \wedge y &\mapsto \rho(g)(x \wedge y) = g x \wedge g y, \end{aligned} \quad (9.1)$$

para todo $g \in SL(4)$.

Definimos o conjunto

$$SO(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \{A \in SL(V) : \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ para todo } u, v \in V\}.$$

É claro que $SO(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um subgrupo de $SL(V)$.

Proposição 9.2. *A imagem de ρ é um subgrupo de $SO(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Demonstração. Dados $g \in SL(4)$, e $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{C}^4$,

$$\begin{aligned} (\rho(g)(x_1 \wedge y_1)) \wedge (\rho(g)(x_2 \wedge y_2)) &= (g x_1 \wedge g y_1) \wedge (g x_2 \wedge g y_2) \\ &= \det(g)(x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2) \\ &= x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2 \\ &= \langle x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2 \rangle e_{1234} \end{aligned}$$

pois $\det(g) = 1$. Como,

$$(\rho(g)(x_1 \wedge y_1)) \wedge (\rho(g)(x_2 \wedge y_2)) = \langle \rho(g)(x_1 \wedge y_1), \rho(g)(x_2 \wedge y_2) \rangle e_{1234}$$

então,

$$\langle \rho(g)(x_1 \wedge y_1), \rho(g)(x_2 \wedge y_2) \rangle = \langle x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2 \rangle. \quad (9.2)$$

Concluimos que,

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ para todo } u, v \in V,$$

pois todo elemento de V se escreve como combinação linear de vetores da forma $x \wedge y \in V$ (decomponíveis) que satisfazem a equação (9.2). ■

O homomorfismo ρ leva uma matriz de ordem 4×4 para uma matriz de ordem 6×6 da seguinte forma.

Seja $g \in SL(4)$ e $[a_{ij}]$ a matriz associada a g na base canônica. Então,

$$g e_j = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + a_{3j} e_3 + a_{4j} e_4, \quad \forall j = 1, 2, 3, 4.$$

A base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de \mathbb{C}^4 induz uma base $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ de $V = \wedge^2 \mathbb{C}^4$, onde $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, para $1 \leq i < j \leq 4$ e

$$\rho(g)(e_{ij}) = g e_i \wedge g e_j = \left(\sum_{p=1}^4 a_{pi} e_p \right) \wedge \left(\sum_{q=1}^4 a_{qj} e_q \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \begin{vmatrix} a_{pi} & a_{pj} \\ a_{qi} & a_{qj} \end{vmatrix} e_{pq}.$$

Denotaremos $A_{ij}^{pq} = \begin{vmatrix} a_{pi} & a_{pj} \\ a_{qi} & a_{qj} \end{vmatrix}$. Logo, podemos escrever

$$\rho(g)(e_{ij}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} A_{ij}^{pq} e_{pq} = A_{ij}^{12} e_{12} + A_{ij}^{13} e_{13} + A_{ij}^{14} e_{14} + A_{ij}^{23} e_{23} + A_{ij}^{24} e_{24} + A_{ij}^{34} e_{34}$$

Seja $[\rho(g)]$ a matriz associada à aplicação linear $\rho(g)$ na base $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$, isto é,

$$[\rho(g)] = \begin{bmatrix} A_{12}^{12} & A_{13}^{12} & A_{14}^{12} & A_{23}^{12} & A_{24}^{12} & A_{34}^{12} \\ A_{12}^{13} & A_{13}^{13} & A_{14}^{13} & A_{23}^{13} & A_{24}^{13} & A_{34}^{13} \\ A_{12}^{14} & A_{13}^{14} & A_{14}^{14} & A_{23}^{14} & A_{24}^{14} & A_{34}^{14} \\ A_{12}^{23} & A_{13}^{23} & A_{14}^{23} & A_{23}^{23} & A_{24}^{23} & A_{34}^{23} \\ A_{12}^{24} & A_{13}^{24} & A_{14}^{24} & A_{23}^{24} & A_{24}^{24} & A_{34}^{24} \\ A_{12}^{34} & A_{13}^{34} & A_{14}^{34} & A_{23}^{34} & A_{24}^{34} & A_{34}^{34} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz satisfaz

$$[\rho(g)]^t G [\rho(g)] = G, \text{ para todo } g \in SL(4),$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

Logo, $\det([\rho(g)])$ é igual a 1 ou -1 , pois $\det(G) = -1$.

Proposição 9.3. *O núcleo de ρ é $\{-I_4, I_4\}$.*

Demonstração. Se $[\rho(g)] = I_6$, temos que $A_{12}^{12} = 1$ e $A_{pq}^{12} = 0$ se $p \neq 1$ ou $q \neq 2$.

Então, $[g]$ tem as formas

$$\begin{bmatrix} \alpha & \theta & r\alpha & s\alpha \\ \beta & \delta & r\beta & s\beta \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \theta & r_1\theta & s_1\theta \\ \beta & \delta & r_1\delta & s_1\delta \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Igualando as duas últimas matrizes e usando $\alpha\delta - \beta\theta = 1$, temos que $[g]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \theta & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Agora, usamos que $A_{12}^{12} = 1$ e $A_{12}^{ij} = 0$, se $i \neq 1$ ou $j \neq 2$, e obtemos

$$[g] = \begin{bmatrix} \alpha & \theta & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Usando $A_{14}^{13} = 0$, $A_{13}^{14} = 0$, $A_{13}^{13} = 1$ e $A_{14}^{14} = 1$, concluimos que

$$[g] = \begin{bmatrix} \alpha & \theta & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, usando $A_{23}^{23} = 1$ e $A_{23}^{13} = A_{13}^{23} = 0$ temos

$$[g] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}.$$

usando $A_{12}^{12} = \alpha^2 = 1$, concluimos que

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■

Lema 9.1. *Seja B uma matriz quadrada de ordem 4*

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

e seja \hat{B} a matriz obtida pelos menores 2×2 de B .

Dada por

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_{12}^{12} & B_{13}^{12} & B_{14}^{12} & B_{23}^{12} & B_{24}^{12} & B_{34}^{12} \\ B_{12}^{13} & B_{13}^{13} & B_{14}^{13} & B_{23}^{13} & B_{24}^{13} & B_{34}^{13} \\ B_{12}^{14} & B_{13}^{14} & B_{14}^{14} & B_{23}^{14} & B_{24}^{14} & B_{34}^{14} \\ B_{12}^{23} & B_{13}^{23} & B_{14}^{23} & B_{23}^{23} & B_{24}^{23} & B_{34}^{23} \\ B_{12}^{24} & B_{13}^{24} & B_{14}^{24} & B_{23}^{24} & B_{24}^{24} & B_{34}^{24} \\ B_{12}^{34} & B_{13}^{34} & B_{14}^{34} & B_{23}^{34} & B_{24}^{34} & B_{34}^{34} \end{bmatrix},$$

onde $B_{ij}^{pq} = \begin{vmatrix} b_{pi} & b_{pj} \\ b_{qi} & b_{qj} \end{vmatrix}$, $1 \leq p < q \leq 4$ e $1 \leq i < j \leq 4$.

Se a determinante da matriz B é igual a 1, então $\det(\widehat{B}) = 1$

Proposição 9.4. *A imagem de ρ é $SO(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Demonstração. Já provamos uma inclusão. Agora mostremos a outra. Seja $A \in SO(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Pela Observação 3.1, temos que $A(x \wedge y)$ é decomponível. De fato,

$$\begin{aligned} A(x \wedge y) \wedge A(x \wedge y) &= \langle A(x \wedge y), A(x \wedge y) \rangle e_{1234} \\ &= \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle e_{1234} \\ &= x \wedge y \wedge x \wedge y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então, usando o mergulho de Plücker, podemos considerar $A(x \wedge y)$, como uma reta de \mathbb{P}^3 . É fácil ver que

Afirmção 1: $A(e_{i_1 j_1}) \cap A(e_{i_2 j_2})$ é um ponto, se $\#\{i_1, j_1, i_2, j_2\} = 3$

Mostraremos que $A(e_{12}) \cap A(e_{13})$ é um ponto. Sejam $A(e_{12}) = x \wedge y$ e $A(e_{13}) = z \wedge w$ para alguns x, y, z, w . Podemos considerar que A leva a reta $\overline{e_1 e_2}$ à reta \overline{xy} e a reta $\overline{e_1 e_3}$ à reta \overline{zw} .

Então,

$$\begin{aligned} x \wedge y \wedge z \wedge w &= A(e_{12}) \wedge A(e_{13}) = \langle A(e_{12}), A(e_{13}) \rangle e_{1234} \\ &= \langle e_{12}, e_{13} \rangle e_{1234} = e_{12} \wedge e_{13} \\ &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\{x, y, z, w\}$ é linearmente dependente e a dimensão do espaço gerado por $\{x, y, z, w\}$ é 2 ou 3. Se $\dim\langle x, y, z, w \rangle = 2$, então os espaços $\langle x, y \rangle$ e $\langle z, w \rangle$ são iguais, isto implica que $\overline{xy} = \overline{zw}$. O que é absurdo, pois A leva retas diferentes a retas diferentes. Finalmente, a $\dim\langle x, y, z, w \rangle = 3$ e os espaços $\langle x, y \rangle$, $\langle z, w \rangle$ se intersectam em um espaço de dimensão 1. E portanto, $\overline{xy} \cap \overline{zw}$ é um ponto.

Afirmção 2: $A(e_{i_1 j_1}) \cap A(e_{i_2 j_2})$ é vazio, se $\#\{i_1, j_1, i_2, j_2\} = 4$.

Mostraremos que $A(e_{12}) \cap A(e_{34})$ é vazio. Sejam $A(e_{12}) = x \wedge y$ e $A(e_{34}) = z \wedge w$ para alguns x, y, z, w . Então,

$$\begin{aligned} x \wedge y \wedge z \wedge w &= A(e_{12}) \wedge A(e_{34}) = \langle A(e_{12}), A(e_{34}) \rangle e_{1234} \\ &= \langle e_{12}, e_{34} \rangle e_{1234} = e_{12} \wedge e_{34} \\ &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = e_{1234}. \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\{x, y, z, w\}$ é linearmente independente e a dimensão do espaço gerado por $\{x, y, z, w\}$ é 4. Logo, a interseção dos espaços $\langle x, y \rangle$, $\langle z, w \rangle$ é $\{0\}$. E portanto, $\overline{xy} \cap \overline{zw}$ é vazio.

Afirmação 3: $A(e_{ij_1}) \cap A(e_{ij_2}) \cap A(e_{ij_3})$ é um ponto, se $\#\{i, j_1, j_2, j_3\} = 4$.

Mostraremos que $A(e_{12}) \cap A(e_{13}) \cap A(e_{14})$ é um ponto. Para isso, notemos que as retas $\overline{e_1 e_2}$, $\overline{e_1 e_3}$ e $\overline{e_1 e_4}$ geram um α -plano $\alpha(e_1)$ e a imagem de $\alpha(e_1)$ pela aplicação A , $A(\alpha(e_1))$, é um plano de $Gr(1, \mathbb{P}^3)$. Pelo Lema 3.3, $A(\alpha(e_1))$ é um α -plano ou um β -plano.

Supondo que $A(\alpha(e_1))$ é um β -plano. Então existem diferentes pontos $x, y, z \in \mathbb{C}^4$, tais que, $A(e_{12}) = x \wedge y$, $A(e_{13}) = x \wedge z$ e $A(e_{14}) = y \wedge z$. Observemos que a interseção destas retas $A(e_{12})$, $A(e_{13})$ e $A(e_{14})$ é vazio. Pelas afirmações 1 e 2, existe um $w \in \mathbb{C}^4$ tal que $A(e_{23}) = x \wedge w$, $A(e_{24}) = y \wedge w$ e $A(e_{34}) = z \wedge w$.

Sabemos que $\{x, y, z, w\}$ é uma base de \mathbb{C}^4 , pois

$$x \wedge y \wedge z \wedge w = A(e_{12}) \wedge A(e_{34}) = e_{12} \wedge e_{34} = e_{1234} \neq 0.$$

Daqui, existe um $g \in GL(4)$ tal que $ge_1 = x$, $ge_2 = y$, $ge_3 = z$ e $ge_4 = w$. Além disso, $\det g = 1$, pois

$$\det(g)e_{1234} = ge_1 \wedge ge_2 \wedge ge_3 \wedge ge_4 = x \wedge y \wedge z \wedge w = A(e_{12}) \wedge A(e_{34}) = e_{12} \wedge e_{34} = e_{1234}.$$

Seja

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}$$

a matriz de g associada à base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Vemos que a matriz associada a A na base $\{e_{12}, \dots, e_{34}\}$, é obtida de \widehat{B} (ver Lema 9.1) trocando a linha 3 e 4. Então, $1 = \det(A) = -\det(\widehat{B})$, isto é uma contradição, pois pelo Lema 9.1 a $\det(\widehat{B}) = 1$.

Finalmente, $A(\alpha(e_1))$ é um α -plano. E a interseção de $A(e_{12})$, $A(e_{13})$ e $A(e_{14})$ é um ponto.

Sejam $p, q, r, s \in \mathbb{C}^4$ tais que

$$\begin{aligned} \{p\} &= A(e_{12}) \cap A(e_{13}) \cap A(e_{14}), & \{q\} &= A(e_{12}) \cap A(e_{23}) \cap A(e_{24}), \\ \{r\} &= A(e_{13}) \cap A(e_{23}) \cap A(e_{34}), & \{s\} &= A(e_{14}) \cap A(e_{24}) \cap A(e_{34}). \end{aligned}$$

É possível mostrar que p, q, r e s são linearmente independentes e que

$$\begin{aligned} A(e_{12}) &= p \wedge q, & A(e_{13}) &= p \wedge r, \\ A(e_{14}) &= p \wedge s, & A(e_{23}) &= q \wedge r, \\ A(e_{24}) &= q \wedge s, & A(e_{34}) &= r \wedge s. \end{aligned}$$

Seja $g : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, a única transformação linear tal que $g(e_1) = p$, $g(e_2) = q$, $g(e_3) = r$ e $g(e_4) = s$. Então, $\rho(g) = A$ e ρ é sobrejetora. ■

Observação 9.1. A matriz que representa a forma bilinear $\langle \ , \ \rangle$ na base $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ é a matriz (9.3) que também representa $Gr(1, \mathbb{P}^3)$ nas coordenadas de Plúcker, por isso, $SO(\langle \ , \ \rangle) = SO(G)$

Lema 9.2. *Os grupos $PSO(G)$ e $PSL(4)$ são isomorfos.*

Demonstração. Temos que $PSL(4) = SL(4)/\{-I_4, I_4\}$ e $PSO(G) = SO(G)$. Pelo Teorema dos Isomorfismos para grupos aplicado a ρ o resultado segue. ■

9.2 Relação entre $\mathcal{M}(\sigma)$ e $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$

Seja $\iota : PSO(G) \rightarrow PSL(4)$, o isomorfismo dado no Lema (9.2). Então, ι é tal que

$$A(\alpha(p)) = \alpha(gp), \text{ para todo } A \in SO(G) \text{ e } g = \iota(A).$$

Lema 9.3. *O morfismo $\pi : R(\sigma) \rightarrow Z_\sigma$ é equivariante com respeito às ações de $PSO(G)$ e $PSL(4)$, i.e.*

$$\pi(X \cdot A) = \iota(A) \cdot \pi(X),$$

para todo $A \in PSO(G)$ e $X \in R(\sigma)$.

Demonstração. Sejam $X = F \cap G$ e $A \in PSO(G)$. Então,

$$\pi(XA) := \pi((A^tFA) \cap G) = S(XA) := \{p \in \mathbb{P}^3 : rk(\alpha(p) \cap (A^tFA)) \leq 2\}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \alpha(p) \cap (A^tFA) &= \{Z \in \alpha(p) : Z^t A^t F A Z = 0\} = \{Z \in \alpha(p) : (AZ)^t F (AZ) = 0\} \\ &= \{A^{-1}Z' \in \alpha(p) : (Z')^t F (Z') = 0\} = A^{-1}(\alpha(p)) \cap F = \alpha(g^{-1}p) \cap F. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi(XA) &= \{p \in \mathbb{P}^3 : rk(\alpha(p) \cap (A^tFA)) \leq 2\} \\ &= \{p \in \mathbb{P}^3 : rk(\alpha(g^{-1}p) \cap F) \leq 2\} \\ &= \{gq \in \mathbb{P}^3 : rk(\alpha(q) \cap F) \leq 2\} \\ &= g(\{q \in \mathbb{P}^3 : rk(\alpha(q) \cap F) \leq 2\}) = g(S(X)) = g(\pi(X)). \end{aligned}$$

■

O Lema 9.3 implica que a aplicação $\pi : R(\sigma) \rightarrow Z_\sigma$ induz um morfismo dos correspondentes espaços de Moduli, que denotamos pela mesma letra,

$$\pi : \mathcal{M}(\sigma) \rightarrow \mathcal{M}_{ss}(\sigma).$$

Definição 9.1. Dois complexos quadrático X e X' em $\mathcal{M}(\sigma)$ são chamados **cosingulares** se as suas superfícies singulares são isomorfas, isto é, se $\pi(X) = \pi(X')$. A variedade $CS(X)$ de complexos quadráticos cosingulares a X é por definição a fibra da superfície $\pi(X)$ pelo morfismo π .

$$CS(X) := \pi^{-1}(\pi(X))$$

No caso genérico $\sigma = [111111]$, a variedade $CS(X)$ foi estudada por Klein em [9]. Na próxima seção apresentaremos as superfícies singulares para complexos quadráticos com determinados símbolos de Segre σ .

A tabela a seguir pode ser encontrada em [1].

Tabela 2 – Moduli

	Símbolo de Segre σ	$\dim \mathcal{M}_{qc}(\sigma)$	$\dim \mathcal{M}_{ss}(\sigma)$
1	[1 1 1 1 1 1]	4	3
2	[2 1 1 1 1]	3	2
3	[3 1 1 1]	2	1
4	[4 1 1]	1	0
5	[2 2 1 1]	2	1
6	[3 2 1]	1	0
7	[2 2 2]	1	0
8	[(1 1) 1 1 1 1]	3	2
9	[(1 1) 2 1 1]	2	1
10	[(1 1) 3 1]	1	0
11	[(1 1) 2 2]	1	0
12	[(2 1) 1 1 1]	2	1
13	[(2 1) 2 1]	1	0
14	[(3 1) 1 1]	1	0
15	[(2 2) 1 1]	1	0
16	[(1 1) (1 1) 1 1]	2	1
17	[(1 1) (1 1) 2]	1	0
18	[(2 1) (1 1) 1]	1	0
19	[(1 1) (1 1) (1 1)]	1	0
20	[(1 1 1) 1 1 1]	2	0
21	[(1 1 1) (1 1) 1]	1	0
22	[(1 1 1) 2 1]	1	0
23	[(2 1 1) 1 1]	1	0

9.3 Algumas superfícies singulares

Nesta seção determinaremos as superfícies singulares para alguns símbolos de Segre.

Sejam $p = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$ um ponto de \mathbb{P}^3 e $(z_{12} : z_{13} : z_{14} : z_{23} : z_{24} : z_{34})$ as coordenadas de Plücker de $Gr(1, \mathbb{P}^3)$. Dado $x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^3$, tal que $x \neq p$, temos que os menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

definem o α -plano $\alpha(p)$. Logo, $z_{ij} = p_i x_j - p_j x_i$, para $1 \leq i < j \leq 4$ e $(z_{ij}) \in \alpha(p)$.

Temos ainda que $(z_{ij}) \in \alpha(p)$, se e somente se, satisfazem as seguintes equações

$$p_2 z_{34} - p_3 z_{24} + p_4 z_{23} = 0 \quad (9.5)$$

$$p_1 z_{34} - p_3 z_{14} + p_4 z_{13} = 0 \quad (9.6)$$

$$p_1 z_{24} - p_2 z_{14} + p_4 z_{12} = 0 \quad (9.7)$$

$$p_1 z_{23} - p_2 z_{13} + p_3 z_{12} = 0 \quad (9.8)$$

Essas equações são linearmente dependentes, já que

$$p_1(9.5) - p_2(9.6) + p_3(9.7) - p_4(9.8) = 0,$$

embora três delas são sempre linearmente independentes.

Sem perda de generalidade, trabalharemos com as últimas três equações. Então,

$$p_1 z_{34} = p_3 z_{14} - p_4 z_{13}$$

$$p_1 z_{24} = p_2 z_{14} - p_4 z_{12}$$

$$p_1 z_{23} = p_2 z_{13} - p_3 z_{12}.$$

Fazendo $p_1 = 1$, temos que um ponto em $\alpha(p)$, representado como vetor, é da forma

$$\begin{pmatrix} z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{23} & z_{24} & z_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12} & z_{13} & z_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_3 & -p_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 & 0 & -p_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo,

$$X_P = \begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{13} \\ z_{14} \\ z_{23} \\ z_{24} \\ z_{34} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_P = \begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{13} \\ z_{14} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_3 & p_2 & 0 \\ -p_4 & 0 & p_2 \\ 0 & -p_4 & p_3 \end{pmatrix},$$

temos

$$X_P = B \tilde{X}_P.$$

Exemplo 9.1. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(11)22]$.

Acharemos a equação da quártica associada ao símbolo de Segre σ .

O símbolo de Segre $\sigma = [(11)22]$ está associado, na forma normal, às seguintes matrizes:

$$G_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F_N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz que muda das coordenadas de Segre (forma normal) para as coordenadas de Plücker é:

$$R_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2i & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e então,

$$G_P = R_i^t G_N R_i \text{ e } F_P = R_i^t F_N R_i,$$

onde

$$G_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a quádrlica de Plücker e

$$F_P = R_i^t F_N R_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular a matriz que representa a cônica $F_P \cap \alpha(p)$, seja $X_P \in F_P \cap \alpha(p)$. Logo, X_P satisfaz $X_P = B\tilde{X}_P$ e $X_P^t F_P X_P = 0$. Isto é,

$$\tilde{X}_P^t B^t F_P B \tilde{X}_P = 0$$

assim obtemos uma cônica cuja matriz associada é $B^t F_P B$. Denotemos $D = B^t F_P B$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_3 & -p_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 & 0 & -p_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_3 & p_2 & 0 \\ -p_4 & 0 & p_2 \\ 0 & -p_4 & p_3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -p_4^2 & \lambda_3 p_4 - \lambda_1 p_4 & \lambda_1 p_3 - \lambda_2 p_3 + p_2 p_4 \\ \lambda_3 p_4 - \lambda_1 p_4 & 0 & \lambda_2 p_2 - \lambda_3 p_2 \\ \lambda_1 p_3 - \lambda_2 p_3 + p_2 p_4 & \lambda_2 p_2 - \lambda_3 p_2 & 1 - p_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(D) &= -2\lambda_1^2\lambda_2p_2p_3p_4 + 2\lambda_1^2\lambda_3p_2p_3p_4 + \lambda_1^2p_2^2p_4^2 - \lambda_1^2p_4^2 + \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_2^2p_2p_3p_4 - 2\lambda_1\lambda_2p_2^2p_4^2 - 2\lambda_1\lambda_3^2p_2p_3p_4 + \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_3p_4^2 - 2\lambda_2^2\lambda_3p_2p_3p_4 + \lambda_2^2p_2^2p_4^2 + 2\lambda_2\lambda_3^2p_2p_3p_4 - \lambda_3^2p_4^2.\end{aligned}$$

Agrupando,

$$\det(D) = 2(-\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3^2)p_2p_3p_4 + (\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)p_2^2p_4^2 - (\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2)p_4^2$$

$$\det(D) = 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)p_2p_3p_4 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2p_2^2p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2p_4^2.$$

Homogeneizando,

$$2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)p_1p_2p_3p_4 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2p_2^2p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2p_1^2p_4^2.$$

Finalmente, a quártica associada ao símbolo de Segre σ é:

$$S(\sigma) = 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)p_1p_2p_3p_4 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2p_2^2p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2p_1^2p_4^2.$$

Exemplo 9.2. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(3\ 1)\ 1\ 1]$.

Fazendo as respectivas contas para $\sigma = [(3\ 1)\ 1\ 1]$, temos

$$S(\sigma) = \frac{1}{4}(\lambda_2 - \lambda_1)(p_1^4 + p_2^4) - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)p_1^2p_2^2 + i(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(2p_1p_4 + p_2p_3)p_1p_2.$$

Exemplo 9.3. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(2\ 1)\ (1\ 1)\ 1]$.

$$S(\sigma) = (\lambda_1 - \lambda_3)\left(-\frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(p_2p_3 - 2p_1p_4)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p_3^2p_4^2\right)$$

Exemplo 9.4. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$.

$$S(\sigma) = -\frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(2p_1p_4 - p_2p_3)^2$$

Exemplo 9.5. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(2\ 1\ 1)\ 1\ 1]$.

$$S(\sigma) = -(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_3^2p_4^2$$

Exemplo 9.6. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [4\ 1\ 1]$.

$$S(\sigma) = (\lambda_2 - \lambda_1)\left(\frac{1}{2}p_1^3p_3 - p_4^4\right) - (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(p_1p_2^2 + 2p_3p_4^2)p_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)p_1^2p_2p_4 - p_1^2p_4^2$$

Exemplo 9.7. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [3\ 2\ 1]$.

$$\begin{aligned}S(\sigma) &= -\frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)^2(2p_1p_4 - p_2p_3)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)i(2p_1p_4 + p_2p_3)p_1p_2 + \\ &\quad + (\lambda_1 - \lambda_3)ip_2^3p_4 + (\lambda_1 - \lambda_2)p_1^2p_2^2 - \frac{1}{4}p_2^4\end{aligned}$$

Exemplo 9.8. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [2\ 2\ 2]$.

$$S(\sigma) = (\lambda_2 - \lambda_3)^2p_2^2p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2p_1^2p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2p_1^2p_2^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_1p_2p_3p_4$$

Exemplo 9.9. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(1\ 1)\ 3\ 1]$.

$$S(\sigma) = -\frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)^2(2p_1p_4 - p_2p_3)^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(p_1p_3 + 2p_2p_4)(p_2^2 + p_4^2) - \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)(p_1^2 + p_2^2)^2$$

Exemplo 9.10. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(2\ 1)\ 2\ 1]$.

$$S(\sigma) = -\frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)^2(p_1p_2 + 2p_3p_4)^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_1^2p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p_4^4$$

Exemplo 9.11. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(2\ 2)\ 1\ 1]$.

$$S(\sigma) = -p_4^2((\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_1^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)p_4^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_2^2)$$

Exemplo 9.12. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(1\ 1)\ (1\ 1)\ 2]$.

$$S(\sigma) = p_3p_4(\lambda_1 - \lambda_2)(2(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_1p_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p_3p_4)$$

Exemplo 9.13. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(1\ 1)\ (1\ 1)\ (1\ 1)]$.

$$S(\sigma) = 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)p_1p_2p_3p_4$$

Exemplo 9.14. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(1\ 1\ 1)\ (1\ 1)\ 1]$.

$$S(\sigma) = -\frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)^2(2p_1p_4 - p_2p_3)^2$$

Exemplo 9.15. Superfície quártica associado ao símbolo de Segre $\sigma = [(1\ 1\ 1)\ 2\ 1]$.

$$S(\sigma) = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)^2(p_1p_3 + 2p_2p_4)^2$$

REFERÊNCIAS

- [1] AVRITZER, D.; LANGE, H. Moduli spaces of quadratic complexes and their singular surfaces. *Geometriae Dedicata*, v. 127, p.177-197, 2007.
- [2] BOREL, A. *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969.
- [3] FLENNER, H.; KOSAREW, S. Families of varieties with prescribed singularities. *RIMS*, 23, 627-665, 1987.
- [4] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
- [5] HARRIS, J. *Algebraic Geometry - A First Course*, Springer-Verlag, 1995.
- [6] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*, Springer, 1997.
- [7] HODGE, W.V.D.; PEDOE, D. *Method of Algebraic Geometry*, vol. II, Cambridge Univ. Press, 1952.
- [8] JESSOP, C.M. *A Treatise on the Line Complex*, Cambridge Univ. Press, 1903.
- [9] KLEIN, F. Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. *Math. Ann.*, 2, 1870.
- [10] LANG, S. *Linear Algebra*, Springer-Verlag, third edition, 1987.
- [11] MUMFORD, D.; FOGARTY, J. *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, 1982.
- [12] NEWSTEAD, P.E. *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Springer-Verlag, 1978.
- [13] SHAFAREVICH, I.R. *Basic Algebraic Geometry*, vol. I, Springer-Verlag, 1994.
- [14] SILVA, W.F.V. Moduli de Feixes de Quádricas e de Formas Binárias, 2012. Disponível em www.ufjf.br/mestrdomatematica/files/2012/03/Dissertação-William.pdf

APÊNDICE A – AÇÃO DE GRUPOS

Apresentaremos aqui os principais resultados sobre ação de um grupo em uma variedade projetiva que serão usados na construção dos espaços de Moduli.

Definição A.1. Uma ação de um grupo algébrico \mathcal{G} em uma variedade X é um morfismo

$$\begin{aligned}\varphi: \mathcal{G} \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x)\end{aligned}$$

satisfazendo, $\forall g, g' \in \mathcal{G}$ e $\forall x \in X$,

- i) $\varphi(g, \varphi(g', x)) = \varphi(gg', x)$
- ii) $\varphi(e, x) = x$, onde e é a identidade do grupo \mathcal{G} .

Por comodidade, denotaremos $\varphi(g, x)$ por gx .

Observação A.1. Se somos rigurosos, podemos dizer que a definição anterior é uma ação de grupos algébrico pela esquerda.

Analogamente, podemos definir uma ação de grupos algébrico pela direita. Isto é,

$$\begin{aligned}\varphi: X \times \mathcal{G} &\rightarrow X \\ (x, g) &\mapsto \varphi(x, g)\end{aligned}$$

satisfazendo, $\forall g, g' \in \mathcal{G}$ e $\forall x \in X$,

- i) $\varphi(\varphi(x, g'), g) = \varphi(x, g'g)$
- ii) $\varphi(x, e) = x$, onde e é a identidade do grupo \mathcal{G} .

A **órbita** de um ponto $x \in X$ é o conjunto $O(x) := \{gx : g \in \mathcal{G}\}$ e o **estabilizador** de $x \in X$ é o conjunto $Stab(x) := \{g \in \mathcal{G} : gx = x\}$.

Um conjunto $Y \subset X$ é chamado **invariante** pela ação de \mathcal{G} , ou **\mathcal{G} -invariante**, se $gy \in Y$ para todo $g \in \mathcal{G}$ e $y \in Y$.

Um homomorfismo de grupos a $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow GL_n$ é chamado de **representação racional** de \mathcal{G} .

Uma representação racional de um grupo algébrico \mathcal{G} , $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow GL_n$, induz uma ação de \mathcal{G} em k^n dada por

$$\begin{aligned}\psi: \mathcal{G} \times k^n &\rightarrow k^n \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g)x\end{aligned}$$

chamada de **ação linear** de \mathcal{G} em k^n .

Uma **linearização** de uma ação $\sigma: \mathcal{G} \times X \rightarrow X$, de um grupo algébrico \mathcal{G} em uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$, é uma ação linear de \mathcal{G} em k^{n+1} , induzida por uma representação racional $\rho: \mathcal{G} \rightarrow GL_{n+1}$ de \mathcal{G} , tal que

$$\sigma(g, x) = \rho(g)\hat{x}, \forall g \in \mathcal{G} \text{ e } \forall x \in X,$$

onde \hat{x} é um representante de x em $k^{n+1} \setminus \{0\}$.

Definição A.2. Uma ação linear de um grupo \mathcal{G} em uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma ação de \mathcal{G} em X junto com a sua linearização. Neste caso, dizemos que \mathcal{G} age linearmente em X .

Exemplo A.1. O grupo $SO(G)$ age linearmente na variedade LC .

Definição A.3. Um grupo algébrico linear \mathcal{G} é *reduutivo* se para toda ação linear de \mathcal{G} em k^n e para todo $v \in k^n$, $v \neq 0$, existir um polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 tal que $f(v) \neq 0$.

Proposição A.1. Os grupos $GL(k)$, $SL_n(k)$ e $PGL_n(k)$ são grupos redutivos.

Demonstração. Ver [12], página 50. ■

Definição A.4. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e \mathcal{G} um grupo algébrico reduutivo agindo linearmente em X . Se $x \in X$ e $\hat{x} \in k^{n+1}$ é um representante de x , dizemos que:

- i) x é semi-estável se $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$;
- ii) x é estável se $O(\hat{x})$ é fechada e $\mathcal{G}_{\hat{x}}$ é finito.

Um ponto $x \in X$ é dito **instável** se x não é semi-estável.

Definição A.5. Seja \mathcal{G} um grupo reduutivo agindo linearmente numa variedade $X \subset \mathbb{P}^n$. Denotaremos por X^{ss} o conjunto dos pontos semi-estáveis de X e por X^s o conjunto dos pontos estáveis de X .

Lema A.1. Os conjuntos X^{ss} e X^s são abertos em X .

Demonstração. Ver [12], Lema 3.13, p.74. ■

Definição A.6. Seja \mathcal{G} um grupo algébrico. Um homomorfismo de grupos algébricos não trivial $\lambda : k^* \rightarrow \mathcal{G}$ é chamado de *subgrupo a um parâmetro* (1-PS) de \mathcal{G} .

Se \mathcal{G} age linearmente em uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$, então existe uma representação racional $\rho : \mathcal{G} \rightarrow GL_{n+1}$ tal que

$$gx = \rho(g)\hat{x},$$

onde \hat{x} é um representante de x . Então, dado λ 1-PS e $v \in k^{n+1}$ podemos considerar o morfismo induzido

$$\begin{aligned} \lambda_v : k^* &\rightarrow k^{n+1} \\ t &\mapsto \rho(\lambda(t))v \end{aligned}$$

Por abuso de notação, escreveremos $\lambda(t)$ para representar o elemento $\rho(\lambda(t)) \in GL_{n+1}(k)$.

Se $v \neq 0$, existe um único inteiro μ e polinômios $F_0, \dots, F_n \in k[t]$, com $F_i \neq 0$, para algum i , tais que

$$\lambda_v(t) = \frac{1}{t^\mu} (F_0(t), \dots, F_n(t)). \tag{A.1}$$

Como \mathcal{G} age linearmente em k^{n+1} , o inteiro μ não muda se mudarmos v para cv , com $c \neq 0$.

Definição A.7. Seja \mathcal{G} um grupo agindo linearmente em uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ e seja \hat{x} um representante em k^{n+1} do ponto $x \in X$. O inteiro μ dado em (A.1) será denotado por $\mu(x, \lambda)$.

Observação A.2. Segue da definição que $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Proposição A.2. *Seja λ 1-PS. A ação induzida por λ em k^{n+1} pode ser diagonalizada, isto é, existem inteiros l_1, \dots, l_{m+1} tais que*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{l_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{l_{m+1}} \end{pmatrix}$$

Demonstração. Ver [2], p.86. ■

Observação A.3. Em particular, para $G = SL_n(K)$, é sabido que todo 1-PS é conjugado a um da forma

$$\lambda(t) = \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, \dots, t^{r_n}), \text{ com } \sum r_i = 0 \text{ e } r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n.$$

Teorema A.1. (*Critério de Hilbert-Mumford*) *Seja G um grupo algébrico linear agindo linearmente em um variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ e seja $x \in X$. Então:*

- (i) *x semi-estável, implica que $\mu(x, \lambda) \geq 0$, para todo λ 1-PS*
- (ii) *x estável, implica que $\mu(x, \lambda) > 0$, para todo λ 1-PS*

A recíproca é verdadeira para grupos reductíveis.

Demonstração. Ver [12] Proposição 4.8, p. 104 ou [11] Teorema 2.1, p.49. ■