

Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós -Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

*Rafael da Silva Lima*

*O Espaço de Módulos de Quádruplas de Pontos  
na Fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo*

Juiz de Fora

2014

*Rafael da Silva Lima*

*O Espaço de Módulos de Quádruplas de Pontos  
na Fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática Pura.

Orientador : Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso.

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lima, Rafael da Silva .

O Espaço de Módulos de Quádruplas de Pontos na Fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo / Rafael da Silva Lima. -- 2014. 60 f.

Orientador: Luís Fernando Crocco Afonso

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Matemática. 2. Geometria Hiperbólica. 3. Espaço de Módulos. 4. Matriz de Gram. 5. Quádruplas de pontos. I. Afonso, Luís Fernando Crocco , orient. II. Título.

*Rafael da Silva Lima*

*O Espaço de Módulos de Quádruplas de Pontos  
na Fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Sérgio Guilherme De Assis Vasconcelos  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Heleno da Silva Cunha  
UFMG

Juiz de Fora, 2014.

*Aos meus pais.*

# ***AGRADECIMENTOS***

Toda gratidão:

- À Deus.
- À minha família, em especial minha mãe e minha vó, por todo apoio necessário.
- Ao meu orientador professor Luís Fernando Crocco Afonso, por toda dedicação, paciência e disponibilidade para realização do trabalho.
- Aos professores Sérgio Vasconcelos e Heleno Cunha, por suas participações na banca examinadora e sugestões para a melhoria do trabalho.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.
- Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF.
- Aos grandes amigos de mestrado.

# *RESUMO*

O objetivo desse trabalho, é a construção do espaço de módulos para o conjunto de quádruplas ordenadas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Para isso, utilizaremos o conceito de matriz de Gram como critério de congruência, e a parametrização do espaço de configurações será feito pelo invariante angular de Cartan e a razão-cruzada. Exemplificaremos algumas situações geométricas.

Palavras-Chave: Espaço de Módulos. Matriz de Gram. Quádruplas de pontos. Invariante de Cartan. Razão cruzada.

# *ABSTRACT*

The aim of this work is the construction of a moduli space for the configuration space ordered quadruples of points on the boundary of the complex hyperbolic space. For this use the concept of Gram matrix as a criterion of congruence, and parametrization the configuration space will be done by the Cartan invariant and cross-ratio. Will be exemplified some geometric situations.

Key-words: Moduli Space. Gram Matrix. Quadruples of points. Cartan invariant. Cross-ratio.



# *SUMÁRIO*

<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 9
<b>1 ELEMENTOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA COMPLEXA</b>	p. 11
1.1 O ESPAÇO HIPERBÓLICO COMPLEXO $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$	p. 11
1.2 MODELO DO PARABOLÓIDE (DOMÍNIO DE SIEGEL)	p. 14
1.2.1 Coordenadas Horoesféricas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ e o grupo de Heisenberg	p. 15
1.2.2 Transformações de Heisenberg	p. 16
1.3 SUBVARIEDADES TOTALMENTE GEODÉSICAS	p. 17
1.4 INVARIANTES NUMÉRICOS	p. 17
1.4.1 INVARIANTE ANGULAR DE CARTAN	p. 18
1.5 RAZÃO-CRUZADA COMPLEXA	p. 19
<b>2 MATRIZ DE GRAM</b>	p. 20
2.1 CARACTERIZAÇÃO DA MATRIZ DE GRAM	p. 20
2.2 CARACTERIZAÇÃO DE MATRIZES DE GRAM ASSOCIADAS A QUÁDRUPLAS DE PONTOS EM $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$	p. 22
2.3 RELAÇÕES ENTRE MATRIZES DE GRAM E INVARIANTES NUMÉRICOS	p. 30
<b>3 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE QUÁDRUPLAS ORDENADAS EM <math>\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2</math></b>	p. 35
<b>4 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE QUÁDRUPLAS ORDENADAS EM <math>\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n</math></b>	p. 40

<b>5</b>	<b>ALGUNS SUBCONJUNTOS INTERESSANTES DE <math>M</math> E A TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE MÓDULOS <math>M</math></b>	p. 43
5.1	O CONJUNTO SINGULAR DE $M$ . . . . .	p. 43
5.2	CONFIGURAÇÕES $\mathbb{C}$ - PLANAS . . . . .	p. 54
5.3	CONFIGURAÇÕES $\mathbb{R}$ - PLANAS . . . . .	p. 55
5.4	A FATIA REAL DA VARIEDADE BÁSICA $S$ . . . . .	p. 56
5.5	IMAGEM TOPOLOGICA DO ESPAÇO DE MÓDULOS $M$ . . . . .	p. 58
	<b>REFERÊNCIAS</b>	p. 60

# INTRODUÇÃO

Um problema bastante recorrente em geometria hiperbólica complexa é o de como classificar  $m$ -uplas ordenadas de pontos distintos no espaço hiperbólico complexo de dimensão  $n$ ,  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e em sua fronteira  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

O espaço de módulos, é um espaço que vai parametrizar o espaço de  $m$ -uplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , módulo a ação de  $\text{PU}(n, 1)$ .

Sabendo que  $\text{PU}(n, 1)$  age bi-transitivamente em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , classificar pontos ou pares de pontos sobre ação de  $\text{PU}(n, 1)$  torna-se trivial. No caso de triplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , a classificação é feita pelo invariante angular de Cartan  $\mathbb{A}$ . Mais detalhes veja Goldman [5].

No caso de quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  o problema de classificação torna-se um pouco mais complexo.

O principal objetivo dessa dissertação é descrever um espaço de módulos para quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $n \geq 1$ , módulo a ação do grupo de isometrias holomorfas,  $\text{PU}(n, 1)$ . Este trabalho foi dividido em cinco capítulos distribuídos da seguinte forma:

**No capítulo 1** apresentamos conceitos preliminares de geometria hiperbólica complexa. Destacamos os conceitos de invariante angular de Cartan e a razão-cruzada complexa, que são invariantes numéricos importantes para descrição do nosso espaço de módulos.

**No capítulo 2** apresentamos o conceito de matriz de Gram associada a uma  $m$ -upla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . A matriz de Gram é a principal técnica utilizada para descrever o espaço de módulos. Destaca-se neste capítulo as proposições 2.1 e 2.3. Em 2.1, damos uma forma de normalizar as classes de congruências das matrizes de Gram. Em 2.3, classificamos pares de quádruplas ordenadas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , através do conceito de matriz de Gram normalizada.

**No capítulo 3** destacamos o estudo do espaço de configurações de quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e a descrição

do seu espaço de módulos  $\mathbb{M}$ .

**No capítulo 4** descrevemos o espaço de módulos para quádruplas ordenadas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , onde  $n \geq 1$ .

**No capítulo 5** mostramos alguns subconjuntos do espaço de módulos  $\mathbb{M}$  estudado no capítulo 4, e damos uma descrição da topologia do espaço  $\mathbb{M}$ .

# 1 *ELEMENTOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA COMPLEXA*

Nesse capítulo são apresentados conceitos preliminares de geometria hiperbólica complexa, afim de que o leitor se familiarize com os conceitos e notações ao longo do trabalho. Definimos o espaço hiperbólico complexo  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e sua fronteira  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Apresentamos o domínio de Siegel e o grupo de Heisenberg. Por fim, apresentamos as subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

## 1.1 O ESPAÇO HIPERBÓLICO COMPLEXO $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$

Seja  $\mathbb{C}^{n,1}$  o espaço vetorial  $\mathbb{C}^{n+1}$  munido de uma forma hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de assinatura  $(n, 1)$ .

Dados os vetores  $Z, W \in \mathbb{C}^{n,1}$ , a forma mencionada acima é definida por,

$$\begin{aligned} \langle Z, W \rangle &= [W]^* J_{n,1} [Z] \\ &= z_1 \bar{w}_{n+1} + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n + z_{n+1} \bar{w}_1 \end{aligned}$$

onde,

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \end{bmatrix},$$

e

$$J_{n,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta é uma das maneiras de se escrever a forma Hermitiana de assinatura  $(n, 1)$  de acordo com a escolha de uma base. Neste trabalho utilizaremos sempre a forma Hermitiana nas coordenadas definidas acima.

Destacamos os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{C}^{n,1}$ :

$$\begin{aligned} V_- &= \{Z \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle Z, Z \rangle < 0\} \\ V_+ &= \{Z \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle Z, Z \rangle > 0\} \\ V_0 &= \{Z \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle Z, Z \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Os vetores pertencentes aos conjuntos  $V_-$ ,  $V_+$  e  $V_0$  são denominados vetores *negativos*, vetores *positivos* e vetores *nulos* ou *isotrópicos*, respectivamente. Note que se  $Z \in V_-$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , temos que  $\langle \lambda Z, \lambda Z \rangle = |\lambda|^2 \langle Z, Z \rangle < 0$ . Então, os pontos  $\lambda Z \in V_-$ . As mesmas afirmações podem ser feitas para  $V_0$  e  $V_+$ . Isso nos motiva a definir a seguinte relação entre vetores de  $\mathbb{C}^{n,1} \setminus \{0\}$ . Seja  $Z, W \in \mathbb{C}^{n,1}$ ,  $Z \sim W$  se, somente se,  $Z = \lambda W$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Prova-se sem dificuldades que esta relação é de equivalência. Daí, definimos

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n = \frac{\mathbb{C}^{n,1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

como o espaço projetivo complexo de dimensão  $n$ . Definimos, também, a projeção canônica  $\pi : \mathbb{C}^{n,1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ .

Define-se o *espaço hiperbólico complexo de dimensão  $n$*  como sendo  $\pi(V_-) = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Define-se a *fronteira* do espaço hiperbólico complexo como sendo  $\pi(V_0) = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . No caso de  $n = 2$ , diremos que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é o *plano hiperbólico complexo*. Podemos identificar o espaço hiperbólico complexo  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  com a bola  $\mathbb{B} = \{Z \in \mathbb{C}^n; |Z| < 1\}$  e sua fronteira  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  com a esfera  $\mathbb{S}^{2n-1} = \{Z \in \mathbb{C}^n; |Z| = 1\}$ .

Seja  $Z, W \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Definimos a métrica em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  por

$$\cosh^2 \left( \frac{d(z, w)}{2} \right) = \frac{\langle Z, W \rangle \langle W, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle},$$

onde  $Z$  e  $W$  são levantamentos quaisquer de  $z$  e  $w$ , respectivamente. Esta métrica é denominada *métrica de Bergman*. Mais detalhes em Goldman [5].

O grupo unitário da forma Hermitiana  $\langle , \rangle$  é dado por

$$U(n, 1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{C}) \mid \langle AZ, AW \rangle = \langle Z, W \rangle; \forall Z, W \in \mathbb{C}^{n,1}\}.$$

Como  $U(n, 1)$  preserva a forma Hermitiana  $\langle , \rangle$ , segue que  $A \in U(n, 1)$  se, e somente se,  $A^* J_{n,1} A = J_{n,1}$ .

O grupo unitário  $U(n, 1)$  atua via projeção em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  (e em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ). A projetização de  $U(n, 1)$  é o grupo  $PU(n, 1)$  de *isometrias holomorfas* de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Dados  $A, B \in U(n, 1)$ ,  $A \sim B$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $A = \lambda B$ . Então,

$$PU(n, 1) = \frac{U(n, 1)}{\sim}.$$

Agora apresentamos algumas observações envolvendo  $k$ -uplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  que serão de grande importância para obtermos alguns resultados. Para essas observações utilizaremos o lema a seguir, encontrado em Parker [7] em uma versão para pontos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ , mas o resultado se estende para pontos em  $\mathbb{C}^{n,1}$  e a demonstração é feita de forma similar a encontrado na fonte supracitada.

**Lema 1.1.** Se  $P, Q \in \mathbb{C}^{n,1}$  com  $\langle P, P \rangle \leq 0$  e  $\langle Q, Q \rangle \leq 0$ , então ou  $P = \lambda Q$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$  ou  $\langle P, Q \rangle \neq 0$ .

**Observação 1.1.** Sejam  $p, q$  pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  com levantamentos dados pelos vetores  $P, Q$ , então  $\langle P, Q \rangle \neq 0$ .

De fato, basta aplicar o Lema 1.1.

Agora, considere  $W$  um subespaço de  $\mathbb{C}^{n,1}$  cuja dimensão de  $W$  é igual a  $k+1$ , com  $1 \leq k \leq n$ . Tome  $\{P_1, P_2, \dots, P_{k+1}\}$  uma base ortogonal para  $W$ , ou seja  $\langle P_i, P_j \rangle = 0, i \neq j$ . Segue do Lema 1.1 que a forma hermitiana restrita ao espaço  $W$  terá uma das seguintes assinaturas  $(k, 1), (k, 0), (k+1, 0)$  e diremos que  $W$  é *hiperbólico*, *parabólico* ou *elíptico*, respectivamente.

**Observação 1.2.** Seja  $\{P_1, P_2, \dots, P_{k+1}\}$  vetores isotrópicos linearmente independentes e  $W$  o subespaço gerado por esses vetores. Então a forma restrita ao subespaço  $W$  tem assinatura  $(k, 1)$ .

Primeiro afirmamos que  $W \cap V_- \neq \emptyset$ . De fato, seja  $Q \in W$ , podemos escrever esse vetor como combinação linear dos vetores  $P_1, P_2, \dots, P_{k+1}$ , ou seja, escrevemos o vetor

como  $Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_{k+1} P_{k+1}$ . Dessa forma,

$$\langle Q, Q \rangle = 2\operatorname{Re}(\alpha_1 \bar{\alpha}_2 \langle P_1, P_2 \rangle) + 2\operatorname{Re}(\alpha_1 \bar{\alpha}_3 \langle P_1, P_3 \rangle) + \dots + 2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar{\alpha}_{k+1} \langle P_k, P_{k+1} \rangle).$$

Segue da observação 1.1 que  $\langle P_i, P_j \rangle \neq 0, \forall i, j \in \{1, \dots, k, k+1\}$ . Logo, existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ , tal que  $Q \in V_-$ .

Agora, tome  $\{V_1, V_2, \dots, V_{k+1}\}$  base ortogonalizadora de  $W$ . Podemos escrever  $Q$  como combinação linear  $Q = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \dots + \beta_{k+1} V_{k+1}$ . Assim,

$$Q = |\beta_1|^2 \langle V_1, V_1 \rangle + |\beta_2|^2 \langle V_2, V_2 \rangle + \dots + |\beta_{k+1}|^2 \langle V_{k+1}, V_{k+1} \rangle < 0.$$

Isso implica que pelo menos um dos vetores  $V_i \in V_-$ . Do Lema 1.1 segue apenas um vetor  $V_i$  pertence a  $V_-$ . Portanto a assinatura da forma restrita a  $W$  será  $(k, 1)$ .

## 1.2 MODELO DO PARABOLÓIDE (DOMÍNIO DE SIEGEL)

Dados  $Z, W \in \mathbb{C}^{n,1}$ , consideremos o produto Hermitiano dado por

$$\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_{n+1} + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n + z_{n+1} \bar{w}_1.$$

Dado  $W \in \mathbb{C}^{n,1}$  escrevemos  $W = (w_1, w, w_{n+1})^t$  onde  $w = (w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Temos que um vetor  $W \in V_0$ , se e somente se,  $\langle W, W \rangle = 0$ , ou seja,

$$\langle\langle w, w \rangle\rangle + w_1 \bar{w}_{n+1} + w_{n+1} \bar{w}_1 = 0,$$

onde  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  é produto interno usual de  $\mathbb{C}^{n-1}$ . Isso implica que, se  $\pi(W) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , então  $w_{n+1} \neq 0$  ou  $W \sim (1, 0, \dots, 0)^t$ . De qualquer forma, podemos identificar um ponto  $p = (z_1, z) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , pelo seu levantamento  $P$  em  $\mathbb{C}^{n,1}$  por

$$p \mapsto P = \begin{bmatrix} z_1 \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{bmatrix},$$

chamado de levantamento padrão em  $\mathbb{C}^{n,1}$  e



$$p_\infty \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $p_\infty$  é o ponto no infinito em  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ .

Observe que  $\langle P, P \rangle = 0$ , se e somente se,  $\operatorname{Re}(z_1) + \|z\|^2 = 0$ .

Por argumentos similares podemos identificar o espaço hiperbólico complexo de dimensão  $n$  com conjunto

$$\mathbb{H}_\mathbb{C}^n \sim \mathfrak{h}^n = \{(w_1, w) \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re}(w_1) + \|w\|^2 < 0\}$$

denominado *domínio de Siegel* e sua fronteira é o conjunto

$$\partial\mathfrak{h}^n = \{(w_1, w) \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re}(w_1) + \|w\|^2 = 0\}$$

e  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^n \sim \partial\mathfrak{h}^n \cup \{p_\infty\}$ .

### 1.2.1 Coordenadas Horoesféricas de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ e o grupo de Heisenberg

Temos que

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}^n \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w_1) + \|w\|^2 < 0.$$

Colocando  $u = -\operatorname{Re}(w_1) - \|w\|^2 > 0$  e  $\zeta = w$ , segue que  $\operatorname{Re}(w_1) = -\|\zeta\|^2 - u$ . Vemos que  $w_1$  tem a forma  $w_1 = -\|\zeta\|^2 - u + iv$  para algum  $v \in \mathbb{R}$ . Portanto, temos a seguinte parametrização de  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$  (domínio de Siegel) em *coordenadas horoesféricas*, cujo levantamento é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{C}^{n,1} \\ (\zeta, v, u) &\mapsto \begin{bmatrix} -\|\zeta\|^2 - u + iv \\ \sqrt{2}\zeta \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Definição 1.** O grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}$  é conjunto  $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$  munido da operação

$$(\zeta_1, v_1) \cdot (\zeta_2, v_2) = (\zeta_1 + \zeta_2, v_1 + v_2 + 2\operatorname{Im} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle).$$

A horoesfera  $\mathcal{H}_u$  de nível  $u > 0$  é o subconjunto de  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$  tal que

$$\mathcal{H}_u = \{(w_1, w) \in \mathfrak{h}^n; \operatorname{Re}(w_1) + \|w\|^2 = -u\}.$$

O grupo de Heisenberg pode ser identificado pela horoesfera de nível  $u > 0$ , pela correspondência

$$(\zeta, v) \mapsto (-\|\zeta\|^2 - u + iv, \zeta).$$

E a identificação de  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$  com o domínio de Siegel  $\mathfrak{h}^n$  é dada por

$$(\zeta, v, u) \mapsto (-\|\zeta\|^2 - u + iv, \zeta).$$

## 1.2.2 Transformações de Heisenberg

Destacamos abaixo, algumas isometrias de  $\text{PU}(n, 1)$ . Seja  $(\zeta, v) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . A translação de Heisenberg por  $(\zeta, v)$  é dada pela matriz,

$$T_{(\zeta, v)} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2}\zeta^* & -\|\zeta\|^2 + iv \\ 0 & I_{n-1} & \sqrt{2}\zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $I_{n-1}$  é a matriz identidade de ordem  $n - 1$ . A transformação  $T$  fixa o ponto  $p_\infty$  e  $T(0, 0) = (\zeta, v)$ .

Destacamos também as transformações de Heisenberg que fixam os pontos  $p_\infty$  e  $(0, 0)$ .

A rotação de Heisenberg é dada pela matriz

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $A \in \text{U}(n - 1)$ . Sua ação em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  em coordenadas horoesféricas é dada por  $R_A(\zeta, v, u) = (A\zeta, v, u)$ .

A dilatação complexa de Heisenberg por um fator  $\lambda \in \mathbb{C}_*$  é dada pela matriz

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Sua ação em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  em coordenadas horoesféricas é dada por  $D_\lambda(\zeta, v, u) = (\lambda\zeta, |\lambda|^2v, |\lambda|^2u)$ .

Mais detalhes dessas transformações podem se encontrados em Goldman [5].

### 1.3 SUBVARIEDADES TOTALMENTE GEODÉSICAS

Seja  $U$  um subespaço de  $\mathbb{C}^{n,1}$  com dimensão  $k + 1$ , onde  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $U \cap V_- \neq \emptyset$ . A projeção  $\pi(U \setminus \{0\} \cap V_-) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  é denominado um  $\mathbb{C}^k$  - plano em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Esse  $\mathbb{C}^k$  - plano é uma cópia de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^k$ , mergulhado em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Logo

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^k \cong \mathbb{P}(U \setminus \{0\} \cap V_-).$$

Um  $\mathbb{C}^k$  - plano é uma subvariedade totalmente geodésica. Dizemos que um  $\mathbb{C}^1$  - plano é uma *geodésica complexa* e um  $\mathbb{C}^{n-1}$  - plano é um *hiperplano complexo*.

A fronteira de um  $\mathbb{C}^k$  - plano é dado por

$$\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^k \cong \mathbb{P}(U \setminus \{0\} \cap V_0)$$

e é denominada uma  $\mathbb{C}^k$  - cadeia. Dizemos que uma  $\mathbb{C}^1$  - cadeia é uma *cadeia* e uma  $\mathbb{C}^{n-1}$  - cadeia é uma *hipercadeia*.

Seja  $C$  uma  $\mathbb{C}^k$  - cadeia, então  $C$  é uma  $\mathbb{C}^k$  - cadeia vertical se, somente se,  $p_{\infty} \in C$ .  $C$  é uma  $\mathbb{C}^k$  - cadeia finita se, somente se,  $p_{\infty} \notin C$ .

**Definição 2.** Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  vetores linearmente independentes em  $\mathbb{C}^{n,1}$  tal que  $\langle v_i, v_j \rangle \in \mathbb{R}, \forall i, j$ . Assim o espaço  $W = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1}; \alpha_j \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço totalmente real de  $\mathbb{C}^{n,1}$ .

Seja  $U$  um subespaço totalmente real de  $\mathbb{C}^{n,1}$  de dimensão real igual a  $k + 1$ , onde  $1 \leq k \leq n - 1$ . A projeção  $\mathbb{P}(U \setminus \{0\} \cap V_-) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  é denominado um  $\mathbb{R}^k$  - plano em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Um  $\mathbb{R}^k$  - plano é uma cópia de um espaço hiperbólico real de dimensão  $k$ , mergulhado em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Assim,

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^k \cong \mathbb{P}(U \setminus \{0\} \cap V_-)$$

é uma subvariedade totalmente geodésica.

Dizemos que um  $\mathbb{R}^2$  - plano é uma *geodésica totalmente real* e sua fronteira é denominada um  $\mathbb{R}$  - círculo.

### 1.4 INVARIANTES NUMÉRICOS

Nesta seção introduzimos dois invariantes numéricos importantes para os nossos estudos.

### 1.4.1 INVARIANTE ANGULAR DE CARTAN

Para mais detalhes o leitor pode ver em Goldman [5].

**Definição 3.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3)$  uma tripla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . O *invariante angular* de Cartan  $\mathbb{A}(p)$  de  $p$  é definido por

$$\mathbb{A}(p) = \arg(-\langle P_1, P_2, P_3 \rangle),$$

onde  $P_i \in \mathbb{C}^{n,1}$  é um levantamento de  $p_i$  e

$$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle \langle P_3, P_1 \rangle \in \mathbb{C}$$

é o produto triplo hermitiano.

O invariante de Cartan independe dos levantamentos  $P_i$  escolhidos para a tripla  $P$ . De fato, tomando dois levantamentos distintos  $P = (P_1, P_2, P_3)$  e  $P' = (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \lambda_3 P_3)$  para a tripla  $p$ , temos

$$\langle P'_1, P'_2, P'_3 \rangle = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|^2 \langle P_1, P_2, P_3 \rangle.$$

Esses produtos são múltiplos por um escalar positivo. Assim seus argumentos são iguais.

Agora, seja  $G = [\langle P_i, P_j \rangle]$  a matriz  $(3 \times 3)$  dada por

$$G = [\langle P_i, P_j \rangle] = \begin{bmatrix} 0 & \langle P_1, P_2 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \overline{\langle P_1, P_2 \rangle} & 0 & \langle P_2, P_3 \rangle \\ \overline{\langle P_1, P_3 \rangle} & \overline{\langle P_2, P_3 \rangle} & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det G = \overline{\langle P_1, P_3 \rangle} \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle + \langle P_1, P_3 \rangle \overline{\langle P_1, P_2 \rangle} \overline{\langle P_2, P_3 \rangle} = 2\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle).$$

Mais adiante veremos que matrizes associadas a  $k$ -uplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  possuem determinante negativo ou nulo. Logo,  $\operatorname{Re}(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) \leq 0$ . Assim, temos que  $-\pi/2 \leq \mathbb{A}(p) \leq \pi/2$ .

Listamos abaixo algumas propriedades importantes do invariante de Cartan. Consideramos as triplas  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e  $p' = (p'_1, p'_2, p'_3)$  em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ :

1. As triplas  $p$  e  $p'$  são congruentes em  $PU(n, 1)$  se, e somente se,  $\mathbb{A}(p) = \mathbb{A}(p')$ ;
2. As triplas  $p$  e  $p'$  são congruentes com respeito a uma isometria antiholoforma de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  se, e somente se,  $\mathbb{A}(p) = -\mathbb{A}(p')$ ;

3. Uma tripla  $p = (p_1, p_2, p_3)$  está contida em uma cadeia se, somente se  $\mathbb{A}(p) = \pm\pi/2$ ;
4. Uma tripla  $p = (p_1, p_2, p_3)$  está contida em um  $\mathbb{R}$  - círculo se, somente se  $\mathbb{A}(p) = 0$ .

## 1.5 RAZÃO-CRUZADA COMPLEXA

Esse invariante generaliza a razão cruzada usual de quádruplas ordenadas de números complexos. Mais detalhes o leitor pode encontrar em Parker [10].

**Definição 4.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}\mathbb{C}^n$ . Definimos a razão cruzada complexa de  $p$  da seguinte forma:

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(p) = \frac{\langle P_3, P_1 \rangle \langle P_4, P_2 \rangle}{\langle P_4, P_1 \rangle \langle P_3, P_2 \rangle}$$

onde  $P_i \in \mathbb{C}^{n,1}$  é um levantamento de  $p_i$ .

Esse invariante independe dos levantamentos  $P_i$  escolhidos. De fato, tomando levantamentos  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  e  $P' = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$  para quádrupla  $p$ , então  $P'_i = \lambda_i P_i$  com  $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ , assim

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(p) &= \frac{\langle P'_3, P'_1 \rangle \langle P'_4, P'_2 \rangle}{\langle P'_4, P'_1 \rangle \langle P'_3, P'_2 \rangle} = \frac{\langle \lambda_3 P_3, \lambda_1 P_1 \rangle \langle \lambda_4 P_4, \lambda_2 P_2 \rangle}{\langle \lambda_4 P_4, \lambda_1 P_1 \rangle \langle \lambda_3 P_3, \lambda_2 P_2 \rangle} = \frac{\lambda_3 \bar{\lambda}_1 \lambda_4 \bar{\lambda}_2 \langle P_3, P_1 \rangle \langle P_4, P_2 \rangle}{\lambda_4 \bar{\lambda}_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_2 \langle P_4, P_1 \rangle \langle P_3, P_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle P_3, P_1 \rangle \langle P_4, P_2 \rangle}{\langle P_4, P_1 \rangle \langle P_3, P_2 \rangle} \end{aligned}$$

Algumas propriedades desse invariante são listadas abaixo:

1. A razão cruzada é invariante com relação a ação diagonal do grupo de isometrias holomorfas  $PU(n, 1)$ ;
2. Se a quádrupla  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  está contida em uma cadeia, então  $\mathbb{X}(p) \in \mathbb{R}^*$ ;
3. Se a quádrupla  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  está contida em um  $\mathbb{R}$  - círculo, então  $\mathbb{X}(p)$  é um número positivo.

## 2 MATRIZ DE GRAM

Neste capítulo tratamos de uma importante ferramenta para o estudo do Espaço de Módulos de quádruplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . A Matriz de Gram nos permite identificar quando duas quádruplas distintas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  são congruentes sobre a ação diagonal do grupo de isometrias  $\text{PU}(n, 1)$ .

### 2.1 CARACTERIZAÇÃO DA MATRIZ DE GRAM

Nesta seção apresentamos a matriz de Gram associada a uma  $m$ -upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo.

**Definição 5.** Seja  $p = (p_1, \dots, p_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Consideremos a matriz Hermitiana ( $m \times m$ )

$$G = G(p) = [g_{ij}] = [\langle P_i, P_j \rangle],$$

onde  $P_i$  é um levantamento de  $p_i$ . Dizemos que  $G$  é uma *matriz de Gram* associada à  $m$ -upla  $p$ .

Da definição vemos que uma  $m$ -upla  $p$  possui várias matrizes de Gram associadas, ou seja, as matrizes de Gram dependem dos levantamentos escolhidos para  $m$ -upla  $p$ . Seja  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  e  $(\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \lambda_3 P_3, \lambda_4 P_4)$  dois levantamentos distintos da  $m$ -upla  $p$  em  $\mathbb{C}^{n,1}$ . Construindo as matrizes de Gram  $G = [\langle P_i, P_j \rangle]$  e  $\tilde{G} = [\langle \lambda_i P_i, \lambda_j P_j \rangle]$  associadas à  $m$ -upla  $p = (p_1, \dots, p_m)$ , temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \langle P_1, P_1 \rangle & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle P_1, P_2 \rangle & \cdots & \lambda_1 \bar{\lambda}_m \langle P_1, P_m \rangle \\ \lambda_2 \bar{\lambda}_1 \langle P_2, P_1 \rangle & \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \langle P_2, P_2 \rangle & \cdots & \lambda_2 \bar{\lambda}_m \langle P_2, P_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m \bar{\lambda}_1 \langle P_m, P_1 \rangle & \lambda_m \bar{\lambda}_2 \langle P_m, P_2 \rangle & \cdots & \lambda_m \bar{\lambda}_m \langle P_m, P_m \rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, P_2 \rangle & \cdots & \langle P_1, P_m \rangle \\ \langle P_2, P_1 \rangle & \langle P_2, P_2 \rangle & \cdots & \langle P_2, P_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_m, P_1 \rangle & \langle P_m, P_2 \rangle & \cdots & \langle P_m, P_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\lambda}_m \end{bmatrix} \\
&= D^*GD.
\end{aligned}$$

Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 6.** Dizemos que duas matrizes Hermitianas  $H$  e  $\tilde{H}$  ( $m \times m$ ) são *equivalentes*, se existir uma matriz diagonal

$$D = (\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

com  $\lambda_i \in \mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\tilde{H} = D^*HD$ .

Dessa forma, pelo que vimos acima, uma  $m$ -upla de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  está associada a uma classe de equivalência de matrizes ( $m \times m$ ) Hermitianas.

Agora tomemos duas matrizes  $G$  e  $\tilde{G}$  associadas a uma  $m$ -upla  $p$ . Pelo que vimos acima, podemos escrever  $\tilde{G} = D^*GD$ . Calculando seus determinantes temos

$$\begin{aligned}
\det \tilde{G} &= \det D^* \det G \det D \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m \det(G) \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \cdots \bar{\lambda}_m \\
&= |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m|^2 \det G.
\end{aligned}$$

Assim, verifica-se que  $\det \tilde{G} = \lambda \det G$  onde,  $\lambda = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m|^2 \geq 0$ . Isso implica que o sinal do determinante independe do levantamento escolhido para  $p$ .

## 2.2 CARACTERIZAÇÃO DE MATRIZES DE GRAM ASSOCIADAS A QUÁDRUPLAS DE PONTOS EM $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$

Nesta seção apresentamos uma forma de normalizar a classe de matrizes equivalentes associadas a uma quádrupla de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . E ainda uma forma de identificar quádruplas de pontos congruentes em  $\text{PU}(n, 1)$  através de suas matrizes de Gram associadas.

**Proposição 2.1.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Então, a classe de equivalência da matriz Gram associada a  $p$  contém uma única matriz  $G = (g_{ij})$  com  $g_{ii} = 0, g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1, |g_{13}| = 1$ . Dizemos que  $G$  é a *matriz de Gram normalizada* associada à quádrupla  $p$ .

**Demonstração:** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  quádrupla de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e sejam  $P_i$  levantamentos de  $p_i$  em  $\mathbb{C}^{n,1}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Como os  $p_i$  são distintos segue da observação 1.1 que  $g_{ij} = \langle P_i, P_j \rangle \neq 0$ , para  $i \neq j$ . Assim, escolhemos levantamentos para  $p_i$  da seguinte forma:

tome  $P'_1 = \alpha^{-1}P_1, P'_2 = P_2, P'_3 = \overline{\beta^{-1}}P_3, P'_4 = \overline{\gamma^{-1}}P_4$ , onde  $\alpha = \langle P_1, P_2 \rangle, \beta = \langle P_2, P_3 \rangle, \gamma = \langle P'_3, P_4 \rangle$ . Isso implica que  $\langle P'_1, P'_2 \rangle = \langle P'_2, P'_3 \rangle = \langle P'_3, P'_4 \rangle = 1$ .

Fazendo  $a = 1/\sqrt{|\langle P'_1, P'_3 \rangle|} \in \mathbb{R}$  escrevendo,  $\tilde{P}_1 = aP'_1, \tilde{P}_2 = (1/a)P'_2, \tilde{P}_3 = aP'_3, \tilde{P}_4 = (1/a)P'_4$ , obtemos  $\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 \rangle = \langle \tilde{P}_2, \tilde{P}_3 \rangle = \langle \tilde{P}_3, \tilde{P}_4 \rangle = 1$  e  $|\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_3 \rangle| = 1$ . Assim a matriz  $G = (g_{ij}) = \langle \tilde{P}_i, \tilde{P}_j \rangle$  é dada por

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & g_{13} & g_{14} \\ 1 & 0 & 1 & g_{24} \\ \bar{g}_{13} & 1 & 0 & 1 \\ \bar{g}_{14} & \bar{g}_{24} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos provar a unicidade da matriz normalizada associada a  $p$ . Sejam  $G = (g_{ij})$  e  $H = (h_{ij})$  matrizes de Gram normalizadas associadas a uma quádrupla  $p$ . Então existe

$$\text{uma matriz diagonal } D = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix} \text{ com } \bar{\lambda}_i \in \mathbb{C}_*, \text{ tal que } H = D^*GD.$$

Pelo que vimos acima temos,  $h_{ij} = \lambda_i \bar{\lambda}_j g_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Como  $G$  e  $H$  estão na



forma normalizada,  $g_{ii} = h_{ii} = 0$ ,  $g_{12} = g_{23} = g_{34} = h_{12} = h_{23} = h_{34} = 1$ ,  $|g_{13}| = |h_{13}| = 1$ . Da relação entre as matrizes temos que  $h_{13} = \lambda_1 \bar{\lambda}_3 g_{13}$ ,  $h_{14} = \lambda_1 \bar{\lambda}_4 g_{14}$ ,  $h_{24} = \lambda_2 \bar{\lambda}_4 g_{24}$ . Para mostrarmos que  $G = H$ , é suficiente mostrarmos que  $\lambda_1 \bar{\lambda}_3 = \lambda_1 \bar{\lambda}_4 = \lambda_2 \bar{\lambda}_4 = 1$ .

Como  $|h_{13}| = |\lambda_1 \bar{\lambda}_3 g_{13}| = |g_{13}| = 1$ , segue que  $|\lambda_1 \bar{\lambda}_3| = 1$ . De  $g_{12} = h_{12} = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 g_{12} = 1$  obtemos  $\lambda_1 \bar{\lambda}_2 = 1$  **(1)**. De forma análoga obtemos  $\lambda_2 \bar{\lambda}_3 = 1$  **(2)**,  $\lambda_3 \bar{\lambda}_4 = 1$  **(3)**.

Assim, multiplicando ordenadamente ambos os lados das igualdades **(1)** e **(2)**, obtemos  $\lambda_1 \bar{\lambda}_3 |\lambda_2|^2 = 1$ . Como  $|\lambda_1 \bar{\lambda}_3| = 1$ , segue que  $|\lambda_2|^2 = 1$ . Logo,  $\lambda_1 \bar{\lambda}_3 = 1$  **(4)**.

Das igualdades **(1)** e **(3)** obtemos  $\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \lambda_4 = 1$ . Utilizando **(4)** mostramos que  $\lambda_2 \bar{\lambda}_4 = 1$  **(5)**.

Das igualdades **(4)** e **(5)** obtemos  $\lambda_1 \bar{\lambda}_3 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 = 1$ . Utilizando **(2)** mostramos que  $\lambda_1 \bar{\lambda}_4 = 1$  **(6)**. Das igualdades **(4)**, **(5)**, **(6)**, temos que  $G = H$ . ■

**Exemplo 2.1.** Utilizando os passos da proposição anterior, mostraremos como encontrar a matriz de Gram normalizada associada a classe de equivalência de uma quádrupla  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ . Para isso, seja  $p$  uma quádrupla de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  com levantamentos dados por,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -9 \\ 3\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Veremos mais adiante no exemplo 5.3 que a quádrupla  $p$  está contida em um  $\mathbb{R}$ -círculo.

Temos que

$$\begin{aligned} \langle P_1, P_2 \rangle &= -1 & , & \quad \langle P_1, P_3 \rangle = -4, & \quad \langle P_1, P_4 \rangle = -9, \\ \langle P_2, P_3 \rangle &= -1 & , & \quad \langle P_2, P_4 \rangle = -4, & \quad \langle P_3, P_4 \rangle = -1. \end{aligned}$$

e a matriz de Gram dada por,

$$G = (\langle P_i, P_j \rangle) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & -9 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 0 & -1 \\ -9 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $g_{12} = g_{23} = g_{34} = -1$ , tome  $P'_i = -P_i$ , para  $i = 1, 3$  e  $P'_i = P_i$ , para  $i = 2, 4$ .

Dessa forma,

$$g'_{12} = \langle P'_1, P'_2 \rangle = g'_{23} = \langle P'_2, P'_3 \rangle = g'_{34} = \langle P'_3, P'_4 \rangle = 1.$$

Como  $g'_{13} = \langle P'_1, P'_3 \rangle = \langle -P_1, -P_3 \rangle = -4$ , tome  $a = 1/\sqrt{|-4|} = 1/2$ . Fazendo

$$\tilde{P}_1 = \frac{1}{2}P'_1, \tilde{P}_2 = 2P'_2, \tilde{P}_3 = \frac{1}{2}P'_3, \tilde{P}_4 = 2P'_4,$$

temos que

$$\tilde{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_4 = \begin{bmatrix} -18 \\ 6\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Daí,  $\tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{23} = \tilde{g}_{34} = 1, \tilde{g}_{13} = -1, \tilde{g}_{14} = 9, \tilde{g}_{24} = -16$ . E a matriz de Gram normalizada associada  $p$  será

$$\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij}) = \left( \langle \tilde{P}_i, \tilde{P}_j \rangle \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & -16 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 24 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Definição 7.** Sejam  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  e  $p' = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4)$  duas quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Dizemos que  $p$  e  $p'$  são *congruentes* em  $\text{PU}(n, 1)$  se existir  $g \in \text{PU}(n, 1)$  tal que  $g(p_i) = p'_i, i = 1, 2, 3, 4$ . Onde  $g(p_i), i = 1, 2, 3, 4$  é ação diagonal de  $g$  na quádrupla  $p$ .

**Exemplo 2.2.** Aplicando uma dilatação complexa de Heisenberg  $D_\lambda$ , por um fator  $\lambda \in \mathbb{C}_*$  na quádrupla  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  do exemplo anterior, temos uma quádrupla com levantamentos dados por,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -|\lambda|^2 \\ \sqrt{2}\lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -4|\lambda|^2 \\ 2\sqrt{2}\lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -9|\lambda|^2 \\ 3\sqrt{2}\lambda \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, essa quádrupla é congruente a quádrupla do exemplo anterior. Podemos calcular sua matriz de Gram e comparar com a matriz de Gram  $G$  do exemplo anterior. Calculando,

$$\begin{aligned}\langle P_1, P_2 \rangle &= -|\lambda|^2, & \langle P_1, P_3 \rangle &= -4|\lambda|^2, & \langle P_1, P_4 \rangle &= -9|\lambda|^2, \\ \langle P_2, P_3 \rangle &= -|\lambda|^2, & \langle P_2, P_4 \rangle &= -4|\lambda|^2, & \langle P_3, P_4 \rangle &= -|\lambda|^2,\end{aligned}$$

e a matriz de Gram será

$$H = (\langle P_i, P_j \rangle) = \begin{bmatrix} 0 & -|\lambda|^2 & -4|\lambda|^2 & -9|\lambda|^2 \\ -|\lambda|^2 & 0 & -|\lambda|^2 & -4|\lambda|^2 \\ -4|\lambda|^2 & -|\lambda|^2 & 0 & -|\lambda|^2 \\ -9|\lambda|^2 & -|\lambda|^2 & -|\lambda|^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que  $H = |\lambda|^2 G = \lambda \bar{\lambda} G$ , ou seja, as matrizes de Gram  $G$  e  $H$  são equivalentes, mas são diferentes, se escolhermos  $\lambda \neq 1$ . Vemos que quádruplas de pontos congruentes não necessariamente possuem matrizes de Gram iguais. Agora, normalizemos a matriz  $H$  com os passos utilizados no exemplo anterior. Fazendo,  $P'_i = -1/|\lambda|^2 P_i$ , para  $i = 1, 3$  e  $P'_i = P_i$ , para  $i = 2, 4$ . Dessa forma,

$$h'_{12} = \langle P'_1, P'_2 \rangle = h'_{23} = \langle P'_2, P'_3 \rangle = h'_{34} = \langle P'_3, P'_4 \rangle = 1.$$

Como  $h'_{13} = \langle P'_1, P'_3 \rangle = \langle -P_1, -P_3 \rangle = -4/|\lambda|^2$ , tome  $a = 1/\sqrt{|-4/|\lambda|^2|} = |\lambda|/2$ . Fazendo

$$\tilde{P}_1 = |\lambda|^2/2P'_1, \tilde{P}_2 = 2/|\lambda|^2 P'_2, \tilde{P}_3 = |\lambda|^2/2P'_3, \tilde{P}_4 = 2/|\lambda|^2 P'_4,$$

temos que

$$\tilde{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2|\lambda| \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_2 = \begin{bmatrix} -2|\lambda| \\ \frac{2\sqrt{2}\lambda}{|\lambda|} \\ \frac{2}{|\lambda|} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_3 = \begin{bmatrix} 2|\lambda| \\ -\frac{\sqrt{2}\lambda}{|\lambda|} \\ -\frac{1}{2|\lambda|} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_4 = \begin{bmatrix} -18|\lambda| \\ \frac{6\sqrt{2}\lambda}{|\sqrt{2}|} \\ \frac{2}{|\lambda|} \end{bmatrix}.$$

E a matriz de Gram normalizada associada será

$$\tilde{H} = (\tilde{h}_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & -16 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 24 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto igual a matriz normalizada  $\tilde{G}$  do exemplo anterior.

Estes dois exemplos nos motivam a perguntar, se existe alguma relação entre matrizes de Gram normalizadas associadas a quádruplas de pontos congruentes? A Proposição 2.3

nos fornece um critério de congruência dessas quádruplas utilizando suas matrizes de Gram normalizadas. Para a sua demonstração faremos uso do *Teorema de Witt*, veja Scharlau [11] abaixo enunciado. Antes, duas definições:

**Definição 8.** Um espaço vetorial hermitiano,  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é dito *regular*, quando

$$\{v \in V \mid \langle w, v \rangle = 0, \forall w \in V\} = \{0\}.$$

**Definição 9.** Uma *isometria* entre espaços vetoriais hermitianos é uma aplicação linear injetiva que preserva o produto hermitiano.

**Lema 2.2.** (*Teorema de Witt*). Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço vetorial regular. Sejam  $W \subset V$  um subespaço de  $V$  e  $\sigma : W \rightarrow V$  uma isometria. Então, existe uma extensão isométrica  $\Sigma : V \rightarrow V$  de  $\sigma$  a  $V$ .

**Observação 2.1.** O espaço vetorial  $\mathbb{C}^{n,1} = (\mathbb{C}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é regular. Pois sua assinatura é  $(n_+, n_-, n_0 = n, 1, 0)$ .

**Proposição 2.3.** Sejam  $p$  e  $p'$  duas quádruplas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Então,  $p$  e  $p'$  são congruentes em  $PU(n, 1)$ , se e somente se, suas matrizes de Gram normalizadas  $G$  e  $G'$  são iguais.

**Demonstração:** Sejam  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  e  $p' = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4)$  quádruplas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  congruentes em  $PU(n, 1)$ . Tomemos levantamentos  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  e  $P' = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$  das quádruplas  $p$  e  $p'$  em  $\mathbb{C}^{n,1}$ . Então existe  $g \in PU(n, 1)$  tal que  $g(p_i) = p'_i, i = 1, 2, 3, 4$ . Logo existe  $\tilde{g} \in U(n, 1)$  tal que  $g(p_i) = \mathbb{P}(\tilde{g}(P_i)), i = 1, 2, 3, 4$ . Como  $\mathbb{P}(\tilde{g}(P_i)) = p'_i = \mathbb{P}(P'_i)$ , existem  $\lambda_i \in \mathbb{C}_*, i = 1, 2, 3, 4$  tal que  $P'_i = \lambda_i(\tilde{g}(P_i))$ . Dessa forma

$$\langle P'_i, P'_j \rangle = \langle \lambda_i \tilde{g}(P_i), \lambda_j \tilde{g}(P_j) \rangle = \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle \tilde{g}(P_i), \tilde{g}(P_j) \rangle = \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle P_i, P_j \rangle \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Sejam  $H$  e  $H'$  as matrizes de Gram associadas a  $p$  e  $p'$ , respectivamente, definidas por  $H = (\langle P_i, P_j \rangle)$ ,  $H' = (\langle P'_i, P'_j \rangle)$ . Pela a igualdade acima temos que  $H' = D^* H D$ , onde  $D = (\bar{\lambda}_i)$  é uma matriz diagonal  $4 \times 4$ . Da unicidade da matriz de Gram segue que as quádruplas  $p$  e  $p'$  possuem matrizes de Gram normalizadas associadas iguais.

Agora, consideremos  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  e  $p' = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4)$  duas quádruplas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , com levantamentos  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  e  $P' = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$  que geram matrizes de Gram normalizadas  $G$  e  $G'$  iguais, associadas a  $p$  e  $p'$ , respectivamente. Sejam  $W$  e  $W'$  subespaços de  $\mathbb{C}^{n,1}$  gerados pelos levantamentos  $P$  e  $P'$ . Então,  $\dim W = \dim W'$ , pois as matrizes de Gram normalizadas associadas as quádruplas  $P$  e  $P'$  são iguais. Caso

contrário, o número de colunas linearmente independentes de  $G$  e  $G'$  seriam distintos. Assim, existe um isomorfismo entre  $W$  e  $W'$ .

Queremos mostrar que existe uma isometria  $g : W \rightarrow W'$  tal que  $g(P_i) = P'_i, i = 1, 2, 3, 4$ . No caso em que  $\dim W = \dim W' = 4$  o problema é trivial. Consideremos o caso em que  $W$  e  $W'$  são subespaços próprios de  $\mathbb{C}^{n,1}$  de dimensão 3. Reordenando, se necessário, podemos considerar  $B = \{P_1, P_2, P_3\}, B' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$  bases de  $W$  e  $W'$ , respectivamente. Definamos o isomorfismo  $g : W \rightarrow W'$  por  $g(P_i) = P'_i$  onde  $P_i \in B$  e  $P'_i \in B'$ . Desejamos mostrar que  $g(P_4) = P'_4$ .

Como  $P_4 \in W$  podemos escrever esse vetor como combinação linear de  $P_1, P_2, P_3$ , ou seja,  $P_4 = aP_1 + bP_2 + cP_3$ . De forma análoga  $P'_4 \in W'$  pode ser escrito da seguinte forma  $P'_4 = a'P'_1 + b'P'_2 + c'P'_3$ . Assim,

$$\begin{cases} \langle P_4, P_1 \rangle = b \langle P_2, P_1 \rangle + c \langle P_3, P_1 \rangle \\ \langle P_4, P_2 \rangle = a \langle P_1, P_2 \rangle + c \langle P_3, P_2 \rangle \\ \langle P_4, P_3 \rangle = a \langle P_1, P_3 \rangle + b \langle P_2, P_3 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle P'_4, P'_1 \rangle = b' \langle P'_2, P'_1 \rangle + c' \langle P'_3, P'_1 \rangle \\ \langle P'_4, P'_2 \rangle = a' \langle P'_1, P'_2 \rangle + c' \langle P'_3, P'_2 \rangle \\ \langle P'_4, P'_3 \rangle = a' \langle P'_1, P'_3 \rangle + b' \langle P'_2, P'_3 \rangle. \end{cases}$$

Como  $\langle P_i, P_j \rangle = \langle P'_i, P'_j \rangle$ , temos que  $(a, b, c)$  e  $(a', b', c')$  são soluções do mesmo sistema de equações lineares. O determinante da matriz dos coeficientes deste sistema é

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{\langle P_1, P_2 \rangle} & \overline{\langle P_1, P_3 \rangle} \\ \langle P_1, P_2 \rangle & 0 & \overline{\langle P_2, P_3 \rangle} \\ \langle P_1, P_3 \rangle & \langle P_2, P_3 \rangle & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

pois caso contrário, os vetores  $P_1, P_2, P_3$  seriam linearmente dependentes. Então, o sistema acima possui solução única. Logo  $(a, b, c) = (a', b', c')$  e  $g(P_4) = g(aP_1 + bP_2 + cP_3) = ag(P_1) + bg(P_2) + cg(P_3) = a'P'_1 + b'P'_2 + c'P'_3 = P'_4$  como queríamos.

Consideremos o caso em que  $\dim W = \dim W' = 2$ . Reordenando, se necessário, podemos considerar  $A = \{P_1, P_2\}, A' = \{P'_1, P'_2\}$  bases de  $W$  e  $W'$ , respectivamente. Assim como no caso anterior, definamos a aplicação linear  $g : W \rightarrow W'$  por  $g(P_i) = P'_i$  onde  $P_i \in A$  e  $P'_i \in A'$ . Mostraremos que  $g(P_3) = P'_3$ .

Como  $P_3 \in W$  e  $P'_3 \in W'$  podemos escrever esses vetores como combinações lineares

da seguinte forma  $P_3 = aP_1 + bP_2, P'_3 = aP'_1 + bP'_2$ . Assim

$$\begin{cases} \langle P_3, P_1 \rangle = b \langle P_2, P_1 \rangle \\ \langle P_3, P_2 \rangle = a \langle P_1, P_2 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle P'_3, P'_1 \rangle = b \langle P'_2, P'_1 \rangle \\ \langle P'_3, P'_2 \rangle = a \langle P'_1, P'_2 \rangle \end{cases}$$

Como  $\langle P_i, P_j \rangle = \langle P'_i, P'_j \rangle$  segue que  $(a, b) = (a', b')$  e  $g(P_3) = P'_3$ . Mostrar que  $g(P_4) = P'_4$  é análogo.

Assim, em ambos os casos, temos que  $g(P_i) = P'_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$ . Logo,  $\langle g(P_i), g(P_j) \rangle = \langle P'_i, P'_j \rangle$ . Assim,  $\langle g(P_i), g(P_j) \rangle = \langle P'_i, P'_j \rangle = \langle P_i, P_j \rangle$ , ou seja  $g$  preserva a forma.

Assim,  $g$  é uma isometria entre  $W$  e  $W'$ . Pelo Teorema de Witt podemos estender  $g$  a uma isometria  $\tilde{g} : \mathbb{C}^{n,1} \rightarrow \mathbb{C}^{n,1}$ . O que demonstra o resultado desejado. ■

**Corolário 2.4.** Sejam  $p$  e  $p'$  duas quádruplas de pontos distintos na  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Então  $p$  e  $p'$  são congruentes em  $PU(n, 1)$  se, e somente se, suas matrizes de Gram associadas são equivalentes.

**Demonstração:** Suponhamos  $p$  e  $p'$  quádruplas de pontos distintos congruentes em  $PU(n, 1)$ . Pela Proposição 2.3, as matrizes de Gram normalizadas associadas a  $p$  e  $p'$  são iguais. Assim, as matrizes de Gram associadas a  $p$  e  $p'$  são equivalentes a uma mesma matriz de Gram normalizada. Logo essas matrizes são equivalentes.

Agora, suponhamos que as matrizes de Gram associadas a  $p$  e  $p'$  sejam equivalentes. Segue da Proposição 2.1 que a normalização dessas matrizes é única. Então, as quádruplas  $p$  e  $p'$  possuem a mesma matriz de Gram normalizada. Segue da Proposição 2.3 que  $p$  e  $p'$  são congruentes em  $PU(n, 1)$ . ■

Nas duas próximas proposições serão apresentadas algumas contas que nos serão úteis para os próximos resultados.

**Proposição 2.5.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e seja  $G = (g_{ij})$  a matriz de Gram normalizada de  $p$ . Então

$$\det G = -2\operatorname{Re}(g_{14}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{24}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}g_{24}) + |g_{14}|^2 + |g_{24}|^2 + 1$$

**Demonstração:** De fato, escrevendo  $G$  em sua forma normalizada e calculando seu

determinante, temos

$$\begin{aligned}
\det G &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & g_{13} & g_{14} \\ 1 & 0 & 1 & g_{24} \\ \bar{g}_{13} & 1 & 0 & 1 \\ \bar{g}_{14} & \bar{g}_{24} & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & g_{24} \\ \bar{g}_{13} & 0 & 1 \\ \bar{g}_{14} & 1 & 0 \end{vmatrix} + g_{13} \begin{vmatrix} 1 & 0 & g_{24} \\ \bar{g}_{13} & 1 & 1 \\ \bar{g}_{14} & \bar{g}_{24} & 0 \end{vmatrix} - g_{14} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{g}_{13} & 1 & 0 \\ \bar{g}_{14} & \bar{g}_{24} & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\bar{g}_{14} - \bar{g}_{13}g_{24} + 1|g_{13}|^2|g_{24}|^2 - g_{13}\bar{g}_{14}g_{24} - g_{13}\bar{g}_{24} - g_{14} - g_{14}\bar{g}_{13}\bar{g}_{24} + |g_{14}|^2 \\
&= -2\operatorname{Re}(g_{14}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{24}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}g_{24}) + |g_{14}|^2 + |g_{24}|^2 + 1,
\end{aligned}$$

visto que  $|g_{13}| = 1$ . ■

**Proposição 2.6.** Seja  $G(i, j, k)$  uma submatriz de  $G$  correspondendo a uma tripla  $(p_i, p_j, p_k)$ . Então

$$\begin{aligned}
\det G(1, 2, 3) &= 2\operatorname{Re}(\bar{g}_{13}), & \det G(1, 2, 4) &= 2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}), \\
\det G(1, 3, 4) &= 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}), & \det G(2, 3, 4) &= 2\operatorname{Re}(\bar{g}_{24}).
\end{aligned}$$

**Observação 2.2.** Todos os determinantes das proposições 2.5 e 2.6 são negativos ou nulos.

De fato, seja  $p = (p_1, \dots, p_k)$  uma  $k$ -upla de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , com levantamentos dados pelos  $k$  vetores isotrópicos  $\{P_1, \dots, P_k\}$  em  $\mathbb{C}^{n,1}$ . Se os  $k$  vetores são linearmente dependentes, temos que a matriz de Gram  $G = (\langle P_i, P_j \rangle)$  associada a  $p$  possui colunas e linhas linearmente dependentes. Portanto seu determinante é nulo.

Se o conjunto de vetores  $\{P_1, \dots, P_k\}$  são linearmente independentes, tomemos o subespaço  $W$  gerado por esses  $k$  vetores. Segue da observação 1.2 que a forma restrita ao espaço  $W$  tem assinatura  $(k-1, 1)$ , Assim a matriz de Gram  $G = (\langle P_i, P_j \rangle)$  é equivalente a matriz diagonal

$$I_{k-1,1} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como vimos anteriormente os determinantes de matrizes equivalentes possuem mesmo sinal, logo o determinante da matriz de Gram é negativo.

**Observação 2.3.** Na Proposição 2.5  $\det G = 0$  se, e somente se, a quádrupla  $p$  está na fronteira de um espaço hiperbólico de dimensão 2. Na Proposição 2.6  $\det G(i, j, k) = 0$

se, somente se,  $(p_i, p_j, p_k)$  pertence a uma cadeia.

**Demonstração:**

Supondo  $\det G = 0$ , segue que os vetores isotrópicos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  são linearmente dependentes, onde  $\mathbb{P}(P_i) = p_i$ .

Primeiro consideremos que três vetores  $P_1, P_2, P_3$  são linearmente independentes e que  $W$  é o subespaço gerado por esses vetores. Dessa forma  $P_4$  se escreve como combinação linear de  $P_1, P_2, P_3$ . Como  $W$  é gerado por  $P_1, P_2, P_3$ , temos que  $P_4 \in (W \cap V_0)$ . Então,  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Supondo que dois vetores  $P_1, P_2$  sejam linearmente independentes. Tome  $V \notin [P_1, P_2]$  espaço gerado por  $P_1$  e  $P_2$  tal que  $B = \{P_1, P_2, V\}$  seja uma base para  $W$ . Assim os vetores  $P_3$  e  $P_4$  são escritos como combinação linear de  $P_1, P_2, V$ . Logo,  $P_3 \in (W \cap V_0), P_4 \in (W \cap V_0)$ . Nesse caso também temos  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Agora supondo que  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , então existe  $W$  subespaço com  $\dim W = 3, W \cap V_- \neq \emptyset$  tal que  $P_i \in W \cap V_0, i = 1, 2, 3, 4$ . Logo  $P_i$  são vetores linearmente dependentes e  $\det G = 0$ . Isso demonstra a primeira parte.

No caso da cadeia, a demonstração é similiar.

## 2.3 RELAÇÕES ENTRE MATRIZES DE GRAM E INVARIANTES NUMÉRICOS

Na próxima proposição vamos resgatar as entradas das submatrizes de Gram  $(3 \times 3)$  de uma quádrupla em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , através de invariantes de Cartan.

**Proposição 2.7.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e  $G = (g_{ij})$  a matriz de Gram normalizada de  $p$ . Então

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) &= \arg(-\bar{g}_{13}) & \mathbb{A}(p_1, p_2, p_4) &= \arg(-g_{24}\bar{g}_{14}) \\ \mathbb{A}(p_1, p_3, p_4) &= \arg(-g_{13}\bar{g}_{14}) & \mathbb{A}(p_2, p_3, p_4) &= \arg(-\bar{g}_{24}) \end{aligned}$$

**Demonstração:**

Com cálculos simples, relacionamos as entradas das submatrizes  $G(i, j, k)$  com os produtos triplos  $\langle P_i, P_j, P_k \rangle$  da seguinte forma,



- $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \bar{g}_{13}$ ;
- $\langle P_1, P_2, P_4 \rangle = g_{24}\bar{g}_{14}$ ;
- $\langle P_1, P_3, P_4 \rangle = g_{13}\bar{g}_{14}$ ;
- $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle = \bar{g}_{24}$ .

Daí o resultado segue. ■

Agora, definimos as razões-cruzadas, que foram consideradas em [9], [10].

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4), \quad \mathbb{X}_3 = \mathbb{X}(p_2, p_3, p_1, p_4).$$

Nas próximas proposições relacionamos essas razões-cruzadas e o invariante de Cartan com a matriz de Gram normalizada de uma quádrupla em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

**Proposição 2.8.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e seja  $G = (g_{ij})$  a matriz de Gram normalizada de  $p$ . Então

$$\mathbb{X}_1 = \frac{\bar{g}_{13}\bar{g}_{24}}{\bar{g}_{14}}, \quad \mathbb{X}_2 = \frac{1}{g_{14}}, \quad \mathbb{X}_3 = \frac{1}{\bar{g}_{13}\bar{g}_{24}},$$

e

$$g_{13} = -e^{-i\mathbb{A}}, \quad g_{14} = \frac{1}{\bar{\mathbb{X}}_2}, \quad g_{24} = \frac{\bar{\mathbb{X}}_1}{\bar{\mathbb{X}}_2} e^{i\mathbb{A}},$$

onde  $\mathbb{A}$  é o invariante de Cartan da tripla  $(p_1, p_2, p_3)$ .

**Demonstração:** Da matriz de Gram normalizada de  $p$  segue que  $g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1$ . Com cálculos simples conseguimos as três primeiras igualdades da proposição. Da proposição 2.7 temos que  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-\bar{g}_{13})$  e como  $|g_{13}| = 1$ , segue que  $g_{13} = -e^{-i\mathbb{A}}$ . Agora podemos escrever

$$\mathbb{X}_1 = \frac{\bar{g}_{13}\bar{g}_{24}}{\bar{g}_{14}} = e^{-i\mathbb{A}}\bar{g}_{24}\bar{\mathbb{X}}_2.$$

Portanto,

$$g_{24} = \frac{\bar{\mathbb{X}}_1}{\bar{\mathbb{X}}_2} e^{i\mathbb{A}}.$$
■

**Corolário 2.9.** Os números  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  e  $\mathbb{A}$  definem unicamente a classe de congruência de  $p$  em  $\text{PU}(n, 1)$ .

**Demonstração:** Olhando as três últimas igualdades da proposição 2.8, vemos que a matriz de Gram normalizada  $G = (g_{ij})$  da quádrupla  $p$  se escreve unicamente em função de  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  e  $\mathbb{A}$ . Daí, segue da proposição 2.3 que  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  e  $\mathbb{A}$  definem a classe de congruência de  $p$  em  $\text{PU}(n, 1)$ . ■

**Observação 2.4.** É impossível expressar unicamente  $g_{ij}$  em termos de  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  e  $\mathbb{X}_3$ . De fato, com algumas substituições encontramos

$$(g_{13})^2 = \frac{\mathbb{X}_2}{\mathbb{X}_1 \mathbb{X}_3}, \quad (g_{24})^2 = \frac{\overline{\mathbb{X}_1}}{\overline{\mathbb{X}_2} \overline{\mathbb{X}_3}}.$$

Dessa forma os números  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  e  $\mathbb{X}_3$  não são suficientes para definir a classe de congruência de  $p$  em  $\text{PU}(n, 1)$ .

Observe o próximo exemplo que ilustra esse fato.

**Exemplo 2.3.** Queremos encontrar duas quádruplas ordenadas  $p, p'$  de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  que não sejam congruentes em  $\text{PU}(n, 1)$  e que  $\mathbb{X}_1(p) = \mathbb{X}_1(p'), \mathbb{X}_2(p) = \mathbb{X}_2(p'), \mathbb{X}_3(p) = \mathbb{X}_3(p')$ .

Segue do corolário 2.9 visto anteriormente que precisamos encontrar quádruplas  $p, p'$  tal que  $\mathbb{A}(p) \neq \mathbb{A}(p')$ . Da Proposição 2.8 podemos escrever

$$\mathbb{X}_3 = (\mathbb{X}_2/\mathbb{X}_1) e^{2iA}.$$

Com uma verificação simples vemos que para  $\mathbb{X}_3(p) = \mathbb{X}_3(p')$  devemos ter  $\mathbb{A} = \pm\pi/2$ . Das propriedades do invariante de Cartan, precisamos de duas quádruplas  $p, p'$  onde as triplas  $(p_1, p_2, p_3), (p'_1, p'_2, p'_3)$  estão contidas em uma cadeia.

Daremos um exemplo de quádruplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  afim de facilitar as contas. Usando coordenadas horoesféricas, podemos tomar as quádruplas  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) = ((0, 0), \infty, (0, 1), (0, 2)), p' = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) = ((0, 0), \infty, (0, -1), (0, -2))$  contidos na cadeia vertical  $C = \{(0, t) \in \mathbb{C} * \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ . Da Seção 2.3 vemos que os levantamentos da quádruplas  $p, p'$  são dados pelos vetores

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando os produtos Hermitianos das quádruplas  $p, p'$ ,

$$\begin{aligned} \langle P_1, P_2 \rangle &= 1, & \langle P_1, P_3 \rangle &= -i, & \langle P_1, P_4 \rangle &= -2i, \\ \langle P_2, P_3 \rangle &= 1, & \langle P_2, P_4 \rangle &= 1, & \langle P_3, P_4 \rangle &= -i, \\ \langle P'_1, P'_2 \rangle &= 1, & \langle P'_1, P'_3 \rangle &= i, & \langle P'_1, P'_4 \rangle &= 2i, \\ \langle P'_2, P'_3 \rangle &= 1, & \langle P'_2, P'_4 \rangle &= 1, & \langle P'_3, P'_4 \rangle &= i, \end{aligned}$$

Calculando as razões cruzadas, temos

$$\mathbb{X}_1(p) = \mathbb{X}_1(p') = 1/2, \quad \mathbb{X}_2(p) = \mathbb{X}_2(p') = 1/2, \quad \mathbb{X}_3(p) = \mathbb{X}_3(p') = -1.$$

E ainda  $\mathbb{A}(p) = -\pi/2$  e  $\mathbb{A}(p') = \pi/2$ . Do corolário 2.9 segue que as quádruplas  $p, p'$  não são congruentes em  $\text{PU}(n, 1)$  como queríamos.

**Proposição 2.10.** O determinante da matriz de Gram normalizada de  $p$  é dado por

$$\det G = \frac{1}{|X_2|^2} [-2\text{Re}(X_1 + X_2) - 2\text{Re}(X_1 \bar{X}_2 e^{-i2A}) + |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1] = 0.$$

**Demonstração:** De fato, substituindo  $(g_{ij})$  das expressões da proposição 2.8 na fórmula do determinante de  $G$  da proposição 2.5, temos o resultado. ■

**Proposição 2.11.** Os determinantes das submatrizes  $G(i, j, k)$  de  $G$  são dados por

$$\begin{aligned} \det G(1, 2, 3) &= -2\text{Re}(e^{iA}), & \det G(1, 2, 4) &= -2\text{Re}\left(\frac{\bar{X}_1}{|X_2|^2} e^{iA}\right), \\ \det G(1, 3, 4) &= -2\text{Re}\left(\frac{\bar{X}_2}{|X_2|^2} e^{-iA}\right), & \det G(2, 3, 4) &= -2\text{Re}\left(\frac{X_1 \bar{X}_2}{|X_2|^2} e^{-iA}\right). \end{aligned}$$

**Demonstração:** O resultado segue substituindo  $(g_{ij})$  das expressões da proposição 2.8

nas expressões da proposição 2.6.



### 3 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE QUÁDRUPLAS ORDENADAS EM $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Nesse capítulo contruímos um espaço de módulos para o espaço de configurações de quádruplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Definição 10.** Seja  $\mathcal{M}$  o espaço de configurações de quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Ou seja,  $\mathcal{M}$  é o conjunto de quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  pela ação diagonal de  $\text{PU}(2,1)$ , e esse conjunto é equipado com a topologia quociente. Nessa seção construímos um espaço de módulos para  $\mathcal{M}$ .

A próxima Proposição é de grande importância para chegarmos no nosso principal resultado.

**Proposição 3.1.** Seja  $G = (g_{ij})$  uma matriz  $4 \times 4$  Hermitiana tal que  $g_{ii} = 0, g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1, |g_{13}| = 1, g_{14} \neq 0, g_{24} \neq 0$ . Então  $G$  é a matriz de Gram normalizada para alguma quádrupla ordenada  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  se, e somente se,  $\text{Re}(g_{13}) \leq 0, \text{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \leq 0$  e  $\det G = 0$ .

**Demonstração:** Seja  $G = (g_{ij})$  a matriz de Gram normalizada associada a uma quádrupla ordenada  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Segue da Proposição 2.6 que

$$\det G(1, 2, 3) = 2\text{Re}(\bar{g}_{13}), \quad \det G(1, 2, 4) = 2\text{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}).$$

Da observação 2.2 temos que esses determinantes são negativos ou nulos. Como a quádrupla  $p$  está contida em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , quaisquer levantamentos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  de  $p$  são linearmente dependentes. Isso implica que  $\det G = 0$ .

Agora, tomemos  $G = (g_{ij})$  nas condições da Proposição 3.1, com  $\text{Re}(g_{13}) \leq 0, \text{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \leq 0$  e  $\det G = 0$ . Vamos exibir quatro vetores nulos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_i \in \mathbb{C}^{2,1}$ , de quem a matriz de Gram é igual a  $G$ , ou seja,  $G = [g_{ij}] = [\langle P_i, P_j \rangle]$ .

Supondo que o número  $\alpha = 1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14} \neq 0$ . Nesse caso tome os seguintes vetores

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{13} \\ \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})}e^{i(1-g_{24}\bar{g}_{13}-g_{14})} \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{14} \\ \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14})} \\ \bar{g}_{24} \end{bmatrix}.$$

Primeiro mostremos que  $\langle P_i, P_i \rangle = g_{ii} = 0$ . De fato, pela escolha de  $P_1, P_2$ , temos que  $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = 0$ . E ainda

$$\langle P_3, P_3 \rangle = \bar{g}_{13} + \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})}e^{i\alpha} \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})}e^{-i\alpha} + g_{13} = 0,$$

$$\langle P_4, P_4 \rangle = \bar{g}_{14}g_{24} - 2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) + \bar{g}_{24}g_{14} = 0.$$

Com uma verificação rápida vemos que  $\langle P_1, P_3 \rangle = g_{13}$ ,  $\langle P_1, P_4 \rangle = g_{14}$ ,  $\langle P_2, P_4 \rangle = g_{24}$ , e ainda que  $\langle P_1, P_2 \rangle = g_{12} = 1$ ,  $\langle P_2, P_3 \rangle = g_{23} = 1$ . Resta mostrar que  $\langle P_3, P_4 \rangle = g_{34} = 1$ . Para que se tenha

$$\langle P_3, P_4 \rangle = \bar{g}_{13}g_{24} + \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})}e^{i(1-g_{24}\bar{g}_{13}-g_{14})} \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14})} + g_{14} = 1,$$

precisamos mostrar que

$$2\sqrt{\operatorname{Re}(g_{13}) \operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14})} = |1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14}|.$$

Para isso mostremos que

$$D = |1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14}|^2 - 4\operatorname{Re}(g_{13}) \operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} D &= (1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14})(1 - \bar{g}_{24}g_{13} - \bar{g}_{14}) - 4\operatorname{Re}(g_{13}) \operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \\ &= 1 + |g_{13}|^2|g_{24}|^2 + |g_{14}|^2 - 2\operatorname{Re}(g_{14}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{24}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}g_{24}). \end{aligned}$$

Como  $|g_{13}| = 1$ , segue da Proposição 2.10 que  $D = \det G$ . Como por hipótese  $\det G = 0$  o resultado segue.

Agora supondo que  $\alpha = 1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14} = 0$ . Então,  $\operatorname{Re}(g_{13}) = 0$  ou  $\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) = 0$ . Se  $\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) = 0$  tome uma quádrupla como acima. Se  $\operatorname{Re}(g_{13}) = 0$ , como por hipótese

$|g_{13}| = 1$ , temos  $g_{13} = \pm i$ . Assim, podemos escolher a quádrupla

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{13} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{14} \\ \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14})} \\ \bar{g}_{24} \end{bmatrix}.$$

Nesse caso mostrar que  $\langle P_i, P_j \rangle = g_{ij}$  é análogo ao feito acima, basta observar que

$$\langle P_3, P_4 \rangle = g_{24}\bar{g}_{13} - g_{24} = 1,$$

pois  $\alpha = 0$  por hipótese.

Finalmente, em ambos os casos, como  $\langle P_1, P_3 \rangle = g_{13} \neq 0$ ,  $\langle P_1, P_4 \rangle = g_{14} \neq 0$ ,  $\langle P_2, P_4 \rangle = g_{24} \neq 0$ , segue que  $P_1 \neq P_3$ ,  $P_1 \neq P_4$ ,  $P_2 \neq P_4$ , pois  $p_i \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Logo os pontos  $p_i$  com levantamentos  $P_i$  são distintos. Isso completa a demonstração. ■

**Corolário 3.2.** Seja  $G = (g_{ij})$  uma matriz Hermitiana  $(4 \times 4)$  tal que  $g_{ii} = 0$ ,  $g_{12} = g_{23}$ ,  $g_{34} = 1$ ,  $|g_{13}| = 1$ ,  $g_{14} \neq 0$ ,  $g_{24} \neq 0$ , e  $\det G = 0$ . Então as inequações  $\operatorname{Re}(g_{13}) \leq 0$  e  $\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \leq 0$ , implica nas inequações  $\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}) \leq 0$  e  $\operatorname{Re}(\bar{g}_{24}) \leq 0$ .

**Demonstração:** Segue da Proposição 3.1 que  $G$  é a matriz de Gram normalizada para uma quádrupla  $(p = p_1, p_2, p_3, p_4)$  de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Da Proposição 2.6 temos que

$$\det G(1, 3, 4) = 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}) \quad \det G(2, 3, 4) = 2\operatorname{Re}(\bar{g}_{24}).$$

Então o resultado segue da observação 2.2. ■

Agora, seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , e seja  $m(p) \in \mathcal{M}$  o ponto representado por  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ .

Definimos a função

$$\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$$

$$\tau : m(p) \mapsto (\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4), \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4), \mathbb{A} = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)),$$

onde  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$  é o invariante de Cartan da tripla  $(p_1, p_2, p_3)$ .

**Proposição 3.3.** Seja  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ , e  $\mathbb{A}$  os números definidos acima. Então eles satisfazem a

relação

$$\det G = \frac{1}{|X_2|^2} [-2\operatorname{Re}(X_1 + X_2) - 2\operatorname{Re}(X_1\overline{X_2}e^{-i2A}) + |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1] = 0.$$

**Demonstração:** Seja  $p \in \mathcal{M}$ . Segue da observação 2.3 que a matriz de Gram normalizada  $G$  associada a quádrupla  $p$  possui determinante igual a zero. Então, o resultado segue da Proposição 2.10. ■

Agora temos todas as ferramentas necessárias para provar nosso principal resultado.

**Teorema 3.4.** O espaço de configuração  $\mathcal{M}$  é homeomorfo ao conjunto de pontos  $X = (X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R}$  definido por

$$\det G = \frac{1}{|X_2|^2} [-2\operatorname{Re}(X_1 + X_2) - 2\operatorname{Re}(X_1\overline{X_2}e^{-i2A}) + |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1] = 0,$$

sobre as condições

$$-\pi/2 \leq A \leq \pi/2, \quad \operatorname{Re}(X_1e^{-iA}) \geq 0.$$

Então este conjunto é o espaço de módulos para  $\mathcal{M}$ , denotado por  $\mathbb{M}$ .

**Demonstração:** Da Proposição 3.3 temos que os pontos  $X = X_1, X_2, A \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R}$  satisfazem a equação do Teorema 3.4. E ainda, seja  $G$  a matriz de Gram normalizada para alguma quádrupla de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Segue da Proposição 2.11 que os determinantes das submatrizes  $G(1, 2, 3)$ ,  $G(1, 2, 4)$  de  $G$  são dados por

$$\begin{aligned} \det G(1, 2, 3) &= -2\operatorname{Re}(e^{iA}) \leq 0, \\ \det G(1, 2, 4) &= -2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{X_1}}{|X_2|^2}e^{iA}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{Re}(e^{iA}) \geq 0$  e  $2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{X_1}}{|X_2|^2}e^{iA}\right) \geq 0$ . Então,  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$  e  $2\operatorname{Re}(X_1e^{-iA}) \geq 0$ .

Agora vamos mostrar que  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$  é sobrejetiva. Seja  $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{M}$ , vamos construir a matriz Hermitiana  $(4 \times 4)$   $G = (g_{ij})$  como segue. Usando as fórmulas da Proposição 2.8, definimos  $g_{13}, g_{14}, g_{24}$  em função de  $X_1, X_2, A$ , colocando

$$g_{13} = -e^{-iA}, \quad g_{14} = \frac{1}{\overline{X_2}}, \quad g_{24} = \frac{\overline{X_1}}{\overline{X_2}}e^{iA}.$$



Também colocamos  $g_{ii} = 0, g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1$ . Comparando a fórmula da Proposição 2.10 com a fórmula da Proposição 2.5 e pela construção da matriz  $G$ , segue que  $\det G = 0$ . Como  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$ ,  $\operatorname{Re}(X_1 e^{-iA}) \geq 0$ , segue que  $-\operatorname{Re}(e^{iA}) \leq 0$ ,  $-2\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{X}_1}{|X_2|^2} e^{iA}\right) \leq 0$ . Comparando essas desigualdades com as fórmulas da Proposição 2.6 e pela construção de  $G$  temos que  $\operatorname{Re}(g_{13}) \leq 0$  e  $\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \leq 0$ . E ainda temos que  $|g_{13}| = 1, g_{14} \neq 0, g_{24} \neq 0$ . Vemos que  $G$  satisfaz todas as condições da Proposição 3.1. Segue da Proposição 3.1 que  $G$  é a matriz de Gram normalizada para alguma quádrupla ordenada  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então, segue da unicidade de  $G$  e das fórmulas da Proposição 2.8 que  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, X_3)$ . Isso prova que  $\tau$  é sobrejetiva.

Por outro lado, tomemos  $m(p), m'(p') \in \mathcal{M}$  com  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A)$  e  $\tau(m'(p')) = (X'_1, X'_2, A')$ . Como  $(m(p)) \neq (m'(p'))$  as quádruplas  $p$  e  $p'$  não são congruentes em  $\operatorname{PU}(n, 1)$ . Segue da Proposição 2.8 que suas matrizes de Gram normalizadas são distintas. Das fórmulas da Proposição 2.8 segue que  $\tau(m(p)) \neq \tau(m'(p'))$ . Então  $\tau$  é injetiva. Com  $\mathbb{M}$  equipado com a topologia induzida de  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ , temos que  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{M}$  é um homeomorfismo.

■

# 4 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE QUÁDRUPLAS ORDENADAS EM $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$

Neste capítulo contruímos um espaço de módulos para quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. O roteiro para se chegar ao nosso principal resultado é como o do capítulo anterior.

**Definição 11.** Seja  $\mathcal{M}(n, 4)$  o espaço de configurações de quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , isto é,  $\mathcal{M}(n, 4)$  é o quociente do conjunto de quádruplas ordenadas de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  pela ação diagonal de  $\text{PU}(n, 1)$  equipado com a topologia quociente.

Nessa seção construímos um espaço de módulos para  $\mathcal{M}(n, 4)$ . Para isso precisamos de uma nova versão da Proposição 3.1, nesse caso para quádruplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , enunciada abaixo.

**Proposição 4.1.** Seja  $G = (g_{ij})$  uma matriz  $4 \times 4$  Hermitiana tal que  $g_{ii} = 0, g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1, |g_{13}| = 1, g_{14} \neq 0, g_{24} \neq 0$ . Então  $G$  é a matriz de Gram normalizada para alguma quádrupla ordenada  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  se, e somente se,  $\text{Re}(g_{13}) \leq 0, \text{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \leq 0$  e  $\det G \leq 0$ .

**Demonstração:** Supondo que  $G$  é a matriz de Gram normalizada associada a uma quádrupla  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  com  $p_i \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Segue da Proposição 2.6 que

$$\det G(1, 2, 3) = 2\text{Re}(\bar{g}_{13}), \quad \det G(1, 2, 4) = 2\text{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}).$$

Da observação 2.2 temos que esses determinantes são negativos ou nulos e  $\det G \leq 0$ .

Agora, seja  $G = (g_{ij})$  uma matriz hermitiana  $(4 \times 4)$  tal que  $g_{ii} = 0, g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1, |g_{13}| = 1, \text{Re}(g_{13}) \leq 0, \text{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) \leq 0$  e  $\det G \leq 0$ .

Como na proposição 3.1, vamos exibir quatro vetores nulos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  em  $\mathbb{C}^{n,1}$ , onde sua matriz de Gram seja igual a  $G$ , ou seja,  $G = [g_{ij}] = [\langle P_i, P_j \rangle]$ .

Supondo primeiro que  $\operatorname{Re}(g_{13}) \neq 0$ . Tome os seguintes vetores

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{13} \\ \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{14} \\ (1 - \bar{g}_{14} - \bar{g}_{24}g_{13}) / \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})} \\ \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) + \frac{|1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14}|^2}{2\operatorname{Re}(g_{13})}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{g}_{24} \end{bmatrix}.$$

Primeiro mostremos que  $\langle P_i, P_i \rangle = g_{ii} = 0$ . De fato, pela escolha de  $P_1, P_2$ , temos que  $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = 0$ . E ainda

$$\langle P_3, P_3 \rangle = \bar{g}_{13} + \left( \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{13})} \right)^2 + g_{13} = 0,$$

$$\langle P_4, P_4 \rangle = \bar{g}_{14}g_{24} + \frac{|1 - \bar{g}_{14} - \bar{g}_{24}g_{13}|^2}{-2\operatorname{Re}(g_{13})} - 2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}) + \frac{|1 - \bar{g}_{14} - \bar{g}_{24}g_{13}|^2}{2\operatorname{Re}(g_{13})} + \bar{g}_{24}g_{14} = 0.$$

Com uma verificação rápida vemos que  $\langle P_1, P_3 \rangle = g_{13}$ ,  $\langle P_1, P_4 \rangle = g_{14}$ ,  $\langle P_2, P_4 \rangle = g_{24}$ , e ainda que  $\langle P_1, P_2 \rangle = g_{12} = 1$ ,  $\langle P_2, P_3 \rangle = g_{23} = 1$ . Resta mostrar que  $\langle P_3, P_4 \rangle = g_{34} = 1$ . De fato,

$$\langle P_3, P_4 \rangle = \bar{g}_{13}g_{24} + 1 - g_{14} - g_{24}\bar{g}_{13} + g_{14} = 1.$$

Agora, supondo que  $\operatorname{Re}(g_{13}) = 0$ . Como por hipótese  $|g_{13}| = 1$ , segue que  $g_{13} = \pm i$ . Nesse caso podemos tomar a quádrupla

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{13} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{14} \\ \sqrt{-2\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14})} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{g}_{24} \end{bmatrix}.$$

Novamente, queremos mostrar que  $g_{ij} = \langle P_i, P_j \rangle$ . As contas para  $\langle P_i, P_j \rangle$  com  $i \neq 3, j \neq 4$  são semelhantes às da Proposição 3.1. Resta mostrar que  $\langle P_3, P_4 \rangle = g_{34} = 1$ . De

fato, escrevendo a expressão de  $\det G$  em termos de  $g_{ij}$  como na Proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned}\det D &= 1 + |g_{13}|^2|g_{24}|^2 + |g_{14}|^2 - 2\operatorname{Re}(g_{14}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{24}) - 2\operatorname{Re}(g_{13}\bar{g}_{14}g_{24}) \\ &= (1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14})(1 - \bar{g}_{24}g_{13} - \bar{g}_{14}) - 4\operatorname{Re}(g_{13})\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}).\end{aligned}$$

Como por hipótese  $\det G \leq 0$ , temos

$$|1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14}|^2 \leq 4\operatorname{Re}(g_{13})\operatorname{Re}(g_{24}\bar{g}_{14}).$$

Como  $\operatorname{Re}(g_{13}) = 0$ , segue que  $1 - g_{24}\bar{g}_{13} - g_{14} = 0$ . Logo,

$$\langle P_3, P_4 \rangle = g_{24}\bar{g}_{13} + g_{14} = 1.$$

Finalmente, em ambos os casos, como  $\langle P_1, P_3 \rangle = g_{13} \neq 0$ ,  $\langle P_1, P_4 \rangle = g_{14} \neq 0$ ,  $\langle P_2, P_4 \rangle = g_{24} \neq 0$ , segue que  $P_1 \neq P_3$ ,  $P_1 \neq P_4$ ,  $P_2 \neq P_4$ , pois  $p_i \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Logo os pontos  $p_i$  com levantamentos  $P_i$  são distintos. Isso completa a demonstração. ■

**Teorema 4.2.** O espaço de configuração  $\mathcal{M}$  é homeomorfo ao conjunto de pontos  $X = (X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R}$  definido por

$$\det G = \frac{1}{|X_2|^2} [-2\operatorname{Re}(X_1 + X_2) - 2\operatorname{Re}(X_1\bar{X}_2e^{-i2A}) + |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1] \leq 0,$$

sobre as condições

$$-\pi/2 \leq A \leq \pi/2, \quad \operatorname{Re}(X_1e^{-iA}) \geq 0.$$

A igualdade na primeira equação ocorre se, somente se, as quádruplas estão na fronteira de um espaço hiperbólico complexo de dimensão 2.

**Demonstração:** A maioria dos resultados utilizados na demonstração do Teorema 3.4 são provados para o caso de quádruplas de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Assim, a demonstração do Teorema 4.2 é uma pequena modificação do Teorema 3.4, basta utilizar a Proposição 5.2 no lugar da proposição 3.1 e o resultado segue. ■

## **5 ALGUNS SUBCONJUNTOS INTERESSANTES DE $\mathbb{M}$ E A TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE MÓDULOS $\mathbb{M}$**

Nesse capítulo apresentamos alguns subconjuntos do espaço de módulos  $\mathbb{M}$ . Como a variedade básica  $\mathbb{S}$ , as variedades de Cartan, as configurações  $\mathbb{C}$ -planas, configurações  $\mathbb{R}$ -planas e a fatia real de  $\mathbb{S}$ . Apresentamos também uma descrição da topologia do espaço de módulos  $\mathbb{M}$ .

### 5.1 O CONJUNTO SINGULAR DE $\mathbb{M}$

Com o objetivo de descrever a topologia do espaço de módulos  $\mathbb{M}$ , definimos o seguinte subconjunto de  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ . Seja  $\mathbb{S}$  o conjunto de pontos em  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ , satisfazendo a equação

$$-2\operatorname{Re}(X_1 + X_2) - 2\operatorname{Re}(X_1\bar{X}_2e^{-i2A}) + |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1 = 0$$

Chamamos o conjunto  $\mathbb{S}$  de variedade básica. Também definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{123} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : \operatorname{Re}(e^{iA}) = 0\}; \\ \mathbb{S}_{124} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : \operatorname{Re}(\bar{X}_1e^{iA}) = 0\}; \\ \mathbb{S}_{134} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : \operatorname{Re}(\bar{X}_2e^{iA}) = 0\}; \\ \mathbb{S}_{234} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : \operatorname{Re}(X_1\bar{X}_2e^{iA}) = 0\}. \end{aligned}$$

Chamamos os conjuntos  $\mathbb{S}_{ijk}$  de variedades de Cartan.

Escrevendo  $X_1 = a + bi$ ,  $X_2 = c + di$  e  $e^{iA} = \cos A + i \operatorname{sen} A$ . Então, as variedades de

Cartan são descritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{123} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : A = \pm\pi/2 + 2k\pi\}; \\ \mathbb{S}_{124} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : a \cos A + b \sin A = 0\}; \\ \mathbb{S}_{134} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : c \cos A - d \sin A = 0\}; \\ \mathbb{S}_{234} &= \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R} : (ac + bd) \cos A + (bc + ad) \sin A = 0\}.\end{aligned}$$

**Definição 5.1.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla de pontos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Chamamos  $p$  de um tetraedro com vértices  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , e de faces  $(p_i, p_j, p_k)$ . Dizemos que  $p$  é um tetraedro

- quase  $\mathbb{C}$  - plano, se existir uma face de  $p$  contida em uma cadeia.
- $\mathbb{C}$  - plano, quando todos os seus vértices estão em uma cadeia.

Na próxima proposição daremos uma descrição para um tetraedro quase  $\mathbb{C}$  - plano e um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano. Para isso, seja  $p$  um tetraedro e  $m(p) \in \mathcal{M}$  um ponto representado por  $p$ .

**Proposição 5.2.** Um tetraedro  $p$  é quase  $\mathbb{C}$  - plano se, e somente se,  $\tau(m(p))$  pertence a alguma variedade de Cartan. Além disso, um tetraedro  $p$  é  $\mathbb{C}$  - plano se, e somente se,  $\tau(m(p))$  pertence a interseção de pelo menos duas variedades de Cartan.

**Demonstração:** Suponhamos  $p$  um tetraedro quase  $\mathbb{C}$  - plano. Então, uma face  $(p_i, p_j, p_k)$  de  $p$  com levantamentos  $(P_i, P_j, P_k)$  está contida em uma cadeia. Logo, os pontos  $P_i, P_j, P_k$  são linearmente dependentes. Assim, o determinante da submatriz  $G(i, j, k)$  associada a tripla  $(p_i, p_j, p_k)$  é nulo. Observando as fórmulas da Proposição 2.11 temos que  $\tau(m(p))$  está contido em  $\mathbb{S}_{ijk}$ . A recíproca dessa primeira parte da proposição é feita de forma análoga.

Agora demonstraremos a segunda parte da proposição. Seja  $p$  um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano. Então,  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  pertence a uma cadeia. Logo, cada tripla ordenada  $(P_i, P_j, P_k)$  pertence a uma cadeia. Pelo mesmo argumento feito acima temos que  $\tau(m(p)) \in \mathbb{S}_{123} \cap \mathbb{S}_{124} \cap \mathbb{S}_{134} \cap \mathbb{S}_{234}$ .

Suponhamos agora que  $\tau(m(p))$  está contida em duas variedades de Cartan. Podemos supor sem perda de generalidade que  $\tau(m(p)) \in \mathbb{S}_{123} \cap \mathbb{S}_{124}$ . Logo, os determinantes das submatrizes  $G(1, 2, 3)$ ,  $G(1, 2, 4)$  são nulos. Assim, sendo  $P_i$  um levantamento de  $p_i$  os conjuntos  $\{P_1, P_2, P_3\}$ ,  $\{P_1, P_2, P_4\}$  são linearmente dependentes. Podemos tomar o

subespaço de  $\mathbb{C}^{2,1}$  gerado pelos vetores  $P_1, P_2$ . Então, as triplas ordenadas  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e  $p = (p_1, p_2, p_4)$  pertencem a mesma cadeia gerada por esse subespaço. Portanto, o tetraedro  $p$  é  $\mathbb{C}$  - plano. ■

**Exemplo 5.1.** Primeiro daremos um exemplo de um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano.

Podemos tomar a quádrupla  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) = ((0, 0), \infty, (0, 1), (0, 2))$  contida na cadeia vertical  $C = \{(0, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$  vista no exemplo 2.3. Da definição temos que  $p$  é um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano. Com os levantamentos de  $p_i$  dados pelos vetores

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, um exemplo de um tetraedro  $p' = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4)$  quase  $\mathbb{C}$  - plano.

Utilizando o exemplo acima, escolhemos por exemplo  $p'_4 = (1, 1) \notin C$ , e fazemos  $p = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) = ((0, 0), \infty, (0, 1), (1, 1))$  com levantamentos dados pelos vetores:

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P'_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P'_4 = \begin{bmatrix} -1 + i \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando os produtos Hermitianos da quádrupla  $p'$ , temos

$$\begin{aligned} \langle P'_1, P'_2 \rangle &= 1, & \langle P'_1, P'_3 \rangle &= -i, & \langle P'_1, P'_4 \rangle &= -1 - i, \\ \langle P'_2, P'_3 \rangle &= 1, & \langle P'_2, P'_4 \rangle &= 1, & \langle P'_3, P'_4 \rangle &= -1. \end{aligned}$$

As razões - cruzadas serão,  $X_1(p') = 1/2 - i/2$ ,  $X_2(p') = 1/2 + i/2$ . E o invariante de Cartan da tripla  $p'_1, p'_2, p'_3$ , dado por  $A(p'_1, p'_2, p'_3) = \arg(-i) = -\pi/2$ . Assim, temos que  $\operatorname{Re}(e^{iA}) = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\overline{X}_1 e^{iA}) = \operatorname{Re}(\overline{X}_2 e^{iA}) = -\operatorname{Re}(X_1 \overline{X}_2 e^{iA}) = 1/2$ . Isso implica que o ponto  $(X_1, X_2, A)$  pertence a variedade  $\mathbb{S}_{123}$ , mas não pertence a  $\mathbb{S}_{124}, \mathbb{S}_{124}, \mathbb{S}_{234}$ , como era de se esperar.

**Definição 12.** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $V$  uma variedade definida implicitamente por  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Dizemos que  $x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto singular da variedade  $V$  se o vetor gradiente  $\nabla f(x_0) = 0$ .

Nas duas próximas proposições, descreveremos o conjunto singular da variedade  $\mathbb{S}$ , onde  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$ .

**Proposição 5.3.** A variedade básica  $\mathbb{S}$  não possui pontos singulares para  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$  e  $X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ .

**Demonstração:** Escrevemos  $X_1 = a + bi, X_2 = c + di$  e  $e^{-i2A} = \cos 2A - i \sen 2A$ . O conjunto de pontos da variedade  $\mathbb{S}$  em função de  $a, b, c, d, A$  é dado por

$$\begin{aligned} F(a, b, c, d, A) &= -2(a + c) - 2[(ac + bd) \cos(2A) + (bc - ad) \sen(2A)] \\ &+ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Os pontos singulares da variedade  $\mathbb{S}$  têm que satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -1 - c \cos(2A) + d \sen(2A) + a = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -1 - a \cos(2A) - b \sen(2A) + c = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -d \cos(2A) - c \sen(2A) + b = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial d} = -b \cos(2A) + a \sen(2A) + d = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = (ac + bd) \sen(2A) - (bc - ad) \cos(2A) = 0 \quad (5.5)$$

Como  $X_1 \neq 0$  e  $X_2 \neq 0$ , temos que  $a^2 + b^2 \neq 0$  e  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Assim, consideremos os seguintes casos:  $a = 0, b \neq 0$ ;  $a \neq 0, b = 0$ ;  $a \neq 0, b \neq 0$ .

1º Caso:  $a = 0, b \neq 0$ . Das equações 5.1 e 5.5 temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -c \cos(2A) + d \sen(2A) = 1 \\ -c \cos(2A) + d \sen(2A) = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema não possui solução.

2º Caso:  $a \neq 0, b = 0$ . Reescrevendo o sistema (5.1) – (5.5), temos

$$\begin{cases} -c \cos(2A) + d \sen(2A) = 1 - a \\ -a \cos(2A) = 1 - c \\ -d \cos(2A) - c \sen(2A) = 0 \\ a \sen(2A) = -d \\ c \sen(2A) + d \cos(2A) = 0 \end{cases}$$



Temos que,  $\cos(2A) = c - 1/a$ ,  $\sin(2A) = -d/a$ . Substituindo na última equação, segue que  $d = 0$ . Então,  $\sin(2A) = 0$ . Assim,  $A = \pm\pi/2$ , absurdo pela nossa hipótese.

3º Caso:  $a \neq 0, b \neq 0$ . Multiplicando a equação 5.1 por  $b$  e a equação 5.3 por  $(-a)$  e somando as equações resultantes, temos que

$$(ac + bd) \sin(2A) - (bc - ad) \cos(2A) = b.$$

Assim, da equação 5.5 segue que  $b = 0$ , absurdo pela nossa hipótese.

Então, nos três casos o sistema (5.1) – (5.5) não possui solução. Portanto  $\mathbb{S}$  não possui singularidades nessas condições. ■

**Proposição 5.4.** A variedade básica  $\mathbb{S}$  têm pontos singulares para  $A = \pm\pi/2$ .

**Demonstração:** Escrevendo o sistema (5.1) – (5.5) da Proposição 5.3 no caso em que  $A = \pm\pi/2$ , temos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= -1 + c + a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} &= -1 + c + a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= b + d = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial d} &= b + d = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial A} &= bc - ad = 0 \end{aligned}$$

Com solução para  $a + c = 1$  e  $b = d = 0$ . Agora, seja  $(X_1, X_2, A) \in \mathbb{S}$  com  $A = \pm\pi/2$ . Então, a equação da variedade  $\mathbb{S}$  da Proposição 5.3 em termos de  $a, b, c, d$  é dada por

$$F(a, b, c, d) = -2(a + c) + 2(ac + bd) + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 = 0$$

Então, para  $A = \pm\pi/2$ , os pontos de  $\mathbb{S}$  são definidos pelas equações

$$a + c = 1, \quad b + d = 0.$$

Logo, todos os pontos  $X_1 = a + bi, X_2 = c + di$  e  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$ , com  $a + c = 1, b = d = 0, A = \pm\pi/2$  pertencem a variedade  $\mathbb{S}$  e tornam o gradiente de  $F$  nulo. Logo, são pontos singulares de  $\mathbb{S}$ . ■

Nas quatro proposições seguintes utilizaremos  $X_1 = a + bi$ ,  $X_2 = c + di$  e a função  $F = F(a, b, c, d, A)$  definida como na Proposição 5.3. Daremos as coordenadas das interseções de cada variedade de Cartan  $\mathbb{S}_{ijk}$  com a variedade básica  $\mathbb{S}$ . Mostraremos a dimensão e a não transversalidade de cada interseção.

**Proposição 5.5.** A interseção da variedade de Cartan  $\mathbb{S}_{123}$  com a variedade básica  $\mathbb{S}$  é não transversal. Essa interseção é a união de variedades analíticas reais de dimensão dois. Nas coordenadas acima, essa interseção é dada pelas equações

$$a + c = 1, \quad b + d = 0, \quad A = \pm\pi/2 + 2k\pi.$$

**Demonstração:** Seja  $(X_1, X_2, A) \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$  nas coordenadas acima. Logo,  $\operatorname{Re}(e^{iA}) = 0$  segue que  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ . Substituindo esses valores de  $A$  na equação que determina os pontos de  $\mathbb{S}$ , e observando a equação da Proposição 5.4 para  $A = \pm\pi/2$ , vemos que

$$a + c = 1, \quad b + d = 0, \quad A = \pm\pi/2 + 2k\pi.$$

Podemos parametrizar cada interseção definindo as funções

$$\phi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$$

$$\phi_A : (x, y) \mapsto (x, y, 1 - x, -y, A)$$

para cada  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ . Então,  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$  é a união de variedades reais de dimensão dois.

Agora, observemos os conjuntos

$$\mathbb{S}_{123} = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5 : A = \pm\pi/2 + 2k\pi\}, \quad \mathbb{S} = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5 : F(a, b, c, d, A) = 0\}$$

Daí, definimos as funções analíticas

$$f_k : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_k(a, b, c, d, A) = A - (\pi/2 + k\pi)$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Assim para cada  $k \in \mathbb{Z}$  temos as variedades

$$V_k = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5 : f_k(a, b, c, d, A) = 0, F(a, b, c, d, A) = 0\}$$

que são analíticas. A união dessas variedades analíticas  $V_k$  nos dá a interseção  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$ .

Agora, seja  $(a, b, c, d, A) \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$ . Com algumas substituições simples temos os seguintes gradientes,

$$\nabla F(a, b, c, d, A) = (0, 0, 0, 0, -4d), \quad \nabla f_k(a, b, c, d, A) = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Isso mostra que essa interseção é não transversal. O que completa a demonstração. ■

**Proposição 5.6.** A interseção da variedade de Cartan  $\mathbb{S}_{124}$  com a variedade básica  $\mathbb{S}$  é não transversal. Essa interseção é a união de variedades analíticas reais de dimensão dois. Nas coordenadas acima, essa interseção é dada pelas equações

$$a + b \tan A = 0, \quad a + c = 1, \quad b - d = 0,$$

para  $A \neq \pm\pi/2 + 2k\pi$ , e pelas equações

$$a + c = 1, \quad b = 0, \quad d = 0,$$

para  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ .

**Demonstração:** Seja  $(X_1, X_2, A) \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}$ . Quando  $A \neq \pm\pi/2 + 2k\pi$ , observa-se que  $\operatorname{Re}(\overline{X_1}e^{iA}) = 0$ , implica em  $b \neq 0$ . Pois caso contrário,  $b = 0$ , teríamos  $\operatorname{Re}(\overline{X_1}e^{iA}) = a \cos A = 0$ . Como para  $A \neq \pm\pi/2 + 2k\pi$ , temos  $\cos A \neq 0$ . Assim,  $a = 0$ . Isso implicaria em  $X_1 = 0$ , absurdo. Assim, a condição  $\operatorname{Re}(\overline{X_1}e^{iA}) = 0$  é equivalente a  $\tan(A) = -a/b$ .

Utilizando as identidades trigonométricas

- $\cos(2A) = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$
- $\operatorname{sen}(2A) = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

e substituindo na equação dos pontos da variedade  $\mathbb{S}$ ,

$$\begin{aligned} F(a, b, c, d, A) &= -2(a + c) - 2[(ac + bd) \cos(2A) + (bc - ad) \operatorname{sen}(2A)] \\ &+ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac - 2bd - 2(a + c) + 1 \\ &= (a + c - 1)^2 + (b - d)^2 = 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$a + b \tan A = 0, \quad a + c = 1, \quad b - d = 0.$$

Quando  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ ,  $\operatorname{Re}(\overline{X}_1 e^{iA}) = b \operatorname{sen} A = 0$ , implica que  $b = 0$ . Assim, a equação dos pontos de  $\mathbb{S}$  se escreve como

$$a^2 + c^2 + d^2 + 2ac - 2(a + c) + 1 = (a + c - 1)^2 + d^2 = 0.$$

Logo,

$$a + c = 1, \quad b = d = 0,$$

para  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ .

Podemos parametrizar os pontos de  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}$  nos pontos não singulares de  $\mathbb{S}$ , definindo as funções

$$\varphi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}$$

$$\varphi_k : (x, y) \mapsto (x, y, 1 - x, y, \arctan(-x/y) + 2k\pi)$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ . Então,  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}$  é a união de variedades reais de dimensão dois.

Como na proposição acima, definimos as funções analíticas

$$g_k : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_k(a, b, c, d, A) = a \cos A + b \operatorname{sen} A,$$

onde  $A \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ .

Assim para cada  $k \in \mathbb{Z}$  temos as variedades

$$V_k = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5 : g_k(a, b, c, d, A) = 0, F(a, b, c, d, A) = 0\}$$

que são analíticas e  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$  é a união dessas variedades.

Agora, seja  $(a, b, c, d, A) \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}$ . Com algumas substituições simples temos os seguintes gradientes,

$$\nabla F(a, b, c, d, A) = \left( \frac{-ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{4ab}{a^2 + b^2}, 0, 0, -4b \right), \quad \nabla g_k(a, b, c, d, A) = \left( 1, \frac{-a}{b}, 0, 0, \frac{a^2 + b^2}{b} \right),$$

ou seja,  $\nabla F(a, b, c, d, A) = \frac{a^2 + b^2}{-4b^2} \nabla g_k(a, b, c, d, A)$ . Isso mostra que essa interseção é não transversal, o que completa a demonstração. ■

**Proposição 5.7.** A interseção da variedade de Cartan  $\mathbb{S}_{134}$  com a variedade básica  $\mathbb{S}$  é

não transversal. Essa interseção é a união de variedades analíticas reais de dimensão dois. Nas coordenadas acima, essa interseção é dada pelas equações

$$c - d \tan A = 0, \quad a + c = 1, \quad b - d = 0,$$

para  $A \neq \pm\pi/2 + 2k\pi$ , e pelas equações

$$a + c = 1, \quad b = 0, \quad d = 0,$$

para  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ .

**Demonstração:** Com cálculos análogos aos da Proposição 5.6, mostramos que os pontos de  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}$  são dados pelas equações acima.

Podemos parametrizar os pontos de  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}$  nos pontos não singulares de  $\mathbb{S}$ , definindo as funções

$$\sigma_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}$$

$$\sigma_k : (x, y) \mapsto (1 - x, y, x, y, \arctan(x/y) + 2k\pi)$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}$  é a união de variedades reais de dimensão dois.

Como nas proposições acima, definimos as funções analíticas

$$h_k : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_k(a, b, c, d, A) = c \cos A - d \sin A,$$

onde  $A \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ . E ainda,  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}$  é a união das variedades analíticas

$$V_k = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5 : h_k(a, b, c, d, A) = 0, F(a, b, c, d, A) = 0\}.$$

Agora, seja  $(a, b, c, d, A) \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}$ , temos os seguintes gradientes,

$$\nabla F(a, b, c, d, A) = \left(0, 0, \frac{-4d^2}{c^2 + d^2}, \frac{4cd}{c^2 + d^2}, 4d\right), \quad \nabla h_k(a, b, c, d, A) = \left(0, 0, 1, \frac{-c}{d}, \frac{-c^2 - d^2}{d}\right),$$

ou seja,  $\nabla F(a, b, c, d, A) = \frac{c^2 + d^2}{-4d^2} \nabla h_k(a, b, c, d, A)$ . Isso mostra que essa interseção é não transversal, o que completa a demonstração. ■

**Proposição 5.8.** A interseção da variedade de Cartan  $\mathbb{S}_{234}$  com a variedade básica  $\mathbb{S}$  é não transversal. Essa interseção é a união de variedades analíticas reais de dimensão dois.

Nas coordenadas acima, essa interseção é dada pelas equações

$$(ac + bd) + (bc - ad) \tan A = 0, \quad a + c = 1, \quad b + d = 0,$$

para  $A \neq \pm\pi/2 + 2k\pi$ , e pelas equações

$$a + c = 1, \quad b = 0, \quad d = 0,$$

para  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ .

**Demonstração:** Seja  $(a, b, c, d, A) \in \mathbb{S}_{124}$ . Fazendo alguns cálculos em algumas parcelas da equação dos pontos de  $\mathbb{S}$ , dadas na Proposição 5.3, obtemos

$$(ac + bd) \cos(2A) + (bc - ad) \sin(2A) =$$

$$\cos A [(ac + bd) \cos A + (bc - ad) \sin A] - \sin^2 A (ac + bd) + \sin A \cos A (bc - ad).$$

Sabendo que  $(ac + bd) \cos A + (bc - ad) \sin A = 0$ , temos que

$$(ac + bd) \cos(2A) + (bc - ad) \sin(2A) = -(ac + bd).$$

Assim a equação dos pontos de  $\mathbb{S}$  se escreve como

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) - 2(a + c) + 1 = (a + c - 1)^2 + (b + d)^2 = 0.$$

Segue que

$$a + c = 1, \quad b + d = 0, \quad (ac + bd) + (bc - ad) \tan A = 0,$$

para  $A \neq \pm\pi/2 + 2k\pi$ . Quando  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$ ,  $\operatorname{Re}(X_1 \bar{X}_2 e^{iA}) = (bc - ad) \sin A = 0$  é equivalente a  $bc - ad = 0$ . Substituindo na equação dos pontos de  $\mathbb{S}$ , temos

$$(a + c - 1)^2 + (b + d)^2 = 0.$$

Assim as soluções são dadas por  $a + c = 1, b = d = 0$ .

Podemos parametrizar os pontos de  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{234}$  nos pontos não singulares de  $\mathbb{S}$ , definindo as funções

$$v_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{234}$$

$$v_k : (x, y) \mapsto (x, y, 1 - x, -y, \arctan(x^2 + y^2 - x/y) + 2k\pi)$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{234}$  é a união de variedades reais de dimensão dois.

Definimos as funções analíticas

$$l_k : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l_k(a, b, c, d, A) = (ac + bd) \cos A + (bc - ad) \operatorname{sen} A,$$

onde  $A \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ . E ainda,  $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}$  é a união das variedades analíticas

$$V_k = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5 : l_k(a, b, c, d, A) = 0, F(a, b, c, d, A) = 0\}.$$

Agora, seja  $(a, b, c, d, A) \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{234}$ , temos os gradientes,

$$\begin{aligned} \nabla l_k = & (1 - 2a + a^2 + b^2, (-a + 2a^2 - a^3 - ab^2)/b, a^2 + b^2, \\ & (a^2 + b^2 - a^3 - ab^2)/b, (a - a^2 - b^2)^2/b + b), \end{aligned}$$

$$\nabla F(a, b, c, d, A) = \frac{-4}{1 + \tan^2 A} \nabla l_k(a, b, c, d, A).$$

Isso mostra que essa interseção é não transversal, o que completa a demonstração. ■

Como consequência das proposições anteriores, mostraremos a relação entre as variedades das proposições anteriores e o conjunto singular de  $\mathbb{S}$ . Dessa forma, sejam

$$\mathbb{S}_1 = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}, \quad \mathbb{S}_2 = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{124}, \quad \mathbb{S}_3 = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{134}, \quad \mathbb{S}_4 = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{234}$$

Como visto nas proposições acima, temos que  $\mathbb{S}_i, i = 1, 2, 3, 4$  são variedades analíticas reais de dimensão dois.

**Corolário 5.9.** A interseção de todas as variedades  $\mathbb{S}_i$  é exatamente o conjunto singular da variedade  $\mathbb{S}$ .

**Demonstração:** De fato, seja  $(X_1, X_2, A) \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 \cap \mathbb{S}_3 \cap \mathbb{S}_4$ , segue da Proposição 5.5 que  $A = \pm\pi/2 + 2k\pi$  e da Proposição 5.6 que  $a + c = 1, b = d = 0$ . Por fim, segue da Proposição 5.4 que  $(X_1, X_2, A)$  é ponto singular de  $\mathbb{S}$ . ■

Seja  $\mathcal{C}$  o subconjunto dos pontos do espaço de módulos  $\mathbb{M}$  que representam tetraedros  $\mathbb{C}$ -planos.

**Corolário 5.10.** O conjunto  $\mathcal{C}$  é igual ao conjunto singular do espaço de módulos  $\mathbb{M}$ .

**Demonstração:** Seja  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A) \in \mathcal{C}$ , onde  $p$  é um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano. segue da demonstração da Proposição 5.2 que  $\tau(m(p)) \in \mathbb{S}_{123} \cap \mathbb{S}_{124} \cap \mathbb{S}_{134} \cap \mathbb{S}_{234}$ . Então,

$$a + c = 1, \quad b = d = 0, \quad A = \pm\pi/2.$$

Segue da Proposição 5.4 que os pontos dessa forma são os pontos singulares de  $\mathbb{M}$ . ■

## 5.2 CONFIGURAÇÕES $\mathbb{C}$ - PLANAS

Nessa seção apresentamos quais as condições para que um subconjunto do espaço de módulos  $\mathbb{M}$  represente um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano.

**Teorema 5.11.** Seja  $(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R}$ . Então, existe um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  tal que  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A)$  se, e somente se,  $A = \pm\pi/2$  e  $X_1, X_2$  são números reais satisfazendo  $X_1 + X_2 = 1$ .

**Demonstração:** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano. Então o ponto  $\tau(m(p))$  pertence aa variedades  $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}_3, \mathbb{S}_4$ . Segue do colorário 5.9 que  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A)$  é um ponto singular da variedade  $\mathbb{S}$  e da Proposição 5.4 temos que  $X_1, X_2, A$  satisfazem as condições do teorema.

Agora, suponhamos que  $A = \pm\pi/2$  e  $X_1, X_2$  são números reais onde  $X_1 + X_2 = 1$ . Mostraremos que  $(X_1, X_2, A)$  satisfazem todas as condições do Teorema 3.4. De fato, temos que  $\text{Re}(X_1 e^{-iA}) = 0$  e que  $(X_1, X_2, A)$  satisfazem a equação

$$\frac{1}{|X_2|^2} [-2\text{Re}(X_1 + X_2) - 2\text{Re}(X_1 \bar{X}_2 e^{-i2A}) + |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1] = 0$$

dos pontos de  $\mathbb{M}$ . Dessa forma, existe um tetraedro  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  tal que  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A)$ . Como  $(X_1, X_2, A)$  são pontos singulares da variedade  $\mathbb{S}$  segue do colorário 5.9 que  $(X_1, X_2, A)$  pertence as quatro variedades de Cartan. Finalmente, da Proposição 5.2 temos que  $p$  é um tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano. ■

**Exemplo 5.2.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  o tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano visto no exemplo 2.3, com levantamentos dados por,



$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vimos que  $X_1(p) = 1/2$ ,  $X_2(p) = 1/2$ . E o invariante de Cartan da tripla  $p_1, p_2, p_3$ , dado por  $A(p_1, p_2, p_3) = \arg(-i) = -\pi/2$ . Então, os números  $(X_1, X_2, A)$ , satisfazem as condições do Teorema 5.11.

### 5.3 CONFIGURAÇÕES $\mathbb{R}$ - PLANAS

Nessa seção apresentamos quais as condições para que um subconjunto do espaço de módulos  $\mathbb{M}$  represente um tetraedro  $\mathbb{R}$  - plano.

**Definição 13.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Dizemos que  $p$  é um tetraedro  $\mathbb{R}$  - plano se todos os seus vértices estão em um  $\mathbb{R}$  - círculo.

**Teorema 5.12.** Seja  $(X_1, X_2, A) \in \mathbb{C}_*^2 \times \mathbb{R}$ . Então, existe um tetraedro  $\mathbb{R}$  - plano  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  tal que  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A)$  se, e somente se,  $A = 0$  e  $X_1, X_2$  são números reais positivos satisfazendo a relação

$$-2(X_1 + X_2) - 2X_1X_2 + X_1^2 + X_2^2 + 1 = 0$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  é um tetraedro  $\mathbb{R}$  - plano, com  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, A)$ . Das proposições 2.7 e 2.8 temos que

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_4) = \arg(\overline{X_1}e^{i\mathbb{A}}), \quad \mathbb{A}(p_1, p_3, p_4) = \arg(\overline{X_2}e^{-i\mathbb{A}}),$$

onde  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$ . Como  $p$  está em um  $\mathbb{R}$  - círculo segue que  $\mathbb{A}(p_i, p_j, p_k) = 0$ . Daí  $X_1, X_2$  são números reais. E ainda, da Proposição 2.11 temos que  $X_1, X_2$  são números reais positivos. Da equação do Teorema 3.4 segue que

$$-2(X_1 + X_2) - 2X_1X_2 + X_1^2 + X_2^2 + 1 = 0.$$

Agora, suponhamos que  $A = 0$  e  $X_1, X_2$  são números reais positivos satisfazendo as condições do teorema. Os números dessa forma satisfazem as condições do Teorema 3.4. Logo, existe um tetraedro  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  tal que  $\tau(m(p)) = (X_1, X_2, 0)$ . Segue das proposições 2.7 e 2.8 que o invariante de Cartan de cada tripla é nulo. Como o  $\mathbb{R}$  - círculo

que contém cada tripla é único, segue que  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  está contida em um  $\mathbb{R}$  - círculo.

■

**Exemplo 5.3.** Consideremos o  $\mathbb{R}$  - círculo puramente real, dado por

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; z_1, z_2 \in \mathbb{R} \text{ e } 2z_1 + z_2^2 = 0 \right\},$$

em coordenadas horoesféricas, temos que

$$(\zeta, v) \mapsto \begin{bmatrix} z_1 = -\langle\langle\zeta, \zeta\rangle\rangle + iv \\ z_2 = \zeta\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Assim, para que  $(\zeta, v) \in R$ , devemos ter  $\text{Im}(\zeta) = v = 0$ . Logo, podemos considerar o seguinte  $\mathbb{R}$  - plano em coordenadas horoesféricas dado por,  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) = ((0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0))$ , cujos levantamentos são dados por,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -9 \\ 3\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos as seguintes razões - cruzadas,  $X_1(p) = 16/9$ ,  $X_2(p) = 1/9$ . Verifica - se facilmente que  $X_1, X_2$ , satisfazem a equação

$$-2(X_1 + X_2) - 2X_1X_2 + X_1^2 + X_2^2 + 1 = 0.$$

E ainda como  $\langle P_i, P_j \rangle \in \mathbb{R}$ , com  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , segue que o invariante de Cartan  $A$  da tripla  $p_1, p_2, p_3$  é igual a zero.

## 5.4 A FATIA REAL DA VARIEDADE BÁSICA $\mathbb{S}$

Chamamos o subconjunto

$$\mathcal{R} = \{(X_1, X_2, A) \in \mathbb{S} : X_1, X_2 \in \mathbb{R}\}$$

de fatia real da variedade básica  $\mathbb{S}$ .

**Teorema 5.13.** Qualquer ponto na fatia real  $\mathcal{R}$  satisfaz a inequação  $\text{Re}(X_1 e^{-iA}) \geq 0$  para  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$ .

**Demonstração:** Escrevemos  $X_1 = a + bi$ ,  $X_2 = c + di$ , e  $e^{-iA} = \cos(2A) - i \sin(2A)$ . Logo, a equação dos pontos de  $\mathcal{R}$  em função de  $a, b, c, d, A$  é dada por

$$F(a, b, c, d, A) = F(a, c, A) = a^2 - 2ac \cos(2A) + c^2 - 2(a + c) + 1 = 0$$

que é a equação dos pontos de  $\mathbb{S}$  quando  $b = d = 0$ . Considerando essa equação nas variáveis  $a$  e  $c$ , temos uma família de cônicas. Com um cálculo simples encontramos o discriminante  $\mathbb{D}$  de qualquer cônica nessa família. Temos que  $\mathbb{D} = -4 \sin^2(2A)$ . Dessa forma essa cônica é do tipo parabólico para  $A = 0$  ou  $A = \pm\pi/2$ , e do tipo elíptico para  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$  e  $A \neq 0$ .

Calculando a derivada na equação dos pontos de  $\mathbb{R}$ , temos

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{1 - a + c \cos(2A)}{c - 1 - a \cos(2A)}.$$

Verificamos que para qualquer  $-\pi/2 < A < \pi/2$  as cônicas são tangentes aos eixos coordenadas nos pontos  $(a, c) = (0, 1)$  e  $(a, c) = (1, 0)$ .

Assim as cônicas serão de três formas a saber:

- Para  $A = 0$ , uma parábola de equação  $(a + c)^2 - 2(a + c) + 1 = 0$ ,
- Para  $A = \pm\pi/2$ , duas retas de equação  $(a + c - 1)^2 = 0$ ,
- Nos casos restantes, teremos elipses de equação  $a^2 - 2ac \cos(2A) + c^2 - 2(a + c) + 1 = 0$ , tangentes aos eixos nos pontos  $(a, c) = (0, 1)$  e  $(a, c) = (1, 0)$ . Assim, temos  $-\pi/2 < A < \pi/2, a > 0$  ou  $A = \pm\pi/2$ . De qualquer forma,  $\operatorname{Re}(X_1 e^{-iA}) = a \cos(A) \geq 0$ .

■

**Corolário 5.14.** Qualquer ponto na fatia real  $\mathcal{R}$  com  $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$  representa um ponto no espaço de configuração  $\mathcal{M}$ . O tetraedro  $\mathbb{C}$  - plano e  $\mathbb{R}$  - plano definem um subconjunto na fatia real.

**Demonstração:** Consequência direta dos Teoremas 5.11, 5.12 e 5.13.

■

## 5.5 IMAGEM TOPOLÓGICA DO ESPAÇO DE MÓDULOS $\mathbb{M}$

Nessa seção vamos descrever a topologia do espaço de módulos  $\mathbb{M}$ .

Do Teorema 3.4, temos que nem todos os pontos de  $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}_{123}$  com  $A = \pm\pi/2$  pertencem ao espaço de módulos  $\mathbb{M}$ . De fato, escrevendo  $X_1 = a + bi$ ,  $X_2 = c + di$ , para que os pontos de  $\mathbb{S}_1$  pertençam a  $\mathbb{M}$ . Do teorema 3.4 temos que esses pontos têm que satisfazer a desigualdade  $\operatorname{Re}(X_1 e^{-Ai}) = b \operatorname{sen} A \geq 0$ . Assim,  $b \geq 0$  quando  $A = \pi/2$  ou  $b \leq 0$  quando  $A = -\pi/2$ . Daí,  $\mathbb{S}_1 \in \mathbb{M}$  se

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi/2 \\ b \geq 0, d \leq 0 \\ a + c = 1 \\ b + d = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -\pi/2 \\ b \leq 0, d \geq 0 \\ a + c = 1 \\ b + d = 0 \end{array} \right. .$$

Observemos que o conjunto  $\mathcal{C} = \{(a, b, c, d, A) \in \mathbb{R}^5; A = \pm\pi/2, a + c = 1, b = d = 0\}$  dos pontos singulares de  $\mathbb{M}$ , dividem os pontos de  $\mathbb{S}_1$  com  $A = \pm\pi/2$  em duas partes, onde a parte contida em  $\mathbb{M}$  descrita acima, é chamada de parte positiva.

A proposição a seguir vai nos ajudar a descrever a topologia de  $\mathbb{M}$ .

**Proposição 5.15.** Qualquer ponto  $(X_1, X_2, A)$  na variedade básica  $\mathbb{S}$  satisfaz a inequação  $\operatorname{Re}(X_1 e^{-iA}) \geq 0$  para  $-\pi/2 < A < \pi/2$ .

**Demonstração:** Escrevemos a equação dos pontos da variedade  $\mathbb{S}$  dada na Proposição 5.3 por,

$$F(a, b, c, d, A) = -2(a + c) - 2[(ac + bd) \cos(2A) + (bc - ad) \operatorname{sen}(2A)] + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 = 0$$

Vamos olhar essa equação em  $a$  e  $b$ , com  $c, d, A$  como parâmetros. Assim, temos uma família de cônicas, cujo discriminante é dado por  $\mathbb{D} = -4$ . Logo, essas cônicas são todas do tipo elíptico.

Agora, mostraremos que cada elipse dessa família de cônicas é não degenerada. De fato, seja  $K$  uma elipse dessa família, reescrevemos a equação dos pontos de  $K$  da seguinte forma,

$$a^2 + b^2 - 2(1 + c \cos(2A) + d \operatorname{sen}(2A))a - 2(d \cos(2A) + c \operatorname{sen}(2A))b - 2c + c^2 + d^2 + 1 = 0.$$

Fazendo  $Y = 1 + c \cos(2A) + d \sin(2A)$  e  $Z = d \cos(2A) + c \sin(2A)$ , e a equação de  $K$  é dada por,

$$(a - Y)^2 + (b - Z)^2 = Y^2 + Z^2 + (c - 1)^2 + d^2.$$

Com uma verificação simples, mostramos que o valor a direita da igualdade é sempre maior que 0 para  $-\pi/2 < A < \pi/2$ . Logo,  $K$  é não degenerada.

Agora, determinaremos a posição relativa de cada elipse  $K$  com a linha  $L = L(a, b) = \operatorname{Re}(X_1 e^{-iA}) = a \cos A + b \sin A$ , onde  $-\pi/2 < A < \pi/2$ . Da Proposição 5.6, temos que  $K$  e  $L$  são tangentes e se intersectam em um único ponto  $p = (1 - c, d)$ . Assim,  $K$  está inteiramente contida no fecho de uma componente do complemento de  $L$ . Mostraremos que  $K$  está na componente onde  $L(a, b) \geq 0$ . Sabemos que o gradiente de  $F$  em  $p$  nas coordenadas  $a$  e  $b$ , aponta para o exterior da elipse  $K$ . Assim, basta mostrarmos que  $L(\nabla(F(p))) < 0$ . Com algumas simplificações, mostramos que  $L(\nabla(F(p))) = -4$ . Tudo isso implica que os pontos da variedade  $\mathbb{S}$ , onde  $-\pi/2 < A < \pi/2$  satisfazem a equação  $\operatorname{Re}(X_1 e^{-iA}) \geq 0$ .

■

Do que foi visto nessa seção podemos concluir que: o espaço de módulos  $\mathbb{M}$  pode ser visto como uma variedade analítica real de dimensão quatro ( $\mathbb{S}$ ), intersectada não transversalmente por outra variedade analítica real de dimensão quatro ( $\mathbb{S}_{123}$ ). Essa interseção é o conjunto  $\mathbb{S}_{123} \cap \mathbb{S}$  com  $A = \pm\pi/2$ , que é uma variedade analítica real de dimensão dois contendo o conjunto singular  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{M}$ . O conjunto singular  $\mathcal{C}$  é uma subvariedade analítica de dimensão um. Logo, o espaço de módulos  $\mathbb{M}$  não pode ser descrito como uma variedade analítica real. Assim, o conjunto  $\mathbb{M}$  é um conjunto semi-analítico.

# REFERÊNCIAS

- [1] H. Cunha, N. Gusevskii, *The moduli space of quadruples of points in the boundary of complex hyperbolic space*, Transformation Groups, 2010.
- [2] H. Cunha, *O espaço de módulos de  $k$ -uplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo*. Tese de Doutorado 2009.
- [3] E. Falbel, *Geometric structures associated to triangulations as fixed point sets of involutions*, Topology Appl., 2007
- [4] E. Falbel, I. Platis, *The  $PU(2, 1)$  configuration space of four points in  $S^3$  and cross-ratio variety*, Math., 2008.
- [5] W. M. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York, 1999.
- [6] A. Korányi, H. M. Reimann, *The complex cross-ratio on the Heisenberg group*, *Enseign. Math.*, 1987.
- [7] J. R. Parker, *Notes on Complex Hyperbolic Geometry*. University of Durham, 2003.
- [8] A. P. C. Lopes, *Um Estudo da Geometria Hiperbólica Complexa*. Dissertação de Mestrado. UFMG, Minas Gerais, 2009.
- [9] J. R. Parker, I. Platis, *Complex hyperbolic Fenchel-Nielsen coordinates*, Topology, 2008.
- [10] J. R. Parker, I. Platis, *Global, geometrical coordinates on Falbel's cross-ratio variety*, Canad. Math. Bull., 2009
- [11] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms*. Springer-Verlag, New York, 1985.