

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Wilker Thiago Resende Fernandes

Propriedades Ergódicas do Bilhar no Estádio Elíptico

Juiz de Fora
Ano 2014

Wilker Thiago Resende Fernandes

Propriedades Ergódicas do Bilhar no Estádio Elíptico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre na área de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior – (UFJF)

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes, Wilker.

Propriedades Ergódicas do Bilhar no Estádio Elíptico /
Wilker Fernandes. -- .
77 f.

Orientador: Regis Soares

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em
Matemática, .

1. Bilhar. 2. Ergodicidade. I. Soares, Regis, orient. II.
Título.

Agradecimentos

A Deus pela vida, força e sabedoria.

Aos meus pais, Elisabete e Idargil e minha irmã Inês por me guiarem em cada passo de minha vida, estarem sempre presentes mesmo estando longe e por me ensinarem as coisas mais importantes da vida: ser humilde, educado e honesto. Vocês são, sem dúvida, as pessoas mais importantes de minha vida.

Ao meu orientador Regis, que me acompanha desde que entrei na universidade, por toda atenção, dedicação, amizade, paciência e por ter sido um verdadeiro “pai” durante os últimos dois anos.

À Flaviana, minha “mamãe” durante os últimos quatro anos, por literalmente “cuidar de mim” e seguir cada passo meu nesse período de tempo.

Aos meus professores acadêmicos, tanto da graduação quanto do mestrado e também aos Professores Alexander Arbieto e José Barbosa por aceitarem participar de minha banca e ajudar na melhoria desta dissertação.

Aos meus amigos, Alcides, André e Raony, pelos conhecimentos passados desde os primeiros dias de minha vida universitária e pela grande amizade ao longo dos últimos anos.

A toda minha família que sempre me apoiou e torceu por mim.

A todos os amigos de Juiz de Fora, que costumo de chamar de “minha família de Juiz de Fora”, Abner, Átila, Camilo, Daniel, Kinn, Letícia, Pedro, Vinícius, com os quais passei os melhores momentos de minha vida universitária, com destaque para os companheiros de mestrado, Gisele, Yamashita, Pedretti, Ceili, Rafael, Marianna e Carlos, com os quais dividi dúvidas, tristezas de provas e força para seguir em frente.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Departamento de Matemática.

Ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Durante o desenvolvimento da teoria dos bilhares, a procura por bilhares ergódicos foi objetivo de intenso estudo, primeiro com os bilhares do tipo dispersivo e posteriormente com os do tipo focalizador. O primeiro exemplo de um bilhar do tipo focalizador ergódico foi o *estádio*, apresentado por Bunimovich, em [5]. Logo depois uma generalização deste estádio foi proposta, chamada de *estádio elíptico*.

O estádio elíptico é uma região convexa do plano cuja fronteira consiste de duas semi-elipses com semieixos de comprimento 1 e a , $a > 1$, unidas por duas linhas retas de comprimento $2h$ que são paralelas ao maior eixo das semi-elipses. Donnay, em [15], provou algumas propriedades do bilhar no estádio elíptico e lançou um desafio, encontrar estimativas ótimas para os comprimentos de a e h para garantir a ergodicidade do bilhar. Canale, Del Magno, Markarian, Oliffson e Pinto fizeram trabalhos referentes a este desafio e encontraram boas estimativas.

O objetivo desta dissertação é provar que quando a e h satisfazem, $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, o bilhar no estádio elíptico é ergódico.

Palavras chave: Bilhar. Ergodicidade.

Abstract

In the development of the theory of billiards, the search for ergodic billiards was a subject of intense study, first with dispersive billiards and later with the focusing-type ones. The first example of an ergodic billiard of focusing type was the *estadium*, introduced by Bunimovich in [5]. Soon after, a generalization of this stadium was proposed, called *elliptical stadium*.

The elliptical stadium is a convex region of the plane whose boundary consists of two semiellipses with semi-axes of length 1 and a , $a > 1$ joined by two straight lines of length $2h$, which are parallel to the major axis of the semi-ellipses. Donnay, in [15], proved some properties of the elliptical stadium billiard and launched a challenge to find optimal estimates for the lengths of a and h to ensure ergodicity of billiards. Canale, Del Magno, Markarian, Oliffson and Pinto did work on this challenge and found good estimates .

The objective of this dissertation is to prove that when a and h satisfy $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ and $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, the billiard on the elliptical stadium is ergodic.

Key words: Billiard. Ergodicity.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Introdução Histórica	7
1.2	Anúncio dos Resultados	10
1.3	Estrutura do Texto	11
2	Preliminares	12
2.1	Teoria da Medida e Teoria Ergódica	12
2.2	Teoria dos Bilhares	22
2.3	Exemplos de bilhares	28
2.3.1	Circular	28
2.3.2	Elíptico	29
2.3.3	Estádio Circular	35
3	Hiperbolicidade do Estádio Elíptico	36
3.1	Construção do Sistema Dinâmico	36
3.2	Óptica Geométrica	39
3.3	Campo de cones invariante	44
4	Ergodicidade do Estádio Elíptico	55
4.1	Ergodicidade Local	55
4.2	Ergodicidade Global	72
	Referências	75

1 Introdução

Neste capítulo vamos expor alguns dos principais trabalhos realizados sobre bilhares ao longo da história. Vamos também apresentar os resultados que iremos provar neste trabalho e finalizando este capítulo apresentaremos a estrutura do texto.

1.1 Introdução Histórica

Uma das principais motivações para o estudo dos bilhares se deve aos problemas de origem física, especialmente aqueles em que a interação entre partículas envolve choques elásticos. Chamamos de *bilhar planar* o sistema dinâmico definido pelo movimento livre de uma partícula no interior de um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ sujeita a colisões elásticas com a fronteira de $\mathcal{D}$, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. O formato da mesa em duas dimensões define completamente o comportamento do fluxo, denominado de *fluxo do bilhar*.

Ao estudar o bilhar, podemos nos perguntar se a partícula visita as vizinhanças de todos os pontos da fronteira, ou se ela viaja em todas as direções. Em outras palavras, se para qualquer ponto inicial, a trajetória de uma partícula é densa no espaço de fase da transformação. Perguntas como essas podem ser reformuladas na seguinte: “O bilhar é ergódico?”.

Pode-se pensar também que ser ergodico, de certo modo, é ser *caótico*, pois qualquer região do espaço é visitada por algum iterado de quase todo ponto pela transformação. E pode-se perguntar ainda se o bilhar apresenta alguma propriedade mais forte que ergodicidade, como ser *Kolmogorov* (propriedade K) ou *Bernoulli*. Esta última significa que o sistema se comporta assintoticamente como o lançamento de uma moeda, ou seja, perfeitamente aleatório e a propriedade K está entre ergodicidade e “bernoullicidade”.

Os resultados mais concretos referentes ao bilhar apareceram nas décadas de 40 e 60 com Krylov [21] e Sinai [31]. Em 1970, Sinai [32] provou que a aplicação do bilhar de um sistema em um toro bidimensional com uma quantidade finita de obstáculos convexos (curvatura positiva) é um K-automorfismo (esta condição implica ergodicidade). Para isso, ele utilizou

o chamado *método de Hopf*. Este consiste na prova de ergodicidade de um sistema a partir da existência de variedades estáveis e instáveis absolutamente contínuas. Em um outro artigo, em conjunto com Bunimovich [3], este resultado foi aprimorado, sendo demonstrado para uma classe mais abrangente de bilhares que foram denominados *dispersivos*. Essa denominação é aplicada aos bilhares cuja fronteira possui um número finito de peças convexas quando vistas do interior, inclusive com cantos com ângulos positivos. Gallavotti e Ornstein [17] provaram que o bilhar de Sinai (ou seja, dispersivo) também é Bernoulli.

Em 1977, Pesin [29], estabeleceu as fundações de sua teoria (hoje Teoria de Pesin) para difeomorfismos que preservam medida e possuam algum comportamento hiperbólico (não uniformemente hiperbólicos). Em 1986, esta teoria foi estendida para transformações suaves exceto em um conjunto de singularidades por Katok e Strelcyn em [19]. Nesse livro, são apresentadas o teorema da variedade invariante de Pesin e a continuidade absoluta dessas variedades para transformações com singularidades. Além disso são apresentados exemplos de transformações que satisfaçam as condições necessárias para os teoremas acima, entre eles bilhares planares em regiões limitadas por uma quantidade finita de arcos convexas e côncavos de classe C^3 e segmentos de reta, desde que todo arco convexo tenha tangência de ordem finita com todas suas tangentes.

Porém essa teoria não é suficiente para garantir ergodicidade dos sistemas. É necessário um teorema ergódico local, conhecido como teorema fundamental. Assim temos os trabalhos de Sinai e Chernov [34], para o caso de sistemas de n discos bidimensionais e bolas tridimensionais, e de Krámlí, Simányi e Szász [20], que apresenta melhoria e extensões com relação ao anterior. E para casos gerais temos os trabalhos de Chernov [7] (ver também [25]) que apresenta o teorema de Sinai e Chernov em uma forma mais geral e de Liverani e Wojtkowski [23] para o caso de aplicações simpléticas, que no caso de dimensão 2, se reduz à continuidade absoluta da medida invariante.

Wojtkowski [36] formalizou e explorou o conceito de *cones invariantes* e em [37] mostrou como utilizar óptica geométrica para definir cones invariantes para bilhares no plano. Markarian [26] melhorou esse trabalho em 1988. Notamos que essa ferramenta foi utilizada em [23] para provar a ergodicidade local de sistemas hamiltonianos. Observamos que os bilhares podem ser considerados como casos particulares de sistemas hamiltonianos.

Como os primeiros estudos de ergodicidade em bilhares ocorreram em bilhares do tipo dispersivos, surgiu-se a ideia de estudar ergodicidade em tipos diferentes de bilhar, os com fronteira *focalizadora* (ao contrário de dispersiva). As mesmas questões antes levantadas para os dispersivos foram passadas para os focalizadores, “Poderia existir um bilhar ergódico com fronteira

focalizadora?”. Em [4], Bunimovich provou que existem domínios convexos no plano com fronteira não totalmente focalizadora que geram um bilhar ergódico. Uma condição necessária para este resultado foi a presença de segmentos de reta na fronteira.

Posteriormente, em [5], Bunimovich provou um teorema que estabelecia condições suficientes para ergodicidade para regiões cuja fronteira não tinha componentes dispersivas e com isso apresentou o primeiro exemplo de bilhar ergódico com fronteira não dispersiva. Este bilhar é definido em uma mesa formada por dois semicírculos unidos por segmentos de reta, denominada *estádio*. Apresentou também outros tipos de regiões apenas com fronteiras focalizadoras que satisfaziam as condições de seu teorema chamadas de “flowerlike”.

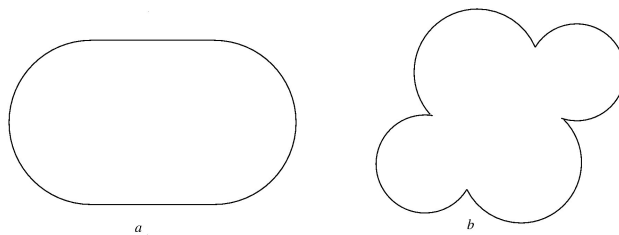


Figura 1.1: O estádio em (a) e uma região do tipo flowerlike em (b).

Algum tempo depois uma generalização do estádio foi proposta: o *estádio elíptico*. Este consiste de duas semi-elipses de semieixos $a > 1$ e $b = 1$ unidas por dois segmentos de reta de comprimento $2h$. Donnay, em [15], mostrou que para uma certa estimativa do tamanho do semieixo da elipse, o bilhar no estádio elíptico possuía Expoentes de Lyapunov positivos para quase todo ponto. Ele também provou que quando h tende ao infinito, a se aproxima de $\sqrt{2}$, e ainda lançou um desafio: “Alguém poderia tentar calcular limites para esses comprimentos”.

Em [10], Canale e Markarian aceitaram o desafio, e estudaram este problema numericamente. Variando a , encontraram um valor $h(a)$ tal que, se $0 \leq h < h(a)$, o bilhar não parecia ser caótico e, se $h > h(a)$, ele parecia ergódico.

Markarian, Oliffson e Pinto deram sequência ao desafio proposto por Donnay, e em [27], mostraram que se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, então $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$ assegura Expoentes de Lyapunov positivos. Isto foi feito criando um campo de cones eventualmente estritamente invariante sob a derivada da aplicação do bilhar. Sugeriram ainda que para estas estimativas o bilhar no estádio elíptico era ergódico e kolmogorov. O número mágico que eles encontraram, $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, está relacionado com a estrutura de bifurcação de órbitas periódicas com cáustica hiperbólica do estádio elíptico. Fazendo simulações numéricas eles observaram também que $2a^2\sqrt{a^2 - 1}$ não parecia o limite inferior ótimo para h .

Del Magno mostrou em [13] como um domínio elíptico pode ser truncado para garantir

hiperbolicidade e ergodicidade do bilhar correspondente. Usando técnicas semelhantes a [13], Del Magno e Markarian finalmente finalizaram uma prova concreta de que o bilhar no estádio elíptico é ergódico, Kolmogorov Bernoulli.

Nesta dissertação estudamos o bilhar no estádio elíptico, tomando como base os trabalhos de Markarian, Oliffson e Pinto, [27], e o trabalho de Del Magno e Markarian [14]. O objetivo final do trabalho foi provar a ergodicidade do bilhar no estádio elíptico, mesclando os artigos citados acima.

1.2 Anúncio dos Resultados

Seja M' o espaço de fase da aplicação do bilhar no estádio elíptico T . Definimos a aplicação de primeiro retorno à parte elíptica do estádio por Φ e seja M seu espaço de fase, ver capítulo 3.1. Seja $\{C(z)\}$ o campo de cones construído em M na seção 3.3.

Teorema A. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, o campo de cones $\{C(z)\}$ é eventualmente estritamente Φ -invariante.*

Este resultado é o “Theorem 1” em [27]. Sua demonstração consiste em avaliar os possíveis casos para a evolução do campo de cones no espaço tangente de Φ e mostrar que em quase todo ponto os cones se fecham pela aplicação $D\Phi$.

Fazendo uma adaptação desde campo de cones para a aplicação T , obtemos que

Corolário 1.1. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então $C(z)$ é eventualmente estritamente T -invariante.*

A existência deste campo de cones nos garante a existência de expoentes de Lyapunov não nulos para T e com isso, a existência de variedades estáveis e instáveis locais. Este fato é fundamental para demonstrarmos a ergodicidade de T .

Teorema B. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a aplicação Φ é ergódica.*

Este resultado é o “Theorem 3” em [14]. A demonstração da ergodicidade de Φ consiste em dois passos. Primeiro vamos mostrar que Φ é localmente ergódico (ou seja, cada componente ergódica de Φ é aberto (mod 0)) usando a versão do Teorema Ergódico Local provado por Liverani e Wojtkowski em [23], ver seção 2.1 Teorema 2.15. A segunda etapa da prova consiste em provar que Φ tem apenas uma componente ergódica. Provaremos que Φ tem apenas um número finito de componentes ergódicas, e construiremos um conjunto finito de trajetórias

(possivelmente disjuntas), com a propriedade de que a partir de qualquer componente ergódica podemos chegar a qualquer outra componente ergódica, viajando ao longo dessas trajetórias.

Obtemos como um corolário a ergodicidade de T .

Corolário 1.2. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então T é ergódico.*

1.3 Estrutura do Texto

O texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2, apresentamos alguns resultados gerais sobre Teoria da Medida, Teoria Ergódica e Teoria dos Bilhares necessários para as demonstrações ao longo do texto. Na parte de Teoria Ergódica e Teoria da Medida, apresentamos algumas caracterizações de ergodicidade, incluímos o Teorema de Oseledets (Teorema 2.2) e o Teorema de Wojtkowski (Teorema 2.4), e apresentamos os requisitos necessários para o Teorema Ergódico Local (Teorema 2.15). Na parte de Teoria dos Bilhares, apresentamos um pouco sobre a teoria geral de bilhares planos e alguns exemplos de bilhares. Nestes exemplos destacamos algumas propriedades que serão muito importantes para os resultados posteriores.

No Capítulo 3, apresentamos a mesa de bilhar estudada nesta dissertação, destacando algumas propriedades e definindo uma transformação de primeiro retorno que facilitará demonstrações posteriores. Este capítulo contém também a prova do Teorema A. Para prová-lo construímos um campo de cones eventualmente estritamente invariante usando conceitos de óptica geométrica. Os conceitos de óptica geométrica tem como base o trabalho de Wojtkowski, [37].

O Capítulo 4 contém a parte de ergodicidade. Na primeira parte do capítulo adaptamos nosso bilhar às condições do Teorema Ergódico Local e provamos que as cinco condições necessárias para aplicá-lo são satisfeitas. A outra parte consiste da demonstração do Teorema B e consequentemente na ergodicidade da aplicação do bilhar. Finalizando o texto, apresentamos as referências utilizadas na elaboração desta dissertação.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e teoremas que serão necessários para os resultados no decorrer deste trabalho. Na Seção 2.1 falaremos sobre Teoria da Medida e Teoria Ergódica. Na Seção 2.2 falaremos sobre a teoria geral dos bilhares e apresentaremos alguns exemplos.

2.1 Teoria da Medida e Teoria Ergódica

Nesta seção falaremos sobre Teoria da Medida e Teoria ergódica. Apresentaremos apenas as principais definições e teoremas necessários para nosso trabalho. Para mais informações e demonstrações dos teoremas aqui relacionados, recomendamos a leitura de [16], [35] e [30].

Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto X é denominada uma *topologia* em X se τ possui as seguintes propriedades:

- (i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
- (ii) Se $V_i \in \tau$, para $i = 1, \dots, n$, então $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \tau$.
- (iii) Se $\{V_\alpha\}$ é uma coleção arbitrária de membros de τ (finita, enumerável ou não enumerável) então $\bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

Se τ é uma topologia em X então X é denominado um *espaço topológico*, e os membros de τ são chamados (*conjuntos*) *abertos* em X . Se X e Y são espaços topológicos e f é uma transformação de X em Y , então f é denominada *contínua* se $f^{-1}(V)$ é um aberto em X para todo aberto V em Y .

Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma σ -álgebra em X se $\mathcal{A}$ possui as seguintes propriedades:

- (i) $X \in \mathcal{A}$.
- (ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$, onde A^c é o complementar de A em relação a X .
- (iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$, para $n = 1, 2, \dots$, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra em X , então X é denominado um *espaço mensurável*, e os membros

de $\mathcal{A}$ são chamados *conjuntos mensuráveis* em X . Se X é um espaço mensurável, Y é um espaço topológico, e T é uma transformação de X em Y , então T é dita *mensurável* se $T^{-1}(B)$ é um conjunto mensurável em X para todo conjunto aberto B em Y .

Se (X, τ) é um espaço topológico, a σ -álgebra gerada pela topologia é chamada σ -álgebra de Borel e seus conjuntos, *boreleanos*. Uma medida definida sobre uma σ -álgebra de Borel é chamada *medida de Borel*.

Uma *medida* é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, onde o símbolo $\bigsqcup$ denota união disjunta. Um *espaço de medida* é um espaço mensurável que possui uma medida definida na σ -álgebra de seu conjuntos mensuráveis, usualmente denotada pela terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Se $\mu(X) = 1$, dizemos que μ é uma probabilidade e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um *espaço de probabilidade*.

Se $E \subset \mathbb{R}^k$ e $x \in \mathbb{R}^k$, a *translação* de E por x é o conjunto

$$E + x = \{y + x; y \in E\}.$$

Um conjunto da forma

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n); \alpha_i < x_i < \beta_i, 1 \leq i \leq k\},$$

ou qualquer conjunto obtido substituindo um dos ou todos os sinais $<$ por $\leq$, é chamado uma *k-célula*. Seu volume é definido por

$$\text{vol}(W) = \prod_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i).$$

Proposição 2.1 (Theorem 2.20 em [30]). *Existe uma medida Lebesgue definida em uma σ -álgebra $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^k$, com as seguintes propriedades:*

- (a) $\text{Leb}(W) = \text{vol}(W)$, para toda *k-célula* W .
- (b) $\mathcal{A}$ contém todos os boreleanos em $\mathbb{R}^k$.
- (c) Leb é invariante por translação, isto é, $\text{Leb}(E + x) = \text{Leb}(E)$, $\forall E \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^k$.
- (d) Se μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}^k$ qualquer, invariante por translação, tal que $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K , então existe uma constante c tal que $\mu(E) = c \cdot \text{Leb}(E)$, para todo boreleano $E \subset \mathbb{R}^k$.
- (e) Para toda transformação linear T de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^k$ corresponde um número real $\Delta(T)$ tal que $\text{Leb}(T(E)) = \Delta(T) \text{Leb}(E)$ para todo $E \subset \mathcal{A}$.

Os membros de $\mathcal{A}$ definida na proposição acima são os conjuntos *Lebesgue mensuráveis* em $\mathbb{R}^k$; Leb é a *medida de Lebesgue* em $\mathbb{R}^k$.

Dado $(X, \mathcal{A})$, sejam μ e ν medidas definidas sobre $\mathcal{A}$. Dizemos que ν é *absolutamente contínua* em relação à μ se $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$. As medidas μ e ν são *equivalentes* se μ é absolutamente contínua em relação à ν e vice-versa.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida. Dizemos que uma transformação $T : X \rightarrow Y$ *preserva medida* se, para $B \in \mathcal{B}$, temos que $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ e $\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$. Se $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu)$, diz-se também que μ é *T-invariante* ou *invariante sob T*. Uma transformação $T : X \rightarrow X$ é chamada *automorfismo* se é uma bijeção mensurável que preserva medida.

Antes de definirmos o que entendemos por variedades estáveis e instáveis locais, apresentaremos o Teorema de Oseledets e os expoentes de Lyapunov. Para os resultados a seguir, utilizamos o sistema dinâmico (M, T, μ) , com T difeomorfismo pelo menos de classe C^2 , M é seu espaço de fase e μ a medida invariante por T . O próximo resultado pode ser visto em [2], página 300.

Teorema 2.2 (Oseledets). *Suponha que*

$$\int_M \log^+ \|D_x T\| d\mu(x) < \infty \quad e \quad \int_M \log^+ \|D_x T^{-1}\| d\mu(x) < \infty,$$

onde $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$. Então existe um conjunto T -invariante $H \subset M$, $\mu(H) = 1$, tal que para todo $x \in H$ existe uma decomposição DT -invariante do espaço tangente

$$\mathcal{T}_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(m)}$$

para algum $m = m(x)$, tal que para todo vetor não nulo $v \in E_x^{(i)}$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x T^n v\| = \lambda_x^{(i)}$$

onde $\lambda_x^{(1)} > \dots > \lambda_x^{(m)}$ são chamados *Expoentes de Lyapunov da aplicação T no ponto x*.

Definimos os *auto-espaços estável e instável* de um ponto $x \in M$ por:

$$E_x^s = \bigoplus_{\lambda_x^{(j)} < 0} E_x^{(j)} \quad e \quad E_x^u = \bigoplus_{\lambda_x^{(j)} > 0} E_x^{(j)},$$

respectivamente. E o *conjunto estável* por:

$$W^s(x) = \{y \in M; d(T^n(x), T^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\},$$

o *conjunto instável* $W^u(x)$ define-se analogamente substituindo T por T^{-1} .

Seja agora $\tau_x > 0$ a menor de todas as normas dos expoentes de Lyapunov não nulos de x . O próximo teorema (*Teorema da Variedade Estável de Pesin*) afirma que x tem uma *variedade estável local* que é um disco suave tangente a E_x^s em x a cujos pontos se aproximam da órbita de x exponencialmente rápido.

Teorema 2.3 (Theorem C.3 em [2]). *Suponha que a aplicação T seja de classe C^2 . Então Existe um disco mergulhado $W_{loc}^s(x)$ em x e existe $C_x > 0$ tal que*

1. $W_{loc}^s(x)$ é tangente a E_x^s em x ;
2. $d(T^n(x_1), T^n(x_2)) \leq C_x e^{-n\tau_x} \text{dist}(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in W_{loc}^s(x)$;
3. $T(W_{loc}^s(x)) \subset W_{loc}^s(T(x))$;
4. $W^s(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(W_{loc}^s(T^{-n}(x)))$.

Analogamente, x tem uma *variedade instável local* $W_{loc}^u(x)$ satisfazendo propriedades correspondentes substituindo T por T^{-1} .

Daremos agora a definição de cone que será utilizada posteriormente. Dados dois campos de vetores linearmente independentes $X_1(z)$ e $X_2(z)$ no espaço tangente $T_z M$, um *cone* em $T_z M$ é definido por

$$C(z) = \{rX_1(z) + sX_2(z), rs \geq 0\},$$

e seu interior é

$$\text{int } (C(z)) = \{rX_1(z) + sX_2(z), rs > 0 \text{ ou } r = s = 0\}.$$

Um *campo de cones mensurável* é uma família de cones $\{C(z)\} \subset T_z M$ definido μ -q.t.p., e tal que os vetores $X_1(z)$ e $X_2(z)$ variam mensuravelmente com z .

O próximo resultado é um teorema muito importante para provar a hiperbolicidade de uma transformação através dos campos de cones. Este resultado se deve a Wojtkowski ([36]) e será utilizado posteriormente nesse trabalho.

Teorema 2.4 (Wojtkowski). *Seja $z \in M$ e $C(z)$ um campo de cones mensurável tal que para quase todo z ,*

$$DT_z(C(z)) \subset C(T(z))$$

e para quase todo z existe um $k(z)$ para o qual

$$DT^{k(z)}(C(z)) \subset \text{int } C(T^{k(z)}(z)).$$

Então para quase todo z existe expoentes de Lyapunov $\lambda_+(z)$ positivos.

Tal campo de cones descrito acima é chamado de *eventualmente estritamente T -invariante*. Note que a existência de expoente de Lyapunov positivo implica na existência de expoente de Lyapunov negativo, pois $\lambda_-(z) = -\lambda_+(z)$. Logo o Teorema 2.4 nos garante a existência em quase todo ponto de expoentes não nulos.

A próxima definição fornece o significado de uma folheação ser absolutamente contínua em relação a uma medida. Usamos o termo *folheação* para indicar a decomposição de $\mathcal{M}$ em subvariedades chamadas *folhas* que se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ com segunda coordenada constante. Para uma definição mais precisa de folheação, ver [6] página 19.

Na definição a seguir, um cilindro é um conjunto difeomorfo a $B \times \mathbb{R}^{N-v}$ onde B é uma bola não-degenerada em $\mathbb{R}^v$.

Definição 2.5. Uma folheação v -dimensional $\mathcal{W}$ em $\mathbb{R}^N$ é *absolutamente contínua* com respeito a medida μ se o seguinte ocorre: dados qualquer espaço $(N-v)$ -dimensional afim Θ e qualquer cilindro C contendo Θ , e qualquer união L de folhas $W(z) \in \mathcal{W}$, transversal em todo ponto à direção de Θ e excedendo C (isto é, $\partial W(z) \in \mathbb{R}^N \setminus C$), então temos que

$$\mu(L \cap C) = 0 \implies \text{Leb}_\Theta(L \cap \Theta) = 0;$$

onde Leb_Θ é a medida de Lebesgue $(N-v)$ -dimensional em Θ .

A Definição acima diz que a medida transversal em $\mathcal{W}$ definida por Leb em Θ é absolutamente contínua com respeito a μ .

Definição 2.6. Dizemos que um ponto $x \in X$ é *recorrente* se para toda vizinhança V de x , $T^n(x) \in V$ para infinitos valores de n . Em outras palavras, x é recorrente se existe uma sequência $n_k \rightarrow \infty$ tal que $T^{n_k}(x) \rightarrow x$.

O próximo teorema pode ser visto em [35], página 26.

Teorema 2.7 (Poincaré - versão probabilística). *Seja T um automorfismo do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Então, para todo $A \in \mathcal{A}$, o conjunto A_0 dos pontos x tais que $T^n(x) \in A$, para infinitos valores $n \geq 0$, pertence a $\mathcal{A}$ e $\mu(A_0) = \mu(A)$.*

Definição 2.8. Seja T uma transformação que preserva medida de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dizemos que T é *ergódica* se os membros $A \in \mathcal{A}$ com $T^{-1}A = A$ satisfazem $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Dizemos também que um conjunto invariante $U \subset X$ com $\mu(U) > 0$ é uma *componente ergódica de X* se os membros $A \subset U$ com $T^{-1}A = A$ satisfazem $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = \mu(U)$. Em particular, uma transformação será ergódica se e somente se admitir uma única componente ergódica.

Existem várias outras maneiras de caracterizar a condição de ergodicidade. Apresentaremos algumas delas a seguir.

Proposição 2.9 (Theorem 1.4 em [35]). *Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação que preserva medida em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é ergódica;
- (ii) os únicos membros $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(T^{-1}A \triangle A) = 0$ são aqueles com $\mu(A) = 0$ ou 1 ;
- (iii) para cada $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$ temos $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$;
- (iv) para cada $A, B \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$, existe $n > 0$ com $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.

Observação 2.10. Das condições (iii) e (iv), pode-se pensar que a órbita $\{T^{-n}A\}_{n=0}^{\infty}$ de qualquer conjunto não vazio A , varre todo o espaço X , ou que cada conjunto não trivial A possui q.t.p. uma órbita densa.

Outra caracterização é a seguinte.

Proposição 2.11 (Theorem 1.6 em [35]). *Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação que preserva medida em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é ergódica;
- (ii) quando f é mensurável e $(f \circ T)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, então f é constante μ -q.t.p.;
- (iii) quando f é mensurável e $(f \circ T)(x) = f(x)$ q.t.p., então f é constante μ -q.t.p.;
- (iv) quando $f \in L^2(\mu)$ e $(f \circ T)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, então f é constante μ -q.t.p.;
- (v) quando $f \in L^2(\mu)$ e $(f \circ T)(x) = f(x)$ q.t.p., então f é constante μ -q.t.p.

Vamos definir agora o conceito de transformação induzida e mostraremos um resultado extremamente importante para esse trabalho.

Sejam $T : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva medida e $A \subset X$ um subconjunto mensurável de X de medida positiva. O inteiro

$$n_A(x) = \inf\{n \geq 1; T^n x \in A\}$$

é definido para quase todo ponto $x \in A$.

Assim, A é um espaço de probabilidade com medida $\mu_A = \mu/\mu(A)$. Definimos a *transformação induzida*, $T_A : A \rightarrow A$, por

$$T_A(x) = T^{n_A(x)}x$$

para quase todo ponto $x \in A$. Além disso, n_A e T_A são mensuráveis e T_A é uma transformação que preserva a medida μ_A (ver [18]).

Proposição 2.12. *Suponha que $T : X \rightarrow X$ preserva a medida μ e seja T_A a transformação induzida por T em um conjunto $A \subset X$. Nestas condições, se T é ergódica, então T_A é ergódica. Por outro lado, se T_A é ergódica e $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A = X \mod \mu$, então T é ergódica.*

Demonstração. Suponhamos T ergódica. Seja $B \subset A$, T_A -invariante e $\mu(B) > 0$.

Suponhamos que $\mu(A \setminus B) > 0$. Seja $x \in A \setminus B$. Então $T_A^n(x) \in A \setminus B$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como T é ergódica e $\mu(A \setminus B) > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(T^{n_0}(A \setminus B) \cap B) > 0.$$

Mas isto implica que existe um $x \in A \setminus B$ tal que $T_A^{n_0}(x) \in B$, o que é uma contradição.

Logo, $\mu(A \setminus B) = 0$ e $\mu_A(B) = 1$.

Portanto, T_A é ergódica.

Suponhamos agora T_A ergódica. Seja $C \in \mathcal{A}$ com $\mu(C) > 0$ e $T^{-1}C = C$. Por hipótese, temos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A = X \mod \mu,$$

então para algum $n \in \mathbb{N}$, $C \cap T^{-n}A = T^{-n}(C \cap A)$ tem medida positiva, e portanto, $A \cap C$ também tem. Assim

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}C \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T_A^{-n}(A \cap C) = A \mod \mu.$$

Mas,

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}C \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A = X \mod \mu.$$

Logo $\mu(C) = 1$ e T é ergódica.

□

Dada $f \in L^1(X, \mu)$ definimos sua *média temporal* no ponto x como

$$f^*(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f \circ T^k)(x).$$

O próximo teorema pode ser encontrado em [35], página 34.

Teorema 2.13 (Birkhoff). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação que preserva μ . Seja f uma função definida em X integrável. Então o limite*

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f \circ T^k)(x)$$

existe para μ -q.t.p. $x \in X$.

Além disso:

- (a) $f^* \circ T = f^*$ em μ -q.t.p.;
- (b) se $f \in L^p(\mu)$ então $f^* \in L^p(\mu)$, temos convergência na norma $\|\cdot\|_p$ e temos que $\|f^*\|_p \leq \|f\|_p$;
- (c) $\int f^* d\mu = \int f d\mu$.

Muitas vezes para provar a ergodicidade global de um sistema, procura-se primeiro provar a ergodicidade local. Para tal finalidade, foram criados Teoremas Ergódicos Locais (também conhecidos como Teoremas Fundamentais). A versão que usaremos é devida a Liverany e Wojtkowski em [23]. Neste trabalho eles consideram T um symplectomorfismo, o que é essencialmente equivalente, para aplicações em dimensão dois, a T possuir uma medida invariante μ absolutamente contínua.

Precisamos assumir que existam duas partições finitas de M

$$M = B_1^+ \cup \dots \cup B_r^+ = B_1^- \cup \dots \cup B_r^-$$

onde $B_i^\pm$ são conjuntos compactos, $\text{int } B_i^\pm$ é conexo e denso em $B_i^\pm$, e as fronteiras $\partial B_i^\pm$ são formadas por um número finito de curvas suaves compactas que se intersectam apenas em seus pontos finais. Os conjuntos $B_i^\pm$ são chamados de caixas simpléticas, ou simplesmente caixas.

Suponha agora que a aplicação T esteja definida separadamente em cada domínio B_i^+ , $1 \leq$

$i \leq r$, de modo que T é um difeomorfismo C^r ($r \geq 2$) do interior de B_i^+ para o interior de B_i^- e um homeomorfismo de B_i^+ em B_i^- .

Observe que os conjuntos $N = \cup_i \text{int } B_i^+$ e $T(N) = \cup_i \text{int } B_i^-$ são abertos e densos em M . Vamos assumir que em cada componente conexa de N a aplicação T possa ser estendida por continuidade até sua fronteira ∂N , e que em cada componente conexa de $T(N)$ a aplicação inversa T^{-1} possa ser estendida por continuidade até sua fronteira $\partial T(N)$. Como as fronteiras de B_i^+ têm pontos comuns, a função T pode ter vários valores em $\cup_i \partial B_i^+$.

Como visto anteriormente, a hiperbolicidade pode ser assegurada por um campo de cones $\{C\}$ que seja eventualmente estritamente invariante. Vamos supor que $\{C(z)\}$ está definido no interior de cada caixa B_i^+ . Sejam X_z, Y_z os vetores unitários que formam as bordas de $C(z)$, assim, como anteriormente o cone $C(z)$ pode ser escrito como

$$C(z) = \{u \in T_z M; u = aX_z + bY_z, ab \geq 0\}$$

Para cada cone $C(z)$, existe uma forma quadrática associada dada por $Q_z(u) = A(X_z, Y_z)ab$, onde $A(X_z, Y_z)$ é a área do paralelogramo gerado por X_z e Y_z . A quantidade

$$\sigma(D_z T^n) = \inf_{u \in \text{int } (C(z))} \sqrt{\frac{Q_{T^n(z)}(D_z T^n u)}{Q_z(u)}}$$

mede a quantidade de expansão sob $D_z T^n$ dentro do cone. Similarmente, podemos definir σ para F^{-1} substituindo $C(z)$ pelo seu cone complementar.

Definição 2.14. Um ponto $z \in M$ é chamado *suficiente*, se existe um $n > 0$ tal que $z \notin S_n \cap S_{-n}$ e ou $\sigma(D_z T^n) > 3$ ou $\sigma(D_z T^{-n}) > 3$, onde $S_{\pm n}$ denota o conjunto das singularidades de $T^{\pm n}$.

Como o campo de cones $\{C\}$ é eventualmente estritamente invariante, o conjunto dos pontos suficientes de M tem medida μ total, por [23].

Para aplicar o teorema ergódico local, precisamos verificar as seguintes condições:

1- (Monotonicidade) O campo de cones $\{C(z)\}$ é eventualmemte estritamente T -invariante e a restrição de C ao interior de cada caixa de M é contínua.

2- (Alinhamento Adequado) O espaço tangente de S^- em qualquer ponto $z \in S^-$ está estritamente contido em $C(z)$, e o espaço tangente em qualquer ponto $z \in S^+$ está estritamente contido no cone complementar $C'(z)$.

3- (Regularidade) Para todo $n \geq 1$, os conjuntos S_n^+ e S_n^- são regulares, isto é, eles são uniões finitas de arcos suaves (fechados) que se interceptam apenas em seus pontos finais.

4- (Propriedade de Não-Contração) Seja $\| \cdot \|$ a métrica riemanniana padrão em M nas coordenadas (s, θ) . Existe uma constante $\rho > 0$ tal que para cada $n \geq 1$ e cada $z \in M \setminus S_n^+$,

$$\| D_z T^n u \| \geq \rho \| u \|$$

para cada $u \in C(z)$.

5- (Sinai-Chernov Ansatz) Seja μ_S o volume 1-dimensional riemanniano em $S^+ \cup S^-$. Para μ_S -q.t.p. $z \in S^+(S^-)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty(-\infty)} \sigma(D_z T^n) = +\infty.$$

Podemos agora enunciar o resultado.

Teorema 2.15 (Teorema Ergódico Local). *Sob as condições acima, todo ponto suficiente z em uma caixa B_i^+ possui uma vizinhança aberta U_z em B_i^+ que pertence (mod 0) a uma componente ergódica.*

A prova do Teorema Ergódico Local para Φ , é baseada no argumento de Hopf. Vamos fazer uma breve apresentação sobre este método.

Suponhamos que existam μ -q.t.p. variedades estáveis e instáveis locais W^s e W^u , respectivamente, e que sejam paralelas. Pelo Teorema de Fubini, as variedades estáveis devem interceptar uma variedade instável a menos de um conjunto de variedades de medida nula. Novamente pelo Teorema de Fubini, dada uma variedade estável, as variedades instáveis devem interceptar esta variedade estável e menos de um conjunto de variedades de medida nula.

Assim, conseguimos uma folheação de variedades estáveis e instáveis que, novamente pelo Teorema de Fubini, se interceptam a menos de um conjunto de medida nula. Logo, dados quaisquer quase todos pontos desta folheação de variedades estáveis e instáveis, eles podem ser ligados por um caminho entre essas variedades. Para fixar idéias veja a Figura 2.1.

Sejam agora f uma função contínua definida em nosso espaço de fase e $f^\pm(z)$ os limites das somas positiva e negativa de Birkhoff, ou seja,

$$f^\pm(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f \circ T^{\pm k})(x).$$

Dados quaisquer dois pontos x e y em uma mesma variedade estável, temos que $f^+(x) = f^+(y)$ e dados dois pontos z e w em uma mesma variedade instável, temos que $f^-(z) = f^-(w)$. Além disso, temos que para quase todo ponto x do espaço de fase $f^+(x) = f^-(x)$. Com isso

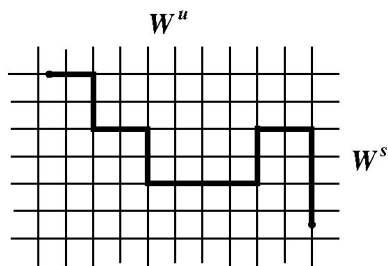


Figura 2.1: Exemplo de uma folheação de variedades estáveis e instáveis paralelas.

conseguimos que quaisquer quase todos dois pontos desta folheação podem ser ligados por um caminho cujo limite da soma de Birkhoff é sempre constante.

Porém, nossas variedades não são paralelas. Veja Figura 2.2.

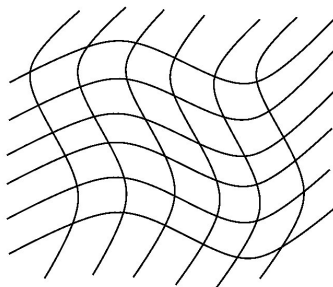


Figura 2.2: Folheação de variedades estáveis e instáveis.

Entretanto, o argumento acima ainda é válido. Basta substituírmos as várias aplicações do Teorema de Fubini pela continuidade absoluta das folheações estáveis e instáveis. Logo conseguimos que quaisquer quase todos dois pontos desta folheação podem ser ligados por um caminho cujo limite da soma de Birkhoff é sempre constante.

2.2 Teoria dos Bilhares

Apresentamos aqui uma breve introdução à Teoria dos Bilhares, tendo como base o livro de Chernov e Markarian [8].

Definição 2.16. Dado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes, um *bilhar planar* corresponde ao movimento livre de uma partícula no interior de $\mathcal{D}$, com reflexões elásticas na fronteira $\partial\mathcal{D}$.

Como só trabalharemos com bilhares planares, nos referiremos a eles neste texto apenas

como bilhares. Utilizaremos ainda as seguintes hipóteses:

- (i) A fronteira de $\partial \mathcal{D}$ é uma união finita do fecho Γ_i de curvas suaves,

$$\partial \mathcal{D} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r.$$

As Γ_i são chamadas *paredes* ou *componentes de $\partial \mathcal{D}$* . Elas são de classe C^k , $k \geq 3$, e cada uma é definida por uma função $f_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , onde I é intervalo de $\mathbb{R}$, que está parametrizada pelo comprimento de arco.

- (ii) As componentes da fronteira Γ_i podem intersectar umas as outras apenas em seus extremos, i.e.,

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial \Gamma_i \cup \partial \Gamma_j \text{ para } i \neq j.$$

- (iii) Em cada Γ_i a segunda derivada da curva ou nunca é zero ou é identicamente zero.

Definição 2.17. Uma *mesa de bilhar* $\mathcal{D}$ é o fecho de um domínio aberto conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ tal que $\partial \mathcal{D}$ satisfaz as hipóteses (i), (ii), (iii) descritas acima.

Denotemos por

$$\Gamma_* = \partial \Gamma_1 \cup \dots \cup \partial \Gamma_r, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*.$$

Pontos $x \in \Gamma_*$ serão chamados *pontos de quina*, pontos $x \in \tilde{\Gamma}$ serão chamados *pontos de fronteira regulares*.

A parede Γ_i será chamada

1. *flat*, se $f_i'' = 0$;
2. *focalizadora*, se $f_i'' \neq 0$, apontando para dentro de $\mathcal{D}$;
3. *dispersiva*, se $f_i'' \neq 0$, apontando para fora de $\mathcal{D}$.

Definimos a *curvatura (com sinal)* $k(x)$ em cada ponto $x \in \Gamma_i$, por

1. $k(x) = 0$ se Γ_i é flat;
2. $k(x) = \|f_i''(x)\|$ se $x \in \Gamma_i$ é focalizadora;
3. $k(x) = -\|f_i''(x)\|$ se $x \in \Gamma_i$ é dispersiva.

Denotemos por $q \in \mathcal{D}$ a posição da partícula em movimento e por $v \in \mathbb{R}$ seu vetor velocidade, que são funções do tempo $t \in \mathbb{R}$. Quando a partícula se move no interior da mesa, tal que $q \in \text{int } \mathcal{D}$, ela mantém velocidade constante

$$\dot{q} = v \quad \text{e} \quad \dot{v} = 0. \quad (2.1)$$

Quando a partícula colide com a parte regular da fronteira, $q \in \tilde{\Gamma}$, seu vetor velocidade é refletido através da tangente a Γ em q , utilizando a regra ângulo de incidência é igual a ângulo de reflexão e pode ser expressado por

$$v^+ = v^- - 2\langle v, n \rangle n, \quad (2.2)$$

onde v^+ e v^- referem-se às velocidades pós-colisão e pré-colisão, respectivamente, e n denota o vetor unitário normal a $\tilde{\Gamma}$ no ponto q . Se a partícula atinge um ponto de quina, ela pára e seu movimento não será mais definido além desse ponto.

As equações de movimento (2.1) e (2.2) preservam a norma $\|v\|$ e é comum tomá-la normalizada, $\|v\| = 1$. Uma colisão é *regular* se $q \in \tilde{\Gamma}$ e o vetor v^- não é tangente a Γ . Neste caso $v^- \neq v^+$. Se v^- é tangente a Γ nos pontos de colisão, então $v^- = v^+$ e tal colisão é chamada *tangencial*.

O *estado* de uma partícula em movimento para qualquer tempo é especificada por sua posição $q \in \mathcal{D}$ e seu vetor velocidade unitário $v \in S^1$. Assim, o *espaço de fase* do sistema é

$$\Omega = \{(q, v)\} = \mathcal{D} \times S^1.$$

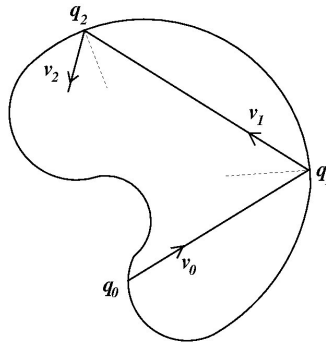


Figura 2.3: Exemplo de uma trajetória em uma mesa $\mathcal{D}$ qualquer.

Em cada ponto de fronteira regular $q \in \tilde{\Gamma}$, é conveniente identificar os pares (q, v^-) e (q, v^+) relacionados pela regra de colisão (2.2). Isto ocasiona uma mudança na topologia de Ω , mas

suas propriedades topológicas não serão essenciais.

Denotemos por π_q e π_v as projeções naturais de Ω sobre $\mathcal{D}$ e S^1 , respectivamente. Além disso, denotemos por $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ o conjunto de estados (q, v) nos quais a dinâmica da partícula está definida para todos os tempos $-\infty < t < +\infty$. Obtemos um fluxo

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

Toda trajetória do fluxo $\{\Phi^t x\}$, $x \in \tilde{\Omega}$, é uma curva contínua em Ω . É usual chamar sua projeção $\pi_q(\Phi^t x)$ sobre a mesa $\mathcal{D}$ uma *trajetória do bilhar*.

O fluxo Φ^t é C^{k-1} suave em pontos de colisões regulares ([8], Lemma 2.24). Além disso, é possível mostrar que $\tilde{\Omega}$ é um subconjunto denso de medida de Lebesgue total em Ω , e assim pode-se estender (tomando certos cuidados) o fluxo Φ^t a todo o espaço Ω por continuidade ([8], Seção 2.8).

No estudo de sistemas dinâmicos, é comum reduzir um fluxo a uma transformação construindo uma seção transversal. Para um bilhar, uma seção transversal em Ω é geralmente construída na fronteira da mesa de bilhar, i.e., no conjunto $\Gamma \times S^1$. Podemos descrever a seção transversal como o conjunto de todos os vetores de velocidade pós-colisão:

$$\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = \{x = (q, v) \in \Omega : q \in \Gamma_i, \langle v, n \rangle \geq 0\},$$

onde n denota o vetor unitário normal a Γ_i apontando para dentro de $\mathcal{D}$. O conjunto $\mathcal{M}$ é uma subvariedade de dimensão 2 em Ω chamado o *espaço de colisão*.

Denotamos por $\tau(x)$ o primeiro tempo positivo no qual a órbita $\Phi^t(x)$ intersecta $\Gamma \times S^1$, e chamamos esse valor o *tempo de retorno*. Seja $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \tilde{\Omega}$. Este define uma *aplicação de retorno* $T : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ por

$$T(x) = \Phi^{\tau(x)+0} x,$$

onde o símbolo $\tau(x) + 0$ indica que estamos tomando tempos que se aproximam de $\tau(x)$ pela direita. T é chamada a *aplicação do bilhar* ou *aplicação de colisão* (de acordo com isso, $\mathcal{M}$ é chamado o *espaço de fase da aplicação do bilhar* T).

Parametrizamos esses elementos como $x = (s, \theta)$, s é o parâmetro de comprimento de arco ao longo de $\partial\mathcal{D}$ e $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre o vetor velocidade v e a tangente à $\partial\mathcal{D}$ em q , orientado como na Figura 2.4.

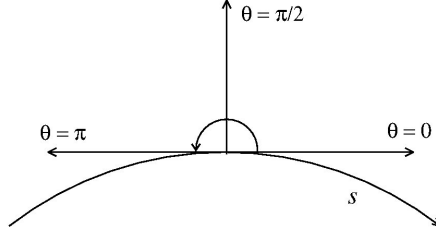


Figura 2.4: As orientações de s e de θ .

Denotamos

$$S_0 = \partial \mathcal{M} = \{\theta = 0\} \cup \{\theta = \pi\} \cup \left(\bigcup_i (\{s = a_i\} \cup \{s = b_i\}) \right),$$

onde o conjunto $\{s = a_i\} \cup \{s = b_i\}$ está incluído apenas para as curvas Γ_i que não são fechadas (constituindo fronteiras para o intervalo $[a_i, b_i]$). Além disso consideramos os seguintes conjuntos

$$S_1 = S_0 \cup \{x \in \text{int } \mathcal{M} : T(x) \notin \text{int } \mathcal{M}\}.$$

Esses são pontos que fazem uma colisão tangencial com uma parede dispersiva (i.e, $T(x) \in S_0$) ou cuja trajetória atinge um ponto de quina e pára. Utilizando o mesmo estudo para a inversa T^{-1} , escrevemos

$$S_{-1} = S_0 \cup \{x \in \text{int } \mathcal{M} : T^{-1}(x) \notin \text{int } \mathcal{M}\}.$$

Definição 2.18. Seja $k(s) > 0$ a curvatura de Γ no ponto $s \in \Gamma$. Chamaremos de *círculo semi-oscultador* o círculo $D(s)$ tangente à Γ em s com raio $r(s)/2$ onde $r(s) = 1/k(s)$ é o raio de curvatura de Γ em s .

Quando T está bem definida em uma vizinhança de um ponto $x = (s, \theta)$, podemos obter sua derivada neste ponto dada por (ver [14]):

$$D_x T = \begin{bmatrix} \frac{tk - \sin \theta}{\sin \theta_1} & \frac{t}{\sin \theta_1} \\ k_1 \frac{tk - \sin \theta}{\sin \theta_1} - k & \frac{k_1 t}{\sin \theta_1} - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

para $x_1 = (s_1, \theta_1) = T(s, \theta) = T(x)$ e $k_1 = k(x_1)$, onde t é tempo necessário para duas rebatidas consecutivas (ou o deslocamento entre duas rebatidas consecutivas, já que a partícula tem velocidade constante unitária) e $k(x)$ indica a curvatura da fronteira $\partial \Gamma$ no ponto x . Se ambos, s, s_1

não pertencem a linhas retas, então (2.3) pode ser reescrita como

$$D_x T = \begin{bmatrix} \frac{t-d}{r \sin \theta_1} & \frac{t}{\sin \theta_1} \\ \frac{t-d-d_1}{rd_1} & \frac{t-d_1}{d_1} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde $r = 1/k$, é o raio de curvatura de Γ em s e $d = r \sin \theta$, $d_1 = r_1 \sin \theta_1$. Note que se $k > 0$ (componente focalizadora), então d é o comprimento do subsegmento de $\overline{ss_1}$ contido no círculo semi-osculador $D(s)$.

Observação 2.19. Em [8], na parametrização de x , foi usado o ângulo φ entre o vetor velocidade e o vetor normal. Isto acarreta apenas a mudança $\cos \varphi = \sin \theta$, já que $\varphi = \pi/2 - \theta$. Assim os cálculos continuam válidos utilizando a parametrização com o ângulo θ .

Após uma rápida análise da matriz acima segue que a aplicação $T : \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ é um difeomorfismo C^{k-1} ([8], Theorem 2.33). Definimos indutivamente

$$S_{n+1} = S_n \cup T^{-1}(S_n) \text{ e } S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup T(S_{-n}).$$

S_{n+1} e $S_{-(n+1)}$ são os conjuntos de singularidades para T^{n+1} e $T^{-(n+1)}$, respectivamente. Assim, no conjunto

$$\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_n$$

todas as iterações de T estão definidas e são C^{k-1} difeomorfismos. Assim, T está bem definida em um subconjunto denso $\widehat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ de medida de Lebesgue total. Assim a aplicação pode ser estendida por continuidade a todo $\mathcal{M}$, mas esta extensão pode assumir múltiplos valores, ver [8], página 35.

Utilizando a fórmula para $D_x T$ (2.3), obtém-se que $\det D_x T = \sin \theta / \sin \theta_1$.

A aplicação T preserva a medida $v = \sin \theta ds d\theta$ em $\mathcal{M}$. De fato, utilizando mudança de variáveis e o valor do determinante acima

$$\iint_{T(A)} \sin \theta_1 ds_1 d\theta_1 = \iint_A \sin \theta ds d\theta$$

para qualquer boreliano $A \subset \mathcal{M}$.

2.3 Exemplos de bilhares

Nesta seção apresentaremos alguns tipos de bilhares. Mostraremos propriedades geométricas da mesa e topológicas de seu espaço de fase. Muitas destas propriedades serão utilizadas posteriormente neste trabalho. Para maiores detalhes ver [8].

2.3.1 Circular

O primeiro a analisarmos é o circular devido a sua simplicidade de apresentação e construção. Tomemos um círculo de raio 1 e centro C parametrizado pelo comprimento de arco. O espaço de fase da transformação do bilhar é um cilindro cuja base é o círculo e altura π .

Seja $z = (r, \varphi)$ onde r é comprimento de arco medido a partir do ponto P' até um certo ponto P_0 pertencente ao círculo e φ o ângulo de reflexão em P_0 medido a partir da tangente. Se P_1 é o ponto do círculo da primeira colisão da trajetória de z , notamos que o triângulo P_0CP_1 é isósceles, figura 2.5. Logo o ângulo de incidência em P_1 é φ e o ângulo central θ é 2φ . Assim, se $z_1 = Tz$, temos que $z_1 = (r + 2\varphi, \varphi)$ e $z_n = T^n z = (r + 2n\varphi, \varphi)$, onde $r + 2n\varphi$ é tomado módulo 2π .

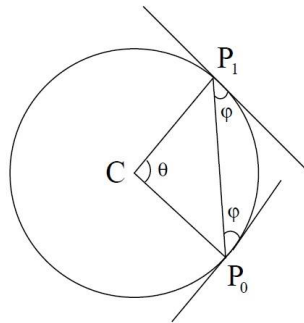


Figura 2.5: Construção do bilhar circular.

Isto mostra que as curvas $\varphi = \text{constante}$ são invariantes pela transformação T e este fato é suficiente para afirmarmos que a transformação do bilhar no círculo não é ergódica.

Se φ for um múltiplo irracional de π , observamos que a partícula descreve uma órbita que continuamente atinge pontos diferentes do círculo, preenchendo um anel no interior da mesa, como mostra a Figura 2.6. Caso contrário a órbita é periódica, como a da Figura 2.7. Notamos que em ambos os casos (mais visível no caso irracional) há a formação de uma curva no interior da mesa com a propriedade de que se ela é tangente a um trecho de trajetória entre duas colisões sucessivas, então todos os outros trechos também serão tangentes a ela. Essa

curva é denominada *cáustica*. Ver [22] para a prova de existência de cáusticas em domínios focalizadores.

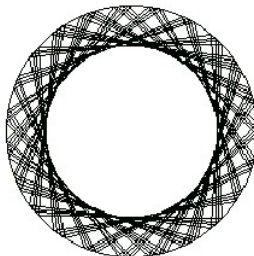


Figura 2.6: Exemplo de formação de cáustica no círculo.

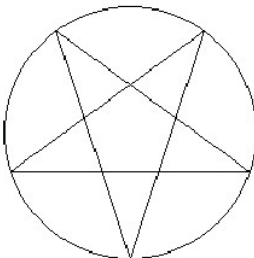


Figura 2.7: Exemplo de órbita periódica no círculo.

2.3.2 Elíptico

Nosso segundo exemplo é o bilhar na elipse. Vamos relembrar algumas propriedades geométricas elementares do bilhar elíptico que usaremos posteriormente.

Dado um sistemas de coordenadas ortogonais em $\mathcal{R}^2$, consideremos Γ a elipse dada por $x^2/a^2 + y^2 = 1$, $a > 1$. E chamemos de Q a região delimitada por Γ . Podemos parametrizar Γ por

$$x(u) = a \cos u, \quad y(u) = \sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

A curvatura da elipse no ponto $(x(u), y(u))$ é dada por

$$k(u) = \frac{a}{(a^2 \sin^2 u + \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Uma elipse pode ser parametrizada pela coordenada φ que é o ângulo formado pela reta tangente a elipse no ponto (x, y) com a linha horizontal $y = 0$. A equação de nossa elipse e sua curvatura parametrizada por φ são dadas por

$$y(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \tan^2 \varphi}}, \quad x(\varphi) = -a^2 y(\varphi) \tan \varphi,$$

$$k(\varphi) = \frac{(1 + a^2 \tan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + a^2 \tan^2 \varphi + a^2 \tan^2 \varphi + a^2 \tan^4 \varphi)}{a^2 (1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}}.$$

A relação entre as coordenadas s e φ diz que $k(s)ds = d\varphi$, daí obtemos imediatamente que $\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{k(s)} \frac{d\theta}{ds}$.

Inicialmente apontamos que existem duas órbitas periódicas de período dois que são as descritas sobre os eixos maior e menor da elipse. Portanto estudemos a órbita de um ponto cuja trajetória corta o eixo maior. Temos três possibilidades para a trajetória de saída desse ponto: entre os focos, entre um dos focos e a elipse ou sobre um dos focos.

Se a trajetória passar entre os focos, todos os outros trechos de trajetória entre colisões sucessivas também passarão por entre os focos preenchendo uma área delimitada por uma hipérbole confocal à elipse, que no caso é uma cáustica (Figura 2.9). No entanto, se a trajetória passar entre um dos focos e a elipse, a órbita manterá esse padrão preenchendo uma área entre a mesa e a cáustica definida por uma elipse confocal à original (Figura 2.8). Passando sobre um dos focos, nossa terceira possibilidade, todos os segmentos de trajetória passarão por cima de um dos focos. Isto é consequência do fato de que raios partindo de cada um dos focos da elipse formam ângulos iguais com a tangente à elipse no ponto de colisão. Para prova desse resultado, ver [33].

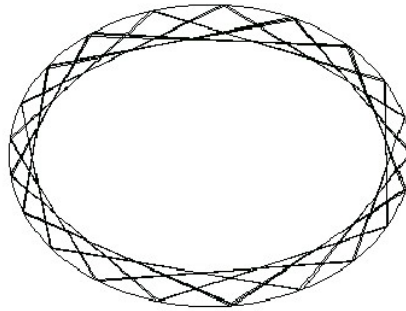


Figura 2.8: Exemplo de formação de cáustica elíptica.

O bilhar elíptico não é ergódico. De fato, seja $M' = [0, |\Gamma|] \times [0, \pi]$ o espaço de fase do bilhar elíptico. M' pode ser parametrizado por dois conjuntos de coordenadas (s, θ) e (φ, θ) . No momento vamos usar o segundo conjunto de coordenadas. A função

$$G(\varphi, \theta) = \frac{\cos^2 \theta - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad (2.5)$$

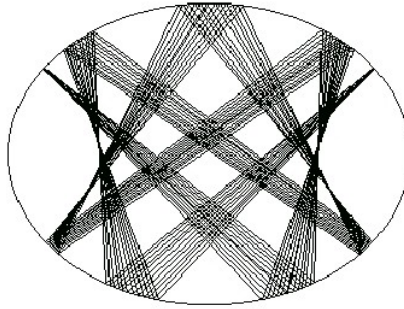


Figura 2.9: Exemplo de formação de cáustica hiperbólica.

onde $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$ é a excentricidade da elipse, é a integral primeira para a aplicação do bilhar na elipse, significando que G é constante (≤ 1) ao longo das órbitas da aplicação do bilhar. O espaço de fase do bilhar elíptico é folheado pelas curvas de nível de G , conforme Figura 2.10.

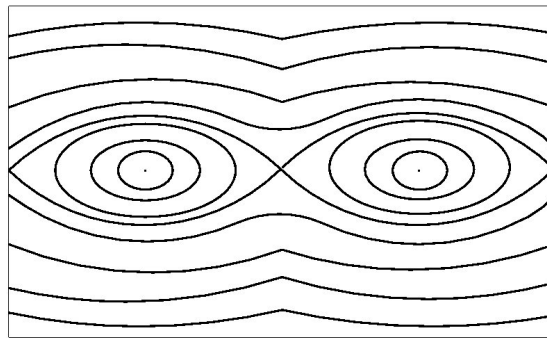


Figura 2.10: Espaço de fase do bilhar elíptico.

Nesta figura, as órbitas que descrevem uma hipérbole como cáustica são as curvas no interior da região com o formato de ∞ . As curvas fora dessa região são as formadas pelas órbitas que produzem elipses. As órbitas periódicas de período dois estão representadas em quatro pontos desse espaço de fase: as interseções das curvas que formam a região com formato de ∞ representam a órbita periódica sobre o eixo maior e os centros desse mesmos ramos representam a órbita periódica sobre o eixo menor.

A função 2.5 também é importante para calcular a inclinação das retas tangentes a estas curvas de nível. Vamos dar uma resposta em coordenadas (s, θ) . A inclinação da curva de nível $G = G(z)$ em $z = (s, \theta)$ é dada por

$$p(z) := \frac{d\theta}{ds} = \frac{k(s)\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{\sin 2\theta} (1 - G). \quad (2.6)$$

Definição 2.20. Denote por $\mathcal{E}$ o subconjunto de M' consistindo das curvas de nível elípticas e por $\mathcal{H}$ o subconjunto de M' consistindo das curvas de nível hiperbólicas. Claramente, pontos em $\mathcal{E}$ têm trajetórias com cáustica elíptica e pontos em $\mathcal{H}$ têm trajetórias com cáustica hiperbólica.

Temos $0 < G < 1$ em $\mathcal{E}$, e $1 - a^2 \leq G < 0$ em $\mathcal{H}$. Ao longo das trajetórias que passam pelo foco, cuja união forma uma conexão de sela no espaço de fase, temos que $G = 0$.

Existem várias diferenças entre as órbitas em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$. Destacaremos aqui algumas importantes para os resultados deste trabalho.

A primeira diferença está na existência de órbitas periódicas. Para cada $a > 1$, temos órbitas periódicas de todos os períodos em $\mathcal{E}$, fato que não acontece em $\mathcal{H}$. Órbitas de período 4 existem apenas para $a > \sqrt{2}$ e não existem órbitas de período 8 para $a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

A segunda diferença que iremos destacar é o ponto de tangência com a respectiva cáustica. O ponto de tangência para cáusticas em $\mathcal{E}$ sempre ocorre dentro de Q (isto é, da elipse original), e assim este ponto está no segmento de trajetória que une duas rebatidas consecutivas na elipse. Entretanto, em $\mathcal{H}$, a tangência pode ocorrer fora de Q , isto é, não temos necessariamente o ponto de tangência entre duas rebatidas consecutivas no interior de Γ . Isto pode ocorrer mesmo no infinito, se um segmento de trajetória está contido em uma assíntota da cáustica hiperbólica.

Nos próximos lemas, daremos condições para que a tangência para trajetórias em $\mathcal{H}$ ocorra em Q . Sejam Γ_1 e Γ_2 as semi-elipses referentes a $u \in [-\pi/2, \pi/2)$ ($\varphi \in [0, \pi]$) e $u \in [\pi/2, 3\pi/2)$ ($\varphi \in [\pi, 2\pi]$) respectivamente.

Lema 2.21 (Lemma 7.3 em [15]). *Se $1 < a < \sqrt{2}$, então qualquer órbita de $\mathcal{H}$, exceto a órbita periódica ao longo do menor eixo, tem no máximo duas rebatidas consecutivas em uma mesma semi-elipse.*

Demonstração. Demonstraremos o lema para rebatidas consecutivas em Γ_1 , o outro caso é análogo.

A reta normal ao longo do ponto $(x(u), y(u))$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ intersecta o eixo y em $y = (1 - a^2) \sin u$.

Para $a < \sqrt{2}$, uma trajetória em $\mathcal{H}$ começando em $z \in \Gamma_1$, com Tz pertencendo também a Γ_1 terá $\theta(Tz) < \pi/2$ (basta comparar o ângulo de chegada em Tz com a reta normal em Tz).

Como uma trajetória em $\mathcal{H}$ atravessa o eixo x em algum $x \in (-c, c)$, temos que Tz sairá de Γ_1 . □

Lema 2.22 (Lemma 1 em [27]). *Suponha que uma trajetória $\{T^n(\varphi_0, \theta_0)\} \in \mathcal{H}$ tenha duas rebatidas consecutivas em uma mesma semi-elipse. Se $1 < a < \sqrt{2}$, então a tangência entre o segmento unindo estas duas rebatidas e a cáustica hiperbólica ocorre dentro de Q .*

Demonstração. Suponhamos que exista uma trajetória na qual a tangência ocorra fora da elipse. Para fixar as ideias, suponhamos que esta tangência ocorra na parte inferior direita da hipérbole. Por continuidade, é possível obter $\varphi_0 \in [0, \pi/2)$ e $\varphi_1 \in [\pi/2, \pi]$ tal que esta tangência ocorra na interseção de cáustica hiperbólica com a elipse. Para fixar ideias, veja figura 2.11.

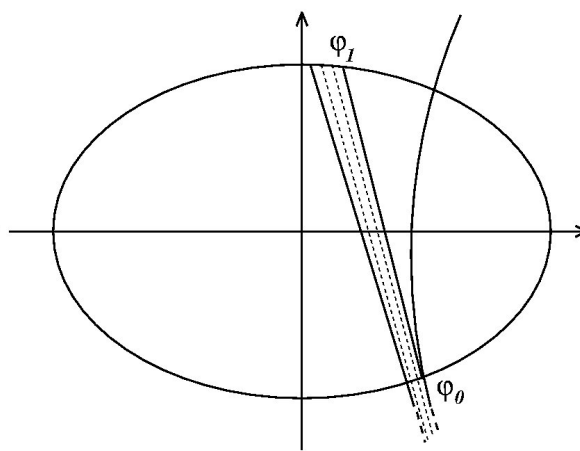


Figura 2.11:

Isto significa que, ou $\Gamma(\varphi_0)$ ou $\Gamma(\varphi_1)$ está na interseção da cáustica hiperbólica com a fronteira da elipse. Como hipérbolas e elipses formam uma família ortogonal, temos que $\theta_0 = \pi/2$.

Mas, se $1 < a < \sqrt{2}$, $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$ e $\theta_0 = \pi/2$ então, pelo mesmo argumento usado no lema anterior, $\varphi_1 \in [\pi, 3\pi/2]$. Logo φ_0 e φ_1 não estão na mesma semi-elipse, contrariando nossa hipótese inicial.

Portanto a tangência entre o segmento $\overline{\varphi_0\varphi_1}$ com a cáustica hiperbólica ocorre dentro de Q . □

Lema 2.23 (Lemma 2 em [27]). *Suponha que uma trajetória $\{T^n(\varphi_0, \theta_0)\} \in \mathcal{H}$ tenha duas rebatidas consecutivas, φ_0 e φ_1 , em uma mesma semi-elipse. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, então a tangência entre cada um dos segmentos $\overline{\varphi_{-1}\varphi_0}$ e $\overline{\varphi_0\varphi_1}$ e a cáustica hiperbólica ocorre dentro de Q .*

Demonstração. Seja $G(\varphi_0, \theta_0) = K_0 < 0$ a curva de nível que representa a cáustica hiperbólica

para uma órbita $\{T^n(\varphi_0, \theta_0)\}$. Fixe esta cáustica hiperbólica K_0 . Chamenos de $\theta(\varphi)$ a solução de $G(\varphi, \theta(\varphi)) = K_0$.

Consideremos o pedaço de trajetória passando por $\varphi = 0, (\varphi_{-1}, \theta(\varphi_{-1})), (0, \theta(0)), (\varphi_1, \theta(\varphi_1))$, tal que $\varphi_1 \in [0, \pi]$ e $\varphi_{-1} \in [\pi, 2\pi]$. Como $\varphi = 0$ pertence às duas semi-elipses e $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, pelo Lema 2.22 temos que, $\overline{\varphi_{-1}0}$ e $\overline{0\varphi_1}$ tocam a hipérbole dentro da elipse.

Consideremos agora que $\varphi_{-1} \in (\pi/2, 3\pi/2)$, $\varphi_0 \in [0, \pi/2)$ e $\varphi_1 \in [\pi/2, \pi]$, os outros casos são análogos. Seja $G(\varphi_0, \theta_0) = K_0 < 0$ a curva de nível que representa a cáustica hiperbólica para a órbita acima.

Como $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, pelo Lema 2.22, o ponto de tangência entre $\overline{\varphi_0\varphi_1}$ e a cáustica ocorre dentro da elipse. Suponhamos que o ponto de tangência entre $\overline{\varphi_{-1}\varphi_0}$ e a cáustica ocorra fora da elipse.

Como na demonstração do lema anterior, podemos encontrar φ_{-1} e φ_0 tais que o ponto de tangência ocorra na interseção de cáustica hiperbólica com a elipse. Além disso, como $\varphi_1 \in [\pi/2, \pi]$ e $a < \sqrt{2}$, segue que $\theta(\varphi_{-1}) = \pi/2$.

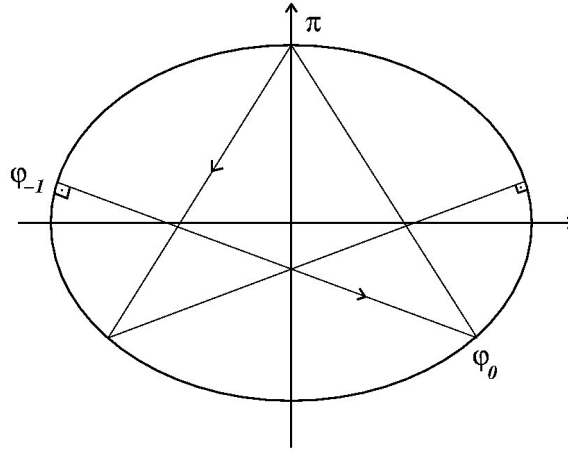


Figura 2.12:

Variando continuamente o ponto φ_{-1} e continuando com $\theta(\varphi_{-1}) = \pi/2$, conseguimos uma nova cáustica hiperbólica K_1 tal que $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$ e $\varphi_1 = \pi$. Isto nos dá uma configuração, $(\varphi_{-1}, \pi/2) \mapsto (\varphi_0, \theta_0) \mapsto (\pi, \theta_1)$. Para fixar ideias, veja a figura 2.12. Continuando-a obtemos uma órbita periódica de periodo 8 que corta o eixo menor 6 vezes. Como citado anteriormente, este tipo de órbita ocorre apenas quando $a > \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, contrariando nossa hipótese.

□

Como consequência do lema anterior obtemos o seguinte resultado

Corolário 2.24. *Suponha que uma trajetória $\{T^n(\varphi_0, \theta_0)\} \in \mathcal{H}$ tenha duas rebatidas consecutivas, φ_0 e φ_1 , em uma mesma semiellipse. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, então a tangência entre cada um dos segmentos $\overline{\varphi_{-1}\varphi_0}$, $\overline{\varphi_0\varphi_1}$, $\overline{\varphi_1\varphi_2}$ e a cáustica hiperbólica ocorre dentro de Q .*

Lema 2.25 (Lemma 1 (iii) em [14]). *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ são rebatidas consecutivas de um ponto da trajetória do bilhar na elipse com cáustica hiperbólica tal que φ_0 e φ_1 estão em uma mesma semiellipse, então a distância entre o ponto de tangência de $\overline{\varphi_0\varphi_1}$ com a cáustica hiperbólica e a fronteira da semi elipse é limitada inferiormente por uma constante positiva que não depende de φ_0, φ_1 .*

Demonstração. Suponha que possamos encontrar uma sequência de trajetórias, tais que a distância entre o ponto de tangência de $\overline{\varphi_0\varphi_1}$ com a cáustica (hipérbole) e a fronteira do bilhar elíptico é arbitrariamente próximo de 0. Quando um ponto de tangência está muito próximo da fronteira do bilhar elíptico, digamos o ponto φ_1 , então a Lei de Reflexão 3.4 (veja seção 3.2) implica que o ponto de tangência entre $\overline{\varphi_1\varphi_2}$ com a cáustica ocorre fora da elipse, contradizendo o Corolário 2.24. $\square$

2.3.3 Estádio Circular

Obtém-se um bilhar ergódico deformando o círculo em um *estádio* (Figura 1.1 (a)). De fato, mostra-se (ver [5]) que o espaço de fase do bilhar no estádio, à medida que se aumenta o número de rebatidas, é totalmente preenchido, a menos de duas regiões que tornam-se cada vez menores quando o número de rebatidas tende a infinito. Essas duas regiões estão relacionadas à órbita periódica formada por rebatidas nos semicírculos cuja trajetória é paralela aos segmentos de reta.

3 *Hiperbolicidade do Estádio Elíptico*

Neste capítulo, vamos estudar as propriedades hiperbólicas do bilhar no estádio elíptico. Vamos mostrar que a aplicação Φ possui expoentes de Lyapunov não nulos q.t.p. usando o Teorema 2.4. Esta propriedade implicará, pela Teoria de Pesin, na existência q.t.p. de variedades estáveis e instáveis locais absolutamente contínuas para Φ , que é necessária para provarmos a ergodicidade de Φ .

Para aplicar o Teorema 2.4, vamos criar um campo de cones que satisfaça suas condições. Além disso este campo de cones possuirá algumas propriedades que serão necessárias para o Teorema Ergódico Local. Para definir o campo de cones, usaremos um pouco de óptica geométrica e definiremos nossos campos de cones a partir dela e daremos algumas equivalências sobre o modo de entender esses cones.

3.1 Construção do Sistema Dinâmico

Nesta seção apresentaremos o tipo de mesa de bilhar com a qual trabalharemos, introduzindo um espaço de fase restrito e a transformação de primeiro retorno Φ induzida pela aplicação do bilhar T . Isto irá facilitar algumas demonstrações mais a frente. Em seguida definiremos o conjunto de singularidades de T e Φ e faremos uma relação entre elas.

Estudaremos o bilhar definido na mesa $Q = Q_{a,h}$, onde Q é uma região convexa do plano cuja fronteira consiste de duas semi-elipses com semi-eixos de comprimento 1 e a , $a > 1$ e unidas por duas linhas retas de comprimento $2h$ que são paralelas ao maior eixo das semi-elipses. Esta região é chamada de *estádio elíptico*, Figura 3.1.

Denotemos por Γ_1, Γ_2 as duas semi-elipses do estádio de comprimento m e semi-eixos de comprimento 1 e $a > 1$. Nesta representação Γ_1 é a semi-elipse contida no semi-plano $\{x \geq 0\}$ e o maior semi-eixo da elipse está no eixo x do plano. As linhas juntando as duas semi-elipses tem comprimento $2h$. Vamos denotar a *componente focalizadora* da fronteira do estádio por $\Gamma_+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e a *componente neutra* consistindo das duas semiretas por Γ_0 .

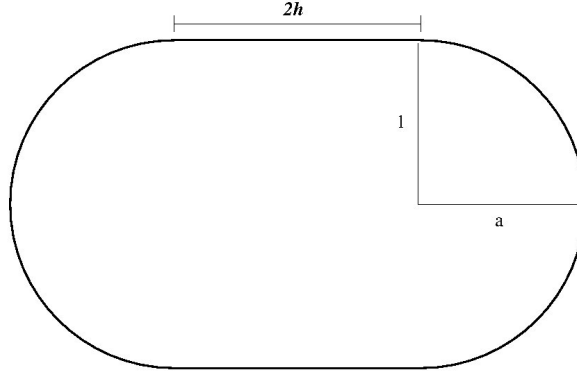


Figura 3.1: Estádio elíptico.

Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 as interseções das semi-elipses com as linhas começando da parte inferior direita e movendo-se no sentido anti-horário e suas coordenadas são, respectivamente, $0, m, m + 2h, 2m + 2h$ (o comprimento total de Γ é $2m + 4h$). Vamos chamar esses pontos de *quinas* de Γ .

Seja

$$M' = \{(q, v) : q \in \Gamma, |v| = 1, \langle v, n(q) \rangle \geq 0\}.$$

o espaço de fase da aplicação do bilhar no estádio elíptico.

Particionamos M' em dois retângulos $M_+ = \pi^{-1}(\Gamma_+)$ e $M_0 = \pi^{-1}(\Gamma_0)$ que são os subconjuntos do espaço de fase correspondendo respectivamente às componentes focalizadora e neutra de Γ . Definimos por $M = M_+$ o espaço de fase reduzido com o qual iremos trabalhar.

O conjunto M pode ser particionado em dois subconjuntos $M_1 = \pi^{-1}(\Gamma_1)$ e $M_2 = \pi^{-1}(\Gamma_2)$. Para $i = 1, 2$, definimos $U_i = \{z \in M_i : T^{-1}z, Tz \notin M_i\}$, $V_i = M_i \setminus U_i = \{z \in M_i : T^{-1}z \in M_i \text{ ou } Tz \in M_i\}$ e $Y_i = \{z \in M_i : Tz \notin M_i\}$. Em palavras, U_i é o conjunto dos pontos $z \in M_i$ que refletem apenas uma vez em Γ_i , enquanto V_i é o conjunto dos pontos $z \in M_i$ que tem pelo menos duas reflexões consecutivas em Γ_i , e Y_i é o conjunto dos pontos $z \in M_i$ que podem ter várias reflexões consecutivas para trás no tempo em Γ_i mas a sua próxima reflexão não é em Γ_i . Definimos $U = U_1 \cup U_2$, $V = V_1 \cup V_2$ e $Y = Y_1 \cup Y_2$.

O conjunto V_i , $i = 1, 2$, pode ser escrito ainda como $V(i, \mathcal{E}) \cup V(i, \mathcal{H})$, onde

$$V(i, \mathcal{E}) = \{z \in V_i \text{ tal que a cáustica é uma elipse}\}$$

$$V(i, \mathcal{H}) = \{z \in V_i \text{ tal que a cáustica é uma hipérbole}\}$$

Seja (T, v) a aplicação do bilhar em M' que preserva a medida $v = \sin \theta ds d\theta$. A aplicação

$\Phi : M \rightarrow M$ é a aplicação de primeiro retorno nas semielipses, M , induzida por T , $\Phi(y) = T^{A(y)}y$, onde $A(y) = \inf\{i \geq 1 : T^i y \in M\}$. A medida $\mu = (\nu(M))^{-1} \nu|_M$ é uma medida de probabilidade invariante para Φ . As aplicações T e Φ são difeomorfismos analíticos por partes (pois dependem do grau de diferenciabilidade da curva que constitui a fronteira do bilhar).

Dada uma trajetória começando em um ponto z em uma semiellipse que toca n vezes a parte reta do estádio antes de chegar a outra semiellipse, podemos escrever a matriz derivada de Φ por

$$D_z \Phi = (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{tk - \sin \theta}{\sin \theta_1} & \frac{t}{\sin \theta_1} \\ k_1 \frac{tk - \sin \theta}{\sin \theta_1} - k & \frac{k_1 t}{\sin \theta_1} - 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Isto se deve ao fato de que na parte reta do estádio, DT é apenas uma translação e uma inversão.

Observação 3.1. Por [19], o Teorema de Oseledets (2.2) pode ser aplicado em T e nos dá a existência ν -q.t.p. de expoentes de Lyapunov para T . Segue imediatamente que Φ tem expoentes de Lyapunov μ -q.t.p. e eles são proporcionais aos expoentes de Lyapunov de T com constante de proporcionalidade igual a média (com respeito a μ) do tempo de retorno $A(y)$ sobre M (por [36]). Além disso, as semielipses formam uma seção transversal para a aplicação do bilhar T , daí $\bigcup_{j=0}^{\infty} T^j M = M'$. Logo pela Proposição 2.12 temos que T é ergódico se, e somente se, Φ é ergódico.

Vamos denotar por S^+ o subconjunto de M onde Φ falha em ser C^1 e o chamemos de *conjunto singular de Φ* ou *conjunto das singularidades de Φ* . S^+ consiste dos pontos cuja próxima reflexão está em um canto do estádio. O conjunto singular S^- para a aplicação Φ^{-1} é definido similarmente, mas neste caso considerando reflexões no passado. O conjunto $S_n^+ = S^+ \cup \Phi^{-1}S^+ \cup \dots \cup \Phi^{-n+1}S^+$, $n \geq 1$ é o conjunto singular para Φ^n , e $S_n^- = S^- \cup \Phi S^- \cup \dots \cup \Phi^{n-1}S^-$ é o conjunto singular para Φ^{-n} . Seja $S_\infty^+ = \bigcup S_n^+$ e $S_\infty^- = \bigcup S_n^-$. Então $S_\infty = S_\infty^+ \cap S_\infty^-$ é o conjunto dos pontos cuja trajetória bate em um canto no futuro e no passado.

Vamos denotar por S^+ e S^- os conjuntos singulares de T e T^{-1} , respectivamente, que são os subconjuntos de M' consistindo dos pontos cuja próxima reflexão para trás e para frente no tempo são quinas do estádio. Similarmente S_n^+ e S_n^- são os conjuntos singulares de T^n e T^{-n} para todo $n \geq 0$.

Observação 3.2. Os conjuntos singulares $S_n^\pm$ de Φ estão diretamente relacionados aos conjuntos singulares $S_m^\pm$ de T . De fato, se $z \in S^+ \cap M$, então temos que $z \in S^+$ (se não houver saltos sobre M_0) ou $z \in S_{2N+1}^+$ (se $T^i z \in M_0$ para $i = 1, \dots, 2N$). E, se $z \in S_n^+ \cap M$, então $z \in S_{(2N+1)n}^+$. Relações similares são obtidas para S_n^- . Portanto $S_n^\pm \subset S_{(2N+1)n}^\pm$.

3.2 Óptica Geométrica

Nesta seção apresentaremos os conceitos de óptica geométrica que serão usados na construção do nosso campo de cones. Os resultados aqui apresentados podem ser vistos em [8] e [37].

Para entender a dinâmica de um bilhar, estudamos a dinâmica de uma família infinitesimal de trajetórias do bilhar (variações). Em um bilhar planar, as variações são parametrizadas por uma quantidade projetiva chamada *tempo focalizador*. Uma descrição completa da dinâmica das variações é dada pela *lei de reflexão* que explica como o tempo focalizador de uma variação muda após refletir na fronteira da mesa do bilhar.

Uma variação $\eta(\alpha, t)$ é uma família a um parâmetro de retas em $\mathbb{R}^2$. Seja $u \in T_z M$, $z \in M$ e $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva tal que $\xi(0) = z$ e $\xi'(0) = u$. Associamos com u a variação

$$\eta_+(\alpha, t) = q(\alpha) + tv(\alpha), \quad t \in \mathbb{R}$$

onde $\xi(\alpha) = (q(\alpha), v(\alpha))$. Dizemos que $\eta_+(\alpha, t)$ *focaliza* se $\frac{\partial \eta_+}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = 0$ para algum $t \in \mathbb{R}$, ou seja, se existir um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = q'(0) + t_0 v'(0) = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{\langle q'(0), v'(0) \rangle}{\langle v'(0), v'(0) \rangle}.$$

Como

$$v(\alpha) = \cos \theta(\alpha) t(\alpha) + \sin \theta(\alpha) n(\alpha),$$

onde $t(\alpha) = q'(\alpha)$ e $n(\alpha)$ representam, respectivamente, os vetores tangente e normal a $q(\alpha)$, temos que

$$v'(\alpha) = -(k(\alpha) + \theta'(\alpha)) \sin \theta(\alpha) t(\alpha) + (k(\alpha) + \theta'(\alpha)) \cos \theta(\alpha) n(\alpha).$$

Logo,

$$\begin{aligned} t_0 &= -\frac{\langle t(0), -(k(0) + \theta'(0)) \sin \theta(0) t(0) + (\theta'(0) + k(0)) \cos \theta(0) n(0) \rangle}{(k(0) + \theta'(0))^2 (\sin^2 \theta(0) + \cos^2 \theta(0))} \\ &\Rightarrow t_0 = \frac{\sin \theta(0)}{k(0) + \theta'(0)}. \end{aligned}$$

Observe que $\theta'(0)$ é a inclinação do vetor u . Chamaremos este tempo t_0 de *tempo focalizador* de $\eta_+(\alpha, t)$ e o denotaremos por $f^+(u)$. Vamos considerar também a variação

$$\eta_-(\alpha, t) = q(\alpha) + t\tilde{v}(\alpha), \quad t \in \mathbb{R}$$

onde o vetor $\tilde{v}(\alpha)$ é obtido refletindo $v(\alpha)$ através de $n(q(\alpha))$ (vetor normal em $q(\alpha)$). Definimos o *tempo focalizador* $f^-(u)$ da variação $\eta_-(\alpha, t)$ da mesma maneira como anteriormente.

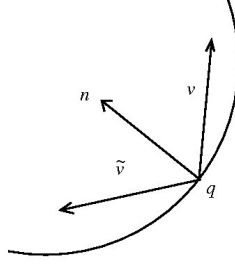


Figura 3.2: Esquema da posição de v e $\tilde{v}$.

Embora para cada vetor $u \in T_z M$ podemos construir infinitas variações distintas $\eta_+(\alpha, t)$ ($\eta_-(\alpha, t)$), todas elas focalizam e seu tempo focalizador é o mesmo. Vamos chamar de *tempo focalizador para frente (trás) de u* o tempo focalizador da variação $\eta_+(\alpha, t)$ ($\eta_-(\alpha, t)$). Note que, em $z = (q, v)$, um vetor u focaliza para trás quando, em $\tilde{z} = (q, \tilde{v})$, focaliza para frente.

Seja $u = u_s \frac{\partial}{\partial s} + u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_z M$ com $u_s, u_\theta \in \mathbb{R}$. Os tempos focalizadores para frente e para trás $f^+(u), f^-(u)$ são dados por

$$f^\pm(u) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{k \pm \frac{u_\theta}{u_s}}, & \text{se } u_s \neq 0 \\ 0, & \text{se } u_s = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $k \geq 0$ é a curvatura de Γ em $\pi(z)$.

Observação 3.3. Claramente o tempo focalizador está associado à inclinação dos vetores do espaço tangente, mas precisamos apenas associá-lo à direção destes vetores. Assim quando nos referirmos ao tempo focalizador tomaremos sempre vetores de norma 1.

Dizemos que u é *divergente (convergente)* se $f^+(u)$ é negativo (positivo) e u é *flat* se $f^+(u) = \infty$.

Lema 3.4. (*Lei de Reflexão*). Seja $z_0 = (q_0, v_0) \in M \setminus S^+$ e $u \in T_{z_0} M$. Se f_0 é o tempo focalizador para frente de u e f_1 é o tempo focalizador para frente de $D_{z_0} Tu$, então a relação entre f_0 e f_1 é dada por

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{t_0 - f_0} = \frac{2k_1}{\sin \theta_1},$$

onde k_1 é a curvatura de Γ em q_1 e t_0 é o comprimento do segmento $[z_0, Tz_0]$.

Agora vamos comparar a evolução de dois vetores depois de uma reflexão. O lema seguinte, que segue diretamente da Lei de Reflexão, mostra que o tempo focalizador tem uma importante propriedade de ordenação. Esta propriedade será muito útil na prova da hiperbolicidade de Φ .

Lema 3.5. (*Propriedade de Ordenação*). *Com as mesmas notações dadas acima. Sejam $u, w \in T_{z_0}M$. Suponha que $0 < f^+(w) < t(z)$ e $0 < f^+(D_{z_0}Tw)$. Então*

$$0 \leq f^+(u) \leq f^+(w) \Rightarrow 0 < f^+(D_{z_0}Tu) \leq f^+(D_{z_0}Tw).$$

A implicação continua válida se substituirmos a desigualdade por uma desigualdade estrita.

Demonstração. Segue do Lema 3.4, que

$$\frac{1}{f^+(D_zTu)} + \frac{1}{t_0 - f^+(u)} = \frac{2k_1}{\sin \theta_1} = \frac{1}{f^+(D_zTw)} + \frac{1}{t_0 - f^+(w)}.$$

Por hipótese, $f^+(u) \leq f^+(w)$, daí $\frac{1}{t_0 - f^+(u)} \leq \frac{1}{t_0 - f^+(w)}$.

Assim, $\frac{1}{f^+(D_zTw)} - \frac{1}{f^+(D_zTu)} = \frac{1}{t_0 - f^+(u)} - \frac{1}{t_0 - f^+(w)} \leq 0$.

Logo, $\frac{1}{f^+(D_zTw)} \leq \frac{1}{f^+(D_zTu)}$.

Portanto $f^+(D_zTu) \leq f^+(D_zTw)$. □

Podemos ver que f^+ é uma coordenada projetiva em T_zM . Assim, podemos identificar um cone $C(z) \subset T_zM$ com um intervalo fechado dos valores de f^+ :

$$C(z) = \{u \in T_zM; f_1 \leq f^+(u) \leq f_2\}$$

para alguns números reais f_1, f_2 que representam as bordas do cone, tais que $-\infty < f_1 < f_2 < \infty$. Posteriormente usaremos esta identificação para definir nosso campo de cones.

Seja $C'(z)$ o fecho do cone complementar de $C(z)$ em T_zM . Definimos

$$F^+(z) = \sup_{u \in C(z)} f^+(u) \quad \text{e} \quad F^-(z) = \sup_{u \in C'(z)} f^-(u).$$

Note que $F^+(z)$ e $F^-(z)$ representam um dos vetores que formam o bordo de $C(z)$ e $C'(z)$ respectivamente.

Observação 3.6. Se z e Φz são duas rebatidas consecutivas na mesma semi-elipse (ambos pertencem a V), então o segmento que os une é tangente a uma cáustica. Pelas definições das variações e dos tempos focalizadores, temos que $F^+(z)$ e $F^-(\Phi z)$ focalizam no mesmo ponto P_0 da tangência da trajetória com a cáustica.

O próximo resultado é um critério simples que nos ajudará a verificar a invariância de um campo de cones. A primeira versão deste lema foi feita por Donnay em [15]. Iremos chamar de $m(u)$ a inclinação do vetor u .

Lema 3.7. (*Lema Focalizador*). *Seja $z \in M \setminus S^+$ tal que $Tz \in M$. Suponha que $0 \leq f^+(u) \leq t(z)$ para todo $u \in C(z)$ e $0 < F^-(Tz) \leq t(z)$. Então*

$$0 < F^+(z) + F^-(Tz) \leq t(z) \Rightarrow m(D_z Tu) \geq m(w_1),$$

onde $w_1 \in C(Tz)$ é tal que $f^+(w_1) = F^+(Tz)$. E se a desigualdade do lado esquerdo é estrita, então a desigualdade do lado direito também é estrita.

Demonstração. Pelas definições de f^+ e F^+ , o vetor w_1 descrito acima pertence a uma das bordas de $C(Tz)$.

Seja $w = D_{Tz} T^{-1} w_1$. Temos que $f^+(w) = t - F^-(Tz)$.

Além disso, se $u \in C(z)$, então $f^+ \leq F^+(z)$. Daí, por hipótese, temos que $F^+(z) \leq t - F^-(Tz) = f^+(w)$. Logo $f^+(u) \leq f^+(w)$.

Assim, aplicando o Lema 3.5, temos $f^+(D_z Tu) \leq f^+(D_z Tw) = f^+(w_1)$, ou seja, $\frac{\sin \theta}{k + m(D_z Tu)} \leq \frac{\sin \theta}{k + m(w_1)}$.

Portanto temos que $m(D_z Tu) \geq m(w_1)$. □

Observação 3.8. O lema anterior também é um critério direto para saber se um campo de cones é ou não invariante. Pois, se $f^+(D_z Tu) \leq f^+(D_z Tw) = f^+(w_1) = F^+(Tz)$ temos que $D_z Tu \in C(Tz)$.

Como a fronteira do estádio elíptico possui partes não focalizadoras, vamos apresentar uma versão do Lema Focalizador para trajetórias que as tocam. A demonstração do lema a seguir segue de [15] e de [8].

Considere uma trajetória que atravessa o estádio apenas uma vez e cujos pontos finais estão em arcos distintos. Mais precisamente, considere a órbita finita $\{z, Tz, \dots, T^n z\}$, $n > 0$ tal que

$Tz, \dots, T^{n-1}z \in M_0$ se $n > 1$ e assumamos, sem perda de generalidade, que $z \in M_1$ e $T^n z \in M_2$. Vamos denotar por $L(z)$ o comprimento da trajetória, isto é, $L(z) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i$.

Lema 3.9. *Sob as condições acima, se $u \in C(z)$ e $w \in C(T^n z)$ é o vetor do bordo de $C(T^n z)$, então*

$$0 < F^+(z) + F^-(T^n z) \leq L(z) \Rightarrow m(D_z T^n u) > m(w).$$

Para finalizar esta seção, apresentaremos um resultado que diz respeito a outra importante propriedade que algumas órbitas do bilhar elíptico possuem. Usaremos aqui as coordenadas (φ, θ) .

Lema 3.10. *No bilhar elíptico com $a < \sqrt{2}$, escolha uma trajetória em $\mathcal{E}$ tal que $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, $\varphi_0 + \theta_0 \geq \pi$ e $\varphi_1 \in [\pi, 2\pi]$. O ponto P_0 da tangência de $\overline{\varphi_0 \varphi_1}$ com a cáustica elíptica está contido no interior do círculo semi-osculador em $\varphi = \pi$.*

Demonstração. Fixemos uma cáustica elíptica.

Para cada (φ, θ) , $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, $\varphi + \theta \geq \pi$, associamos $P(\varphi)$, o ponto de tangência com a cáustica.

Seja $\tilde{\varphi}_0$ tal que $P(\tilde{\varphi}_0)$ é o vértice superior da cáustica elíptica. Ordenando a cáustica elíptica pela orientação no sentido anti-horário, como na figura 3.3, temos que $P(\tilde{\varphi}_0) \leq P(\varphi) \leq P(\pi)$ por construção.

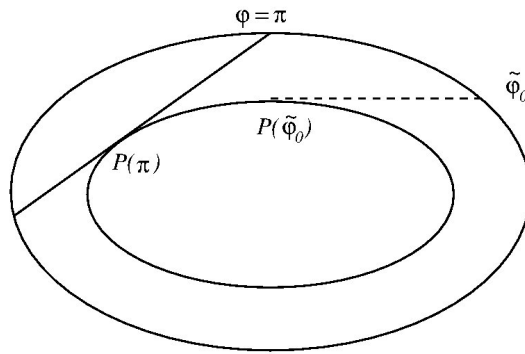


Figura 3.3: Idéia geométrica da construção feita na demonstração do Lema 3.10.

O círculo semi-osculador em $\varphi = \pi$ possui raio $a^2/2$. Logo temos que $P(\tilde{\varphi}_0)$ está contido em seu interior.

A curva integral associada a esta cáustica tem um ponto crítico em $\varphi = \pi$ (basta verificar a equação 2.6), logo o vetor tangente à curva nesse ponto é $(1,0)$. Pela definição da distância focalizadora segue que $f^+(1,0) = \frac{\sin \theta}{k_\pi + 0} = a^2 \sin \theta$ e como visto anteriormente, $a^2 \sin \theta$ representa o comprimento da trajetória contida no círculo semi-osculador em $\varphi = \pi$. Em outras palavras, a distância focalizadora é o ponto de interseção da trajetória com o círculo semi-osculador como também é o ponto de tangência com a cáustica.

Portanto, para todo $\varphi \in [\tilde{\varphi}, \pi]$ o ponto de tangência da trajetória com a cáustica ocorre dentro do círculo semi-osculador em $\varphi = \pi$. $\square$

3.3 Campo de cones invariante

Nosso objetivo final é provar a ergodicidade da aplicação Φ que, por sua vez, nos dará a ergodicidade de T . O primeiro passo é a construção de um campo de cones em M que seja eventualmente estritamente Φ -invariante e que tenha algumas propriedades adicionais exigidas pelo Teorema Ergódico Local.

Como consequência da existência desse campo de cones, temos que Φ , e portanto T , tem q.t.p. expoentes de Lyapunov não nulos. Esta propriedade implica, pela teoria de Pesin ([19]), que T tem variedades estáveis e instáveis locais q.t.p. que são absolutamente contínuas.

Definimos nosso campo de cones $\{C\}$ em M da seguinte maneira,

- para $z \in V$: os segmentos de chegada e saída de z são ambos tangentes a uma cáustica (elipse ou hipérbole), assim sejam $P_+(z)$ e $P_-(z)$ os correspondentes pontos de tangência. Definimos $C(z)$ como o conjunto de todos $u \in T_z M$ que focalizam entre $\pi(z)$ e P_z ,

$$C(z) = \{u \in T_z M : 0 \leq f^+(u) \leq d(\pi(z), P_+(z))\}.$$

O bordo de $C(z)$ é constituído pelos vetores u_1, u_2 , para os quais $f^+(u_1) = 0$ e $f^+(u_2) = F^+(z) = d(\pi(z), P_+(z))$. O primeiro caso ocorre quando $u_1 = (0, 1)$ e o segundo ocorre no ponto de tangência com a cáustica. Neste caso, ao considerarmos a curva representada pela variação no espaço de fase, a sua tangente no ponto z coincide com a tangente da curva de nível da cáustica, logo $u_2 = (1, -\frac{\partial G}{\partial \varphi} / \frac{\partial G}{\partial \theta})$.

Assim, podemos reescrever o cone acima como,

$$C(z) = \{aX_v + bX_c, ab \geq 0\},$$

onde $X_v = (0, 1)$ e $X_c = (1, -\frac{\partial G}{\partial \varphi} / \frac{\partial G}{\partial \theta})$.

Ou ainda, como os vetores cuja inclinação satisfaz $\frac{d\theta}{ds}(z) \geq p(z)$, onde $p(z)$ é a equação (2.6).

- para $z \in U$: chamemos de $Q_+(z)$ e $Q_-(z)$ os pontos onde os segmentos de chegada e saída de z intersectam a fronteira do círculo semi-oscilador de Γ em $\pi(z)$. Definimos

$$C(z) = \{u \in T_z M : 0 \leq f^+(u) \leq d(\pi(z), Q_+(z))\}.$$

Para este caso, o bordo de $C(z)$ é constituído pelos vetores u_1, u_2 , para os quais $f^+(u_1) = 0$ e $f^+(u_2) = F^+(z) = d(\pi(z), Q_+(z))$. O primeiro caso ocorre quando $u_1 = (0, 1)$, e o segundo ocorre na interseção do segmento da trajetória com o círculo semi-oscilador. Como visto anteriormente, o comprimento do segmento da trajetória contido no círculo semi-oscilador é $\frac{\sin \theta}{k}$, logo $u_2 = (1, 0)$.

Assim, podemos reescrever o cone acima como,

$$C(z) = \{aX_v + bX_h, ab \geq 0\},$$

onde $X_v = (0, 1)$, $X_h = (1, 0)$.

Ou ainda, como os vetores cuja inclinação satisfaz $\frac{d\theta}{ds}(z) \geq 0$.

Definimos anteriormente os valores $F^+(z)$ e $F^-(z)$. Consideremos estes valores para os cones definidos acima e sejam

$$m_+ = \sup_{z \in M} F^+(z) \quad \text{e} \quad m_- = \sup_{z \in M} F^-(z).$$

Pela construção do campo de cones, segue que m_+ e m_- são finitos e que $m_+ = m_-$ pela simetria da mesa do bilhar.

Uma das bordas de $C(z)$ é a linha $\{u \in T_z M : u_s = 0\}$ (linha vertical), enquanto a outra borda depende de $z \in M$. O cone definido em $z \in U$ corresponde ao primeiro e ao terceiro quadrantes do espaço tangente em z . Para $z \in V$ precisamos estabelecer uma limitação para a abertura do cone (que depende da inclinação da borda não vertical).

O próximo lema (Lemma 3 em [14]) mostra que a inclinação da borda não vertical é uniformemente limitada por $-\frac{1}{r(z)}$. Note que se $\frac{d\theta}{ds}(z)$ está muito próxima de $-\frac{1}{r(z)}$ o tempo focalizador tende ao infinito e interpretamos isso como a inclinação de uma variação de raios paralelos.

Lema 3.11. Existe um $0 < \delta < \frac{1}{r_{\max}}$, onde $r_{\max} = \max_{z \in M} \{r(z)\}$, tal que $\frac{u_\theta}{u_s} \geq -\frac{1}{r(z)} + \delta$ para todo $z \in M$ e todo $u \in C(z)$.

Demonstração. Precisamos de uma estimativa para a inclinação $m(z) = \frac{u_\theta}{u_s}(z)$ na borda não vertical dos cones $C(z)$, $z \in M$.

Para $z \in U$, temos que $m(z) = 0$, logo o lema é verdadeiro para qualquer $0 < \delta < \frac{1}{r_{\max}}$ fixado em U .

Agora, seja $z = (s, \theta) \in V$. Neste caso temos que $m(z) = p(z)$ e daí,

$$|m(z)| = \left| \frac{k(s)\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{\sin 2\theta} \right| \left| 1 - \frac{\cos^2 \theta - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \right| = \left| \frac{k(z)\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{\sin 2\theta} \right| \left| \frac{\sin^2 \theta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \right| = \left| \frac{k(z)\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{2 \sin \theta \cos \theta} \right| \left| \frac{\sin^2 \theta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \right| = \frac{1}{r(z)} |\tan \theta| \left| \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)} \right| \leq \frac{1}{r(z)} \left(\frac{\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)} \right) |\tan \theta|.$$

Fixemos um $\tilde{\theta}$ tal que $|\tan \tilde{\theta}| < 1/B$, onde $B = \frac{\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)}$ e tomemos $\delta_1 = \frac{1}{r_{\max}}(1 - B|\tan \tilde{\theta}|) < \frac{1}{r_{\max}}$.

Para todo z pertencente ao conjunto $\{(s, \theta) \in V; \theta \in (0, \tilde{\theta}) \cup (\pi - \tilde{\theta}, \pi)\}$, temos que,

$$\begin{aligned} m(z) &> -\frac{1}{r(z)} B |\tan \tilde{\theta}| > -\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r(z)} (1 - B |\tan \tilde{\theta}|) > \\ &-\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r(\max)} (1 - B |\tan \tilde{\theta}|) > -\frac{1}{r(z)} + \delta_1. \end{aligned}$$

Resta então provar que o lema vale no conjunto complementar $\{(s, \theta) \in V; \theta \in [\tilde{\theta}, \pi - \tilde{\theta}]\}$.

Para $z \in \{(s, \theta) \in V; \theta \in [\tilde{\theta}, \pi - \tilde{\theta}]\}$, temos que

$$f^+(u) = \frac{\sin \theta}{\frac{1}{r(z)} + \frac{u_\theta}{u_s}} > 0 \text{ (pela definição do cone } C(z)\text{),}$$

daí,

$$\frac{1}{r(z)} + \frac{u_\theta}{u_s} = \frac{\sin \theta}{f_+(u)} \geq \frac{\sin \theta}{m_+} > 0.$$

Logo $m(z) \geq -\frac{1}{r(z)} + \delta_2$, onde $0 < \delta_2 = \frac{\sin \theta}{m_+} < \frac{1}{m_+}$ (m_+ é finito pela construção do cone)

e como $m_+ = \sup_{z \in M} F^+(z)$, segue que $m_+ > \frac{1}{k_{\max}}$, onde $k_{\max} = \max_{z \in M} \{k(z)\}$. Assim $\delta_2 < \frac{1}{m_+} <$

$$k_{\max} = \frac{1}{r_{\max}}.$$

Portanto, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, a demonstração está concluída. $\square$

Nosso objetivo é provar que o campo de cones definido acima é eventualmente estritamente Φ -invariante, ou seja, que para quase todo ponto $z_0 \in M$, $D\Phi^n(C(z_0)) \subset C(z_n)$ e para quase todo ponto $z_0 \in M$, podemos encontrar um $k = k(z_0)$ tal que $D\Phi^k(C(z_0)) \subset \text{int } C(z_k)$. Para isso vamos mostrar que as bordas (vertical e horizontal) dos cones se fecham pela ação da aplicação $D\Phi$. Assim, o resultado seguirá dos Lemas 3.5, 3.7 e 3.9. O próximo lema pode encontrado em [27] (Lemma 4 e Propositions 1 a 5).

Lema 3.12. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, o campo de cones $\{C(z)\}$ é Φ -invariante.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que a borda vertical do cone se fecha pela aplicação de $D\Phi$.

Sublema 3.13. *Seja $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$. Para todo $z \in M$ temos que a borda vertical X_v é deslocada para direita.*

Demonstração. Sejam $z_0, \Phi z_0 \in M$ e $X_v = (0, 1)$ a borda vertical do cone no ponto z_0 . Temos que $(\alpha, \beta) = D_{z_0}\Phi(0, 1) = (-1)^n \left(\frac{t_0}{\sin \theta_1}, \frac{K_1 t_0}{\sin \theta_1} - 1 \right)$.

Como $\alpha \neq 0$, temos que sua inclinação é $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{t_0 - r_1 \sin \theta_1}{r_1 t_0}$, lembrando que $r_1 \sin \theta_1$ é o comprimento do segmento de t_0 contido no círculo semi-osculador em Φz_0 . Pela nossa escolha do campo de cones, temos que $t_0 > r_1 \sin \theta_1$. Logo $\frac{\beta}{\alpha} > 0$. Ou seja, sob a ação de $D\Phi$ a borda vertical se desviou para direita. Logo a borda vertical está fechando.

□

Nos próximos sublemas mostraremos que as bordas horizontais dos cones também se fecham pela ação de $D\Phi$, e a partir daí concluiremos que o nosso campo de cones é Φ -invariante. Para isso, dividimos a demonstração nos possíveis casos e usaremos o Lema Focalizador em cada um deles.

Vamos analisar os casos possíveis para pontos $z_0, \Phi z_0 = z_1 \in M$ e para facilitar contas usaremos as coordenadas (φ, θ) .

Sublema 3.14. *Se z_0, z_1 pertencem à mesma semi-elipse, $z_i = (\varphi_i, \theta_i)$, $i = 0, 1$, então $D_{z_0}\Phi(C(z_0)) \subset C(z_1)$ (neste caso a invariância não é estrita).*

Demonstração. Como os pontos z_0, z_1 pertencem à mesma semi-elipse, eles estão em uma mesma curva de nível do bilhar elíptico, $G(\varphi, \theta) = k$. Assim, podemos escrever θ em função de φ . Chamemos de $\sigma(\varphi) = (\varphi, \theta(\varphi))$. Daí, $\sigma'(\varphi) = (1, d\theta/d\varphi) = X_c(\sigma(\varphi))$.

Como os dois pontos pertencem à mesma curva de nível temos que $T(\sigma(\varphi_0)) = \sigma(\varphi_1)$. Daí, $D_{\sigma(\varphi_0)}T(\sigma'(\varphi_0)) = \sigma'(\varphi_1)$. Ou seja, $D_{z_0}T(X_c(z_0)) = X_c(z_1)$.

Outra maneira de provar este resultado é olhando para os tempos focalizadores $F^+(z_0)$ e $F^-(z_1)$. Como z_0 e z_1 pertencem à mesma semi-elipse, temos que $F^+(z_0) + F^-(z_1) = t(z_0)$, logo aplicando o Lema Focalizador, $m(D_{z_0}T(X_c(z_0))) \geq m(X_c(z_1))$. $\square$

Sublema 3.15. Se $z_0 \in V(1, \mathcal{E})$ (resp. $V(2, \mathcal{E})$) e $z_1 \in V(2, \mathcal{E})$ (resp. $V(1, \mathcal{E})$), então a borda horizontal dos cones se fecha pela aplicação de $D\Phi$.

Demonstração. Os cones nestes pontos são

$$C(z_i) = \{aX_v(z_i) + bX_c(z_i), ab \geq 0\}, i = 0, 1.$$

O vetor $X_c(z_0)$ focaliza para frente em P_0 , o ponto de tangência do segmento da trajetória que sai de z_0 com a cáustica elíptica; e $X_c(z_1)$ focaliza para trás em P_1 , o ponto de tangência do segmento da trajetória que chega em z_1 com a nova cáustica elíptica. Estas duas cáusticas elípticas não são mais confocais, mas têm a mesma distância focal $2c = 2\sqrt{a^2 - 1}$ e seus focos estão sobre a mesma reta.

Se a trajetória não bate na parte reta do estádio elíptico, então podemos pensar que P_0 é o ponto de interseção com a cáustica na parte direita (relativa a Γ_1) e P_1 o ponto de interseção com a cáustica na parte esquerda (relativa a Γ_2). Como $h > \sqrt{a^2 - 1} > c$ os focos das duas semi-elipses estão separados. para fixar ideias, veja a figura 3.4.

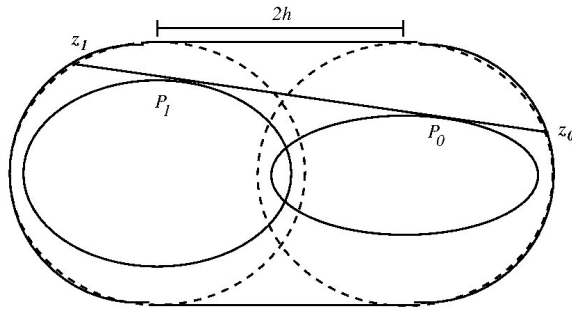


Figura 3.4: Idéia geométrica da construção feita na demonstração do Sublema 3.15.

Logo P_0 aparece antes de P_1 na trajetória indo de φ_0 até φ_1 . Logo pelo Lema Focalizador 3.7 temos que

$$m(D_{z_0}\Phi X_c(z_0)) > m(X_c(z_1)).$$

Se ela bate na parte reta, obviamente P_0 aparece antes de P_1 . Logo o Lema 3.9 nos dá que

$$m(D_{z_0}\Phi X_c(z_0)) > m(X_c(z_1)).$$

□

Sublema 3.16. *Suponha os seguintes casos:*

- a) $z_0 \in V(1, \mathcal{E})$ (resp. $V(2, \mathcal{E})$) e $z_1 \in V(2, \mathcal{H})$ (resp. $V(1, \mathcal{H})$);
- b) $z_0 \in V(1, \mathcal{H})$ (resp. $V(2, \mathcal{H})$) e $z_1 \in V(2, \mathcal{E})$ (resp. $V(1, \mathcal{E})$);
- c) $z_0 \in V(1, \mathcal{H})$ (resp. $V(2, \mathcal{H})$) e $z_1 \in V(2, \mathcal{H})$ (resp. $V(1, \mathcal{H})$).

Em cada um destes casos a borda horizontal dos cones se fecha pela aplicação de $D\Phi$.

Demonstração. Vamos provar apenas o item (a). A prova de (c) segue dos mesmos argumentos e (b) é análogo a (a) por simetria.

Para $z_0 \in V(1, \mathcal{E})$ e $z_1 \in V(2, \mathcal{H})$, os cones são,

$$C(z_i) = \{aX_v(z_i) + bX_c(z_i), ab \geq 0\}, i = 0, 1.$$

Note que estas situações são equivalentes à situação anterior, exceto que agora a cáustica definida por z_1 é uma hipérbole.

A demonstração é baseada nos seguintes resultados:

i) se $1 < a < \sqrt{2}$ e $z_1 \in V(i, \mathcal{H})$, $i = 1, 2$, então esta parte da trajetória tem no máximo duas rebatidas na mesma semiellipse, antes de deixá-la (Lema 2.21).

ii) no bilhar elíptico, tome uma trajetória em $\mathcal{H}$ tendo duas rebatidas consecutivas φ_0 e φ_1 na mesma semiellipse. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, então $F^+(z_0)$ e $F^-(z_1)$ acontecem dentro da semiellipse (Lema 2.23).

iii) se $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então toda trajetória em $M_i \cap \mathcal{H}$, $i = 1, 2$ tem pelo menos uma reflexão na parte reta do estádio elíptico antes e depois de duas reflexões consecutivas na mesma semiellipse. De fato, devemos calcular a distância d de $\varphi = 0$ até a rebatida na parte reta do estádio elíptico. A pior situação é a de uma trajetória que sai de $\varphi = 0$ na direção do foco. Para esta situação temos que $d = 4ca^2$.

O interior do estádio elíptico pode ser visto como a união do interior de duas elipses, com semieixos a e 1 , e o interior de um retângulo, com lados $2h$ e 2 . Note que, se $h > \sqrt{a^2 - 1} = c$, os focos das duas elipses estão separados. Vamos chamar de E_1 e E_2 o interior das elipses, e Q o interior do retângulo. Note que as partes retas do estádio elíptico não estão contidas em $E_1 \cup E_2$.

Pelos resultados acima, uma trajetória de φ_0 a φ_1 toca uma cáustica elíptica em P_0 em E_1 (ou E_2), bate na parte reta e então toca uma cáustica hiperbólica em P_1 em E_2 (ou E_1).

Logo pelo Lema 3.9 temos que

$$m(D_{z_0}\Phi X_c(z_0)) > m(X_c(z_1)).$$

□

Sublema 3.17. *Suponha os seguintes casos:*

a) $z_0 \in V(1, \mathcal{E})$ (resp. $V(2, \mathcal{E})$) e $z_1 \in U_2$ (resp. U_1);

b) $z_0 \in U_1$ (resp. U_2) e $z_1 \in V(2, \mathcal{E})$ (resp. $V(1, \mathcal{E})$).

Nestes casos a borda horizontal dos cones se fecha pela aplicação de $D\Phi$.

Demonstração. Provaremos apenas o item (a), o item (b) é análogo por simetria.

Os cones em $z_0 \in V(1, \mathcal{E})$ e $z_1 \in U_2$ são respectivamente,

$$C(z_0) = \{aX_v(z_0) + bX_c(z_0), ab \geq 0\},$$

$$C(z_1) = \{aX_v(z_1) + bX_h(z_1), ab \geq 0\}.$$

Temos que comparar as posições do tempo focalizador para frente, P_0 , de $X_c(z_0)$ e do tempo focalizador para trás, P_1 , de $X_h(z_1)$, onde P_0 é o ponto de tangência da trajetória de φ_0 a φ_1 , $\overline{\varphi_0\varphi_1}$, com a cáustica elíptica e P_1 é a interseção de $\overline{\varphi_0\varphi_1}$ com o círculo semi-oscultador em φ_1 .

Se a trajetória entre φ_0 e φ_1 bate na parte reta do estádio elíptico, esta reflexão separa P_0 e P_1 , logo podemos aplicar o Lema 3.9 que nos dá

$$m(D_{z_0}\Phi X_c(z_0)) > m(X_h(z_1)).$$

Agora suponha que isto não aconteça. Suponha também que $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi)$ (os outros casos tornam-se análogos por simetria).

Se $\varphi_0 + \theta_0 \geq \pi$, P_0 está contido no interior do círculo semi-oscultador de $\varphi = \pi$ (Lema 3.10).

Por outro lado, chamemos $\mathcal{O}_{\varphi_0}$ a união dos círculos semi-oscultadores, de $\varphi = \varphi_0$ até $\varphi = \varphi_0 + \pi/2$. Se $a < \sqrt{2}$ e $h > c = \sqrt{a^2 - 1}$, $\mathcal{O}_{\pi/2}$ e $\mathcal{O}_{3\pi/2}$ são disjuntas e estão contidas no interior do estádio elíptico. De fato, dada uma elipse com semieixos 1 e a , $1 < a < \sqrt{2}$, centrada na origem, a interseção de $\mathcal{O}_{\pi/2}$ com o eixo x está contida em $[-\sqrt{a^2 - 1}, a]$ e de $\mathcal{O}_{3\pi/2}$ com o eixo x contida em $[-a, \sqrt{a^2 - 1}]$. Assim, no estádio elíptico, como $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1} > 2\sqrt{a^2 - 1}$, as duas semi-elipses estarão separadas por uma distância suficiente para garantir que $\mathcal{O}_{\pi/2}$ e $\mathcal{O}_{3\pi/2}$ são disjuntas.

Então, se $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi)$, $\varphi_0 + \theta_0 \geq \pi$ e $\varphi_1 \in [3\pi/2, 2\pi)$, P_0 aparece antes de P_1 e assim podemos aplicar o Lema 3.9. Logo

$$m(D_{z_0}\Phi X_c(z_0)) > m(X_h(z_1)).$$

Se $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi)$, $\varphi_0 + \theta_0 \geq \pi$ e $\varphi_1 \in [\pi, 3\pi/2)$, o segmento de trajetória não atravessa a linha contendo os focos da cáustica. Assim, ele toca uma nova cáustica elíptica na outra semi-elipse. Além disso, $X_c(z_1)$ tem inclinação positiva, pois as curvas integrais em $\mathcal{E}$ são crescentes para $\varphi \in (\pi, 3\pi/2)$. Assim, como mostrado no Sublema 3.15,

$$m(D_{z_0}\Phi X_c(z_0)) > m(X_c(z_1))$$

e

$$m(X_c(z_1)) > 0 = m(X_h(z_1)).$$

Se $\varphi_0 + \theta_0 < \pi$ e $h > c = \sqrt{a^2 - 1}$, P_0 está contido no interior da semi-elipse, isto é, $E_1/(E_1 \cap Q)$, e P_1 está contido em $\mathcal{O}_\pi$. Assim,

$$m(X_c(z_1)) > 0 = m(X_h(z_1)),$$

e o resultado segue. □

Sublema 3.18. *Suponha que:*

a) $z_0 \in V(1, \mathcal{H})$ (resp. $V(2, \mathcal{H})$) e $z_1 \in U_2$ (resp. U_1);

b) $z_0 \in U_1$ (resp. U_2) e $z_1 \in V(2, \mathcal{H})$ (resp. $V(1, \mathcal{H})$).

Então a borda horizontal dos cones se fecha pela aplicação de $D\Phi$ em cada um dos casos.

Demonstração. Como anteriormente, provaremos o item (a), a prova de (b) é análoga por simetria.

A prova de (a) é análoga à primeira situação anterior, mas note nesse caso que, se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a trajetória toca uma cáustica hiperbólica em P_0 em E_1 (ou E_2), bate na parte reta e então corta o círculo semi-oscilador em φ_1 . □

Sublema 3.19. *Se, $z_0 \in U_1$ (resp. U_2) e $z_1 \in U_2$ (resp. U_1), então a borda horizontal dos cones se fecha pela aplicação de $D\Phi$.*

Demonstração. Os cones são

$$C(z_i) = \{aX_v(z_i) + bX_h(z_i), ab \geq 0\}, i = 1, 2.$$

Suponha que $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi)$, os outros casos tornam-se análogos por simetria. O tempo focalizador para frente de $X_h(z_0)$, P_0 , pertence a $\mathcal{O}_{\pi/2}$, pois o círculo semi-osculador em φ_0 está contido em $\mathcal{O}_{\pi/2}$.

Se $\varphi_1 \in [3\pi/2, 2\pi)$, o tempo focalizador para trás de $X_h(z_1)$, P_1 , pertence a $\mathcal{O}_{3\pi/2}$. Como $a < \sqrt{2}$ e $h > \sqrt{a^2 - 1}$, $\mathcal{O}_{\pi/2}$ e $\mathcal{O}_{3\pi/2}$ são disjuntos e o resultado segue.

Se $\varphi_1 \in (\pi, 3\pi/2]$, a trajetória não corta a linha que contém os focos. Assim a trajetória que chega em φ_1 toca uma cáustica elíptica na outra semiellipse em $\tilde{P}_1$. Como no Sublema 3.17,

$$m(D_{z_0}\Phi X_h(z_0)) > m(X_c(z_1)).$$

Mas $X_c(z_1)$ tem inclinação positiva, pois as curvas integrais são crescentes para $\varphi \in (\pi, 3\pi/2)$. Logo,

$$m(D_{z_0}\Phi X_h(z_0)) > m(X_c(z_1)) > 0 = m(X_h(z_1))$$

□

Portanto, com os sublemas anteriores provamos que $D_z\Phi(C(z)) \subset C(\Phi z)$. Logo o campo de cones é Φ -invariante. □

Faremos agora a prova do Teorema A. Com os lemas anteriores provamos que o nosso campo de cones é Φ -invariante em um caso (Sublema 3.14) e estritamente Φ -invariante nos outros (Sublemas 3.15-3.19). Resta provar agora que ele é eventualmente estritamente invariante para quase todo ponto $z_0 \in M$, ou seja, que exista um $k = k(z_0) \in \mathbb{N}$, tal que $D_{z_0}\Phi^k(C(z_0)) \subset \text{int } C(z_k)$ para quase todo ponto $z_0 \in M$.

Demonstração. (Teorema A)

Seja A o conjunto dos pontos $z \in M$ para os quais $\{C(z)\}$ não é eventualmente estritamente invariante. Podemos escrever $A = A_1 \cup A_2$, onde $A_1 \subset S_\infty^+$ e $A_2 \cap S_\infty^+ = \emptyset$. Temos que $\mu(A_1) = 0$, pois $\mu(S_\infty^+) = 0$ (S_∞^+ é uma união enumerável de curvas no espaço de fase). Pela demonstração do Lema anterior, podemos ver que a semitrajétória positiva de pontos em A_2 não corta a mesa de uma semiellipse para outra e reflete apenas em um arco. Portanto a única possibilidade é que a órbita destes pontos é a órbita periódica ao longo do menor eixo da semiellipse. Assim, $\mu(A_2) = 0$ e portanto $\mu(A) = 0$. □

Vamos agora estender o campo de cones para T em M' . Para todo $z \in M' \setminus \mathbb{S}_n^+$, $n > 0$, defina o campo de cones mensurável $C(z)$ por:

- se $z \in V$, $C(z) = \{aX_v + bX_c, ab \geq 0\}$;
- se $z \in U$, $C(z) = \{aX_v + bX_h, ab \geq 0\}$;
- se $z \in M_0$, $C(z) = \{D_z T(C(T^{-1}(z)))\}$.

Observação 3.20. Os dois primeiros cones são os mesmos definidos anteriormente. O terceiro é definido de maneira conveniente pois, na parte reta do estádio elíptico DT é apenas uma translação ou uma inversão e se uma órbita sai de uma semiellipse ela chega na parte reta com um ângulo diferente de $\pi/2$ e atinge a outra semiellipse. Assim, as únicas órbitas que não satisfazem a condição do Teorema 2.4, são as órbitas periódicas de período 2 que ficam rebatendo na parte reta do estádio elíptico. Estas órbitas representam no espaço de fase a linha reta $\theta = \pi/2$, que tem medida nula.

Corolário 3.21. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então $C(z)$ é eventualmente estritamente T -invariante.

Portanto, pelos resultados anteriores podemos aplicar o Teorema 2.4 para concluirmos o seguinte resultado,

Teorema 3.22. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então T tem expoentes de Lyapunov não-nulos μ -q.t.p. em M .

Para finalizar esta seção vamos anunciar um lema que é uma consequência das demonstrações dos sublemas apresentados acima. Este resultado simplificará a demonstração de uma das condições do Teorema Ergódico Local.

Consideremos agora uma trajetória que atravessa o estádio apenas uma vez e cujo os pontos finais estão em arcos distintos. Mais precisamente, considere a órbita finita $\{z, Tz, \dots, T^n z\}$, $n > 0$ tal que $Tz, \dots, T^{n-1}z \in M_0$ se $n > 1$ e assuma, sem perda de generalidade que, $z \in M_1$ e $T^n z \in M_2$ (note que $z \in Y$). Vamos denotar por $L(z)$ o comprimento da trajetória, isto é,

$$L(z) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i.$$

Lema 3.23. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então existe uma constante positiva $\tilde{d}$ tal que $L(z) - F^+(z) - F^-(T^n z) \geq \tilde{d}$, para todo $z \in Y$.

Demonstração. Seja $z' = T^n z$. Se $z \in U_i$, $z' \in U_j$, então pela definição dos tempos focalizadores e do campo de cones, temos que $F_+(z) = d_1(z)$, $F_-(z') = d_2(z)$, onde $d_i = \frac{\sin \theta_i}{k_i}$. Assim o lema segue do Sublema 3.19.

Se $z \in V_i$, $z' \in V_j$, então $F_+(z) = d(\pi(z), P_+(z))$, $F_-(z') = d(\pi(z'), P_-(z'))$ os Sublemas 3.15 e 3.16, implicam que $P_+(z)$ precede $P_-(z')$ ao longo da trajetória $[z, z']$ e que a distância entre eles, $d(P_+(z), P_-(z'))$, é limitada inferiormente por uma constante positiva que não depende de z . Neste caso e no próximo, relembre o Lema 2.25.

Finalmente, se $z \in V_i$ e $z' \in U_i$, as demonstrações dos Sublemas 3.17 e 3.18 nos dão que $F_+(z)$ aparece antes de $F_-(z')$ na trajetória indo de $\pi(z)$ a $\pi(z')$. O caso simétrico pode ser provado de maneira análoga. $\square$

4 *Ergodicidade do Estádio Elíptico*

Neste capítulo vamos provar a ergodicidade de Φ e consequentemente a ergodicidade de T . Na seção 4.1, vamos mostrar que Φ é localmente ergódico usando uma versão do Teorema Ergódico Local (Teorema 2.15). Na seção 4.2 vamos finalizar a demonstração mostrando que Φ possui apenas uma componente ergódica. Para mais informações ver [8], [14] e [23].

4.1 Ergodicidade Local

Como mencionado anteriormente, para mostrar a ergodicidade local de Φ , vamos usar a versão do Teorema Ergódico Local. Para isso, precisamos “redefinir” a aplicação Φ e seu espaço de fase de acordo com o formalismo introduzido originalmente em [23] e apresentado no final da seção 2.1. Em seguida mostraremos que a aplicação do bilhar satisfaz as condições necessárias do Teorema 2.15.

Cada conjunto U_i , $i = 1, 2$, é conexo por caminhos, e cada conjunto V_i , $i = 1, 2$, tem duas componentes conexas por caminhos $V_{i,j}$, $j = 1, 2$, onde $V_{i,1} = \{(s, \theta) : s \in V_i \text{ e } \theta < \pi/2\}$ e $V_{i,2} = \{(s, \theta) : s \in V_i \text{ e } \theta > \pi/2\}$. O fecho desses conjuntos $V_{i,j}$, $j = 1, 2$, U_i , $i = 1, 2$, são as chamadas caixas simpléticas (cuja definição está em [23]) formando o espaço de fase de Φ . Vamos denota-las por A_i , $i = 1, \dots, 6$ e simplesmente nos referir a elas como *caixas* de M .

A aplicação Φ é um difeomorfismo analítico do interior de cada caixa em sua imagem, mas ele pode não estar bem definida nos pontos pertencentes a fronteira de algumas caixas. No entanto, podemos estender Φ do interior de cada caixa até sua fronteira. Ao fazer isso, Φ se torna uma aplicação de múltiplos valores nos pontos pertencendo à fronteira de algumas caixas. A partir de agora, quando nos referirmos a Φ teremos em mente esta aplicação de múltiplos valores.

O conjunto singular S^+ divide cada caixa A_i em uma coleção finita de conjuntos. Obtemos uma nova partição de M , denotemos o fecho desses elementos por A_n^+ . Similarmente S^- decompõe M em subconjuntos cujo fecho é denotado por A_m^- (note que a cardinalidade desses

dois conjuntos é a mesma).

Temos que Φ leva o interior de cada conjunto A_n^+ para o interior de um conjunto A_m^- . Como já fizemos antes, podemos estender Φ para o interior de cada conjunto A_n^+ até seu fecho, e ao fazer isso obtemos uma aplicação de múltiplos valores também em S^+ . Similarmente, pela extensão de Φ^{-1} do interior de cada conjunto A_n^- até seu fecho, obtemos uma aplicação de múltiplos valores em S^- .

Resumindo, decompos o espaço de fase M em caixas A_i . Cada caixa é decomposta em um número finito de sub-caixas A_n^+ (A_m^-) cuja fronteira consiste dos subconjuntos de S^+ (S^-) e ∂A_i , Φ é um difeomorfismo do interior de cada A_n^+ no interior de um A_m^- e Φ é uma aplicação de múltiplos valores em S^+ . Finalmente, o campo de cones $\{C\}$ é contínuo no interior de cada caixa A_i .

Sejam $X_1(z), X_2(z)$ os vetores fronteira unitários de $C(z) = \{u = aX_1(z) + bX_2(z), ab \geq 0\}$, como definidos anteriormente. Vamos associar a cada cone $C(z)$, à forma quadrática vista na seção 2.1, dada por $Q_z(u) = ab$. A quantidade

$$\sigma(D\Phi_z) = \inf_{u \in \text{int}(C(z))} \sqrt{\frac{Q_{\Phi_z}(D\Phi_z(u))}{Q_z(u)}}$$

mede a quantidade de expansão gerada por $D\Phi_z$. Similarmente podemos definir σ para Φ^{-1} substituindo $C(z)$ pelo seu cone complementar.

Como definido anteriormente, um ponto $z \in M$ é dito *suficiente* se existe um $n > 0$ tal que $z \notin S_n^+ \cap S_n^-$ e $\sigma(D\Phi_z^n) > 3$ ou $\sigma(D\Phi_z^{-n}) > 3$.

Observação 4.1. Como $\{C\}$ é eventualmente estritamente Φ -invariante, o conjunto dos pontos suficientes de M tem medida μ total (por [23]).

Resta agora mostrar que são válidas as hipóteses exigidas no Teorema 2.15. Faremos isto no restante desta seção.

Observação 4.2. Como visto na Seção 2.1, para aplicar o Teorema Ergódico Local precisamos garantir a existência de variedades estáveis e instáveis locais e sua continuidade absoluta. Temos que, se uma aplicação suave por partes satisfazendo algumas condições gerais ([19]) tem expoentes de Lyapunov não-nulos com respeito a alguma medida de probabilidade de Borel invariante λ , então a teoria de Pesin ([19]) implica a existência λ -q.t.p de variedades estáveis e instáveis locais da aplicação e de sua continuidade absoluta. Note que, embora as aplicações T e T^{-1} satisfazem as condições de [19] (isto está provado na Parte V de [19] para uma classe geral de aplicações do bilhar a qual T pertence), a aplicação Φ (ou de qualquer potência de T)

não satisfaz necessariamente. Entretanto, não precisamos checar que Φ satisfaz estas condições para provar a existência de variedades locais para Φ a de sua continuidade absoluta. De fato, as variedades locais de T são variedades locais de Φ (e portanto elas são absolutamente contínuas). Daremos apenas a prova que as variedades instáveis locais de T são variedades instáveis locais de Φ ; o argumento para variedades estáveis locais é o mesmo. Considere uma variedade instável local W'' de T e $z \in M'$. Suponha que W'' não seja uma variedade instável local de Φ . Então S_∞^- tem que cortar W'' , e portanto, pela Observação 3.1, S_∞^- também corta W'' . Mas isto é impossível, pois W'' é uma variedade instável local de T . A prova que as variedades locais de T são também variedades locais para $T^n, n \in \mathbb{Z}$ é idêntica.

Como visto na Seção 2.1, as hipóteses exigidas pelo Teorema 2.15 são

1- (Monotonicidade) O campo de cones $\{C(z)\}$ é eventualmente estritamente Φ -invariante e a restrição de C ao interior de cada caixa de M é contínua.

2- (Alinhamento Adequado) O espaço tangente de S^- em qualquer ponto $z \in S^-$ está estritamente contido em $C(z)$, e o espaço tangente em qualquer ponto $z \in S^+$ está estritamente contido no cone complementar $C'(z)$.

3- (Regularidade) Para todo $n \geq 1$, os conjuntos S_n^+ e S_n^- são regulares, isto é, eles são uniões finitas de arcos suaves (fechados) que se interceptam apenas em seus pontos finais.

4- (Propriedade de Não-Contração) Seja $\|\cdot\|$ a métrica riemanniana padrão em M nas coordenadas (s, θ) . Existe uma constante $\rho > 0$ tal que para cada $n \geq 1$ e cada $z \in M \setminus S_n^+$,

$$\|D_z \Phi^n u\| \geq \rho \|u\|$$

para cada $u \in C(z)$.

5- (Sinai-Chernov Ansatz) Seja μ_S o volume 1-dimensional riemanniano em $S^+ \cup S^-$. Para μ_S -q.t.p. $z \in S^+(S^-)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty(-\infty)} \sigma(D_z \Phi^n) = +\infty.$$

Observação 4.3. Note que a métrica riemanniana padrão em coordenadas (s, θ) não gera o elemento invariante de área necessário pelo Teorema Ergódico Local [23] (ver §7, p.36). Entretanto a área simplética $\sin \theta \, ds \, d\theta$ é menor que a área riemanniana $ds \, d\theta$ e este fato faz o Teorema Ergódico Local valer também nesta situação (ver também a observação em §14.A, p. 73 de [23]).

Lema 4.4. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a Condição 1 é satisfeita.

Demonstração. O lema segue da definição de $\{C(z)\}$ e da Proposição A. $\square$

Lema 4.5. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a Condição 2 é satisfeita.*

Demonstração. Como consequência da Observação 3.2 e da invariância do campo de cones, é suficiente mostrar a Condição 2 para os conjuntos singulares $\mathbb{S}^\pm$ de T .

Seja $z \in \mathbb{S}^+$ e assuma que z pertence apenas a um arco de $\mathbb{S}^+$. Escolha um vetor $v \in T_z\mathbb{S}^+$. Pela definição de $\mathbb{S}^+$, a semitrajetória positiva de todo ponto contido em uma pequena vizinhança de z em $\mathbb{S}^+$ bate em um canto a_i . Segue daí que v focaliza em a_i . Portanto v tem que estar estritamente contido no complementar de $C(z)$.

Note que se z pertence a vários arcos de $\mathbb{S}^+$, então o mesmo argumento pode ser usado para o espaço tangente de cada arco.

Analogamente, podemos provar que o espaço tangente de $\mathbb{S}^-$ em qualquer ponto $z \in \mathbb{S}^-$ está estritamente contido em $C(z)$. $\square$

Lema 4.6. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a Condição 3 é satisfeita.*

Demonstração. Como explicado na prova do lema anterior, é suficiente provar o lema para o conjunto singular de T .

Precisamos apenas provar que $\mathbb{S}_n^+$ é regular. De fato, a regularidade de $\mathbb{S}_n^-$ segue da regularidade de $\mathbb{S}_n^+$, pois $\mathbb{S}_n^- = R\mathbb{S}_n^+$, onde R é a aplicação dada por $R(s, \theta) = (s, \pi - \theta)$.

Notemos que $\mathbb{S}_n^+$ e $\mathbb{S}_m^-$ se intersectam transversalmente para todo $m, n \geq 0$. De fato, pelo Alinhamento Adequado e invariância de $\{C\}$, segue que $T_z(\Phi^m\mathbb{S}^-)$ está estritamente contido em $C(z)$ para todo $z \in \Phi^m\mathbb{S}^-$ e $T_z(\Phi^{-n}\mathbb{S}^+)$ está estritamente contido em $C'(z)$ para todo $z \in \Phi^{-n}\mathbb{S}^+$. Como estes cones delimitam o espaço tangente em regiões complementares, temos que $\mathbb{S}_m^-$ e $\mathbb{S}_n^+$ se intersectam transversalmente para todo $m, n \geq 0$.

Para provar a regularidade de $\mathbb{S}_n^+$, vamos usar indução:

Temos que os conjuntos $\mathbb{S}^+$ e $\mathbb{S}^-$ são regulares (Teorema 9.29 em [8]).

Seja agora $n > 1$ e suponhamos que $\mathbb{S}_n^+$ é singular. Como $\mathbb{S}^-$ e $\mathbb{S}_n^+$ são transversais, sua interseção consiste de um número finitos de pontos. Assim Φ^{-1} é contínua em todo ponto de $\mathbb{S}_n^+$ exceto para um número finito de pontos. Logo $\Phi^{-1}\mathbb{S}_n^+$ é uma união finita de arcos suaves que se intersectam apenas em seus pontos finais, isto é, $\Phi^{-1}\mathbb{S}_n^+$ é regular.

A mesma conclusão se verifica para $\mathbb{S}_{n+1}^+ = \mathbb{S}^+ \cup \Phi^{-1}\mathbb{S}_n^+$ $\square$

Para provar a Condição 5, vamos recordar as principais propriedades de σ (ver [37]). Temos que $\sigma(D_z\Phi) \geq 1$ e $\sigma(D_z\Phi) > 1$ quando $D_z\Phi(C(z)) \subset \text{int}(C(\Phi z))$. Seja λ uma coordenada projetiva no espaço tangente T_zM . Se os cones $C(z)$, $C(\Phi z)$ e $D_z\Phi(C(z))$ são definidos como $C(z) = \{u \in T_zM; l(z) \leq \lambda \leq r(z)\}$, $C(\Phi z) = \{u \in T_{\Phi z}M; l(\Phi z) \leq \lambda \leq r(\Phi z)\}$ e $D_z\Phi(C(z)) = \{u \in T_{\Phi z}M; l_1(z) \leq \lambda \leq r_1(z)\}$, então quando $\sigma(D_z\Phi) > 1$ temos que

$$\sigma(D_z\Phi) = \frac{\sqrt{\zeta(z)} + 1}{\sqrt{\zeta(z)} - 1}$$

onde

$$\zeta(z) = \frac{r(\Phi z) - l_1(z)}{r(\Phi z) - r_1(z)} \cdot \frac{r_1(z) - l(\Phi z)}{l_1(z) - l(\Phi z)}$$

que é um invariante projetivo. A última propriedade de σ que precisamos mencionar é a supermultiplicatividade, isto é,

$$\sigma(D_z\Phi^{n_1+n_2}) \geq \sigma(D_{\Phi^{n_1}z}\Phi^{n_2})\sigma(D_z\Phi^{n_1})$$

para todo n_1, n_2 tal que $n_1 n_2 \geq 0$.

Lema 4.7. *Suponha que $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$. Se $z \in M \setminus S_\infty^+(M \setminus S_\infty^-)$, então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(D_z\Phi^n) = +\infty$$

Demonstração. Vamos provar o lema apenas para pontos em $M \setminus S_\infty^+$. A prova para pontos em $M \setminus S_\infty^-$ é idêntica. Vamos chamar de travessia uma trajetória finita $\{y, \Phi y, \dots, \Phi^k y\}$, $k > 0$ tal que $\pi(y)$ e $\pi(\Phi^k y)$ pertençam a arcos distintos, e $\{\Phi y, \dots, \Phi^{k-1} y\} \in M_0$. Note que $y \in Y$.

Seja $z \in M \setminus S_\infty^+$. Como z não é perpendicular a Γ_0 , então sua possível semitrajétória atravessa a mesa do bilhar de um arco elíptico para o outro um número infinito de vezes. Seja $m(n)$ o número de travessias contidas em $\{z, \dots, \Phi^n z\}$, e denote por σ_i o valor de σ para a i -ésima travessia. Defina $\sigma_0 = 1$. Pela propriedade de supermultiplicatividade de σ , temos que

$$\sigma(D_z\Phi^n) \geq \sigma_0 \cdots \sigma_{m(n)}$$

para $n \geq 1$. Logo, para provar o lema, é suficiente mostrar que existe um $\bar{\sigma} > 0$ tal que para toda travessia o σ correspondente é maior ou igual a $\bar{\sigma}$.

Precisamos estimar σ para uma travessia geral $\{y, \Phi y, \dots, \Phi^k y\}$, $k > 0$. Seja $y' = \Phi^k y$. Pela prova do Lema 3.12, o campo de cones $\{C\}$ é estritamente invariante ao longo de qualquer travessia. Assim $\sigma(D_y\Phi^k) > 1$, e portanto

$$\sigma(D_y \Phi^k) = \frac{\sqrt{\zeta(y)} + 1}{\sqrt{\zeta(y)} - 1}.$$

Temos que $C(y) = \{u \in T_y M; 0 \leq f^+(u) \leq F^+(y)\}$ e $C(y') = \{u \in T_{y'} M; 0 \leq f^+(u) \leq F^+(y')\}$. Logo $l(y) = l(y') = o$, $r(y) = F^+(y)$ e $r(y') = F^+(y')$ assim

$$\zeta(y) = \frac{1/l_1(y) - 1/F^+(y')}{1/r_1(y) - 1/F^+(y')}.$$

Precisamos calcular $l_1(y)$ e $r_1(y)$. Relembrando que $L(y)$ denota o comprimento da travessia $\{y, \Phi y, \dots, \Phi^k y\}$. Usando o Lema 3.4 (Lei de Reflexão), obtemos que

$$\frac{1}{l_1(y)} - \frac{1}{F^+(y')} = \frac{1}{F^-(y')} - \frac{1}{L(y)} = \frac{L(y) - F^-(y')}{F^-(y')L(y)}$$

e

$$\frac{1}{r_1(y)} - \frac{1}{F^+(y')} = \frac{1}{F^-(y')} - \frac{1}{L(y') - F^+(y)} = \frac{L(y) - F^+(y) - F^-(y')}{F^-(y')(L(y) - F^+(y))}$$

assim,

$$\zeta(y) = \frac{(L(y) - F^-(y'))(L(y) - F^+(y))}{L(y)(L(y) - F^-(y') - F^+(y))}.$$

Logo

$$\sigma(D_y \Phi^k) = \sqrt{1 + \bar{\omega}} + \sqrt{\bar{\omega}}$$

onde

$$\omega(y) = \frac{L(y)(L(y) - F^-(y') - F^+(y))}{F^-(y')F^+(y)}.$$

Vamos mostrar agora que existe uma constante $\bar{\omega} \leq \omega(y)$ para cada $y \in Y$. Pelo Lema 3.23, temos que $L(y) - F^-(y) - F^+(y) \geq \tilde{d}$ para cada $y \in Y$. Além disso, $L(y)$ não é menor que o comprimento do segmento de reta de Γ , assim temos que $2a^2\sqrt{a^2 - 1} < L(y)$ para cada $y \in Y$.

Portanto, lembrando que $F^- \leq m_-$ e $F^+ \leq m_+$ para cada $y \in Y$, temos que

$$\omega(y) \geq \bar{\omega} = \frac{2a\sqrt{a^2 - 1}}{m_+ m_-} \tilde{d}$$

para cada $y \in Y$. Se $\bar{\sigma} = \sqrt{1 + \bar{\omega}} + \sqrt{\bar{\omega}}$, então concluimos que

$$\sigma(y) \geq \bar{\sigma}$$

para cada $y \in Y$. Portanto o lema está provado. □

Lema 4.8. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a Condição 5 é satisfeita.

Demonstração. Vamos provar a Condição 5 apenas para vetores em S^- . A prova para vetores em S^+ é análoga.

Pelo Lema 4.7, os pontos $z \in S^-$ para os quais não temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_z \Phi^n) = +\infty$ está contido em S_∞^+ . Porém, S_∞^+ consiste no máximo de um número enumerável de pontos. Logo $\mu_s(S^- \cap S_\infty^+) = 0$. Portanto a condição 5 está provada. □

No restante desta seção provaremos a Condição 4.

Definição 4.9. Dada uma órbita finita $\gamma = \{z, \Phi z, \dots, \Phi^n z\}$ com $n > 0$, dizemos que a propriedade de não-contracção vale ao longo de γ se existe uma contante $\lambda > 0$ tal que $\|D_z \Phi^n u\| \geq \lambda \|u\|$ para todo $u \in C(z)$.

Considere as seguintes órbitas finitas, onde $z \notin S_n^+, n > 0$:

- 1- $\{z, \Phi z, \dots, \Phi^n z\} \in M_i, i = 1, 2$;
- 2- $\{z, \Phi z, \dots, \Phi^n z\}$ com $z, \Phi^n z \in Y$;
- 3- $\{z, \Phi z\}$, com z e Φz pertencendo a arcos distintos.

Vamos chamar estas órbitas de *blocos*. Cada órbita finita consiste, no máximo, de 4 blocos. Ou seja, dada uma órbita finita

$$\gamma = \{z, \Phi z, \Phi^2 z, \dots, \Phi^n z\} n > 0$$

existe um $1 \leq k \leq 4$ tal que

$$\gamma = \cup_{i=1}^k \{\Phi^{n_{i-1}} z, \dots, \Phi^{n_i} z\},$$

onde $n_0 = 0 < n_1 < \dots < n_k = n$ e $\{\Phi^{n_{i-1}} z, \dots, \Phi^{n_i} z\}$ é um dos três blocos listados acima. Suponha que a propriedade de não-contracção se mantenha ao longo de cada bloco com a constante $0 < \alpha_j \leq 1, j = 1, \dots, 3$. Se $\lambda = (\min_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i)^4$, então temos que

$$\|D_z \Phi^n u\| \geq \lambda \|u\|$$

para todo $u \in C(z)$. A constante λ não depende da órbita considerada e concluímos que a propriedade de não-contracção é satisfeita.

Resta provar a propriedade de não-contracção ao longo dos três blocos. Para isso vamos introduzir um novo conjunto de coordenadas (J, J') nos planos tangentes de M que são conectadas às coordenadas (u_s, u_θ) pela fórmula

$$\begin{aligned} J &= \sin \theta u_s, \\ J' &= -\frac{1}{r} u_s - u_\theta. \end{aligned}$$

J é a restrição para M de um campo de Jacobi transversal ao longo da trajetória do bilhar e J' é sua derivada ([8], página 51). Vamos recordar rapidamente algumas propriedades das coordenadas (J, J') que usaremos mais tarde.

- A evolução de (J, J') ao longo de um segmento de trajetória de comprimento τ entre duas colisões consecutivas é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em uma reflexão, (J, J') é transformado pela aplicação

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{d} & -1 \end{pmatrix},$$

onde $d = r \sin(\theta)$.

- Em coordenadas (J, J') , o cone $C(z), z \in M$ é dado por

$$C(z) = \left\{ (J, J') : J' \leq -\frac{J}{F^+(z)} \right\}.$$

Note que pela definição de nosso campo de cones, $JJ' \leq 0$.

- A função $u = (J, J') \rightarrow |J'|$ define uma seminorma em M . Vamos denotá-la por $|\cdot|$ para distingui-la da norma padrão $\|\cdot\|$. No próximo lema, provamos que estas seminormas são equivalentes em $C(z), z \in M$.

Lema 4.10. *As seminormas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $C(z)$ para $z \in M$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existem dois números positivos $c_1 \leq c_2$, tais que:

$$c_1 \|u\|^2 \leq |J'|^2 \leq c_2 \|u\|^2,$$

para todo $u \in \bigcup_{z \in M} C(z)$.

Temos que

$$J'^2 = \frac{u_s^2}{r^2} + \frac{2u_s u_\theta}{r} + u_\theta^2 \leq 2 \max \left\{ \frac{1}{r_{\min}^2}, 1 \right\} (u_s^2 + u_\theta^2),$$

e portanto, podemos tomar $c_2 = 2 \max \left\{ \frac{1}{r_{\min}^2}, 1 \right\}$.

Para provar a outra desigualdade vamos considerar dois casos:

- se $u_s u_\theta \geq 0$, temos que

$$J'^2 = \frac{u_s^2}{r^2} + \frac{2u_s u_\theta}{r} + u_\theta^2 \geq \frac{u_s^2}{r^2} + u_\theta^2 \geq \frac{u_s^2}{r_{\max}^2} + u_\theta^2 \geq (u_s^2 + u_\theta^2) \min \left\{ \frac{1}{r_{\max}^2}, 1 \right\}.$$

- no outro caso, pelo Lema 3.11 podemos considerar que $u_s > 0$ e $0 > \frac{u_\theta}{u_s} \geq -\frac{1}{r} + \delta$. Assim temos,

$$J'^2 = \left(\frac{u_s}{r} + u_\theta \right)^2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{u_\theta}{u_s} \right)^2 u_s^2 \geq \delta^2 u_s^2.$$

Como $u_\theta^2 \leq \left(-\frac{1}{r} + \delta \right)^2 u_s^2 \leq \frac{u_s^2}{r_{\min}^2}$ (e escrevendo $u_s^2 \delta^2 = 2u_s^2 \delta^2 / 2$), obtemos

$$J'^2 \geq \frac{(u_s^2 + u_\theta^2) \delta^2 \min\{1, r_{\min}^2\}}{2}.$$

Portanto podemos tomar $c_1 = \min \left\{ 1, \frac{1}{r_{\min}^2}, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^2 r_{\min}^2}{2} \right\}$. □

Lema 4.11. Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2 \sqrt{a^2 - 1}$, então a propriedade de não-contração vale ao longo de blocos do tipo 1.

Demonstração. Podemos pensar que os blocos do tipo 1 correspondem a trajetórias finitas no bilhar elíptico, pois cada subconjunto M_i , $i = 1, 2$, do estádio elíptico é naturalmente identificado ao espaço de fase da semiellipse. Na sequência, quando nos referirmos a um elemento originalmente definido em M (T, Φ, C , etc.), vamos pensar também em como ele é definido no espaço de fase do bilhar elíptico.

Devido à equivalência de $\| \cdot \|$ e $| \cdot |$ em M , é suficiente mostrar que a propriedade de não contração é válida com respeito à seminorma $| J' |$.

A demonstração consiste de duas partes. Na primeira, provamos a afirmação para θ próximo de 0 ou π (θ pequeno), e na segunda, provamos para θ limitado a partir de 0 e π (θ grande).

θ Pequeno: Para $z_0 = (s_0, \theta_0)$ no espaço de fase do bilhar elíptico, defina $n(z_0) \geq 0$ como o número de reflexões consecutivas de z_0 ao longo da semi-elipse à qual pertence s_0 . Seja $z_n = (s_n, \theta_n) = T^n z$, $0 \leq n \leq n(z_0)$. Finalmente, denote por $\theta_{\max}$ e $\theta_{\min}$ o máximo e o mínimo de θ ao longo da curva $G = G(s, \theta)$ contendo z_0 .

O próximo lema é formulado apenas para $\theta \leq \pi/2$ (próximo de 0) mas um resultado similar vale para $\pi/2 \leq \theta$ (próximo de π).

Sublema 4.12. *Existe $\bar{\theta} > 0$ e $\beta > 1$ tal que, se $\theta_k < \bar{\theta}$ para algum $0 \leq k \leq n(z_0)$, então*

$$\theta_n \leq \beta \theta_k, \quad 0 \leq n \leq n(z_0).$$

Demonstração. Se o bloco está em $\mathcal{H}$, temos que $n = 1$ e θ está próximo de $\pi/2$. Assim podemos tomar $\bar{\theta} = \pi/2$ e o resultado segue.

Se o bloco está em $\mathcal{E}$, considere a função $G = G(s, \theta)$, $s = s(\varphi)$ definida pela equação 2.5.

Para $0 < \theta < \pi/2$ e $G > 0$, a curva invariante $G = G(s, \theta)$ é o gráfico da função

$$\theta = \arccos \sqrt{G + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi (1 - G)}.$$

Assim

$$\theta_{\max}(G) = \arccos \sqrt{G} = \arcsin \sqrt{1 - G}$$

e

$$\theta_{\min}(G) = \arccos \sqrt{G + \varepsilon^2(1 - G)} = \arcsin \sqrt{(1 - G)(1 - \varepsilon^2)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{G \rightarrow 1} \frac{\theta_{\max}(G)}{\theta_{\min}(G)} &= \lim_{G \rightarrow 1} \frac{\arcsin \sqrt{1 - G}}{\arcsin \sqrt{(1 - G)(1 - \varepsilon^2)}} = \\ &= \lim_{G \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - G)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - G}} \cdot (-1)}{\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - G)(1 - \varepsilon^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(1 - G)(1 - \varepsilon^2)}} \cdot (-1)(1 - \varepsilon^2)} = \end{aligned}$$

$$\lim_{G \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 - (1 - G)(1 - \varepsilon^2)}}{\sqrt{G}\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Ou seja, quando G tende a 1, obtemos

$$\frac{\theta_{\max}(G)}{\theta_{\min}(G)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = a.$$

Visto que $G \rightarrow 1$, quando $\theta_{\min} \rightarrow 0$, existem $\bar{\theta} > 0$ e $\beta > 1$ tais que, se $\theta_{\min} < \bar{\theta}$, então $\theta_{\max}/\theta_{\min} \leq \beta$. Logo temos que, $\theta_n \leq \theta_{\max} \leq \beta \theta_{\min} \leq \beta \theta_k$. $\square$

Sejam $z = (s, \theta)$ e $z_1 = (s_1, \theta_1) = Tz$. Dado $(J, J') \in C(z)$, seja $(J_1, J'_1) = D_z T(J, J')$. Pela construção do cone $C(z)$, temos que $|J_1/J'| \geq F^-(z_1)$ e $|J_1/J'_1| \leq F^+(z_1)$, logo

$$\left| \frac{J'_1}{J'} \right| \geq \frac{F^-(z_1)}{F^+(z_1)}. \quad (4.1)$$

Sublema 4.13. *Existe um $\bar{\theta}' > 0$ tal que para cada $z_1 = (s_1, \theta_1)$ com $0 < \theta_1 < \bar{\theta}'$ e cada $(J, J') \in C(z)$, temos*

$$\left| \frac{J'_1}{J'} \right| \geq 1 - A \tan \theta_1,$$

onde $A = A(\varepsilon) = 2\varepsilon^2/(1 - \varepsilon^2)$.

Demonstração. Pela Equação 3.2 e pela definição de $F^\pm$, temos que

$$F^\pm(z_1) = \frac{\sin \theta_1}{k(s_1) \pm p(z_1)}$$

onde $p(z) = \frac{k(s)\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{\sin 2\theta}(1 - G)$ está definido pela Equação 2.6. Daí temos que

$$\frac{F^-(z_1)}{F^+(z_1)} = \frac{\frac{\sin \theta_1}{k(s_1) - p(z_1)}}{\frac{\sin \theta_1}{k(s_1) + p(z_1)}} = \frac{k(s_1) + p(z_1)}{k(s_1) - p(z_1)} = \frac{1 + \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi_1}{\sin 2\theta_1}(1 - G)}{1 - \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi_1}{\sin 2\theta_1}(1 - G)}.$$

Seja

$$f(s_1, \theta_1) = \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi_1}{\sin 2\theta_1}(1 - G(s_1, \theta_1)),$$

então

$$\frac{F^-(z_1)}{F^+(z_1)} - 1 = 2 \frac{f(s_1, \theta_1)}{1 - f(s_1, \theta_1)}.$$

Para cada s_1 , temos

$$1 - G(s_1, \theta_1) = \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1} \leq \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{1 - \varepsilon^2},$$

logo

$$|f(s_1, \theta_1)| \leq \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{\sin 2\theta_1} = \frac{\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)} \tan \theta_1.$$

Note que para θ_1 pequeno, temos

$$2 \left| \frac{f(s_1, \theta_1)}{1 - f(s_1, \theta_1)} \right| \leq 4|f(s_1, \theta_1)|.$$

Portanto, desde que θ_1 seja suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{F^-(z_1)}{F^+(z_1)} \geq 1 - 2 \left| \frac{f}{1 - f} \right| \geq 1 - 4|f| \geq 1 - A \tan \theta_1.$$

□

Sejam $z_0 = (s_0, \theta_0)$ e $z_n = (s_n, \theta_n) = T^n(z_0)$ para $0 < n \leq n(z_0)$. Escolha um $(J_0, J'_0) \in C(z_0)$ e seja $(J_n, J'_n) = D_{z_0} T^n(J_0, J'_0)$ para $0 < n \leq n(z_0)$.

Segue do Sublema 4.12, que se $\theta_0 \leq \min\{\bar{\theta}/\beta, \bar{\theta}'\}$ ($\bar{\theta}, \beta$ e $\bar{\theta}'$ são os mesmos como nos Sublemas 4.12 e 4.13), então $\theta_n \leq \bar{\theta}'$ para todo $0 \leq n \leq n(z_0)$. Portanto podemos aplicar o Sublema 4.13 para cada fator da expressão

$$\left| \frac{J'_n}{J'_0} \right| = \left| \frac{J'_n}{J'_{n-1}} \right| \cdots \left| \frac{J'_1}{J'_0} \right|,$$

obtendo

$$\left| \frac{J'_n}{J'_0} \right| \geq \prod_{i=1}^n (1 - A \tan \theta_i)$$

para todo $0 < n \leq n(z_0)$. Daí, pelo Sublema 4.12 temos que

$$\left| \frac{J'_n}{J'_0} \right| \geq (1 - A \tan \beta \theta_0)^{n(z_0)}.$$

Em [15] p.242, Donnay deu uma estimativa para o número de rebatidas consecutivas ao longo de um arco focalizador para ângulos pequenos. Ele provou que existe um $C > 0$ tal que para todo (s_0, θ_0) com θ_0 suficientemente pequeno temos $n(s_0, \theta_0) \leq C / \sin \frac{\theta_0}{2}$. Portanto, temos

$$\left| \frac{J'_n}{J'_0} \right| \geq (1 - A \tan \beta \theta_0)^{C(\sin \frac{\theta_0}{2})^{-1}}.$$

Além disso, temos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} (1 - A(\varepsilon) \tan \beta \theta)^{C(\sin \frac{\theta}{2})^{-1}} = \exp(-2AC\beta).$$

Daí, dado um $0 < \delta < \exp(-2CA\beta)$ pequeno, existe um $\tilde{\theta} \leq \bar{\theta}/\beta$ tal que, para qualquer (s_0, θ_0) com $\theta_0 \leq \tilde{\theta}$ temos

$$\left| \frac{J'_n}{J'_0} \right| \geq \exp(-2AC\beta) - \delta > 0$$

para todo $0 < n \leq n(s_0, \theta_0)$.

Concluimos a primeira parte da demonstração observando que o limite inferior $\exp(-2A\beta) - \delta$ é independente de n .

θ grande. Agora seja $\tilde{\theta} < \theta_0 < \pi - \tilde{\theta}$. Usando a contradição do Sublema 4.12, obtemos que $\tilde{\theta}/\beta < \theta_n$ para todo $0 \leq n \leq n(z_0)$.

Afirmção: F^- é maior ou igual a uma constante positiva ao longo dos blocos do tipo 1 com $\tilde{\theta} < \theta_0 < \pi - \tilde{\theta}$.

De fato, isto é óbvio para blocos do tipo 1 em $\mathcal{E}$, enquanto para blocos do tipo 1 em $\mathcal{H}$, segue do Lema 2.25.

Além disso, como θ_0 é grande temos que o número de reflexões $n(z_0)$ é limitado, isto é, existe um $\bar{n}$ tal que $n(z_0) \leq \bar{n}$.

Seja $\bar{d}$ o limite inferior de F^- , temos que $m_- \geq \bar{d}$. Como m_+ é finito e usando o fato de que $m_+ = m_-$, concluimos que

$$\frac{F^-}{F^+} \geq \frac{\bar{d}}{m_+} = \alpha$$

e $\alpha < 1$.

Assim, usando a equação 4.1, temos que

$$\left| \frac{J'_n}{J'_0} \right| = \left| \frac{J'_n}{J'_{n-1}} \right| \cdots \left| \frac{J'_1}{J'_0} \right| \geq \alpha^n \geq \alpha^{\bar{n}}$$

para todo $0 < n \leq n(z_0)$.

Portanto a demonstração do lema está concluída.

□

Lema 4.14. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então a propriedade de não-contração vale ao longo do bloco do tipo 2 e 3.*

Demonstração. Seja $u \in C(z_0)$, $u = (J_0, J'_0)$ e $D_{z_0}\Phi^n u = (J_n, J'_n)$. Como $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ são equivalentes em M , então para provar o lema, é suficiente mostrar que existe uma constante $\lambda > 0$ não dependendo do bloco $\{z_0, \dots, z_n\}$ tal que $|J'_n| \geq \lambda|J'_0|$. Para isso, precisamos calcular a aplicação $D_{z_0}\Phi^n$ em coordenadas (J, J') .

Como um primeiro passo para calcular $D_{z_0}\Phi^n$, vamos considerar um bloco do tipo 2 que atravessa a mesa $\mathcal{Q}$ apenas uma vez. Na figura 4.1 traçamos um bloco $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ com $n \geq 1$ reflexões no arco Γ_2 . Para $0 \leq k \leq n$, vamos denotar por A_k e A'_k os pontos onde o vetor $Y(z_k)$, onde $Y(z_k) = X_h(z_k)$ ou $X_c(z_k)$, focaliza para frente e para trás, respectivamente. Se $n = 1$, então $z_1 \in U$ e A'_1, A_1 são os pontos onde o bloco intersecta a fronteira do círculo semi-osculador $D(z_1)$. Se $n > 1$, então $z_1, \dots, z_n \in V$ e $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n$ são os pontos de tangência entre o bloco e sua cáustica. Note que, neste caso, $A_k = A'_{k+1}$ para $1 \leq k \leq n-1$. Finalmente, defina $t'_k = F^-(z_k)$ para $1 \leq k \leq n$, e $t_k = F^+(z_k)$ para $0 \leq k \leq n$.

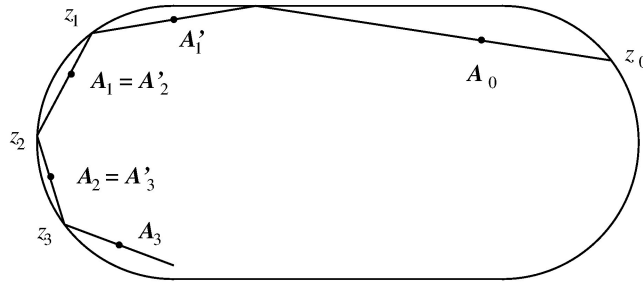


Figura 4.1: Um bloco do tipo 2 que atravessa $\mathcal{Q}$ apenas uma vez.

Denote por H_k a aplicação que envolve os campos de Jacobi transversais e suas derivadas ao longo dos blocos de A'_k até A_k para $1 \leq k \leq n$, e de A_0 até A'_1 para $k = 0$. Se $H = H_n H_{n-1} \dots H_0$, então

$$D_{z_0}\Phi^n = \begin{pmatrix} 1 & -t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Agora vamos calcular H_k e então H . Se d_k denota o comprimento do segmento do bloco contido em $D(z_k)$, então para $k > 0$ temos

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{d_k} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t'_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2t_k}{d_k} & t'_k \left(-1 + \frac{2t_k}{d_k} \right) - t_k \\ \frac{2}{d_k} & \frac{2t'_k}{d_k} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_k}{t'_k} & 0 \\ \frac{t'_k + t_k}{t'_k t_k} & \frac{t'_k}{t_k} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

A última igualdade segue da fórmula

$$\frac{1}{t'_k} + \frac{1}{t_k} = \frac{2}{d_k}$$

que descreve o fato que uma variação que focaliza em A'_k focaliza novamente em A_k depois de refletir em $\pi(z_k)$. Para simplificar a notação, vamos definir $a_k = t_k/t'_k$ e $b_k = (t'_k + t_k)/(t'_k t_k)$ tal que $k > 0$ temos

$$H_k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ b_k & \frac{1}{a_k} \end{pmatrix}.$$

Resta calcular H_0 . Se δ é o comprimento do segmento de trajetória entre A_0 e A'_1 , então

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, podemos calcular H . Se $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ e $\beta = (b_1 + b_2 a_1 a_2 + \cdots + b_{n-1} a_1 a_2^2 \cdots a_{n-2} a_{n-1} + b_n a_1 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 a_n)/(a_2 \cdots a_n)$, então um cálculo direto de matrizes nos dá que

$$H_n H_{n-1} \cdots H_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

e

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \delta \\ \beta & \beta \delta + \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Note que todas as entradas de H são números positivos. Para a prova do lema não precisamos da expressão explícita de $D_{z_0} \Phi^n$.

Agora consideremos o caso geral, isto é, quando o bloco $\{z_0, \dots, z_n\}$ atravessa a mesa Q um número arbitrário de vezes. Digamos então que o bloco atravessa a mesa $m > 0$ vezes. Podemos decompor nosso bloco em m sub-blocos que atravessam a mesa apenas uma vez, como o bloco

considerado anteriormente. Sejam $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ as quantidades correspondendo a α, β, δ relativas ao i -ésimo sub-bloco, e

$$\tilde{H}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_i \delta_i \\ \beta_i & \beta_i \delta_i + \frac{1}{\alpha_i} \end{pmatrix},$$

para $1 \leq i \leq m$. Denote por $\tilde{H}$ o produto $\tilde{H}_m \cdots \tilde{H}_1$. Então, em analogia à equação 4.2, temos que

$$D_{z_0} \Phi^n = \begin{pmatrix} 1 & -t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Fazendo o produto destas matrizes, temos que

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \text{número positivo} & \alpha_1 \cdots \alpha_m \delta_1 + \text{número positivo} \\ \text{número positivo} & \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_m} + \text{número positivo.} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Se definirmos

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_0 \\ \tilde{J}'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 \\ J'_0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

e

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_n \\ \tilde{J}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ J'_n \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

então temos $\tilde{H}(\tilde{J}_0, \tilde{J}'_0) = (\tilde{J}_n, \tilde{J}'_n)$.

Nosso passo final é mostrar que existem duas constantes positivas c_1 e c_2 independentes dos bloco escolhido, tal que

$$c_1 J_0'^2 \leq \tilde{J}_n^2 + \tilde{J}_n'^2 \leq c_2 J_n'^2.$$

Este fato encerrará a demonstração.

Primeiro provaremos a desigualdade no lado direito. Pela equação 4.7, temos que

$$\tilde{J}_n^2 + \tilde{J}'_n{}^2 = (J_n + T_n J_n'^2) + J_n'^2 \leq J_n^2 + (1 + t_n^2) J_n'^2. \quad (4.8)$$

A última desigualdade segue de que $J_n J'_n \leq 0$, que é uma consequência da definição de $C(z_n)$ (de fato, $C(z_n) = \{(J, J'); J' \leq -J/t_n\}$). Outra consequência da definição de $C(z_n)$ é que $|J_n| \leq t_n |J'_n|$, e portanto, pela equação 4.8, obtemos que

$$\tilde{J}_n^2 + \tilde{J}'_n{}^2 \leq (1 + 2t_n^2) J_n'^2 \leq c_2 J_n'^2$$

onde $c_2 = 1 + 2m_+^2$ (m_+ está definido na seção 3.3). Agora provaremos a desigualdade do lado esquerdo. Pela equação 4.5, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n^2 &= ((\text{número positivo})\tilde{J}_0 + (\alpha_1 \cdots \alpha_m \delta_1)\tilde{J}'_0)^2 \\ &\geq (\alpha_1 \cdots \alpha_m \delta_1)^2 \tilde{J}_0'^2 + (\text{número positivo})\tilde{J}_0 \tilde{J}'_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n'^2 &= ((\text{número positivo})\tilde{J}_0 + \frac{1}{(\alpha_1 \cdots \alpha_m)}\tilde{J}'_0)^2 \\ &\geq \frac{1}{(\alpha_1 \cdots \alpha_m \delta_1)^2} \tilde{J}_0'^2 + (\text{número positivo})\tilde{J}_0 \tilde{J}'_0. \end{aligned}$$

Todo vetor em $C(z_0)$ tem tempo focalizador menor ou igual a t_0 . Daí $\tilde{J}_0 \tilde{J}'_0 \geq 0$, logo

$$\tilde{J}_n^2 \geq (\alpha_1 \cdots \alpha_m \delta_1)^2 \tilde{J}_0'^2$$

e

$$\tilde{J}_n'^2 \geq \frac{1}{(\alpha_1 \cdots \alpha_m)^2} \tilde{J}_0'^2.$$

Porém, $\tilde{J}'_0 = J'_0$, logo

$$\tilde{J}_n^2 + \tilde{J}_n'^2 \geq (\alpha_1 \cdots \alpha_m \delta_1)^2 J_0'^2 + \frac{1}{(\alpha_1 \cdots \alpha_m)^2} J_0'^2. \quad (4.9)$$

Agora note que $(x\sqrt{c} - 1)^2 \geq 0$, logo

$$cx + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{c}$$

para qualquer $c, x > 0$. Usando esta desigualdade na equação 4.9, obtemos que

$$\tilde{J}_n^2 + \tilde{J}'_n^2 \geq 2\delta_1 J_0'^2.$$

Pelo Lema 3.23, temos que $\tilde{d} \leq \delta_1$ independentemente do bloco. Se $c_1 = 2\tilde{d}$, então concluímos que

$$\tilde{J}_n^2 + \tilde{J}'_n^2 \geq c_1 J_0'^2.$$

Portanto a propriedade de não-contração vale ao longo dos blocos do tipo 2.

A demonstração para blocos do tipo 3 é análoga, basta considerar no início da demonstração, $n = 1$ rebatidas no arco Γ_2 .

□

As Condições 1-5 estão verificadas, logo o Teorema 2.15 pode ser aplicado.

4.2 Ergodicidade Global

Concluiremos agora a demonstração da ergodicidade da aplicação Φ . Nas seções anteriores, mostramos que cada ponto suficiente tem uma vizinhança contida em uma caixa de M que pertence (mod 0) a uma componente ergódica de Φ . Para finalizar a prova, precisamos primeiro mostrar que cada caixa pertence (mod 0) a uma componente ergódica de Φ , e então que as órbitas de qualquer par de caixas não são disjuntas (mod 0). A primeira parte é conseguida através da prova de que o conjunto de pontos suficientes contidos numa caixa é conexo por caminhos, enquanto que para a segunda parte, precisamos construir trajetórias especiais que têm a propriedade de que partindo de uma caixa e viajando ao longo dessas trajetórias pode-se chegar a qualquer outra caixa.

Lema 4.15. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então o subconjunto dos pontos suficientes que estão contidos em uma caixa de M é conexo por caminhos.*

Demonstração. Seja A_i uma caixa de M . A prova da Condição 5, Sinai-Chernov Ansatz, (Lema 4.7), inclui o seguinte resultado: o subconjunto dos pontos não-suficientes de A_i está contido em $S_\infty^+ \cap S_\infty^-$. Da regularidade dos conjuntos $S_n^\pm$, segue imediatamente que o conjunto $S_\infty^+ \cap S_\infty^-$ é

no máximo enumerável. Se removermos um conjunto enumerável de um conjunto conexo por caminhos de dimensão dois, obtemos ainda um conjunto conexo por caminhos. $\square$

Por um argumento padrão, que em linhas gerais diz que dado um conjunto conexo por caminhos, quase todos os pontos desse conjunto estão em uma mesma componente ergódica (ver por exemplo o Corolário 4.3 parte (a) de [24]), obtemos o seguinte resultado.

Lema 4.16. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então toda caixa de M pertence (mod 0) a uma componente ergódica de Φ .*

Finalmente podemos finalizar a demonstração da ergodicidade de Φ .

Demonstração. (Teorema B)

Temos que mostrar que todas as caixas de M pertencem (mod 0) a uma mesma componente ergódica de Φ . Para isso é suficiente checar que as três caixas $U_1, U_2, V_{2,2}$ pertencem (mod 0) a mesma componente ergódica. Se isto é verdade, então pela simetria de Q , qualquer outro trio $U_1, U_2, V_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, pertencerá (mod 0) à mesma componente ergódica.

Duas caixas A_i, A_j , $i \neq j$, pertencem (mod 0) à mesma componente ergódica se existe uma órbita γ que intersecta A_i e A_j . Se tal órbita existe, então existirá um conjunto aberto em A_i que é levado em um conjunto aberto em A_j , e conjuntos abertos contêm conjuntos de pontos suficientes de medida positiva.

Assim, o que precisamos fazer é mostrar que existem duas órbitas tal que uma intersecta U_1 e U_2 e a outra intersecta $V_{2,2}$ e U_1 . A primeira órbita é dada pela órbita periódica ao longo do eixo x .

Para construir a segunda órbita, procedemos da seguinte maneira:

Afirmção: Se $z_0 \in M_0$, $z_1 = Tz_0 \in M$, $q_i = \pi(z_i)$, $0 \leq i \leq 1$ e $\overline{q_0q_1}$ intersecta o eixo x , então $z_1 \in Y$.

De fato, assumamos sem perda de generalidade, que $z_1 \in M_2$ e suponhamos que $z_1 \notin Y$. Se $z_2 = T^2z_0$, $q_2 = \pi(z_2)$, então q_1 e q_2 pertencem à mesma semi-elipse. Seja t a linha contendo $\overline{q_0q_1}$, e t' a linha obtida refletindo t pelo eixo x . Os segmentos $\overline{q_0q_1}$ e $\overline{q_1q_2}$ são tangentes à mesma elipse confocal E' e $\overline{q_1q_2}$ está contido no conjunto limitado por t' e pela semi-elipse. E' é tangente a t , assim, E' tem que ser tangente a t' por simetria. Porém, o segmento $\overline{q_1q_2}$ fica à esquerda de t' , e portanto concluímos que E' intersecta t' transversalmente, obtendo assim uma contradição.

Considere a sequência de rebatidas, $\gamma = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$, $z_i = T^i z_0$, $n > 2$ tal que $\pi(z_0) = a_4$; $z_1 \in M_2$; $\pi(z_2) = a_3$; $z_i \in M_0$, $2 < i < n$; $z_n \in M_1$. Note que os segmentos alternados de

γ são paralelos. Pela afirmação anterior podemos ver que para qualquer vizinhança W de z_0 , temos $TW \cap Y_2 \neq \emptyset$ e $TW \cap Y_2^c \neq \emptyset$. Analisemos vários casos:

- a) se $z_n \in Y_1$, então pela continuidade de T^k , $1 \leq k \leq n$, podemos encontrar um $z'_0 \in M_2$ próximo a z_0 tal que i) $z'_0, z'_1 \in M_2$; ii) $z'_1 \in Y_2$; iii) $z'_i \in M_0$, $1 \leq i < n$ e $i = n+1$, e iv) $z'_n \in Y_1$. Daí temos que $z'_0 \in V_2$ e $z'_n \in U_1$.
- b) se $z_n \notin Y$, então podemos encontrar um $z'_0 \in M_0$ próximo de z_0 tal que i) $z'_1 \in Y$; ii) $z'_n, z_n \in M_1$, e iii) $z'_n \notin Y$, novamente pela continuidade de T^k , $1 \leq k \leq n$. Portanto $z'_1 \in U_2$ e $z'_n \in V_1$.
- c) se $\pi(z_n)$ é um canto, então $z_{n+1} \in M_1$ e podemos encontrar um $z'_0 \in M_0$ próximo de z_0 tal que i) $z'_1 \in Y_2$ e ii) $z'_n \notin Y$. O último fato segue da continuidade de T^k , $1 \leq k \leq n$. Temos novamente $z'_1 \in U_2$ e $z'_n \in V_1$.

Assim, conseguimos exibir as duas órbitas necessárias. Logo Φ possui apenas uma componente ergódica e portanto a aplicação Φ é ergódica. $\square$

Como Φ é ergódica, usando a Proposição 2.12, obtemos como um corolário a ergodicidade da aplicação do bilhar T .

Corolário 4.17. *Se $1 < a < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $h > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$, então T é ergódico.*

Referências

- [1] Berry, M. V. *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*. Eur. J. Phys., **2**:91–102, 1981.
- [2] Bonatti, C., Díaz, L. J., Viana, M. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol.102, 2005.
- [3] Bunimovich, L. A., Sinai, Ya. G. *On a fundamental theorem in the theory of dispersing billiards*. Math. USSR Sbornik, **19**(3):407–423, 1973.
- [4] Bunimovich, L. A. *On the ergodic properties of some billiards*. Funct. Anal. Appl. **8**, 73-74, 1974
- [5] Bunimovich, L. A.. *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*. Commun. Math. Phys., **65**(3):295–312, 1979.
- [6] Camacho, C., Neto, A. L. *Teoria Geométrica das Folheações*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [7] Chernov, N. *On local ergodicity in hyperbolic systems with singularities*. Funct. Anal. Appl., **27**(1):51–54, 1993.
- [8] Chernov, N., Markarian, R. *Chaotic Billiards*. Mathematical Surveys and Monographs, 127, American Mathematical Society, Providence, 2006
- [9] Chernov, N., Markarian, R. *Introduction to the Theory of Chaotic Billiards*. Rio de Janeiro, IMPA, 2003.
- [10] Canale, E., Markarian, R. *Simulación de bilhares planos* Anales IEEE, Segundo Seminario de Informática em el Uruguai, 71-96, 1991.
- [11] Canale, E., Markarian, R., Oliffson Khamporst, S., Pinto de Carvalho, S. *A lower bound for chaos on the elliptical stadium* Physica D, 189-202, 1998.
- [12] Chow, Y. S., Teicher, H. *Probability Theory: Independence, Interchangeability and Martingales*. New York, 3rd edition, Springer-Verlag, 1997.
- [13] Del Magno, G. *Ergodicity of a class of truncated elliptical billiard*. Nonlinearity **14**, 1761-1786, 2001
- [14] Del Magno, G., Markarian, R. *Bernoulli Elliptical Stadia*. Commun. Math. Phys. **233**, 211-230, 2003
- [15] Donnay, V.J. *Using Integrability to Produce Chaos: Billiards with Positive Entropy*. Commun. Math. Phys. **141**, 225-257, 1991.

- [16] Fernandez, P. J. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.
- [17] Gallavotti, G., Ornstein, D. S. *Billiards and Bernoulli schemes*. Commun. Math. Phys., **38**:83–101, 1974.
- [18] Petersen, K. *Ergodic Theory* New York, Syndicate of the University of Cambridge, 1983.
- [19] Katok, A., Strelcyn, J.-M. (in collaboration with F. Ledrappier and F. Przytycki). *Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities*. LNM, 1222, Springer-Verlag, 1986.
- [20] Krámli, A., Simányi, N., Szász, D. *A transversal fundamental theorem for semi-dispersing billiards*. Commun. Math. Phys., **129**(3):535–560, 1990.
- [21] Krylov, N. S. *The processes of relaxation of statistical systems and the criterion of mechanical instability*. Thesi, Moscow, 1942; Republished in English by Princeton University Press, Princeton, 1979.
- [22] Lazutkin, V. F. *The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain*. Math. USSR Izvestija, **7**(1):185–214, 1973.
- [23] Liverani, C., Wojtkowski, M. *Ergodicity in Hamiltonian systems*. Disponível em <http://arxiv.org/abs/math.DS/9210229>.
- [24] Markarian, R. *New ergodic billiards: Exact results*. Nonlinearity **6**, 819–841, 1993.
- [25] Markarian, R. *The fundamental theorem of Sinai-Chernov for dynamical systems with singularities*. Dynamical Systems Santiago de Chile, 1990, R. Bamón, R. Labarca, J. Lwowitz and J. Palis, editors, Longman, Harlow (1993), 131–158.
- [26] Markarian, R. *Billiards with pesin region of measure one*. Commun. Math. Phys., **118**(1):87–97, 1988.
- [27] Markarian, R., Oliffson Khamporst, S., Pinto de Carvalho, S. *Chaotic properties of the elliptical stadium*. Commun. Math. Phys. **174**, 661–679, 1996.
- [28] Mañé, R. *Teoria Ergódica*. Rio de Janeiro, IMPA, 1983.
- [29] Pesin, Ya. B. *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. Russ. Math. Surveys, **32**(4):55–114, 1977.
- [30] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. WCB/McGraw-Hill, 1987.
- [31] Sinai, Ya. G. *On the foundation of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics*. Soviet Math. Dokl, **4**:1818–1822, 1963.
- [32] Sinai, Ya. G. *Dynamical systems with elastic reflections*. Russ. Math. Surveys, **25**:137–189, 1970.
- [33] Sinai, Ya. G. *Introduction to Ergodic Theory*. Princeton University Press, 1976.
- [34] Sinai, Ya. G., Chernov, N. I. *Ergodic properties of certain systems of two-dimensional discs and three-dimensional balls*. Russ. Math. Surveys, **42**(3):181–207, 1987.
- [35] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. New York, Springer-Verlag, 1975.

- [36] Wojtkowski, M. *Invariant families of cones and Lyapunov exponents.* Ergod. Th. & Dynam. Sys., **5**:145–161, 1985.
- [37] Wojtkowski, M. *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents.* Commun. Math. Phys., **105**:391–414, 1986.
- [38] Wojtkowski, M. *Two applications of Jacobi fields to the billiard ball problem.* J. Differ. Geom. 40, 155-164, 1994.