

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Departamento de Matemática

*Melissa Campos Alves*

***Transitividade Topológica do Fluxo Geodésico em  
Variedades Riemannianas sem Pontos Conjugados***

Juiz de Fora

2013

*Melissa Campos Alves*

***Transitividade Topológica do Fluxo Geodésico em  
Variedades Riemannianas sem Pontos Conjugados***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Sistemas Dinâmicos.

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2013

Alves, Melissa Campos.

Transitividade Topológica do Fluxo Geodésico em  
Variedades Riemannianas sem Pontos Conjugados  
/ Melissa Campos Alves. - 2013.

67f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de  
Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Fluxo Geodésico. 3. Transitividade Topológica.  
4. Pontos Conjugados. 5. Visibilidade Uniforme. I. Título.

CDU 51

*Melissa Campos Alves*

# ***Transitividade Topológica do Fluxo Geodésico em Variedades Riemannianas sem Pontos Conjugados***

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. José Barbosa Gomes  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Rogério Casagrande  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
UFJF

---

Prof. Dr. Rafael O. Ruggiero Rodriguez  
PUC-RJ

Juiz de Fora, 26 de fevereiro de 2013.

# *Agradecimentos*

Agradeço a Deus por todas as conquistas alcançadas. Por me capacitar e por ter me dado forças para superar as dificuldades encontradas ao longo da caminhada.

Ao professor José Barbosa Gomes pela disponibilidade que demonstrou, logo de início, em ser meu orientador de mestrado e por toda paciência e dedicação durante o período que trabalhamos juntos.

A meus pais Flávio Alves e Rosangela Alves que sempre apoiaram minhas decisões e acreditaram na minha capacidade acadêmica. Pelo incentivo constante, o carinho e o amor. O apoio de vocês foi e é fundamental em tudo o que faço.

Ao meu irmão e amigo Luciano Alves pelo apoio, e pela compreensão da minha ausência em alguns momentos e a minha irmã Vanessa Alves que sempre me ofereceu forças mesmo a distância estando comigo em todos os momentos, desde antes do nascimento.

Ao Paulo Cesar Filho (PC) por me orientar e me ajudar a decidir a área que eu iria seguir.

Ao professor Ronald Pierre Petin que, mesmo sem o saber, foi uma fonte de inspiração ao longo de meu percurso acadêmico.

A todos os mestres e doutores que ao longo da graduação e ao longo de todo curso de mestrado dividiram comigo seus saberes, propiciando meu desenvolvimento acadêmico e profissional, fazendo com que despertasse em mim, a cada dia, a paixão pela Matemática.

Aos amigos que permaneceram sempre presentes, mesmo na ausência. Em especial a Juliana Pessôa e a Juliana Rosa que são mais que amigas, são minhas irmãs por escolha.

À Universidade Federal de Juiz de Fora -UFJF- pelo auxílio e acolhida e ao Departamento de Matemática pela realização do curso e pela competência de seus profissionais.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -CAPES- pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e, embora pareça contraditório, agradeço, em especial, as pessoas que não acreditaram em mim e que lançaram palavras negativas. Hoje posso perceber que estas me serviram de incentivo e

posso afirmar: “Posso todas as coisas Naquele que me fortalece.”

## ***Resumo***

Esta dissertação é dedicada ao estudo da transitividade dos fluxos geodésicos em variedades Riemannianas sem pontos conjugados. Baseada nos resultados realizados por [7] que ampliou os resultados obtidos em várias pesquisas realizadas , dedicadas a provar a transitividade topológica de fluxos geodésicos em variedades compactas com curvatura  $K \leq 0$ , exigindo que as variedades fossem de visibilidade uniforme.

Considerando a variedade de visibilidade  $M$ ,  $SM$  o fibrado tangente unitário de  $M$  e  $\varphi_t$  o fluxo geodésico em  $SM$ , foram apresentados e desenvolvidos resultados para mostrar que se todo ponto de  $SM$  é não-errante mediante  $\varphi_t$  então  $\varphi_t$  é topologicamente transitivo em  $SM$ . Por último foram apresentadas situações onde não ocorrem a transitividade [2] e a visibilidade [20].

Palavras-Chave: Fluxo Geodésico. Transitividade Topológica. Pontos Conjugados. Visibilidade Uniforme.

# ***Abstract***

This dissertation treat the study of the transitivity of geodesic flows on Riemannian manifolds without conjugate points. Based on the results performed by [7], which extended the results obtained in various research, dedicated to proving the topological transitivity of geodesic flows on compact manifolds with curvature  $K \leq 0$ , requiring that the manifolds were of uniform visibility.

We can consider the visibility of manifold  $M$ ,  $SM$  the unit tangent bundle  $M$  and  $\varphi_t$  the geodesic flow in  $SM$ , were presented and developed results to show that every point of  $SM$  is not wandering through  $\varphi_t$  then  $\varphi_t$  is topologically transitive on  $SM$ . Lastly were presented situations occur where no transitivity [2] and visibility [20].

Key-words: Geodesic Flow. Topological Transitivity. Conjugate Points. Visibility Uniform.

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 9
<b>1 Preliminares</b>	p. 10
1.1 Alguns Conceitos de Topologia . . . . .	p. 10
1.2 Variedades Diferenciáveis . . . . .	p. 11
1.3 Homotopia, Recobrimento e Grupo Fundamental . . . . .	p. 14
1.4 Noções Básicas de Geometria Riemanniana . . . . .	p. 20
1.4.1 Conexão Afim . . . . .	p. 20
1.4.2 Variedades sem Pontos Conjugados . . . . .	p. 22
1.4.3 Fluxo Geodésico . . . . .	p. 22
1.4.4 Divergência Uniforme de Geodésicas . . . . .	p. 23
1.5 Noções de Geometria Hiperbólica . . . . .	p. 23
1.6 Grupo Quociente . . . . .	p. 28
1.7 Formas Diferenciais . . . . .	p. 29
1.8 Medida . . . . .	p. 31
<b>2 Pontos no Infinito e Visibilidade</b>	p. 33
2.1 Visibilidade . . . . .	p. 33
2.2 Geodésicas Assintóticas . . . . .	p. 34
2.3 Topologia do Cone . . . . .	p. 36
2.4 Continuidade de Algumas Funções . . . . .	p. 39
<b>3 Conjunto Limite</b>	p. 41

3.1	Introdução . . . . .	p. 41
3.2	A Condição de Dualidade . . . . .	p. 42
<b>4</b>	<b>Transitividade Topológica</b>	p. 49
<b>5</b>	<b>Resultados complementares e Exemplos sobre Visibilidade e Transitividade</b>	p. 54
5.1	Axioma de Assintoticidade . . . . .	p. 54
5.2	Visibilidade e Assintoticidade . . . . .	p. 55
5.3	Exemplos . . . . .	p. 58
5.4	Hiperbolicidade de Gromov e Visibilidade . . . . .	p. 60
<b>Apêndice A</b>		p. 62
<b>Referências Bibliográficas</b>		p. 64

# Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar a transitividade topológica de fluxos geodésicos em variedades Riemannianas sem pontos conjugados.

No Capítulo 1, expomos algumas noções básicas de Geometria Riemanniana necessárias para o desenvolvimento de todo o texto, além de conceitos de Variedades Diferenciáveis, Grupo Quociente e Topologia. Ainda, apresentamos uma noção de Geometria Hiperbólica e definimos Recobrimento, Grupo Fundamental, Forma Diferencial e Medida.

No Capítulo 2, definimos assintoticidade entre geodésicas, apresentamos a Topologia do Cone e estudamos a continuidade da função  $V : A \rightarrow SH$  definida por  $V(p, q) = (p, \gamma'_{pq}(0))$  onde  $A = \{(p, q) \in H \times \overline{H}; p \neq q\}$ .

No Capítulo 3, apresentamos as propriedades do conjunto limite  $L(D)$  de  $D$ , onde  $D$  é o grupo propriamente descontínuo de isometrias de  $H$ . Definimos dualidade e mostramos a condição para a dualidade. Finalizamos com um estudo da densidade de  $D$  em  $L(D)$ .

No Capítulo 4, definimos a transitividade topológica de um fluxo. Relacionamos  $L(D)$  a fluxos geodésicos no fibrado tangente unitário de  $M = H/D$ . Mostramos que para uma variedade de visibilidade uniforme  $M$  onde  $SM = \Omega$  o fluxo geodésico é topologicamente transitivo em  $SM$ .

No Capítulo 5, apresentamos o axioma de assintoticidade, observamos que o axioma de visibilidade uniforme implica no axioma de assintoticidade. Veremos que uma variedade compacta  $M$ , com uma métrica  $g^*$ , sem pontos conjugados, é uma variedade de visibilidade uniforme se  $M$  é uma variedade de visibilidade uniforme com métrica  $g$ . Consequentemente, o  $g^*$ -fluxo geodésico é topologicamente transitivo no  $g^*$ -fibrado tangente unitário. Apresentamos um exemplo sobre a não-transitividade do fluxo geodésico em uma superfície não compacta e um outro exemplo sobre a não visibilidade. Terminamos este capítulo comentando sobre hiperbolicidade de Gromov e visibilidade.

# 1 Preliminares

Neste primeiro capítulo, introduziremos alguns conceitos que se fazem necessários para a leitura do texto.

## 1.1 Alguns Conceitos de Topologia

Uma referência para esta seção é [18].

**Definição 1.1.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $x \in X$ . Uma base local, ou sistema fundamental de vizinhanças em  $x$ , é uma família  $\beta_x$  de vizinhanças de  $x$  tal que todo aberto  $A$  que contém  $x$ , contém um elemento de  $\beta_x$ .

### Axiomas de Enumerabilidade

*Primeiro axioma:* Um espaço  $X$  tem base enumerável em  $x \in X$  se existe uma coleção enumerável  $\beta_x$  de vizinhanças de  $x$  tal que para toda vizinhança  $V$  de  $x$  existe pelo menos um elemento de  $\beta_x$  contido em  $V$ , ou seja, existe  $B \in \beta_x$  tal que  $x \in B \subset V$ .

Se  $X$  tem base enumerável em todo  $x \in X$  dizemos que  $X$  satisfaz o “primeiro axioma“.

*Segundo Axioma:* Dizemos que o espaço topológico  $X$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se possui uma base enumerável para a sua topologia.

**Definição 1.2.** Seja  $(X, d)$  espaço métrico. A sequência  $(x_n)$  de pontos de  $X$  é dita sequência de Cauchy em  $(X, d)$  se dado  $\varepsilon > 0$  existe inteiro  $N$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  sempre que  $n, m \geq N$ .

O espaço métrico  $(X, d)$  é dito completo se toda sequência de Cauchy em  $X$  converge.

**Definição 1.3.** Um espaço métrico  $(X, d)$  é totalmente limitado se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe cobertura finita de  $X$  por  $\varepsilon$ -bolas.

**Teorema 1.4.** O espaço métrico  $(X, d)$  é compacto se, e somente se, é completo e totalmente limitado.

**Definição 1.5.** Um espaço  $X$  é dito localmente compacto em  $x$  se existe subespaço compacto  $C$  de  $X$  que contém a vizinhança de  $x$ . Se  $X$  é localmente compacto em cada ponto,  $X$  é dito localmente compacto.

**Teorema 1.6.** Seja  $X$  espaço Hausdorff. Então  $X$  é localmente compacto se, e somente se, dado  $x$  em  $X$ , e dada uma vizinhança  $U$  de  $x$ , existe vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $\bar{V}$  é compacto e  $\bar{V} \subset U$ .

**Definição 1.7.** Uma coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$  satisfaz a propriedade da interseção finita se, para toda subcoleção finita  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\} \subset \mathcal{C}$  vale que a interseção  $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n$  é não vazia.

**Teorema 1.8.** Seja  $X$  espaço topológico. Então  $X$  é compacto se, e somente se, toda coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos fechados de  $X$  possuindo a propriedade da interseção finita possui interseção não vazia, isto é

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$$

**Teorema 1.9** (Teorema do ponto fixo de Brouwer). Sejam  $B$  a bola unitária fechada em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : B \rightarrow B$  função contínua. Então, existe um ponto fixo  $x \in B$ .

## 1.2 Variedades Diferenciáveis

As referências para esta seção são [14] e [16].

Seja  $M$  um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e conexo.

**Definição 1.10.** Um sistema de coordenadas locais ou carta local em  $M$  é um homeomorfismo  $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $U \subset M$  é um aberto e  $n$  é a dimensão da aplicação.

Para cada  $p \in M$ , tem-se que  $x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$  no qual os números  $x_i(p) = x_i$  são chamados coordenadas do ponto  $p \in M$  no sistema  $x$ .

**Definição 1.11.** Um atlas de dimensão  $n$  sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção  $\Sigma = \{x_\alpha\}$  de cartas locais  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  no qual a união dos domínios  $U_\alpha$  são tais que  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ . Os domínios  $U_\alpha$  são chamados vizinhanças coordenadas de  $\Sigma$ .

Um espaço topológico  $M$  no qual existe um atlas de dimensão  $n$  chama-se variedade topológica de dimensão  $n$ .

**Definição 1.12.** Dada uma família de aplicações biunívocas  $X_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , onde  $U_\alpha$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$ ; definimos uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  como um conjunto  $M$  tal que:

- 1)  $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
- 2) Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $X_\alpha^{-1}(W)$  e  $X_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$  são diferenciáveis;
- 3) A família  $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$  é maximal relativamente às condições (1) e (2).

$(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$  é uma carta. A coleção de todas as cartas é dito um atlas.

**Definição 1.13 (Fibrado Tangente).** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$ . Então,  $TM$  com uma estrutura diferenciável é chamado fibrado tangente.

**Definição 1.14 (Aplicações Diferenciáveis entre Variedades).** Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$  se, dada uma parametrização  $Y: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  em  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  em  $p$  tal que  $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$  e a aplicação  $Y^{-1} \circ \varphi \circ X: X^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $X^{-1}(p)$ .

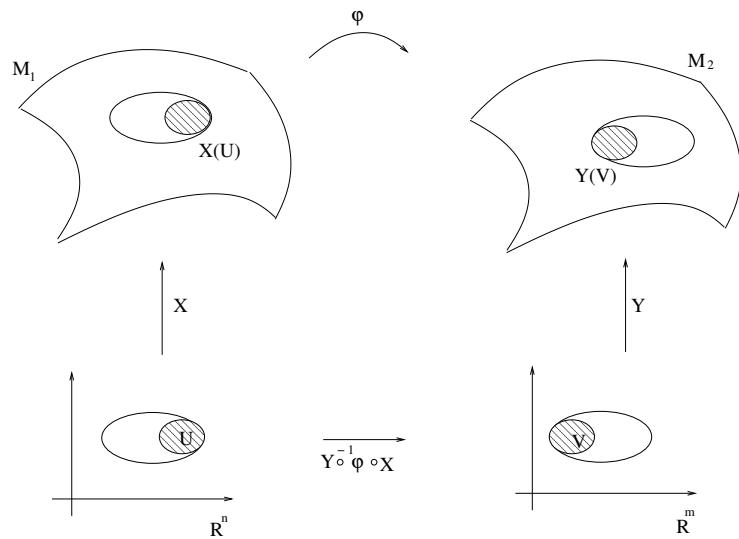


Figura 1.1: Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi: M \rightarrow N$  é uma imersão se  $d\varphi_p: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se  $\varphi$  for homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , então  $\varphi$  é um mergulho. Se  $M \subset N$

e  $i : M \subset N$  é um mergulho, então  $M$  é subvariedade de  $N$ . Seja  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  imersão, então  $m \leq n$  e  $n - m$  é codimensão da imersão  $\varphi$ .

**Definição 1.15.** Definimos a aplicação projeção por  $\pi : TM \rightarrow M$  no qual  $\pi(p, v) = p$ .

## 1.3 Homotopia, Recobrimento e Grupo Fundamental

Uma referência para esta seção é [15].

**Definição 1.16.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g: X \rightarrow Y$  são homotópicas ( $f \simeq g$ ) quando existe aplicação contínua  $H: X \times I = [0, 1] \rightarrow Y$  tal que,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

Para  $t \in I$  podemos definir  $H_t: X \rightarrow Y$  tal que,  $H_t(x) = H(x, t)$ .

A relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ . As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas classes de homotopia.

**Definição 1.17.** Duas aplicações contínuas  $f, g: X \rightarrow Y$  (com  $X$  localmente compacto de Hausdorff ou metrizável) são homotópicas se, e somente se  $f$  e  $g$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos no espaço  $C(X, Y)$ .

**Proposição 1.18.** Sejam  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicações contínuas tais que  $f(x)$  e  $g(x)$  estão em componentes conexas distintas de  $Y$ . Então  $f$  e  $g$  não são homotópicas.

**Proposição 1.19.** Sejam  $f, f': X \rightarrow Y$  e  $g, g': Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas. Se  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$ , então  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ .

**Definição 1.20.** Uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é uma equivalência homotópica quando existe  $g: Y \rightarrow X$ , contínua tal que;  $g \circ f \simeq id_X$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ . Então,  $g$  é um inverso homotópico de  $f$  e os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo de homotopia.

**Definição 1.21.** Um espaço topológico  $X$  é contrátil se tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Um espaço  $X$  é contrátil se, e somente se a aplicação identidade  $id: X \rightarrow X$  é homotópica a uma aplicação constante  $X \rightarrow X$ .

**Definição 1.22.** Uma aplicação contínua  $a: J = [s_0, s_1] \rightarrow X$  é dita um caminho.

Quando a aplicação é tal que  $a(s_0) = a(s_1)$  dizemos que o caminho é fechado.

**Definição 1.23.** Uma homotopia  $H: a \approx b$  entre caminhos é uma aplicação contínua  $H: I \times I \rightarrow X$  tal que,  $H(s, 0) = a(s)$ ,  $H(s, 1) = b(s)$ ,  $\forall s, t \in I$   $H(0, t) = a(0) = b(0)$ ,  $H(1, t) = a(1) = b(1)$

Para que  $a \approx b$  é necessário que;  $a(0) = b(0) = x_0$  e  $a(1) = b(1) = x_1$

**Proposição 1.24.** Sejam  $a, b, c : I \rightarrow X$  caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa. Sejam  $\alpha = [a], \beta = [b], \gamma = [c]$  suas classes de homotopia;  $x = a(0)$  a origem e  $y = a(1)$  seu fim,  $e_x, e_y$  caminhos constantes sobre esse pontos e  $\varepsilon_x = [e_x], \varepsilon_y = [e_y]$  as classes de homotopia dessas constantes. Então,

- i.  $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$
- ii.  $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$
- iii.  $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$
- iv.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos em um espaço topológico  $X$ , com a lei da composição acima definida, chama-se grupóide fundamental de  $X$  representado po  $\Pi(X)$ .

Considere os pares  $(X, x_0)$ , onde  $x_0 \in X$  é ponto básico do espaço topológico  $X$ . Os caminhos fechados  $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  são caminhos com base no ponto  $x_0$ . O subconjunto  $\Pi_1(X, x_0) = \{[\alpha]; \alpha : I \rightarrow X \text{ é caminho fechado com base em } x_0\}$  do grupóide fundamental constitui um grupo chamado grupo fundamental do espaço  $X$  com base no ponto  $x_0$ . O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia  $\varepsilon = \varepsilon_{x_0}$  do caminho constante no ponto  $x_0$ .

**Proposição 1.25.** Se  $x_0$  e  $x_1$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $X$  então  $\Pi_1(X, x_0)$  e  $\Pi_1(X, x_1)$  são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia  $\gamma$  de caminhos que ligam  $x_0$  a  $x_1$  induz um isomorfismo  $\bar{\gamma} : \Pi_1(X, x_1) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ , dado por  $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ .

**Proposição 1.26.** Se dois espaços topológicos  $X, Y$  conexos por caminhos têm o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos fundamentais são isomorfos.

**Corolário 1.27.** O grupo fundamental de um espaço contrátil possui um único elemento.

Um espaço topológico  $X$  é dito simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e  $\Pi_1(X, x_0) = \{0\}, \forall x_0 \in X$ . Ou seja, para todo caminho fechado  $a : I \rightarrow X$ , com base no ponto  $x_0$ , tem-se  $a \approx e_{x_0}$ .

Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. Dizemos que,  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo local quando cada ponto  $x \in X$  está contido em um aberto  $U$  tal que,  $V = f(U)$  é aberto em  $Y$  e  $f|_U$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre  $V$ .

Sejam  $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Um levantamento de  $g$  é uma aplicação contínua  $\tilde{g} : Z \rightarrow X$  tal que  $f \circ \tilde{g} = g$ .

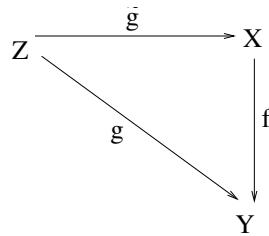


Figura 1.2: Levantamento de  $g$

Seja  $f : X \rightarrow Y$  contínua, localmente injetiva, onde  $X$  é espaço Hausdorff. Se  $Z$  é conexo e  $g : Z \rightarrow Y$  é contínua; então dois levantamentos  $\tilde{g}, \hat{g} : Z \rightarrow X$  de  $g$ , que coincidem em um ponto  $z \in Z$ , são iguais.

**Método do Prolongamento Analítico:** Dado um homeomorfismo local  $f : X \rightarrow Y$ , seja  $y \in f(X)$ . Para cada  $x \in X$  com  $f(x) = y$ , existem vizinhanças  $U$  de  $x$  e  $V$  de  $y$  tais que  $f : U \rightarrow V$  é homeomorfismo e  $g = (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$  é um inverso local de  $f$  chamado ramo de  $f^{-1}$ .

**Definição 1.28.** A aplicação  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é uma aplicação de recobrimento quando cada ponto  $x \in X$  pertence a um aberto  $V \subset X$  tal que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$  é uma reunião de abertos  $U_\alpha$ , dois-a-dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por  $p$  homeomorficamente sobre  $V$ .

Uma aplicação de recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é um homeomorfismo local de  $\tilde{X}$  sobre  $X$ .

**Definição 1.29.** Considere a aplicação de recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ . Se um aberto  $V \subset X$  é conexo e localmente conexo por caminhos e, além disso, todo caminho fechado em  $V$  é homotópico a uma constante em  $X$  então,  $V$  é uma vizinhança distinguida.

Sejam  $V$  uma vizinhança distinguida;  $\tilde{X}$  o espaço de recobrimento de  $X$ , onde  $X$  é a base e  $p^{-1}(x)$  as fibras sobre  $x$ .

**Proposição 1.30.** Se a base  $X$  de um recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é conexa, então todas as fibras  $p^{-1}(x), x \in X$ , possuem o mesmo “número de folhas” (ou número cardinal) do recobrimento.

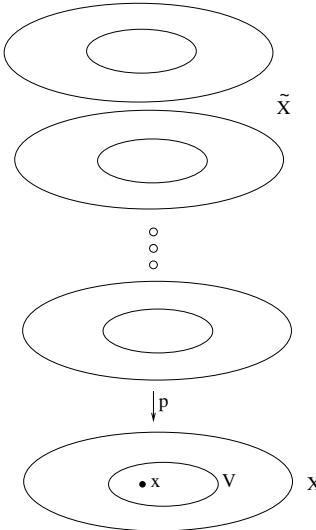


Figura 1.3: Aplicação de recobrimento

**Propriedade de Levantamento de Caminhos (p.l.c.):** Seja  $f : X \rightarrow Y$  aplicação contínua e sobrejetiva. Dados um caminho  $a : J \rightarrow Y$ , com  $J = [s_0, s_1]$ , e  $x \in X$  tal que  $f(x) = a(s_0)$ , existe caminho  $\tilde{a} : J \rightarrow X$  tal que  $\tilde{a}(s_0) = x$  e  $f \circ \tilde{a} = a$ .

**Propriedade de Levantamento Único de Caminhos (p.l.u.c.):** Seja  $f : X \rightarrow Y$  aplicação sobrejetiva. Dados um caminho  $a : J \rightarrow X$  e um ponto  $x \in X$  com  $f(x) = a(s_0)$ , existe um único caminho  $\tilde{a} : J \rightarrow X$  tal que  $f \circ \tilde{a} = a$  e  $\tilde{a}(s_0) = x$ .

Dizemos que  $X$  é semi-localmente simplesmente conexo quando  $\forall x \in X$  possui uma vizinhança  $V$  tal que todo caminho fechado em  $V$  é homotópico a uma constante em  $X$ .

Se  $X$  for localmente conexo por caminhos e semi-localmente conexo, temos que  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é um recobrimento se, e somente se, é homeomorfismo local com a p.l.u.c.

Dada uma aplicação de recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , sejam  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  e  $x = p(\tilde{x})$ . Usaremos a notação  $H(\tilde{x})$  para representar a imagem do homomorfismo  $p_{\sharp} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$ , induzido pela projeção de recobrimento  $p$ .

**Proposição 1.31.** Seja  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento, onde o espaço  $X$  é conexo por caminhos. Sejam  $Z$  um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e  $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  uma aplicação contínua. Dado  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , a fim de que  $f$  possua um levantamento  $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ , é necessário e suficiente que  $f_{\sharp} \pi_1(Z, z_0) \subset H(\tilde{x}_0)$ .

**Corolário 1.32.** Sejam  $X$  conexo por caminhos e  $Z$  simplesmente conexo, localmente conexo por caminhos. Toda aplicação contínua  $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  admite um levantamento  $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ , onde  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  é escolhido arbitrariamente.

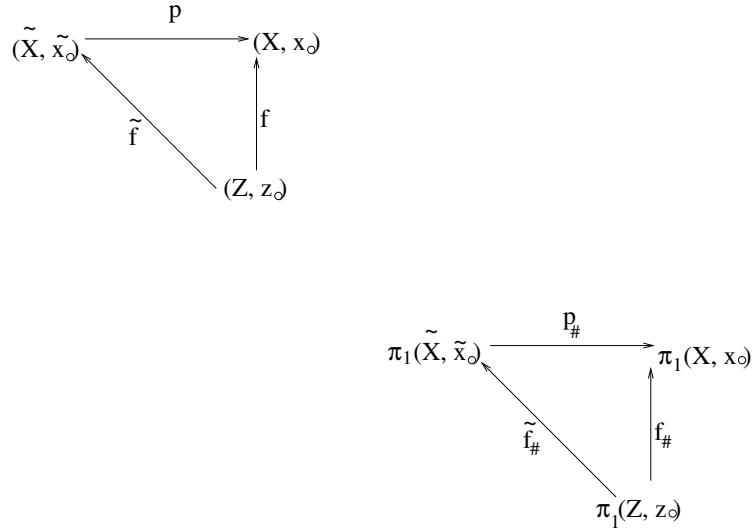
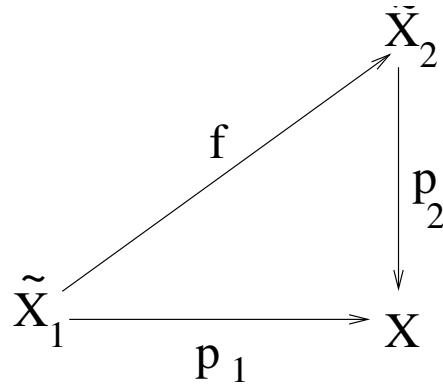


Figura 1.4: Projeção de recobrimento

Sejam  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ,  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$  recobrimentos com a mesma base  $X$ . Um homomorfismo entre estes recobrimentos é uma aplicação contínua  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  tal que  $p_2 \circ f = p_1$ .

Se  $p_3 : \tilde{X}_3 \rightarrow X$  é outro recobrimento com base  $X$  e  $g : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_3$  é um homomorfismo, a composta  $g \circ f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_3$  é homomorfismo. Dizemos que  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  é um isomorfismo quando  $f$  é um homeomorfismo tal que  $p_2 \circ f = p_1$ .

Um homomorfismo  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  é um levantamento da aplicação contínua  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  relativamente ao recobrimento  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ .

Figura 1.5:  $f$ : levantamento da aplicação contínua  $p_1$  em relação ao recobrimento  $p_2$ 

Quando  $\tilde{X}_1$  é conexo, dois homomorfismos que assumam o mesmo valor em um ponto  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$  são iguais.

**Proposição 1.33.** Sejam  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ,  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$  recobrimentos com a mesma base  $X$ . Se  $\tilde{X}_2$  é conexo e localmente conexo por caminhos, todo homomorfismo  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  é um recobrimento.

Em particular,  $f$  é sobrejetivo.

**Proposição 1.34.** Sejam  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$  conexos e localmente conexos por caminhos. A fim de que exista um homomorfismo  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  com  $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  é necessário e suficiente que  $H_1(\tilde{x}_1) \subset H_2(\tilde{x}_2)$ .

**Corolário 1.35.** Seja  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento cujo domínio  $\tilde{X}$  é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento  $q : \tilde{Y} \rightarrow X$  com  $\tilde{Y}$  conexo, existe um recobrimento  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  tal que  $q \circ f = p$ .

Um recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  com  $\tilde{X}$  simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos é um recobrimento universal.

Um endomorfismo é um homomorfismo de um recobrimento em si mesmo. Dado o recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , um endomorfismo é, portanto, uma aplicação contínua  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p \circ f = p$ . Quando o endomorfismo  $f$  for um homeomorfismo de  $\tilde{X}$  sobre si mesmo, diremos que  $f$  é um automorfismo. O conjunto  $G(\tilde{X} \diagup X)$  dos automorfismos do recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  constitui um grupo relativamente à composição de aplicações.

Às vezes os automorfismos são chamados as “transformações de recobrimento” ou “translações de recobrimento”. A condição  $p_2 \circ f = p_1$  significa que  $f$  aplica cada fibra  $p_1^{-1}(x)$  na fibra  $p_2^{-1}(x)$ . Em particular, um endomorfismo  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  aplica cada fibra  $p^{-1}(x)$  em si própria. Um isomorfismo  $f$  induz, para cada  $x \in X$ , uma bijeção da fibra  $p_1^{-1}(x)$  sobre a fibra  $p_2^{-1}(x)$ . Um automorfismo, por sua vez, determina uma permutação em cada fibra  $p^{-1}(x)$ .

Note que um homomorfismo  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  é um levantamento da aplicação contínua  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  relativamente ao recobrimento  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ . Assim, quando  $\tilde{X}_1$  é conexo, dois homomorfismos que assumam o mesmo valor em um ponto  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$  são iguais.

Consideramos como superfície, variedades topológicas de dimensão 2, ou seja, um espaço topológico de Hausdorff localmente homeomorfo ao plano  $\mathbb{R}^2$ . Temos que toda superfície compacta é o espaço quociente de um polígono plano por uma relação de equivalência segundo a qual os lados que constituem o bordo do polígono são identificados dois a dois.

As ilustrações dos esquemas de identificação das superfícies orientáveis de gênero zero, das superfícies orientáveis de gênero  $g \geq 1$  e das superfícies não-orientáveis de gênero  $g = h - 1$  podem ser encontrados em [15].

## 1.4 Noções Básicas de Geometria Riemanniana

As referências para esta seção são [1] e [4].

**Definição 1.36.** Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$ , um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p M$  que varia no seguinte sentido. Se  $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $x(x_1 \dots x_n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$  então

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em  $U$ , onde  $g_{ij}$  é a expressão da métrica Riemanniana.

**Definição 1.37.** Uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana.

**Definição 1.38.** Duas métricas  $g$  e  $g^*$  em uma variedade riemanniana  $M$  são ditas equivalentes se existirem constantes  $0 < a \leq b$  tais que para qualquer vetor tangente  $v$  em  $M$

$$a \|v\| \leq \|v\|_* \leq b \|v\|$$

onde  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_*$  denotam as normas com as métricas  $g$  e  $g^*$ , respectivamente.

Se  $M$  é variedade compacta, então duas métricas quaisquer em  $M$  são equivalentes.

**Definição 1.39.** Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$ , associa um vetor  $X(p) \in T_p M$ .

**Definição 1.40.** Sejam  $M, N$  variedades Riemannianas. O difeomorfismo  $f: M \rightarrow N$  é isometria se;  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_p = \langle df_p(\vec{u}), df_p(\vec{v}) \rangle_{f(p)}$ ,  $\forall p \in M; \vec{u}, \vec{v} \in T_p M$

**Definição 1.41.** Seja  $f: M \rightarrow N$  onde  $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Então  $f$  é dita uma imersão.

### 1.4.1 Conexão Afim

Sejam agora  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos vetoriais em  $M$ , e  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

**Definição 1.42.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação  $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que se indica por  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$1) \ \bigtriangledown_{fX+gY}Z = f \bigtriangledown_X Z + g \bigtriangledown_Y Z$$

$$2) \ \bigtriangledown_X(Y+Z) = \bigtriangledown_X Y + \bigtriangledown_X Z$$

$$3) \ \bigtriangledown_X(fY) = f \bigtriangledown_X Y + X(f)Y$$

Onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

**Proposição 1.43.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\bigtriangledown$ . Então, existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  um campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha$ , chamado de derivada covariante de  $V$  ao longo de  $\alpha$  tal que, se  $w$  é um campo ao longo de  $\alpha$  e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então

$$1) \ \frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$2) \ \frac{DfV}{dt} = \frac{dfV}{dt} + \frac{fDV}{dt}$$

$$3) \ \text{Se dado um campo } Y \in X(M) \text{ tal que } Y(\alpha(t)) = V(t), \text{ então } \frac{DV}{dt} = \bigtriangledown_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$$

A conexão é dita compatível com a métrica quando para quaisquer campos de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  a equação  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \bigtriangledown_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bigtriangledown_X Z \rangle$  é sempre válida.

A conexão é dita simétrica, quando para quaisquer campos de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  acontece  $\bigtriangledown_X Y - \bigtriangledown_Y X = [X, Y]$  onde  $[X, Y] = XY - YX$ .

**Teorema 1.44** (Levi-Civita). Dada uma variedade  $M$  existe uma única conexão afim  $\bigtriangledown$  em  $M$  que satisfaz:

1)  $\bigtriangledown$  é simétrica;

2)  $\bigtriangledown$  é compatível com a métrica.

A única conexão afim  $\bigtriangledown$  que satisfaz o teorema anterior chama-se conexão de Levi-Civita.

Uma curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma geodésica em  $t_0 \in [a, b]$  se  $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$  no ponto  $t_0$ . Se  $\gamma$  é geodésica em  $t$ , para todo  $t \in [a, b]$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica.

Neste trabalho, todas as geodésicas serão consideradas de velocidade unitária.

### 1.4.2 Variedades sem Pontos Conjugados

**Definição 1.45.** Um campo de vetores  $J$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$  é um campo de Jacobi se

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0$$

onde  $R$  é o tensor de curvatura Riemanniana de  $M$  e  $J'$  é a derivada covariante de  $J$  ao longo de  $\gamma$ .

**Definição 1.46.** Se  $v \in T_p S$ ,  $v \neq 0$ , é tal que  $\gamma(|v|, \frac{v}{|v|}) = \gamma(1, v)$  está definido, escrevemos  $\exp_p(v) = \gamma(1, v)$  e  $\exp_p(0) = p$ .

**Observação 1:** Note que  $\gamma(t)$  e  $t\gamma(t)$  são campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , que nos dão informações apenas sobre a própria geodésica  $\gamma$ . Por este motivo, ao estudarmos fluxos geodésicos só nos interessamos por campos de Jacobi perpendiculares a  $\gamma$ .

**Definição 1.47.** Dois pontos  $p$  e  $q$  em  $\gamma$  são conjugados se existir um campo de Jacobi, não-nulo,  $J$  ao longo de  $\gamma$  que se anula em  $p$  e em  $q$ .

Dizemos que uma variedade  $M$  é sem pontos conjugados se, para toda geodésica  $\gamma$  de  $M$ , dois pontos quaisquer de  $\gamma$  não são conjugados ao longo de  $\gamma$ . De forma equivalente, para todo raio geodésico  $\gamma$ , e todo campo de Jacobi não trivial ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = 0$ ,

$$\langle J, J \rangle(t) > 0, \forall t > 0$$

Seja  $M$  variedade sem pontos conjugados. Então, para cada  $p$  em  $M$ ,  $\exp_p : M_p \rightarrow M$  é um recobrimento.

Se  $M$  é variedade simplesmente conexa e sem pontos conjugados, vale que

- i. Para todo  $p$  em  $M$ ,  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo;
- ii. Dois pontos quaisquer de  $M$  são ligados por uma única geodésica.

### 1.4.3 Fluxo Geodésico

**Definição 1.48.** O fluxo geodésico da métrica  $g$  é o fluxo  $\varphi_t : TM \rightarrow TM : (p, v) \rightarrow (\gamma_{(p,v)}(t), \gamma'_{(p,v)}(t))$ , tal que  $\gamma_{(p,v)}$  é geodésica para a métrica  $g$ , com as condições iniciais  $\gamma_{(p,v)}(0) = p$  e  $\gamma'_{(p,v)}(0) = v$ .

Sejam  $M = H \diagup D$  uma variedade Riemanniana completa,  $SM = \{(p, v) \in SM; \|v\| = 1\}$ , o fibrado tangente unitário e  $\{\varphi_t\}$  o fluxo geodésico definido em  $SM$ .

Temos que,  $\{\varphi_t : SM \rightarrow SM\}$  são difeomorfismos definidos por,  $\varphi_t(p, v) = (\gamma_v(t), \gamma'_v(t))$ , onde  $\gamma_v$  é a geodésica em  $M$  com  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ .

#### 1.4.4 Divergência Uniforme de Geodésicas

A sequência  $\{p_n\}$  de pontos de  $H$  é dita divergente se não tem limite. O raio geodésico, começando em  $p$ , é chamado raio limite de tal sequência, se os segmentos geodésicos  $\gamma_n$ , ligando  $p$  a  $p_n$  convergem para  $\gamma$ , isto é

$$\gamma(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma'_n(0)$$

Os raios geodésicos começando em  $p \in H$  divergem uniformemente, se cada raio geodésico com uma distância limitada a partir de uma sequência divergente  $\{p_n\}$  é raio limite dessa sequência.

A divergência uniforme em  $p$  implica que quaisquer dois raios geodésicos  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  começando em  $p$ , divergem, isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \infty$$

**Proposição 1.49** (Resultado de Green). Seja  $(M, g)$  uma superfície compacta, sem pontos conjugados. Então os raios geodésicos divergem uniformemente em  $\tilde{M}$ .

**Observação 2:** Toda superfície compacta de gênero maior do que 1 admite métrica de curvatura negativa.

Para uma prova ver [22].

#### 1.5 Noções de Geometria Hiperbólica

Seja  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ . Para  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , definimos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{y_0^2}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in T_{(x_0, y_0)} \mathbb{H}^2$$

em cada ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^2$  e a métrica  $g_{\mathbb{H}}(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}}$ .

A métrica  $g_{\mathbb{H}}$  é chamada métrica hiperbólica. Chamamos  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$  o espaço hiperbólico.

Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma curva  $C^1$  por partes sobre  $\mathbb{H}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ .

O comprimento hiperbólico de  $\gamma$  é dado por:

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\mathbb{H}}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{H}}} dt = \int_a^b \frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}{y(t)} dt.$$

Dados dois pontos  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ , definimos a distância hiperbólica entre  $z_1$  e  $z_2$  da seguinte forma:

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \inf\{L_{\mathbb{H}}(C); C: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2, C^1 \text{ por partes com } C(a) = z_1 \text{ e } C(b) = z_2\}.$$

**Definição 1.50.** Um difeomorfismo  $f: (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (N, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$  entre duas variedades Riemannianas  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e  $(N, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$  é chamado uma isometria se

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_p = \langle \langle df_p(\vec{u}), df_p(\vec{v}) \rangle \rangle_{f(p)}, \forall p \in M, \vec{u}, \vec{v} \in T_p M$$

**Proposição 1.51.** Toda transformação  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  definida por  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$ . Se  $h(z) = -\bar{z}$ , as outras isometrias de  $\mathbb{H}^2$  são da forma  $f \circ h: z \mapsto \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$ .

**Definição 1.52.** Uma curva  $\gamma: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $C^1$  por partes, é geodésica (geodésica minimizante) quando para cada par de pontos em  $\gamma((a, b))$  a curva  $\gamma$  é minimizante entre esses dois pontos.

A distância hiperbólica é dada por:

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)], \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

onde  $L_{\mathbb{H}}(\gamma)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$  é o comprimento hiperbólico de  $\gamma$  entre  $\gamma(t_1)$  e  $\gamma(t_2)$ .

**Lema 1.53.** Seja  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma isometria de  $\mathbb{H}^2$  e seja  $\gamma$  uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ . Então,  $f(\gamma)$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ .

*Demonstração.* Seja  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma isometria de  $\mathbb{H}^2$ , então  $f$  preserva comprimento.

Seja  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma geodésica. Então, dados  $t_1, t_2 \in (a, b)$ , temos que

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)].$$

Considere  $f(\gamma) \in C^1$  em  $\mathbb{H}^2$ . Como  $f$  é isometria e  $f(\gamma)$  é difeomorfismo temos que,  $L_{\mathbb{H}}(f(\gamma))[f(\gamma(t_1)), f(\gamma(t_2))] = L_{\mathbb{H}}(\gamma)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)] = d_{\mathbb{H}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d_{\mathbb{H}}(f(\gamma(t_1)), f(\gamma(t_2)))$ . Logo,  $f(\gamma)$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ .  $\square$

**Proposição 1.54.** a) Toda semi-reta vertical  $\gamma(t) = x_0 + it, t \in (0, \infty), x_0 \in \mathbb{R}$  é uma geodésica de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ .

- b) Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos distintos de  $\mathbb{H}^2$  alinhados verticalmente. Existe exatamente uma geodésica passando por esses dois pontos, que é a semi-reta vertical por esses dois pontos.

*Demonstração.* a) Basta mostrarmos que,  $\forall t_1, t_2 \in (0, \infty)$  o comprimento de  $\gamma$  entre  $\gamma(t_1)$  e  $\gamma(t_2)$  é menor que ou igual ao comprimento de qualquer curva  $C$  ligando esses dois pontos.

Então, seja  $C$  uma curva  $C^1$  por partes ligando os pontos  $\gamma(t_1)$  e  $\gamma(t_2)$

$$C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, C(s) = (x(s), y(s)), C(0) = \gamma(t_1) \text{ e } C(1) = \gamma(t_2)$$

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(C) &= \int_0^1 \sqrt{\langle C'(s), C'(s) \rangle_{\mathbb{H}}} ds = \int_0^1 \sqrt{\langle (x'(s), y'(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle_{\mathbb{H}}} ds = \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}}{y} ds \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{(y'(s))^2}}{y(s)} ds = \int_0^1 \frac{|y'(s)|}{y(s)} ds = \\ &= \int_0^1 \left| \frac{y'(s)}{y(s)} \right| ds \geq \left| \int_0^1 \frac{y'(s)}{y(s)} ds \right| \end{aligned}$$

Logo, fazendo  $u = y(s)$  temos

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(C) &\geq \left| \int_{y(0)}^{y(1)} \frac{1}{u} du \right| = \left| \ln |u| \Big|_{y(0)}^{y(1)} \right| = \left| \ln |y(1)| - \ln |y(0)| \right| = \left| \ln y(1) - \ln y(0) \right| = \\ &= \left| \ln \frac{y(1)}{y(0)} \right| = \ln \frac{y(1)}{y(0)} = L_{\mathbb{H}}(\gamma)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)] \end{aligned}$$

- b) Seja a semi-reta vertical  $\gamma(t) = x_0 + it$ ,  $t \in (0, \infty)$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , passando por dois pontos distintos de  $\mathbb{H}^2$  alinhados verticalmente,  $p = \gamma(t_1)$  e  $q = \gamma(t_2)$ .

Pelo item (a) temos que  $\gamma$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ .

Suponhamos  $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $C(s) = (x(s), y(s))$  outra geodésica de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$  passando por  $p$  e  $q$ , com  $C(0) = p$  e  $C(1) = q$ .

Então,

$$L_{\mathbb{H}}(C)[C(0), C(1)] = L_{\mathbb{H}}(C)[p, q] = L_{\mathbb{H}}(C)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$$

que é menor do que ou igual ao comprimento de qualquer outra curva ligando esses pontos. Mas, por (a),  $L_{\mathbb{H}}(\gamma) \leq L_{\mathbb{H}}(C)$ .

Logo,  $L_{\mathbb{H}}(C) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)$  e temos que  $C$  é a semi-reta vertical  $\gamma$ , a menos de parametrização. Portanto, a única geodésica que passa por  $p$  e  $q$  é a semi-reta vertical que passa por esses dois pontos.

□

**Proposição 1.55.** Os semi-círculos ortogonais ao eixo real são geodésicas de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ .

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  o centro do círculo correspondente ao semi-círculo ortogonal ao

eixo real dado de raio  $R$ . Seja  $I$  a inversão em relação a  $C_{2R}(x_0 + R)$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}^2$ ,

$$I(z) = \frac{(2R)^2}{\bar{z} - (x_0 + R)} + (x_0 + R) = \frac{\frac{(x_0 + R)\bar{z}}{-2R} + \frac{(x_0 + R)^2 - (2R)^2}{2R}}{\frac{-\bar{z}}{2R} + \frac{(x_0 + R)}{2R}}$$

Temos que  $I$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$ . Seja  $L$  a semi-reta baseada em  $(x_0 - R, 0)$ . Então,  $I(L)$  é  $C_R(x_0)$ .

Como  $L$  é uma geodésica, (pela Proposição 1.54) e  $I$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$ , concluímos (pelo Lema 1.53) que  $C_R(x_0)$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ .  $\square$

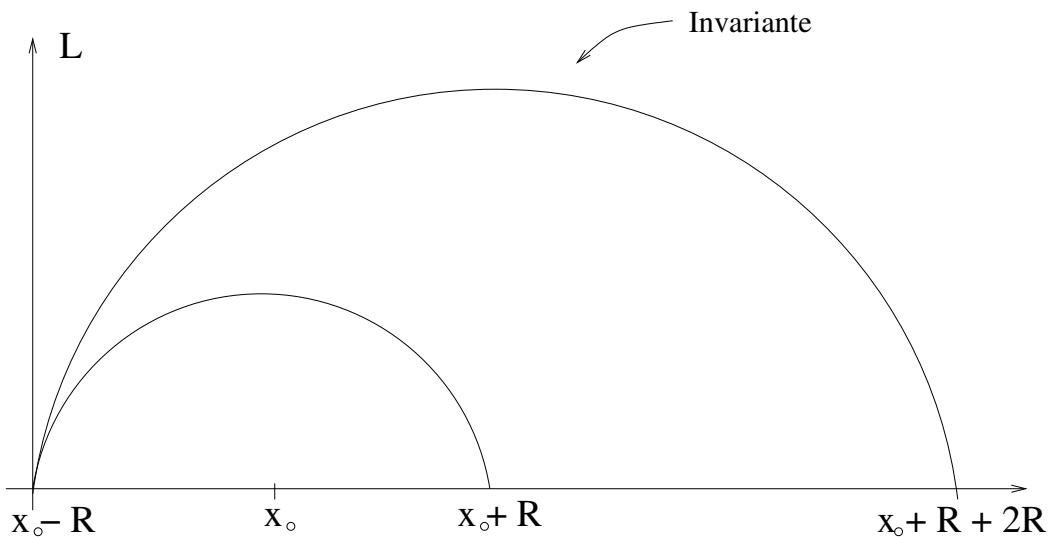


Figura 1.6: A inversão I

**Teorema 1.56.** Por dois pontos de  $\mathbb{H}^2$  passa exatamente uma geodésica. As únicas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  são as semi-retas verticais e os semi-círculos ortogonais ao eixo real.

*Demonstração.* Usando que por dois pontos distintos  $p, q \in \mathbb{H}^2$  passa uma única geodésica (se eles estão na mesma reta vertical, pela Proposição 1.54), ou um semi-círculo  $\gamma$  ortogonal ao eixo real (caso contrário) que é uma geodésica, pela Proposição 1.55.

$R$  é a distância Euclidiana entre  $p$  e  $x_0$ . Assim, mostramos a existência e a unicidade no caso em que os dois pontos estão alinhados verticalmente e mostramos a existência no caso contrário.

Consideremos uma imersão  $I$  que leva  $\gamma$  sobre a semi-reta vertical  $L$  passando pelo ponto  $(x_0 - R, 0)$ . Se  $\tilde{\gamma}$  é uma geodésica que também passa por  $p$  e  $q$ ,  $I(\gamma)$  e  $I(\tilde{\gamma})$  são geodésicas de

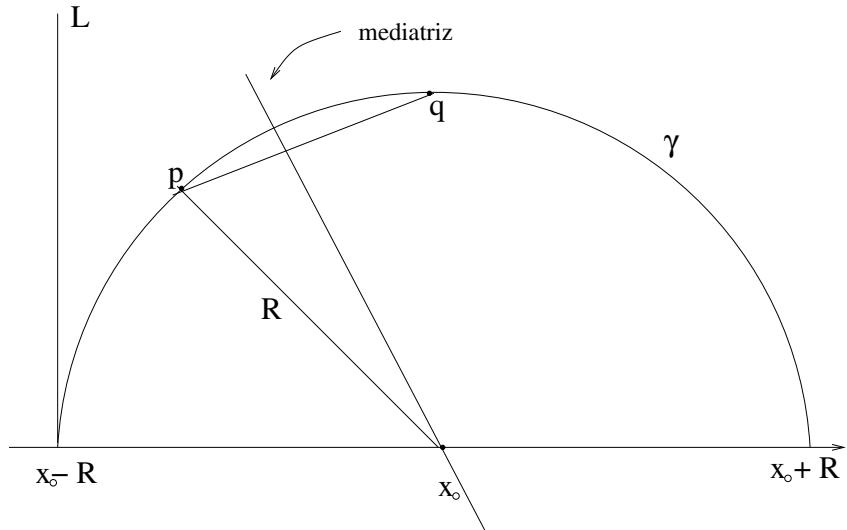


Figura 1.7: Construção da geodésica que passa por dois pontos de  $\mathbb{H}^2$

$\mathbb{H}^2$ , já que  $I$  é uma isometria, passando por  $I(p)$  e  $I(q)$ , que estão alinhados verticalmente. Pela Proposição 1.54,  $I(\tilde{\gamma}) \subset I(\gamma)$  e, como  $I$  é uma bijeção,  $\tilde{\gamma} \subset \gamma$ , seguindo a unicidade.

Segue, também, da demonstração, a segunda afirmação do teorema.  $\square$

Seja  $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$ .

Seja o difeomorfismo  $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$  definida por;  $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$

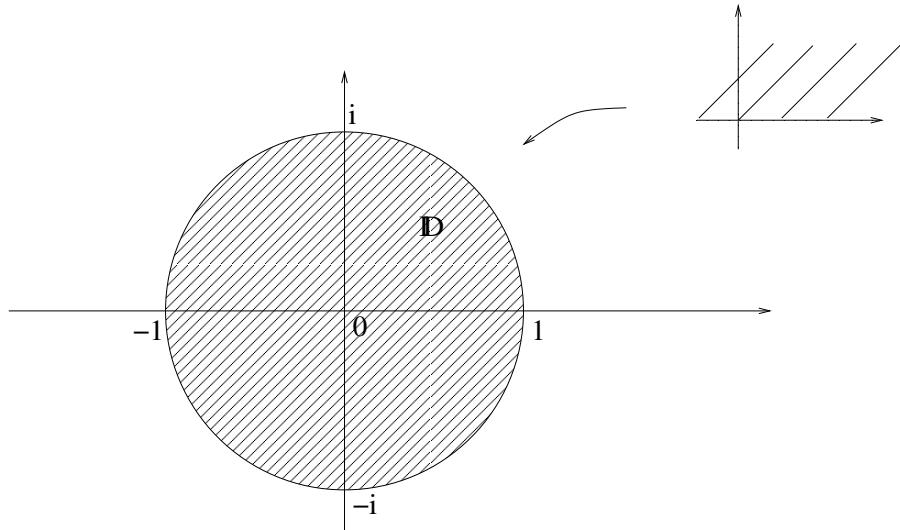


Figura 1.8: Bordo assintótico:  $\partial_\infty \mathbb{D} = S^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

**Proposição 1.57.** Existe uma única métrica  $g_{\mathbb{D}}$  em  $\mathbb{D}$  tal que  $\varphi$  seja uma isometria de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$

sobre  $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ :

$$\frac{4\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{(1 - |w|^2)^2}, |w| < 1$$

Onde  $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$  é o disco de Poincaré ou o modelo do disco do espaço hiperbólico.

**Teorema 1.58.** As geodésicas de  $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$  são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais ao bordo de  $\mathbb{D}$ .

A demonstração se dá usando a isometria  $\varphi$  e que a transformação de Möbius  $\varphi$  leva retas e círculos em retas e círculos.

## 1.6 Grupo Quociente

Uma referência para esta seção é [15].

Sejam  $(X, \tau)$ ,  $Y$  um conjunto não vazio e  $f : X \rightarrow Y$  sobrejetiva. Definamos em  $Y$  a seguinte topologia:

$$\tau_f = \{V \subset Y; f^{-1}(U) \in \tau\}$$

$\tau_f$  é topologia sobre  $Y$ , dita topologia quociente em  $Y$  induzida por  $f$ .

**Definição 1.59.** Sejam  $(X, \tau), (Y, \tau_Y)$  e seja  $f : X \rightarrow Y$  sobrejetiva. A função  $f$  que induz a topologia quociente é chamada uma identificação  $\tau_Y = \tau_f$ .

### Propriedade Universal da Topologia Quociente

Sejam  $X, Y, Z$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma identificação. Então,  $g : Y \rightarrow Z$  é contínua se, e somente se,  $g \circ f$  é contínua.

Sejam  $\sim$  uma relação de equivalência sobre  $X$  e  $X/\sim$  o conjunto das classes de equivalência em  $X$ . Definimos  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  que leva  $x \mapsto [x]$  onde  $[x]$  é a classe de equivalência que contém  $x$ .  $\pi$  é dita projeção canônica e é naturalmente sobrejetiva.

**Definição 1.60.** Seja  $(X, \tau)$  espaço topológico. O par  $(X/\sim, \tau_\pi)$  é dito espaço quociente de  $X$ .

**Observação 3:** Toda variedade Riemanniana conexa pode ser obtida como quociente de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa por um subgrupo discreto de isometrias.

**Proposição 1.61.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  contínua, localmente injetiva definida em um espaço Hausdorff  $X$ . Se  $Z$  é conexo e  $g : Z \rightarrow Y$  é contínua então dois levantamentos  $\tilde{g}, \hat{g} : Z \rightarrow X$  de  $g$ , que coincidem em um ponto  $z \in Z$ , são iguais.

**Definição 1.62.** O grupo  $G$  é um grupo propriamente descontínuo do espaço  $X$ , quando para todo  $x \in X$ ,  $G$  possui uma vizinhança  $V$  tal que para todo  $g \in G$ , diferente da identidade, tem-se  $g.V \cap V = \emptyset$ . Ou seja; a órbita  $G.x$  de cada ponto do espaço  $X$  é um conjunto discreto.

**Proposição 1.63.** Seja  $G$  um grupo de homeomorfismos operando livremente no espaço  $X$ . As afirmações que seguem são equivalentes:

- i.  $G$  é propriamente descontínuo;
- ii. A projeção canônica  $p : X \rightarrow X/G$  é uma aplicação de recobrimento;
- iii.  $p : X \rightarrow X/G$  é localmente injetiva.

**Lema 1.64.** Seja  $G$  um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos do espaço topológico conexo  $X$ . Afirmamos que o grupo de automorfismos do recobrimento  $p : X \rightarrow X/G$  é precisamente o grupo  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $g \in G$ . Então, para todo  $x \in X$  temos que  $p(gx) = G.gx = G.x = p(x)$ . Logo  $p \circ g = p$  e daí,  $g \in G(X \setminus X/G)$ .

Reciprocamente, dado um automorfismo  $f : X \rightarrow X$ , fixemosmos  $x_0 \in X$  e seja  $x_1 = f(x_0)$ . Então,  $x_1$  pertence à mesma fibra que  $x_0$ , logo existe  $g \in G$  com  $gx_0 = x_1$ .

Portanto, pela Proposição 1.61,  $f$  e  $g$  são levantamentos de  $p$  que coincidem no ponto  $x_0$ . Como  $X$  é conexo, pela Proposição 1.63 temos que  $f = g$ , onde  $f \in G$ .  $\square$

**Lema 1.65.** Se  $\tilde{X}$  é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, então o grupo  $G((\tilde{X})/X)$ , dos automorfismos do recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  é isomorfo ao grupo fundamental  $\Pi_1(X, x_0)$ .

*Demonstração.* Sejam  $\tilde{x}_0, \tilde{x} \in \tilde{X}$  e  $\alpha \in \Pi_1(X, x_0)$  correspondente ao automorfismo  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ . Seja o caminho  $\tilde{b}$  em  $\tilde{X}$  que liga  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x}_0$  tal que  $b = p \circ \tilde{b}$ . Tomemos  $a \in \alpha$  e  $x = p(\tilde{x})$ . Então,  $bab^{-1}$  é um caminho fechado com base no ponto  $x$ . O levantamento de  $bab^{-1}$  a partir de  $\tilde{x}$  termina em  $f(\tilde{x}) = \tilde{y} \in p^{-1}(x)$ .  $\square$

## 1.7 Formas Diferenciais

As referências para esta seção são [3] e [16].

**Definição 1.66.** Uma  $1 - forma$  diferencial em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $\alpha : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

- i.  $\alpha_{p_0}$ , dada por  $\alpha_{p_0} = \alpha(p_0, v)$  com  $p_0$  fixado, é linear;
- ii.  $\alpha_{v_0}$ , dada por  $\alpha_{v_0}(p) = \alpha(p, v_0)$ , é diferenciável.

Seja  $dx_i$  definido como;

$$dx_i(b_1e_1 + \dots + b_ne_n) = b_i$$

Por (i),

$$\begin{aligned} \alpha(p, v) &= \alpha(p, b_1e_1 + \dots + b_ne_n) = \alpha(p, b_1e_1) + \dots + \alpha(p, b_ne_n) = \alpha(p, e_1)b_1 + \dots + \alpha(p, e_n)b_n = \\ &= \alpha(p, e_1)dx_1(v) + \dots + \alpha(p, e_n)dx_n(v) = a_1(p)dx_1(v) + \dots + a_n(p)dx_n(v) \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\alpha = a_1dx_1 + \dots + a_ndx_n = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$$

**Definição 1.67.** Uma  $2-forma$  diferencial em  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $\beta: U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

- i.  $\beta_{p_0}$ , dada por  $\beta_{p_0} = \beta(p_0, v, w)$ , é bilinear alternada;
- ii.  $\beta_{(v_0, w_0)}$ , dada por  $\beta(p, v_0, w_0)$  é aplicação diferenciável.

Escrevendo

$$v = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$$

e

$$w = b_1e_1 + \dots + b_ne_n$$

e definindo

$$dx_i \wedge dx_j(v, w) = a_i b_j - a_j b_i$$

Temos que,

$$\beta(p, v, w) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(p) dx_i \wedge dx_j(v, w)$$

Logo, podemos escrever

$$\beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

Dadas duas 1-formas  $\alpha$  e  $\beta$ , definimos  $(\alpha \wedge \beta)(p, v, w) =$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \beta(p, v) & \beta(p, w) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha(p, v) \cdot \beta(p, w) - \alpha(p, w) \cdot \beta(p, v)$$

$\alpha \wedge \beta$  é uma 2-forma, chamada o produto exterior de  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Definição 1.68.** Uma  $n$ -forma diferencial em  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  
 $\eta : U \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- i.  $\eta_{p_0}$  é  $n$ -linear alternada;
- ii.  $\eta_{v_{10}, \dots, v_{n0}}$  é aplicação diferenciável.

## 1.8 Medida

Uma referência para esta seção é [12].

**Definição 1.69.** Se  $X$  é um conjunto não-vazio, uma álgebra de conjuntos em  $X$  é uma coleção não vazia  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  de subconjuntos de  $X$  que é fechada sob uniões finitas e complementares, isto é:

- i. Se  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$  então  $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$ .
- ii. Se  $E \in \mathcal{A}$ , então  $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$ .

**Definição 1.70.** Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  é uma álgebra que é fechada também sob uniões enumeráveis, ou seja, se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ , então  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{A}$ .

Seja  $X$  um espaço topológico. Então a  $\sigma$ -álgebra gerada pela família de conjuntos abertos de  $X$  é chamada a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$ , denotada por  $\mathcal{B}_x$ , seus elementos são chamados de conjuntos de Borel. Portanto,  $\mathcal{B}_x$  inclui conjuntos abertos, conjuntos fechados, interseções enumeráveis de conjuntos abertos, uniões enumeráveis de conjuntos fechados, e assim por diante.

**Definição 1.71.** Seja  $X$  um conjunto equipado com uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ . Uma medida em  $\mathcal{M}$  é uma função  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  que satisfaz:

- i.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii. Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  é uma coleção enumerável disjunta, então  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$  (Propriedade da aditividade enumerável).

$(X, \mathcal{M})$  é chamado um espaço mensurável. Os conjuntos em  $\mathcal{M}$  são chamados conjuntos mensuráveis e  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é chamado um espaço de medida.

**Definição 1.72.** Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $\mu(X) < \infty$  dizemos que  $\mu$  é uma medida finita.

**Proposição 1.73.** Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Valem as propriedades:

- i. (monotonicidade) Se  $E, F \in \mathcal{M}$  e  $E \subset F$ , então  $\mu(E) \leq \mu(F)$ ;
- ii. (subaditividade) Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ , então  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ ;
- iii. (continuidade por baixo) Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  e  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , então  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$ ;
- iv. (continuidade por cima) Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  e  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$  e  $\mu(E_n) < \infty$  para algum  $n$ , então  $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$ .

### Medidas completas

**Definição 1.74.** Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $\mu(E) = 0$ , dizemos que  $E$  é um conjunto de medida nula. Uma afirmação que é válida para todos os pontos  $x \in X$  com exceção de pontos pertencentes a um conjunto de medida nula é dita afirmação verdadeira para quase todo ponto (q.t.p.).

**Definição 1.75.** Uma medida que contém todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula é chamada uma medida completa.

## 2 *Pontos no Infinito e Visibilidade*

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana conexa, completa de dimensão  $n \geq 2$ . Assumiremos que as geodésicas têm velocidade unitária.

Dizemos que uma geodésica é uma geodésica maximal se seu domínio for  $\mathbb{R}$ , é um raio geodésico se seu domínio for o intervalo  $[0, \infty]$ , e que é um segmento geodésico se seu domínio for um intervalo compacto.

Seja  $H$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e sem pontos conjugados. Se  $M$  não for simplesmente conexa podemos representar  $M$  como uma variedade quociente  $H / D$ , onde  $H$  é o recobrimento universal de  $M$  e  $D$  é o grupo das transformações de recobrimento, isomorfo ao grupo fundamental  $\pi_1(M)$ .

### 2.1 Visibilidade

**Definição 2.1** (Axioma da Visibilidade Uniforme). Seja  $\tilde{M} = H$  denotando o recobrimento universal de  $M$ .  $H$  é dita de visibilidade se, dados  $p \in H$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $R = R(p, \varepsilon) > 0$  tal que se  $\sigma : [a, b] \rightarrow H$  é uma geodésica com  $d(p, \sigma) \geq R$  então  $\angle_p(\sigma(a), \sigma(b)) \leq \varepsilon$ .

Ou seja, se um segmento de geodésica  $\sigma$  está suficientemente longe de  $p$  então, não importando o tamanho de  $\sigma$ , quaisquer dois de seus pontos subentendem um ângulo arbitrariamente pequeno em  $p$ .

$H$  é de visibilidade uniforme se, na Definição 2.1,  $R$  não depende de  $p$ .  $M$  é de visibilidade (uniforme) se  $H$  for de visibilidade (uniforme).

Uma variedade  $M$ , sem pontos conjugados, satisfaz o axioma da visibilidade uniforme se seu recobrimento  $H$ , simplesmente conexo, o satisfaz.

**Observação 4:** Uma variedade compacta  $M$ , com curvatura  $K \leq c < 0$  é variedade de visibilidade uniforme.

No apêndice, mostraremos que uma superfície compacta de curvatura negativa igual a  $-1$

é de visibilidade.

## 2.2 Geodésicas Assintóticas

Em toda esta seção  $H$  é de visibilidade uniforme.

Se  $p$  e  $q$  são pontos distintos de  $H$ ,  $\gamma_{pq}$  denota a única geodésica de velocidade unitária tal que  $\gamma_{pq}(0) = p$ ,  $\gamma_{pq}(d) = q$  com  $d = d(p, q)$ .

Um ponto no infinito é uma classe de equivalência de geodésicas assintóticas de  $H$ . O conjunto de todos os pontos no infinito é chamado conjunto das classes de equivalência das geodésicas do bordo de  $H$ , denotado por  $H(\infty)$ .

Sejam  $H(\infty)$  o conjunto dos pontos no infinito e  $\bar{H} = H \cup H(\infty)$ .

Seja  $\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow H$  uma geodésica em  $H$ . Denotamos a classe de equivalência da geodésica  $\gamma(t)$  por  $\gamma(\infty)$  e, a classe de equivalência de  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(-t)$  por  $\gamma(-\infty)$ . Dizemos que a geodésica  $\gamma(t)$  liga os pontos  $x$  e  $y$  em  $H(\infty)$  se  $\gamma(\infty) = y$  e  $\gamma(-\infty) = x$ .

**Definição 2.2.** Se  $p$  e  $q$  são pontos distintos em  $H$  então  $V(p, q)$  é o único vetor unitário  $v$  de  $p$  tal que  $q = \exp_p(tv)$  onde  $t = d(p, q)$ .

Se  $p \in H$  e  $x \in H(\infty)$ , então  $V(p, x)$  é a velocidade inicial da única geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(\infty) = x$ .

**Definição 2.3.** Seja  $p \in H$  e sejam  $q, r$  pontos de  $\bar{H} = H \cup H(\infty)$ , distintos de  $p$ . Então,  $\angle_p(q, r)$  é o ângulo subentendido por  $V(p, q)$  e  $V(p, r)$ .

Ou seja, o ângulo sustentado pelos pontos  $q, r$  de  $H$  em um ponto diferente  $p$  é definido por  $\angle_p(q, r) = \angle(\gamma'_{pq}(0), \gamma'_{pr}(0))$  e, está compreendido entre  $0$  e  $\pi$ .

**Definição 2.4.** Uma sequência  $p_n$  de  $H$  é não limitada se  $d(p_n, p) \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  para algum  $p$  em  $H$ .

Pela desigualdade triangular, se  $d(p_n, p) \rightarrow \infty$  para algum  $p \in H$ ,  $d(p_n, q) \rightarrow \infty$ ,  $\forall q \in H$ .

**Definição 2.5.** As geodésicas  $\gamma(t), \sigma(t)$  em  $H$  são ditas assintóticas se existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d(\gamma(t), \sigma(t)) \leq c$  para  $t \geq 0$ .

**Propriedades:**

- i. A relação de ser assintótica é uma relação de equivalência;

- ii. Se duas geodésicas assintóticas possuem um ponto em comum, elas coincidem a menos de uma reparametrização (Green); O item (ii) é válido para  $H$  sem pontos conjugados.

**Proposição 2.6.** Seja  $\gamma(t)$  uma geodésica em  $H$  e seja  $p$  um ponto qualquer de  $H$ . Então existe uma única geodésica  $\sigma(t)$  tal que  $\sigma(0) = p$  e  $\sigma(t)$  e  $\gamma(t)$  são assintóticas.

A função  $\gamma : [-\infty, \infty] \rightarrow H$  é chamada a extensão assintótica de  $\gamma$ .

*Demonstração.* Sejam  $\sigma_1(t)$  e  $\sigma_2(t)$  geodésicas tais que os pares  $\gamma(t)$ ,  $\sigma_1(t)$  e  $\gamma(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  são assintóticas e  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$ . Como a relação assintótica é uma relação de equivalência, pela transitividade temos que,  $\sigma_1(t)$  e  $\sigma_2(t)$  são assintóticas. Logo, existe  $c > 0$  tal que  $d(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \leq c$ , para todo  $t \geq 0$ .

Pelo axioma da visibilidade uniforme,  $\angle_p(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V(p, \sigma_1(t))$  e  $V(p, \sigma_2(t))$  são constantes em  $t$ , temos que  $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ .

A existência decorre do seguinte lema.

**Lema 2.7.** Sejam  $p_n, q_n, r_n$  sequências em  $H$ , tais que  $q_n \rightarrow q$ ,  $r_n \rightarrow r$  e  $p_n$  é divergente. Sejam  $\gamma(t), \sigma(t)$  geodésicas com velocidade inicial  $v, w$  respectivamente, tal que  $V(q_n, p_n) \rightarrow v$  e  $V(r_n, p_n) \rightarrow w$ . Então,  $\gamma(t)$  e  $\sigma(t)$  são assintóticas.

*Demonstração.* Seja  $A$  uma constante tal que, se  $\sigma$  é segmento de geodésica cujas extremidades subentendem um ângulo maior do que ou igual a  $\frac{\pi}{2}$  em um ponto  $p$ , então  $d(p, \sigma(t)) \leq A$ .

Seja  $\gamma_n$  geodésica com velocidade inicial  $V(q_n, p_n)$ . Como  $d(q_n, r_n)$  é limitada, pelo axioma da visibilidade uniforme, temos que existe  $T > 0$  tal que, para  $t \geq T$  e para todo inteiro  $n$ ,  $\angle_{\gamma_n(t)}(q_n, r_n) \leq \frac{\pi}{2}$ . Fixemos  $t \geq T$ . Para algum inteiro  $n > 0$  e  $s > t$ , seja  $\sigma_n^s$  geodésica com velocidade inicial  $V(r_n, \gamma_n(s))$ . Como  $\angle_{\gamma_n(t)}(\gamma_n(s), r_n) \geq \frac{\pi}{2}$ , pois  $\angle_{\gamma_n(t)}(q_n, r_n) \leq \frac{\pi}{2}$  e temos a mesma tangente em  $\angle_{\gamma_n(t)}(q_n, r_n)$  e  $\angle_{\gamma_n(t)}(\gamma_n(s), r_n)$ , segue-se que a  $d(\gamma_n(t), \sigma_n^s) \leq A$ , pela Definição 2.5.

Como  $s \rightarrow \infty$ , alguma geodésica  $\sigma_n$ , que é ponto de acumulação das geodésicas  $\sigma_n^s$ , satisfaz  $d(\gamma_n(t), \sigma_n) \leq A$ , pela continuidade da função distância. E, como a escolha de  $t \geq T$  foi arbitrária, decorre da definição de  $\sigma_n$  que  $d(\gamma_n(t), \sigma_n) \leq A$  para todo  $t \geq T$  e todo inteiro  $n$ . Logo,  $d(\gamma_n(t), \sigma_n)$  é limitada a partir de  $T$ , onde temos controle do tempo. Antes de  $t$ , como  $d(q_n, r_n)$  é limitada e  $\sigma_n$  começa em  $r_n$ , podemos escolher  $c > 0$  tal que, para  $t \geq 0$  e  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $d(\gamma_n(t), \sigma_n) \leq c$ . Para  $\gamma_n(t_n) = p_n$ , com  $t_n \rightarrow \infty$ , pela visibilidade uniforme temos que o ângulo subentendido por  $\sigma_n'(0)$  e  $V(r_n, p_n)$  converge para zero. Como  $V(r_n, p_n) \rightarrow w$  e  $\sigma_n'(0) \rightarrow V(r_n, p_n)$  temos que  $\sigma_n'(0) \rightarrow w = \sigma'(0)$ . Além disso,  $V(q_n, p_n) \rightarrow v = \gamma'(0)$ .

Logo, por continuidade,  $d(\gamma(t), \sigma) \leq c$ , para  $t \geq 0$ . Pela desigualdade triangular, temos que  $d(\gamma(t), \sigma(t)) \leq d(\gamma(t), \sigma(\bar{T})) + d(\sigma(\bar{T}), \sigma(t))$ . Ou seja,  $d(\gamma(t), \sigma(t))$  é limitada superiormente para  $t \geq 0$ . Portanto,  $\gamma(t)$  e  $\sigma(t)$  são assintóticas.  $\square$

 $\square$ 

Se  $\varphi$  é uma isometria de  $H$ , a extensão assintótica de  $\varphi$  será dada por  $\varphi : \bar{H} \rightarrow \bar{H}$  definida em  $H(\infty)$  por  $\varphi(x) = (\varphi \circ \alpha)(\infty)$  se  $\alpha \in x$ . Uma consequência do Lema 2.7 é

**Lema 2.8.** Sejam  $p \in H, x \in H(\infty)$  dados. Se  $\sigma$  é geodésica de  $H$  tal que  $\sigma(\infty) = x$  então,  $V(p, \sigma(t)) \rightarrow V(p, x)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Corolário 2.9.** Sejam  $p \in H$  e  $x, y \in H(\infty)$  dados. Se  $\sigma$  é geodésica de  $H$  tal que  $\sigma(\infty) = x$  então,  $\angle_p(\sigma(t), y) \rightarrow \angle_p(x, y)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Proposição 2.10.** Se  $x$  e  $y$  são pontos distintos em  $H(\infty)$ , então existe uma geodésica  $\sigma$  tal que  $\sigma(-\infty) = x$  e  $\sigma(\infty) = y$ .

*Demonstração.* Fixemos  $p \in H$  e sejam  $\gamma, \rho$  as únicas geodésicas tais que  $\gamma(0) = \rho(0) = p$ ,  $\gamma(\infty) = x$  e  $\rho(\infty) = y$ . Seja  $\alpha_n$  o único segmento de geodésica de  $\gamma(n)$  para  $\rho(n)$  para todo inteiro  $n > 0$ . Seja  $q_n$  o ponto em  $\alpha_n$  mais próximo de  $p$  e parametrizemos  $\alpha_n$  de forma que  $\alpha_n(0) = q_n$ .

Pela visibilidade uniforme,  $d(p, q_n)$  é limitada, então  $\alpha'_n(0) \rightarrow v$ , passando a uma subseqüência, se necessário. Se  $\sigma$  é geodésica com  $\sigma'(0) = v$ , então  $\sigma(-\infty) = x$  e  $\sigma(\infty) = y$ , pelo Lema 2.7.  $\square$

## 2.3 Topologia do Cone

As referências para esta seção são [6] e [8].

Definamos uma topologia  $\tau$  em  $\bar{H}$  com as seguintes propriedades:

- i. A topologia em  $H$  induzida por  $\tau$  é a topologia inicial de  $H$ , onde  $H$  é um subconjunto aberto e denso em  $\bar{H}$ ;
- ii. Se  $\alpha$  é uma geodésica de  $H$ , a extensão assintótica é contínua;
- iii. Se  $\varphi$  é uma isometria de  $H$ , a extensão assintótica de  $\varphi$  é contínua.

Sejam  $p \in H$  e  $v \in S(p)$  (a esfera unitária em  $T_p H$ ) e  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varepsilon < \pi$ . O cone de vértice  $p$ , eixo  $v$  e ângulo  $\varepsilon$  é o conjunto

$$C_p(v, \varepsilon) = \{q \in \overline{H}; \angle_p(\gamma_v(\infty), q) < \varepsilon\}$$

onde  $\gamma_v$  denota a única geodésica unitária com  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ . Observemos que, para  $t > 0$

$\angle_p(\gamma_v(t), q) = \angle_p(\gamma_v(\infty), q) = \angle_p(v, \gamma'_{pq}(0))$ . Assim, podemos usar a notação  $C_p(x, \varepsilon)$ , com  $x \in H(\infty)$  para denotar o cone  $C_p(\gamma'_{px}(0), \varepsilon)$ .

### Propriedades dos cones

- i. Se  $x, y \in H(\infty)$  e  $x \in C_p(y, \varepsilon)$ , então existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que  $C_p(x, \delta) \subset C_p(y, \varepsilon)$ ;
- ii. Para cada  $x \in H(\infty)$  seja  $N(x) = \{V = \bigcap_{i=1}^k C_{p_i}(x, \varepsilon_i); p_i \in H, \varepsilon_i > 0\}$  ( $V$  é a interseção finita de cones com eixo em  $x$ ). Se  $V \in N(x)$ , então  $x \in V$  e  $V \cap H$  é aberto, não vazio em  $H$ ;
- iii. Se  $V \in N(x)$ ,  $W \in N(y)$  e  $z \in V \cap W \cap H(\infty)$ , então existe  $U \in N(z)$  tal que  $U \subset V \cap W$ .

*Demonstração.* i. Se  $x \in C_p(y, \varepsilon)$ , então  $\angle_p(x, y) = \varepsilon' < \varepsilon$ . Seja  $\delta = \varepsilon - \varepsilon' > 0$ . Se  $z \in C_p(x, \delta)$ , temos que  $\angle_p(z, x) < \delta$ , portanto  $\angle_p(z, y) \leq \angle_p(z, x) + \angle_p(x, y) < \delta + \varepsilon' = \varepsilon$ .

ii. É suficiente provar para  $V = C_p(x, \varepsilon)$ . Seja  $q \in C_p(x, \varepsilon)$ , ou seja  $\angle_p(\gamma'_{pq}(0), \gamma'_{px}(0)) = \varepsilon' < \varepsilon$ . Seja  $\delta = \varepsilon - \varepsilon' > 0$ , então  $\angle(w, \gamma'_{px}(0)) \leq \angle(w, \gamma'_{pq}(0)) + \angle(\gamma'_{pq}(0), \gamma'_{px}(0))$ . Se  $\angle(w, \gamma'_{pq}(0)) < \delta$ , então  $\angle(w, \gamma'_{px}(0)) < \delta + \varepsilon' = \varepsilon$ . Como  $\exp_p$  é homeomorfismo e

$$W = \{w \in T_p H; \angle(w, \gamma'_{pq}(0)) < \delta\}$$

é aberto, temos que  $\exp_p(W)$  é aberto e  $q \in \exp_p(W) \subset C_p(x, \varepsilon)$ .

iii. Sejam  $V = \bigcap_{i=1}^m C_{p_i}(x, a_i)$ ,  $W = \bigcap_{j=1}^n C_{q_j}(y, b_j)$  e  $z \in V \cap W \cap H(\infty)$ . Por (i), existem  $0 < a'_i < a_i$  com  $C_{p_i}(z, a'_i) \subset C_{p_i}(x, a_i)$  e  $0 < b'_j < b_j$  com  $C_{q_j}(z, b'_j) \subset C_{q_j}(y, b_j)$ .

Seja  $U = \bigcap_{i=1}^m C_{p_i}(z, a'_i) \cap \bigcap_{j=1}^n C_{q_j}(z, b'_j)$ . Então, temos que  $U \subset V \cap W$ .  $\square$

Pelas propriedades, podemos verificar que, se  $\beta$  é uma base da topologia de  $H$ ,  $\beta' = \beta \cup \{N(x); x \in H(\infty)\}$  é base de uma topologia para  $\overline{H}$  que denotamos por  $\tau$ . Verifiquemos que  $\tau$  tem as propriedades enunciadas para a topologia definida.

Pela propriedade (i), temos que  $H$  é aberto e denso em  $\bar{H}$  e para todo  $x$  em  $H(\infty)$ ,  $N(x)$  forma uma base local em  $x$ . Se  $p \in H$  temos que  $\gamma_{p\alpha}(\infty)$  é a única geodésica assintótica a  $\alpha$  pelo ponto  $p$ . Daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma'_{p\alpha(t_n)}(0) = \gamma'_{p\alpha(\infty)}(0)$$

Além disso, se  $\bar{\varphi}$  é a extensão assintótica da isometria  $\varphi$  temos que,

$$\bar{\varphi}(C_p(v, \varepsilon)) = C_{\varphi(p)}(d\varphi_p v, \varepsilon)$$

**Definição 2.11.** Sejam  $p \in H$ ,  $v$  vetor unitário em  $p$ ,  $0 < \varepsilon < \pi$  e  $R > 0$  dados. Um cone truncado  $T$  com vértice  $p$ , eixo  $x$ , ângulo  $\varepsilon$  e raio  $R$  é o conjunto

$$T_p(x, \varepsilon, R) = C_p(x, \varepsilon) \setminus \{q \in H; d(p, q) \leq R\}$$

**Lema 2.12** (Propriedade dos Cones Truncados). Sejam  $T$  um cone truncado de raio  $R$  e vértice  $r$ ,  $x \in T \cap H(\infty)$  e  $B = \{q \in \bar{H}; d(q, r) > R \text{ e } \angle_r(q, x) \leq \delta\} \subset T$  para algum  $\delta > 0$ . Existe um cone truncado  $S$  com vértice  $p$  tal que  $x \in S$  e  $S \cap H \subseteq B$ .

*Demonstração.* Supondo que a afirmação fosse falsa, existiria uma sequência  $q_n \subseteq H$  tal que  $\angle_p(q_n, x) \rightarrow 0$ ,  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$  e  $q_n \notin B$  para todo inteiro  $n$ . Passando a uma subsequência  $V(r, q_n) \rightarrow v \neq V(r, x)$ . Como  $V(p, q_n) \rightarrow V(p, x)$ , o Lema 2.7 implica que as geodésicas com velocidade inicial  $v$  e  $V(p, x)$  são assintóticas, contradição.

Portanto, para algum cone truncado  $S$  com vértice  $p$  e raio  $A$ ,  $x \in S$  e  $S \cap H \subseteq B$ .  $\square$

**Proposição 2.13.** i. Os abertos de  $H$  e os cones truncados formam uma base para a topologia de  $\bar{H}$ .

ii. Para qualquer ponto  $p \in H$ , os cones truncados com vértice  $p$  formam uma base local para esta topologia em pontos de  $H(\infty)$ .

*Demonstração.* Basta provar que para qualquer ponto  $p \in H$ , qualquer cone truncado  $T$  e qualquer  $x \in T \cap H(\infty)$  existe cone truncado  $S$  com vértice  $p$  tal que  $x \in S \subseteq T$ , pois a interseção de dois cones truncados com vértice  $p$  contém um cone truncado com vértice  $p$ . Seja  $T$  com raio  $R$  e vértice  $r$ . Para algum  $\delta > 0$ ,  $B = \{q \in \bar{H}; d(q, r) > R \text{ e } \angle_r(q, x) \leq \delta\} \subseteq T$ . Pelo Lema 2.12, temos que existe um cone truncado  $S$  com vértice  $p$  e raio  $A$  tal que  $x \in S$  e  $S \cap H \subseteq B$ . Sejam  $y \in S \cap H(\infty)$  e  $\gamma$  a única geodésica tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(\infty) = y$ . Para  $t > A$ ,  $\gamma(t) \in S \cap H \subseteq B$  e  $\angle_r(x, \gamma(t)) \leq \delta$ . Pelo Corolário 2.9,  $\angle_r(x, \gamma(t)) \rightarrow \angle_r(x, y) \leq \delta$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo,  $y \in B$  e  $S \subseteq B \subseteq T$ .  $\square$

Chamamos esta topologia de topologia do cone para  $\bar{H}$ .

**Corolário 2.14.** Sejam  $p \in H$  e  $B_p$  o conjunto de vetores tangentes em  $p$  de norma menor ou igual a 1. A função  $F_p : B_p \rightarrow \overline{H}$  definida por:

$$F_p(v) = \begin{cases} \exp_p\left(\frac{v}{1-|v|}\right), & se |v| < 1 \\ \gamma_v(\infty), & se |v| = 1 \end{cases}$$

onde  $\gamma_v$  denota a geodésica com velocidade inicial  $v$ , é um homeomorfismo que aplica  $S(p)$  sobre  $H(\infty)$  e  $\overline{B}$  em  $\overline{H}$ . Em consequência,  $\overline{H}$  é compacto.

*Demonstração.* Fixemos  $p \in H$ . Então  $F_p$  é uma bijeção que aplica  $S(p)$  sobre  $H(\infty)$ .  $F_p$  é contínua em  $B_p$  pois: supondo  $v_n \rightarrow v$  quando  $n \rightarrow \infty$  com  $|v| = 1$ , para  $|v_n| < 1$ ,  $d(F_p(v_n), p) = \frac{v_n}{1-|v_n|} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e os ângulos  $\angle_p(F_p(v_n), \gamma_v(\infty)) = \angle(\frac{v_n}{|v_n|}, v) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $B_p$  é compacta e  $\overline{H}$  é de Hausdorff, temos que  $F_p$  é um homeomorfismo.  $\square$

## 2.4 Continuidade de Algumas Funções

**Proposição 2.15.** Seja  $A = \{(p, q) \in H \times \overline{H}; p \neq q\}$ . Então, a função  $V : A \rightarrow SH$ ,  $(p, q) \mapsto V(p, q)$  é contínua.

*Demonstração.* Se  $(p, q) \in H \times H$  a continuidade segue da continuidade da aplicação exponencial.

Suponhamos que  $(p, q) \in H \times \overline{H(\infty)}$ . É suficiente mostrar que se  $\{p_n, q_n\} \subseteq A$  converge para  $(p, q)$  então  $V(p_n, q_n)$  converge para  $V(p, q)$ .

Seja  $q'_n \subseteq H$  tal que  $d(p_n, q'_n) \rightarrow \infty$  e  $V(p_n, q'_n) = V(p_n, q_n)$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade que  $q_n \subseteq H$ . Seja  $v$  o limite de uma subsequência  $V(p_{n_k}, q_{n_k})$  de  $V(p_n, q_n)$ . Passando a uma subsequência, seja  $V(p, q_{n_k}) \rightarrow v^*$ . Pelo Lema 2.7,  $v = v^*$ . Logo  $V(p, q_{n_k}) \rightarrow V(p, q)$  se  $q_{n_k} \rightarrow q$ .

Portanto,  $V(p, q)$  é o único valor de aderência de  $V(p_n, q_n)$ .  $\square$

**Proposição 2.16.** Sejam  $v_n$  sequências de vetores unitários em  $H$  que convergem para o vetor  $v$  e  $t_n \rightarrow \infty$ . Então  $\gamma_{v_n}(t_n) \rightarrow \gamma_v(\infty)$ .

*Demonstração.* Sejam  $q_n = \gamma_{v_n}(t_n)$  e  $x = \gamma_v(\infty)$ .

Então  $V(p_n, q_n) = (p_n, \gamma_{v_n}(t_n)) = (p_n, \gamma'_{p_n q_n}(0)) = (p_n, v_n)$  e  $V(p, x) = (p, \gamma_v(\infty)) = (p, \gamma'_{pq}(0)) = (p, v)$

Consideremos uma subsequência convergente qualquer de  $q_n$ .

Se  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ , como  $p_n \rightarrow p$  temos que  $V(p_n, q_n) \rightarrow V(p, y)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas, pela continuidade de  $V$  (Proposição 2.15)  $V(p_n, q_n) = (p_n, v_n) \rightarrow (p, v) = V(p, x)$ , o que implica que  $y = x$ .

Da compactade de  $\overline{H}$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ . □

## 3 *Conjunto Limite*

### 3.1 Introdução

Seja  $I(H)$  o grupo das isometrias de  $H$  e  $D$  um subgrupo de  $I(H)$ . O conjunto dos pontos de acumulação em  $H(\infty)$  de uma órbita  $D(p) = \{\varphi(p); \varphi \in D\}$  com  $p \in H$ , é chamado o conjunto limite  $L(D)$  de  $D$  em  $H(\infty)$ . Ou seja,  $L(D) = \overline{D(p)} \cap H(\infty)$ , onde  $(-)$  é o fecho na topologia do cone.

#### Propriedades:

- i.  $L(D)$  é fechado em  $H(\infty)$  e independe do ponto em  $H$ ;
- ii.  $L(D)$  é invariante por  $N(D)$ , o normalizador de  $D$ , em  $I(H)$  e, portanto, é invariante por  $D$ ;

*Demonstração.* i. Que  $L(D)$  é fechado, segue da definição. Mostremos que  $L(D)$  não depende de  $p \in H$ .

Sejam  $x \in \overline{D(p)} \cap H(\infty)$  e  $q \in H$ . Se  $U$  é vizinhança qualquer de  $x$ , existe vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $N_\varepsilon(V) \subseteq U$  onde  $\varepsilon = d(p, q)$ . Por hipótese existe  $\varphi \in D$  tal que  $\varphi(p) \in V$ . Então  $\varphi(q) \in U$  e segue que  $x \in \overline{D(q)} \cap H(\infty)$ .

- ii. Para provar a invariância é suficiente mostrar que, se  $x \in \overline{D(p)} \cap H(\infty)$ , então  $v(x) \in \overline{D(v(p))} \cap H(\infty)$ . Seja  $U$  vizinhança de  $v(x)$ , então, pela propriedade (ii) da topologia do cone temos que,  $v^{-1}(U)$  é vizinhança de  $x$ . Logo, existe  $\varphi \in D$  tal que  $\varphi(p) \in v^{-1}(U)$ . Dessa forma  $v(\varphi(p)) \in U$ . Então,  $v \in N(D)$  e existe  $\psi \in D$  tal que  $v\varphi = \psi v$ . Logo,  $\psi v(p) \in U$  e  $v(x) \in \overline{D(v(p))} \cap H(\infty)$ .

□

Sejam  $A \subseteq \overline{H}$  e  $p \notin A$ . Definimos o ângulo subtendido por  $A$  em  $p$  por

$$\angle_p(A) = \sup\{\angle_p(a, b); a, b \in A\}$$

**Proposição 3.1.** Sejam  $x \in H(\infty)$  e  $U$  um conjunto aberto em  $\overline{H}$  contendo  $x$ . Se  $p_n \subseteq H$  é sequência tal que  $p_n \rightarrow x$  então  $\angle_{p_n}(\overline{H} \setminus U) \rightarrow 0$ .

*Demonastração.* Vamos mostrar que para quaisquer sequências  $a_n, b_n \in \overline{H} \setminus U$ ,  $\angle_{p_n}(a_n, b_n) \rightarrow 0$ .

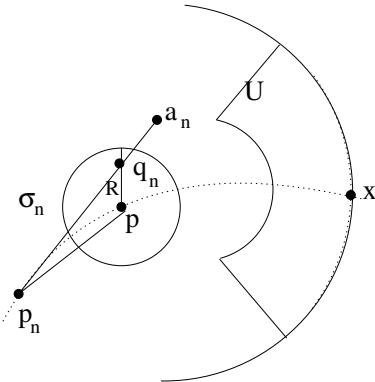


Figura 3.1:

Seja  $p \in H \setminus U$ . Mostremos que  $\angle_{p_n}(a_n, p) \rightarrow 0$  para qualquer sequência  $a_n \in \overline{H} \setminus U$ .

Pela Proposição 2.13, podemos assumir que  $U$  é um cone truncado com vértice  $p$ . Seja  $\sigma_n$  a única geodésica que vai de  $p_n$  para  $a_n$ . Como  $a_n \in \overline{H} \setminus U$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para  $n$  suficientemente grande  $\angle_p(p_n, a_n) \geq \varepsilon$ .

Pela visibilidade uniforme, existe  $R > 0$  tal que,  $d(p, \sigma_n) \leq R, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Seja  $q_n$  ponto em  $\sigma_n$  tal que,  $d(p, q_n) \leq R$ . Para  $n$  grande,  $q_n \neq p_n$  e  $\angle_{p_n}(q_n, p) = \angle_{p_n}(a_n, p)$ . Mas, pela visibilidade uniforme, como  $d(p, q_n)$  é limitada e  $p_n \rightarrow x \in H(\infty)$ , concluímos que  $\angle_{p_n}(q_n, p) \rightarrow 0$ . Portanto,  $\angle_{p_n}(a_n, p) \rightarrow 0$ .  $\square$

## 3.2 A Condição de Dualidade

**Definição 3.2.** Dois pontos  $x, y \in H(\infty)$ , não necessariamente distintos, são duais com respeito a  $D$ , se existirem abertos  $U, V$  contendo  $x, y$ , respectivamente e existir  $\phi \in D$  tal que,  $\phi(\overline{H} \setminus U) \subseteq V$ .

**Observação 5:**  $\phi(\overline{H} \setminus U) \subseteq V \Leftrightarrow \phi^{-1}(\overline{H} \setminus V) \subseteq U$ .

Sejam  $D$  um subgrupo de  $I(H)$  que opera livremente e de maneira propriamente descontínua em  $H$  e  $M = H \diagup D$  uma variedade completa, não simplesmente conexa. Dizemos que  $D$  satisfaz a condição de dualidade se para toda geodésica em  $H$ ,  $\gamma(-\infty)$  e  $\gamma(\infty)$  são duais relativos a  $D$ .

**Proposição 3.3.** Dois pontos  $x$  e  $y$  em  $H(\infty)$  são duais se, e somente se, existe uma sequência  $\phi_n \subseteq D$  tal que, para qualquer ponto  $p \in H$ ,  $\phi_n^{-1}(p) \rightarrow x$  e  $\phi_n(p) \rightarrow y$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ )

Suponhamos que  $x, y \in H(\infty)$  sejam duais e sejam  $\{U_n\}$ ,  $\{V_n\}$  bases locais para a topologia do cone em  $x$  e  $y$ , respectivamente. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\phi_n \in D$  tal que,  $\phi_n(\overline{H} \setminus U) \subseteq V_n$  e  $\phi_n^{-1}(\overline{H} \setminus V_n) \subseteq U_n$ .

Para qualquer ponto  $p \in H$ ,  $p \in (\overline{H} \setminus U_n) \cap (\overline{H} \setminus V_n)$  para  $n$  suficientemente grande. Então,  $\phi_n(p) \in V_n$  e  $\phi_n^{-1}(p) \in U_n$ . Logo,  $\phi_n(p) \rightarrow y$  e  $\phi_n^{-1}(p) \rightarrow x$ .

( $\Leftarrow$ )

Suponhamos que exista sequência  $\phi_n \subseteq D$  tal que para algum  $p \in H$ ,  $\phi_n^{-1}(p) \rightarrow x$  e  $\phi_n(p) \rightarrow y$ .

Sejam  $U, V$  abertos arbitrários contendo  $x$  e  $y$  respectivamente. Pela Proposição 3.1,

$$\angle_p \phi_n(\overline{H} \setminus U) = \angle_{\phi_n^{-1}(p)}(\overline{H} \setminus U) \rightarrow 0 \text{ para qualquer } p \in H.$$

Tomemos  $p \in \overline{H} \setminus U$ . Então,  $\phi_n(p) \in \phi_n(\overline{H} \setminus U)$ .

Como  $d(\phi_n^{-1}(p), \overline{H} \setminus U) \rightarrow \infty$  e, por hipótese,  $\phi_n(p) \rightarrow y$  temos que,  $\phi_n(\overline{H} \setminus U) \subseteq V$  para  $n$  suficientemente grande. Portanto,  $x$  e  $y$  são duais.  $\square$

Uma consequência da Proposição 3.3 é que pontos duais estão em  $L(D)$  e que qualquer ponto em  $L(D)$  tem um ponto dual.

**Proposição 3.4.** Seja  $x \in H(\infty)$ . O conjunto dos pontos duais a  $x$  é fechado em  $H(\infty)$  e invariante mediante  $D$ .

*Demonstração. Fechamento*

Sejam  $p \in H$  fixado e  $y_n \rightarrow y$  em  $H(\infty)$ , com cada  $y_n$  dual a  $x$ . Sejam  $U, V$  vizinhanças em  $\overline{H}$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Como  $y_n \rightarrow y$ , dado  $N > 0$  temos que, para  $n \geq N$ ,  $y_n \in V$ . Como  $x$  e  $y_n$  são duais, temos que existe  $\phi_n \subseteq D$  tal que,  $\phi_n(p) \rightarrow x \in U$  e  $\phi_n^{-1}(p) \rightarrow y_n \rightarrow y \in V$ . Então,  $y$  é dual a  $x$ .

**Invariância da dualidade mediante  $D$**

Suponhamos que  $x$  e  $y$  são duais e sejam  $p \in H$ , fixado e  $\phi \in D$  isometria dada. Queremos mostrar que  $x$  e  $\phi(y)$  são duais, ou seja, que dadas duas vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $x$  e  $\phi(y)$ , respectivamente, existe uma sequência de isometrias  $\{\varphi_n \subseteq D\}$  tal que,  $\forall p \in H$ ,  $\varphi_n^{-1}(p) \rightarrow x$  e  $\varphi_n(p) \rightarrow \phi(y)$ . Como  $x$  e  $y$  são duais, existe uma sequência de isometrias  $\{\psi_n\} \subseteq D$  tal que,  $\forall p \in H$ ,  $\psi_n^{-1}(p) \rightarrow x$  e  $\psi_n(p) \rightarrow y$ .

Fazendo  $\varphi_n = \phi \circ \psi_n$  e, como  $\phi$  é contínua, temos que,  $\varphi_n(p) = \phi(\psi_n(p)) \rightarrow \phi(y)$  e  $\varphi_n^{-1}(p) = (\phi \circ \psi_n)^{-1}(p) = \psi_n^{-1}(\phi^{-1}(p))$ . Seja  $q = \phi^{-1}(p)$ . Como

$\psi_n^{-1}(p) \rightarrow x, \forall p \in H$  em particular para  $q = \phi^{-1}(p)$ , temos que  $\psi_n^{-1}(q) \rightarrow x$ .  
Logo,  $\phi_n^{-1}(p) \rightarrow x$ .

Portanto,  $\phi(y)$  e  $x$  são duais. □

Uma outra demonstração desta proposição, utilizando somente a definição de pontos duais encontrada em 3.2 pode ser encontrada no apêndice.

Sejam  $\phi \in D$  e  $p \in H$  dados. Então, qualquer valor de aderência da sequência  $\{\phi^n(p); n \in \mathbb{Z}\}$  é ponto fixo de  $\phi$ . De fato, se  $\phi^{n_k}(p) \rightarrow x$ , então  $\phi^{n_k+1}(p) \rightarrow \phi(x)$ . Como  $d(\phi^{n_k}(p), \phi^{n_k+1}(p)) = d(p, \phi(p))$  segue que,  $\angle_p(\phi^{n_k}(p), \phi^{n_k+1}(p)) \rightarrow 0$ , pela visibilidade uniforme. Logo,  $\phi(x) = x$ .

**Proposição 3.5.** Seja  $D$  um grupo propriamente descontínuo de isometrias de  $H$ . Sejam  $\phi, \phi^*$  elementos de  $D$ .

- i. Se  $\phi$  tem pontos fixos  $x, y$  em  $H(\infty)$  então (substituindo  $\phi$  por  $\phi^{-1}$ , se necessário)  $\phi^n(q) \rightarrow x$  e  $\phi^{-n}(q) \rightarrow y$  para qualquer  $q \in H$ ;
- ii.  $\phi$  tem, no máximo, dois pontos fixos em  $H(\infty)$ ;
- iii. Suponhamos que  $\phi$  e  $\phi^*$  tenham conjuntos de pontos fixos  $\{x, y\}$  e  $\{x^*, y^*\}$ , respectivamente em  $H(\infty)$ . Então, esses conjuntos ou são disjuntos ou são idênticos.

*Demonstração.* i. Pela Proposição 2.10, existe geodésica  $\gamma$  tal que,  $\gamma(-\infty) = y$  e  $\gamma(\infty) = x$ . Para um ponto  $p$  em  $\gamma$  e qualquer inteiro  $n$ ,

$$\angle_{\phi^n(p)}(x, y) = \angle_p(\phi^n(x), \phi^{-n}(y)) = \angle_p(x, y) = \pi$$

Portanto, pela visibilidade uniforme, existe  $R > 0$  tal que,  $d(\phi^n(p), \gamma) \leq R, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Escolhamos sequências de números  $s_n, t_n$  tais que,

$$d(\phi^n(p), \gamma(s_n)) \leq R \text{ e } d(\phi^{-n}(p), \gamma(t_n)) \leq R, \text{ para todo inteiro } n \geq 0.$$

Como  $D$  é grupo propriamente descontínuo,  $s_n$  e  $t_n$  não possuem pontos de acumulação finitos. Suponhamos que alguma subsequência  $s_{n_k} \rightarrow \infty$ .

Para todo  $t \geq 0$  existe  $n > 0$ , pequeno, tal que  $t < s_n$ . Então,  $\bigcup_{n \geq 0} [s_n, s_{n+1}]$  cobre  $[0, \infty)$ , onde  $s_0 = 0$ .

Para qualquer  $n$ ,

$$|s_n - s_{n+1}| = d(\gamma(s_n), \gamma(s_{n+1})) \leq d(\gamma(s_n), \phi^n(p)) + d(\phi^n(p), \phi^{n+1}(p)) + d(\phi^{n+1}(p), \gamma(s_{n+1})) \leq 2R + d(\phi^n(p), \phi^{n+1}(p)) = 2R + d(p, \phi(p)) = C.$$

Por D ser propriamente descontínuo, podemos escolher  $N > 0$  tal que  $n \geq N$  implica,

$$d(p, \phi^n(p)) \geq 2C + 2R$$

Então, para  $k \geq N$  e qualquer  $n \geq 0$ ,

$$d(\phi^{-k}(p), \phi^n(p)) \leq d(\phi^{-k}(p), \gamma(t_k)) + d(\gamma(t_k), \gamma(s_n)) + d(\gamma(s_n), \phi^n(p)) \leq 2R + d(\gamma(t_k), \gamma(s_n)) = 2R + |t_k - s_n|.$$

$$\text{Logo, } |t_k - s_n| \geq d(\phi^{-k}(p), \phi^n(p)) - 2R \geq 2C.$$

Daí,  $t_k < 0$  para  $k \geq N$ . Afirmamos que  $t_k \rightarrow -\infty$ .

Caso contrário, teríamos sempre um  $t_k$  entre  $s_n$  e  $s_{n+1}$ , já que  $s_0 = 0$  e  $s_{n_k} \rightarrow \infty$ . Mas isso não é possível pois,  $|s_n - s_{n+1}| \leq C$  e  $|t_k - s_n| \geq 2C$ ,  $\forall n \geq 0$  e para  $k \geq N$ . Logo, como  $t_k < 0$  e D não tem pontos de acumulação, temos que  $t_k \rightarrow -\infty$ .

Através do mesmo argumento, de forma inversa, mostramos que  $s_n \rightarrow \infty$ .

Pelo axioma da visibilidade uniforme, temos que,

$$\angle_p(\phi^n(p), \gamma(s_n)) \rightarrow 0 \text{ e } \angle_p(\phi^{-n}(p), \gamma(t_n)) \rightarrow 0.$$

Então, como  $t_n \rightarrow -\infty$  e  $s_n \rightarrow \infty$ , temos que,  $\gamma(t_n) \rightarrow y$  e  $\gamma(s_n) \rightarrow x$ . Logo,  $\phi^n(p) \rightarrow x$  e  $\phi^{-n}(p) \rightarrow y$ . Portanto, pela visibilidade uniforme,  $\phi^n(q) \rightarrow x$  e  $\phi^{-n}(q) \rightarrow y \forall q \in H$

ii. Suponhamos que  $\phi$  possua mais que dois pontos fixos em  $H(\infty)$ . Sejam x, y, z pontos fixos distintos de  $\phi$ . Por (i) temos que,  $\forall q \in H$ ,  $\phi^n(q) \rightarrow x$  e  $\phi^{-n}(q) \rightarrow y$ .

Tome o inteiro  $k$  tal que  $\phi^k(q) \rightarrow z$ . Como  $\phi^n(q) \rightarrow x$  para qualquer  $n$ , temos que, em particular para  $k$ ,  $\phi^k(q) \rightarrow x$ . Logo  $x = z$ . Concluímos que  $y = z$  para o caso  $\phi^{-k} \rightarrow z$ .

Portanto,  $\phi$  não possui mais que dois pontos fixos.

iii. Sejam  $\{x, y\}$ ,  $\{x^*, y^*\}$  em  $H(\infty)$ , conjuntos de pontos fixos de  $\phi$  e  $\phi^*$ , respectivamente.

Suponhamos que  $y = y^*$ .

Substituindo  $\phi$  ou  $\phi^*$  por suas inversas, se necessário, segue de (i) que para qualquer  $p \in H$ ,  $\phi^n(p) \rightarrow y$  e  $\phi^{*n}(p) \rightarrow y^* = y$ .

Sejam  $\gamma, \gamma^*$  geodésicas ligando  $x$  a  $y$  e  $x^*$  a  $y^*$ , respectivamente. Fixemos  $p \in H$ .

Como na prova de (i), podemos escolher  $R > 0$  e sequências  $s_n, t_n$  com  $s_n \rightarrow \infty$  e  $t_n \rightarrow \infty$  tais que,  $d(\phi^n(p), \gamma(s_n)) \leq R$ ,  $d(\phi^{*n}(p), \gamma^*(t_n)) \leq R$ ,  $|s_n - s_{n+1}| \leq C$  e  $\bigcup_{n \geq 0} [s_n, s_{n+1}]$  cobre  $[0, \infty)$ .

Seja  $k$  tal que  $t_k > s_0 = 0$ . Existe  $s_{n_k}$  tal que  $|s_{n_k} - t_k| \leq C$ . Como  $\gamma$  e  $\gamma^*$  são assintóticas, pela definição de geodésicas assintóticas temos que existe  $R > 0$  tal que, para  $t \geq 0$ ,  $d(\gamma(t), \gamma^*(t)) \leq R$ .

Para cada  $k > 0$ , temos que  $d(p, \phi^{-n_k}(\phi^{*k}(p))) = d(\phi^{n_k}(p), \phi^{*k}(p)$ , onde

$$d(\phi^{n_k}(p), \phi^{*k}(p)) \leq d(\phi^{n_k}(p), \gamma(s_{n_k})) + d(\gamma(s_{n_k}), \gamma(t_k)) + d(\gamma(t_k), \gamma^*(t_k)) + d(\gamma^*(t_k), \phi^{*k}(p)) \leq$$

$3R + C$ .

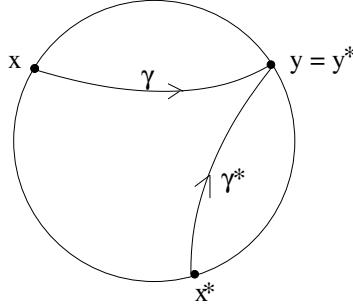


Figura 3.2:

Daí, por  $D$  ser grupo propriamente descontínuo, segue-se que apenas um número finito de elementos  $\{\phi^{-n_k}(\phi^{*k})\}$  são distintos. Então,  $\phi^r = \phi^{*s}$  para inteiros apropriados  $r$  e  $s$ . Como  $\phi$  fixa  $x$  e  $y$ , as iteradas de  $\phi$  também fixam  $x$  e  $y$ . Logo,  $\phi^r(x) = x$  e  $\phi^r(y) = y$ . Além disso,  $\phi^*$  fixa  $x^*$ , portanto, a iterada  $\phi^{*s}$  fixa  $x^*$ . Mas  $\phi^r = \phi^{*s}$ . Daí,  $\phi^r$  fixa  $x$ ,  $y$  e  $x^*$ . Logo, por (ii) e pelo fato de  $x^* \neq y^* = y$  temos que,  $x^* = x$ .

□

Uma consequência da Proposição 3.5 é que  $\phi$  tem no máximo dois pontos fixos e todos os pontos fixos de elementos de  $D$  estão em  $L(D)$ .

**Proposição 3.6.** Sejam  $x$ ,  $y$  pontos duais distintos em  $H(\infty)$  e  $U$ ,  $V$  vizinhanças de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Então, existe elemento  $\phi \in D$  tal que  $\phi$  tem pontos fixos em  $U \cap H(\infty)$  e  $V \cap H(\infty)$ .

*Demonstração.* Podemos assumir que  $U$ ,  $V$  são cones truncados com vértice comum  $p$  e que  $\overline{U}$  e  $\overline{V}$  são disjuntos. Usando o homeomorfismo do Corolário 2.14 podemos ver que  $\overline{U} \cap H(\infty)$  e  $\overline{V} \cap H(\infty)$  são homeomorfos a vizinhanças convexas em  $S^{n-1}$  e, portanto a  $(n-1)$  discos fechados. Como  $x$  e  $y$  são duais, existe elemento  $\phi \in D$  tal que  $\phi(\overline{H} \setminus V) \subseteq U$ . Como  $\overline{U} \subseteq \overline{H} \setminus V$  e, pela definição de  $\overline{H}$ , temos que,  $\phi(\overline{U}) \subseteq U$  e  $\phi(\overline{U} \cap H(\infty)) \subseteq U \cap H(\infty)$ . Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer,  $\phi$  tem um ponto fixo em  $U \cap H(\infty)$ .

De forma análoga, mostramos que  $\phi^{-1}(\overline{V}) \subseteq V$  e  $\phi^{-1}$  (portanto  $\phi$ ) tem um ponto fixo em  $V \cap H(\infty)$ .

□

**Lema 3.7.** Sejam  $x$ ,  $y$ ,  $z^*$  pontos todos distintos em  $L(D)$  tais que  $z^*$  é dual a  $x$  e a  $y$ . Então,  $z^*$  não é ponto fixo comum de  $D$ .

*Demonstração.* Sejam  $U, V, W$  vizinhanças disjuntas de  $x, y, z^*$ , respectivamente.

Pela Proposição 3.6, podemos encontrar elementos  $\phi$  e  $\psi$  em  $D$  tais que  $\phi$  tem pontos fixos em  $U$  e  $W$  e  $\psi$  tem pontos fixos em  $V$  e  $W$ . Como  $U$  e  $V$  são disjuntos, pelo item (iii) da Proposição 3.5 temos que o conjunto dos pontos fixos devem ser disjuntos, pois caso contrário teríamos  $x = y$ . Logo, como  $\phi(x) = x$ ,  $\psi(y) = y$  e  $U, V$  são disjuntos,  $\phi(z^*) \neq z^*$  ou  $\psi(z^*) \neq z^*$ .  $\square$

**Lema 3.8.** Seja  $z \in L(D)$ , que não é ponto fixo comum de  $D$ . Então,  $D(z)$  é denso em  $L(D)$ . A afirmação vale mesmo não supondo que  $z$  não é ponto fixo comum.

*Demonstração.* Sejam  $y \in L(D)$  e  $U$  vizinhança de  $y$ . Como consequência da Proposição 3.3 temos que qualquer ponto em  $L(D)$  tem dual. Seja  $y^*$  dual a  $y$ . Como  $D(z)$  possui, pelo menos dois pontos, podemos escolher vizinhança  $V$  de  $y^*$  tal que, para algum  $\phi \in D$ ,  $\phi(z) \in \overline{H} \setminus V$ . Escolhamos  $\psi \in D$  tal que  $\psi(\overline{H} \setminus V) \subseteq U$ . Então,  $\psi(\phi(z)) \in \psi(\overline{H} \setminus V) \subseteq U$ . Logo,  $D(z)$  é denso em  $L(D)$ .

Mostraremos agora a densidade de  $D(z)$  em  $L(D)$  para todo  $z \in L(D)$ .

Consideremos  $z^* \in L(D)$  com  $z^*$  dual a todo ponto de  $L(D)$  e fixemos  $c \in L(D)$ . Tome  $y \neq c$  em  $L(D)$  e seja  $c \neq z^*$ .

Consideremos as vizinhanças disjuntas  $U, V, W$  de  $z^*$ ,  $y$  e  $c$ , respectivamente. Pela Proposição 3.6, podemos encontrar isometrias  $\phi$  e  $\psi$  em  $D$  tais que  $\phi$  tem pontos fixos em  $U$  e  $V$  e  $\psi$  tem pontos fixos em  $U$  e  $W$ . Como  $V$  e  $W$  são disjuntas, pelo item (iii) da Proposição 3.5 temos que o conjunto dos pontos fixos devem ser disjuntos, caso contrário  $c = y$ . Então, ou  $\phi(c) \neq c$  ou  $\psi(c) \neq c$ .

Consideremos, agora,  $c = z^*$ . Podemos tomar  $y \neq z^*$  dual a  $z^*$ . Logo, podemos considerar  $c \neq y$  com  $c$  dual a  $y$ . Tomemos  $x \neq c$  e  $x \neq y$  em  $L(D)$ . Como  $z^*$  é dual a todo ponto de  $L(D)$  temos que  $c$  é dual a  $x$  e a  $y$ .

Segue, do Lema 3.7, que  $c$  não é ponto fixo comum de  $D$ .

Concluímos que, os pontos de  $L(D)$  não são pontos fixos comuns e, portanto,  $D$  é denso em todo ponto  $z \in L(D)$ .  $\square$

**Proposição 3.9.** Seja  $L(D) = H(\infty)$ . Então quaisquer dois pontos de  $L(D)$  são duais.

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in L(D)$  e seja  $x^*$  dual a  $x$ . Pelo Lema 3.8, temos que  $D(x^*)$  é denso em  $L(D)$ . Por hipótese,  $x \in H(\infty)$ . Pela Proposição 3.4 temos que o conjunto dos pontos duais a  $x$  é fechado em  $H(\infty)$  e invariante mediante  $D$ . Logo  $x$  é dual a  $y$ .  $\square$

**Observação 6:** Se  $L(D)$  tiver pelo menos três pontos, temos que quaisquer dois pontos de  $L(D)$  são duais. Uma demonstração desta afirmação pode ser encontrada no apêndice.

## 4    *Transitividade Topológica*

Seja  $\varphi_t$  fluxo completo em um espaço  $X$  Hausdorff, localmente compacto e segundo enumerável.

**Definição 4.1.** Seja  $v \in X$ ,  $P^+(v)$  é o conjunto de elementos  $w \in X$  tal que, se  $V, W$  são abertos quaisquer contendo  $v, w$  respectivamente, então  $\varphi_t(V) \cap W \neq \emptyset$ , para  $t > 0$  arbitrariamente grande.

$P^+(v)$  é fechado em  $X$  e invariante em  $\varphi_t$ . Equivalentemente,  $w \in P^+(v)$  se, e somente se, existir sequência  $v_n \rightarrow v$  e sequência de números reais  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi_{t_n}(v_n) \rightarrow w$ .

**Definição 4.2.** Dizemos que  $v \in X$  é não-errante se  $v \in P^+(v)$ .

Seja  $\Omega$  denotando o conjunto de pontos não-errantes em  $X$ . Observemos que o complementar de  $\Omega$  é aberto em  $X$ , portanto  $\Omega$  é fechado em  $X$ . Observemos ainda que  $\Omega$  é invariante mediante  $\varphi_t$ .

**Definição 4.3.** Dizemos que um fluxo  $\varphi_t$  é topologicamente transitivo em  $X$  se para algum  $v \in X$

a órbita  $\{\varphi_t(v), t \in \mathbb{R}\}$  é densa em  $X$ .

**Proposição 4.4.** Suponhamos que para cada  $v \in X$ ,  $P^+(v) = X$ . Então, existe  $z \in X$  tal que para qualquer  $A > 0$ , o conjunto  $\{\varphi_t(z), t \geq A\}$  é denso em  $X$ . Em particular,  $\varphi_t$  é topologicamente transitivo em  $X$ .

*Demonstração.* Estamos supondo que para quaisquer dois conjuntos abertos  $V, U$  em  $X$ ,  $\varphi_t(V) \cap U \neq \emptyset, \forall t > 0$ , suficientemente grande. Como  $X$  é segundo enumerável, podemos considerar  $\{V_i\}$  uma base enumerável para a topologia de  $X$ .

Fixemos um conjunto  $V$  aberto em  $X$ .

Escolhamos  $t_1 > 1$  tal que

$\varphi_{t_1}(V) \cap V_1 \neq \emptyset$ . Como  $X$  é Hausdorff e localmente compacto, podemos achar um conjunto aberto  $A_1 \subset V$  tal que  $\overline{A_1}$  é compacto,  $\overline{A_1} \subseteq V$  e  $\varphi_{t_1}(A_1) \subset \varphi_{t_1}(V) \cap V_1$ .

Por continuidade, temos que

$$\varphi_{t_1}(\overline{A_1}) \subseteq \overline{\varphi_{t_1}(A_1)} \subseteq \varphi_{t_1}(V) \cap V_1 \subseteq V_1.$$

Escolhamos  $t_2 > 2$  tal que  $\varphi_{t_2}(A_1) \cap V_2 \neq \emptyset$  e um conjunto aberto  $A_2$  tal que  $\overline{A_2} \subseteq A_1$ ,  $\overline{A_2}$  é compacto e  $\varphi_{t_2}(\overline{A_2}) \subseteq V_2$ . Por indução, definimos uma sequência de conjuntos abertos  $A_n$  tal que  $\overline{A_n}$  é compacto,  $\overline{A_n} \subseteq A_{n-1}$  e uma sequência  $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $t_n > n$  e  $\varphi_{t_n}(\overline{A_n}) \subseteq V_n$ . Temos que  $\{\overline{A_n}\}$  é uma sequência de compactos encaixados. Logo, pela propriedade da interseção finita, temos que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq \emptyset$ .

Seja  $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ , então  $\varphi_{t_n}(z) \in V_n$  para todo  $n$ . Dado um conjunto aberto  $U$  e um número  $A > 0$ , escolhamos  $n > A$  tal que  $V_n \subseteq U$ . Como  $t_n > n > A$  e  $\varphi_{t_n}(z) \in V_n \subseteq U$  temos que  $\{\varphi_t(z), t \geq A\}$  é denso em  $X$ .  $\square$

**Lema 4.5.** Se  $M$  é uma variedade Riemanniana compacta então  $\Omega = SM$ .

*Demonstração.* Seja  $\mu$  uma medida em  $SM$  tal que:

- i. Se  $V$  é aberto em  $SM$ ,  $\mu(V) > 0$ ;
- ii.  $\mu(\varphi_t(V)) = \mu(V)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ;
- iii. Volume  $S(M) = \text{vol}(S^{n-1}) \cdot \text{vol } M$ .

Ou seja,  $\mu$  é um elemento de volume em  $SM$ , que é invariante pelo fluxo geodésico. Suponhamos que  $\Omega \not\subseteq SM$ . Então existe  $v \in SM$  tal que  $v \notin P_+(V)$ . Logo existem  $A > 0$  (suficientemente grande) e aberto  $V$  em  $SM$  tais que,  $v \in V$  e  $\varphi_t(V) \cap V = \emptyset$ , para  $t \geq A$ .

Pelas propriedades do fluxo  $\varphi_t$ , para  $t \geq A$  (fixo) e por  $\varphi_t(V) \cap V = \emptyset$ , para  $t \geq A$ , temos que os conjuntos  $\{\varphi_{n_A}(V), n \geq 1\}$  são disjuntos. Logo, pela propriedade da aditividade enumerável e do fato que  $\mu(\varphi_{n_A}(v)) = \mu(v) \neq 0$ , se  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_{n_A}(V)$  temos que,  $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varphi_{n_A}(V)) = \infty$ , o que contradiz o fato de  $SM$  ter volume finito.  $\square$

**Lema 4.6.** Sejam  $M = H/D$  uma variedade de visibilidade uniforme e  $\pi : H \rightarrow M$  a projeção de recobrimento. Se  $v, w \in SM$  tem levantamentos  $v^*, w^* \in SH$ , então  $w \in P^+(v)$  se, e somente se,  $\gamma_{v^*}(\infty)$  e  $\gamma_{w^*}(-\infty)$  são duais relativamente a  $D$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ )

Suponhamos que  $w \in P^+(v)$ . Então existem sequências  $v_n \rightarrow v$  e  $t_n \rightarrow \infty$  tais que  $\varphi_{t_n}(v_n) \rightarrow w$ .

Sejam  $v^*, w^*$  vetores unitários em  $H$ , que são levantamentos de  $v$  e  $w$ , respectivamente.

Escolhamos levantamentos  $v_n^*$  de  $v_n$  tais que  $v_n^* \rightarrow v^*$ .

Se  $\gamma_n$  é geodésica com velocidade inicial  $v_n^*$  então, para alguma sequência  $\phi_n \subseteq D$ ,  $(\phi_n \circ \gamma_n)'(t_n) \rightarrow w^*$ . Pela proposição 2.16,  $\gamma_n(t_n) \rightarrow \gamma_{w^*}(\infty)$ .

Se  $w^*$  é tangente a  $H$  em  $q$ , então  $d(\gamma_n(t_n), \phi_n^{-1}(q)) \rightarrow 0$ . Daí,  $\phi_n^{-1}(q) \rightarrow \gamma_{w^*}(\infty)$ .

Mostremos, agora, que  $\phi_n(q) \rightarrow \gamma_{w^*}(-\infty)$ .

Definamos geodésicas  $\alpha_n : \alpha_n(t) = (\phi_n(\gamma_n(t_n - t)))$ . Então,  $\alpha_n'(0) = -(\phi_n \circ \gamma_n)'(t_n) \rightarrow -w^*$  e  $\alpha_n(t_n) = \phi_n(\gamma_n(0))$ .

Seja  $v^*$  tangente a  $H$  em  $p$ . Como  $\alpha_n(t_n) \rightarrow \gamma_{w^*}(-\infty)$ , pela Proposição 2.16, e como  $\gamma_n(0) \rightarrow p$ , segue que  $\phi_n(p) \rightarrow \gamma_{w^*}(-\infty)$ . Pela visibilidade uniforme,  $\phi_n(q) \rightarrow \gamma_{w^*}(-\infty)$ . Então, pela Proposição 3.3 segue-se que  $\gamma_{v^*}(\infty)$  e  $\gamma_{w^*}(-\infty)$  são duais.

( $\Leftarrow$ )

Sejam  $v^*, w^* \in SH$  levantamentos de  $v, w \in SM$  e suponhamos que  $\gamma_{v^*}(\infty)$  e  $\gamma_{w^*}(-\infty)$  são duais. Então, conforme esta proposição, existe uma sequência  $\phi_n \subseteq D$  tal que, para qualquer  $p \in H$ ,  $\phi_n^{-1}(p) \rightarrow \gamma_{v^*}(\infty)$  e  $\phi_n(p) \rightarrow \gamma_{w^*}(-\infty)$ .

Sejam  $v^*, w^*$  tangentes a  $H$  em  $p$  e  $q$ , respectivamente,  $t_n = d(\phi_n(p), q)$  e  $\bar{v}_n = V(\phi_n(p), q)$ . Então,  $\phi_{t_n}(\bar{v}_n) = -V(q, \phi_n(p))$  e:

- de  $\phi_n(p) \rightarrow \gamma_{w^*}(-\infty)$  segue que  $\phi_{t_n}(\bar{v}_n) \rightarrow w^*$
- de  $\phi_n^{-1}(q) \rightarrow \gamma_{v^*}(\infty)$  segue que  $\phi_n^{-1}(\bar{v}_n) = V(p, \phi_n^{-1}(q)) \rightarrow v^*$ .

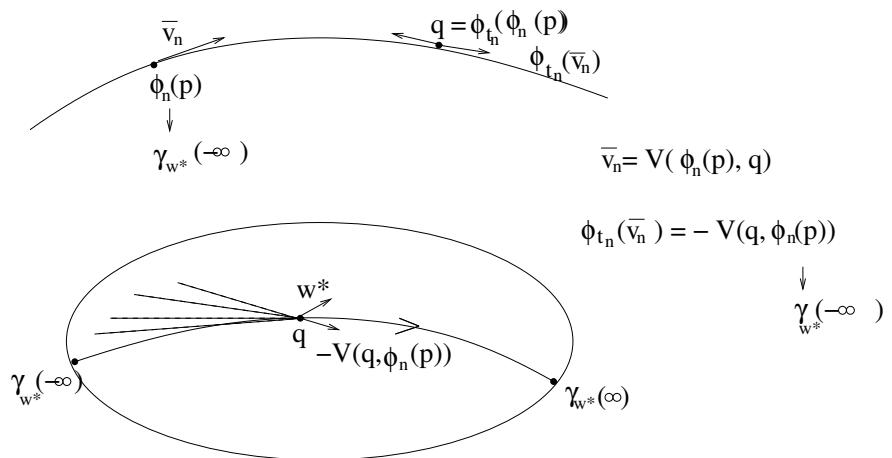
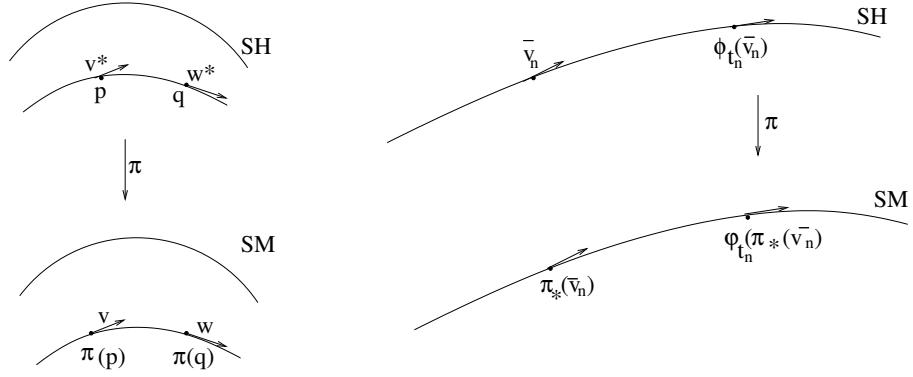


Figura 4.1: Lema 4.6

Então,  $\pi_*(\bar{v}_n) = \pi_*((\phi_n^{-1})_*(\bar{v}_n)) \rightarrow \pi_*(v^*) = v$ .



$$\begin{aligned}\pi(v^*) &= v \\ \pi(w^*) &= w\end{aligned}$$

Figura 4.2:  $SM = \{(p, v); p \in M \text{ e } \|v\| = 1\}$

Logo,  $\phi_{t_n}(\pi_*(\bar{v}_n)) = \pi_*(\phi_{t_n}(\bar{v}_n)) \rightarrow \pi_*(w^*) = w$ . Portanto, existe sequência  $\pi_*(\bar{v}_n) \rightarrow v$  tal que,  $\phi_{t_n}(\pi_*(\bar{v}_n)) \rightarrow w$ , ou seja,  $w \in P^+(v)$ .  $\square$

**Proposição 4.7.** Seja  $M = H/D$  uma variedade de visibilidade uniforme. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i.  $\Omega = SM$ ;
- ii.  $L(D) = H(\infty)$ ;
- iii.  $P^+(v) = SM, \forall v \in SM$ .

*Demonstração.* (i  $\Rightarrow$  ii)

Sejam  $x \in H(\infty)$  e  $\sigma$  uma geodésica qualquer tal que  $\sigma(\infty) = x$ . Então,  $(\pi \circ \sigma)'(0) = v \in P^+(v)$ , por hipótese. Pelo Lema 4.6,  $\sigma(-\infty)$  e  $\sigma(\infty)$  são duais. Como pontos duais ficam em  $L(D)$  e  $x = \sigma(\infty)$ . Concluímos que  $x \in L(D)$ .

(ii  $\Rightarrow$  iii)

Sejam  $v, w \in SM$  dados e  $v^*, w^* \in SH$ , seus respectivos levantamentos. Como  $L(D) = H(\infty)$ , temos que  $\gamma_{v^*}(\infty)$  e  $\gamma_{w^*}(-\infty)$  pertencem a  $L(D)$ . Pela Proposição 3.9 concluímos que são duais.

Portanto, pelo Lema 4.6 temos que  $w \in P^+(v)$ .

(iii  $\Rightarrow$  i)

Segue pela definição de  $\Omega$ .  $\square$

**Teorema 4.8.** Seja  $M$  variedade de visibilidade uniforme tal que  $\Omega = SM$ . Então o fluxo geodésico é topologicamente transitivo em  $SM$ .

*Demonstração.* Segue da combinação das Proposições 4.4 e 4.7. □

## 5 *Resultados complementares e Exemplos sobre Visibilidade e Transitividade*

As referências para este capítulo são: [2], [7], [11], [20] e [23].

### 5.1 Axioma de Assintoticidade

Escolhamos, de forma arbitrária, um ponto  $x \in H$ , um vetor  $v \in SH$ , uma sequência de vetores unitários  $v_n \rightarrow v$ , uma sequência de pontos  $x_n \rightarrow x$  e uma sequência de números  $t_n \rightarrow \infty$ .

Denotemos por  $\gamma_n(t)$  a única geodésica que liga os pontos  $x_n$  e  $\gamma_v(t_n)$ . Então a sequência de vetores  $\gamma'_n(0)$  pertence a um conjunto compacto e a sequência de geodésicas  $\gamma_n(t)$  tem limite geodésico  $\gamma_v(t)$ , onde

$$w = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \gamma'_n(0)$$

A variedade  $H$  satisfaz o axioma de assintoticidade se escolhidos quaisquer  $x_n, x \in H$ ,  $v_n, v \in SH$ , com  $x_n \rightarrow x$ ,  $v_n \rightarrow v$  e para qualquer sequência  $t_n \rightarrow +\infty$ , qualquer limite da sequência  $\gamma_n$  de geodésicas construída acima é assintótica à geodésica  $\gamma_v(t)$ .

Uma variedade, arbitrária,  $M$  sem pontos conjugados, satisfaz o axioma de assintoticidade se tiver recobrimento  $H$ , simplesmente conexo, que o satisfaz.

**Observação 7:** Pelo Lema 2.7 segue que o axioma da visibilidade uniforme implica o axioma da assintoticidade.

## 5.2 Visibilidade e Assintoticidade

**Proposição 5.1.** Seja  $H$  variedade de visibilidade uniforme, simplesmente conexa com métrica  $g$ . Seja  $g^*$  métrica equivalente em  $H$  (que pode admitir pontos conjugados). Então existe uma constante  $R > 0$  com a seguinte propriedade: Se  $\gamma, \gamma^*$  são segmentos de geodésicas com métricas  $g, g^*$ , respectivamente, com a mesma extremidade  $e$ , se  $\gamma^*$  é minimizante (considerando a métrica  $g^*$ ), então para qualquer ponto  $x \in \gamma$ ,  $d(x, \gamma^*) \leq R$ , onde  $d$  é distância em relação à métrica  $g$ .

A existência desta constante universal foi provada em [17], para o caso onde  $H$  é plano hiperbólico com a métrica de Poincaré e, em [13], para o caso em que  $H$  tem dimensão arbitrária e  $K \leq c < 0$ .

Eberlein, em [7], prova para o caso em que  $H$  é variedade de visibilidade uniforme, simplesmente conexa.

Não faremos a prova aqui por não estar dentro do nosso objetivo.

**Proposição 5.2.** Sob as mesmas hipóteses da proposição 5.1, a variedade  $H$  com a métrica  $g^*$  satisfaz o axioma de assintoticidade.

*Demonstração.* Sejam  $M$  uma variedade e  $g, g^*$  métricas equivalentes em  $M$ . Isto é, existem constantes  $0 < \alpha \leq \beta$  tais que, para quaisquer  $v \in TM$  (ou  $TH$ )

$$\alpha \|v\| \leq \|v\|_* \leq \beta \|v\|$$

Desse modo, a convergência de sequências de pontos em  $H$  e de vetores em  $SH$  é equivalente nas duas métricas. Escolhamos, de forma arbitrária,  $x \in H$ ,  $v \in SH$  e sejam  $\{x_n\} \subset H$  e  $\{v_n\} \subset SH$  sequências tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $v_n \rightarrow v$ . Seja  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$  sequência tal que  $t_n \rightarrow +\infty$ .

Denotemos por  $\gamma_n^*(t)$  a única  $g^*$ -geodésica que liga  $x_n$  a  $\gamma_{v_n}^*(t_n)$ . Na métrica  $g$ , seja  $w_n$  o vetor tangente inicial da geodésica que liga o ponto  $\pi(v_n)$  a  $\gamma_{v_n}^*(t_n)$ , isto é,  $w_n = V(\pi(v_n), \gamma_{v_n}^*(t_n))$ . Assim,  $\gamma_{w_n}(0) = \pi(v_n)$  e  $\gamma_{w_n}(s_n) = \gamma_{v_n}^*(t_n)$  para algum  $s_n > 0$ . Então,  $s_n \rightarrow +\infty$ . Seja  $w \in SH$ . Pela Proposição 2.6 temos que  $\gamma_w(t)$  é a única  $g$ -geodésica ligando o ponto  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(v_n)$  ao ponto

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{v_n}^*(t_n) = \gamma_v^*(+\infty). \text{ Desta maneira temos, } \gamma_w(+\infty) = \gamma_v^*(+\infty).$$

Afirmamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ .

Seja  $w'$  um ponto de acumulação de  $\{w_n\}$  com  $w' = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i$ , onde  $w_i$  é uma subsequência de  $\{w_n\}$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(w_n) = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi(w_i) = \pi(w')$ , temos  $\pi(w') = \pi(v) =$

$\pi(w)$ . A métrica  $g$  satisfaz o axioma da visibilidade uniforme. Assim, pela Proposição 2.16,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{w_i}(s_i) = \gamma_{w'}(+\infty)$  uma vez que  $w' = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i$ .

Mas, pela Proposição 5.1,  $d[\gamma_{w_i}(s) |_{[0, s_i]}, \gamma_{v_i}^*(t) |_{[0, t_i]}] \leq R$ . Portanto,  $d(\lim \gamma_{w_i}, \lim \gamma_{v_i}^*) \leq R$ , isto é,  $d(\gamma_{w'}, \lim \gamma_{v_i}^*) \leq R$ . Logo, a sequência  $\{\gamma_{v_i}^*\}$  (considerando a métrica  $g^*$ ) de geodésicas converge para uma geodésica  $\gamma^*$ , tal que  $\gamma^*(+\infty) = \gamma_{w'}(+\infty)$ .

Segue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = V^*(\pi(v), \gamma_{w'}(+\infty))$ , onde  $V^*(\pi(v), \gamma_{w'}(+\infty))$  é o único vetor tangente inicial (com a métrica  $g^*$ ) da geodésica que liga  $\pi(v)$  a  $\gamma_{w'}(+\infty)$ .

Mas  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$  e assim  $v = V^*(\pi(v), \gamma_{w'}(+\infty))$ , isto é,  $\gamma_v^*(+\infty) = \gamma_{w'}(+\infty)$ .

De  $\gamma_w(+\infty) = \gamma_v^*(+\infty)$  e  $\gamma_v^*(+\infty) = \gamma_{w'}(+\infty)$  obtemos  $\gamma_{w'}(+\infty) = \gamma_w(+\infty)$ .

Como  $\pi(w') = \pi(v) = \pi(w)$  e  $\gamma_w(+\infty) = \gamma_{w'}(+\infty)$  temos que  $w = w'$ . Daí, pela Proposição 2.6,  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ , como afirmado.

Denotemos por  $\sigma_n(s)$  a geodésica (com métrica  $g$ ) que liga  $x_n$  a  $\gamma_{w_n}(s_n)$ . Sejam  $\tau_n$  e  $\tau_n^*$  números reais tais que  $\sigma_n(\tau_n) = \gamma_n^*(\tau_n^*) = \gamma_{w_n}(s_n) = \gamma_{v_n}^*(t_n)$ . Então,  $\tau_n \rightarrow +\infty$  e  $\tau_n^* \rightarrow +\infty$ .

Pela Proposição 5.1,  $d[\sigma_n |_{[0, \tau_n]}, \gamma_n^* |_{[0, \tau_n^*]}] \leq R$ .

Assim, qualquer limite da sequência  $\{\gamma_n^*\}$  é assintótico a um limite da sequência  $\{\sigma_n\}$ . Mas a métrica  $g$  satisfaz o axioma de assintoticidade e, assim, qualquer limite de  $\{\sigma_n\}$  é assintótico a  $\gamma_w(+\infty)$ . Isto nos dá que os limites de  $\{\gamma_n^*\}$  são, também, assintóticos a  $\gamma_w(+\infty)$ , que é igual a  $\gamma_v^*(+\infty)$ .

Portanto a métrica  $g^*$  satisfaz o axioma de assintoticidade. □

**Proposição 5.3.** Se  $H$  é variedade simplesmente conexa, sem pontos conjugados, com curvaturas seccionais uniformemente limitadas por baixo e satisfaz o axioma de assintoticidade, então os raios geodésicos divergem uniformemente em  $H$ .

Para demonstrar esta proposição utilizamos campos de Jacobi. Não a faremos aqui, por fugir do nosso objetivo. A prova segue de uma combinação de resultados dos artigos [10] e [19].

**Teorema 5.4.** Seja  $M$  uma variedade compacta de visibilidade uniforme com métrica  $g$ . Seja  $g^*$  métrica qualquer em  $M$ , sem pontos conjugados. Então  $M$ , com a métrica  $g^*$  é, também, variedade de visibilidade uniforme. Em particular, seu  $g^*$ -fluxo geodésico é topologicamente transitivo no  $g^*$ -fibrado tangente unitário.

*Demonstração.* Sejam  $g, g^*$  métricas induzidas no recobrimento simplesmente conexo  $H$ .

Seja  $D$  o grupo das transformações de recobrimento de  $M$  tal que  $M = H/D$ . Suponhamos

que  $g^*$  é métrica sem pontos conjugados que não satisfaz o axioma da visibilidade uniforme. Então, para algum  $\varepsilon > 0$ , existe uma sequência  $\{p_n\} \subseteq H$  e uma sequência de segmentos de  $g^*$ -geodésicas  $\sigma_n^* : [a_n, b_n] \rightarrow H$  tal que  $\angle_{p_n}^*(\sigma_n^*(a_n), \sigma_n^*(b_n)) \geq \varepsilon > 0, \forall n$ , mas  $d^*(p_n, \sigma_n^*) \rightarrow \infty$ .

Escolhemos uma sequência  $\{\phi_n\} \subset D$  tal que  $q_n = \phi_n(p_n)$  é limitada, e passando a uma subsequência, se necessário, seja  $q_n \rightarrow q$ . Se  $\gamma_n^* = \phi_n \circ \sigma_n^*$ , então

$$\angle_{q_n}^*(\gamma_n^*(a_n), \gamma_n^*(b_n)) = \angle_{\phi_n(p_n)}^*(\phi_n(\sigma_n^*(a_n)), \phi_n(\sigma_n^*(b_n))) = \angle_{p_n}^*(\sigma_n^*(a_n), \sigma_n^*(b_n)) \geq \varepsilon > 0 \text{ e } d^*(q_n, \gamma_n^*) = d^*(\phi_n(p_n), \phi_n(\sigma_n^*)) = d^*(p_n, \sigma_n^*) \rightarrow \infty \text{ Pois os elementos de } D \text{ são, também, isometrias com a métrica } g^*.$$

Sejam  $\alpha_n^*, \beta_n^*$  geodésicas (com a métrica  $g^*$ ) que vão de  $q_n$  a  $\gamma_n^*(a_n)$  e de  $q_n$  a  $\gamma_n^*(b_n)$ , respectivamente.

Sejam  $\alpha_n, \beta_n$  geodésicas (com a métrica  $g$ ) correspondentes, com os mesmos extremos, e seja  $\gamma_n$  a  $g$ -geodésica que vai de  $\gamma_n^*(a_n)$  a  $\gamma_n^*(b_n)$ . Como  $d^*(q_n, \gamma_n^*) \rightarrow \infty$ , pela Proposição 5.1 e pela equivalência das métricas segue que  $d(q_n, \gamma_n) \rightarrow \infty$ . Medindo com relação à métrica  $g$ ,

$$\angle_{q_n}(\gamma_n^*(a_n), \gamma_n^*(b_n)) = \angle_{\phi_n(q_n)}(\phi_n(\sigma_n^*(a_n)), \phi_n(\sigma_n^*(b_n))) = \angle_{p_n}(\sigma_n^*(a_n), \sigma_n^*(b_n)) \rightarrow 0 \text{ pois } H, \text{ com métrica } g, \text{ é uma variedade de visibilidade uniforme.}$$

Existe um raio  $g$ -geodésico  $\alpha$  e raios  $g^*$ -geodésicos  $\alpha^*, \beta^*$ , com ponto inicial  $q$ , tais que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\alpha'_n(0) \rightarrow \alpha'(0), \beta'_n(0) \rightarrow \alpha'(0), \alpha_n^{*'}(0) \rightarrow \alpha^{*'}(0) \text{ e } \beta_n^{*'}(0) \rightarrow \beta^{*'}(0). \text{ Como os raios geodésicos possuem o mesmo ponto inicial e pela continuidade, temos que } \alpha^* \neq \beta^*.$$

Se  $x$  é ponto qualquer em  $\alpha$ , então podemos encontrar  $x_n$  em  $\alpha_n$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Daí, pela Proposição 5.1,  $d(x_n, \alpha_n^*) \leq R$ . De  $\alpha_n^{*'}(0) \rightarrow \alpha^{*'}(0)$ , segue que  $d(x, \alpha^*) \leq R$ .

De forma análoga mostramos que  $d(x, \beta^*) \leq R$ .

Sejam  $\alpha^* : [0, \infty) \rightarrow H$  e  $\beta^* : [0, \infty) \rightarrow H$  parametrizações, de velocidade unitária, na métrica  $g^*$ , de  $\alpha^*$  e  $\beta^*$ . Para cada inteiro  $n > 0$  escolhemos números  $s_n, t_n$  de modo que,  $d(\alpha^*(s_n), \alpha(n)) \leq R$  e  $d(\beta^*(t_n), \alpha(n)) \leq R$ .

Pela escolha da parametrização,  $s_n \rightarrow \infty$  e, pela equivalência das métricas, temos que  $d^*(\alpha^*(s_n), \beta^*) \leq b \cdot d(\alpha^*(s_n), \beta^*)$ . Mas,

$$d(\alpha^*(s_n), \beta^*(t_n)) \leq d(\alpha^*(s_n), \alpha(n)) + d(\alpha(n), \beta^*(t_n)) \leq 2R. \text{ Então, } d^*(\alpha^*(s_n), \beta^*) \leq 2bR.$$

Pelas Proposições 5.2 5.3,  $\alpha^*, \beta^*$  são raios geodésicos distintos com o mesmo ponto inicial na variedade  $H$ , simplesmente conexa, sem pontos conjugados e com curvatura  $K \geq -A^2$ . Então  $d^*(\alpha^*(t), \beta^*) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Esta contradição mostra que  $g^*$  satisfaz o axioma da visibilidade uniforme.

A afirmação sobre a transitividade topológica segue do Teorema 4.8.  $\square$

Portanto, pelas observações 2 da Subseção 1.4.4, 4 da Seção 2.1 e pelo Teorema 5.4 as superfícies compactas de gênero maior do que 1 são variedades de visibilidade uniforme.

### 5.3 Exemplos

Segue um exemplo no qual temos que as órbitas periódicas são densas, mas o fluxo geodésico não é transitivo. Para analisarmos este exemplo necessitaremos da seguinte definição.

**Definição 5.5.** O posto de uma geodésica é a dimensão do espaço vetorial dos campos de Jacobi paralelos ao longo da geodésica.

**Exemplo 1:** Este exemplo foi baseado em [2].

O conjunto não-errante  $\Omega \subset T^1 M$  é conexo mas o fluxo geodésico restrito a  $\Omega$  não é transitivo.

Mostraremos a densidade das órbitas e a não transitividade do fluxo restrito a  $\Omega$ . A demonstração da conexidade pode ser encontrada em [2].

Consideremos duas superfícies, um cilindro  $[0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = [0, \infty) \times S^1$  e uma calça, de curvaturas  $K = 0$  e  $K < 0$ , respectivamente. Colemos, de forma suave, estas superfícies, na curva  $c$ , de forma a obter uma superfície  $M$  conexa, completa e com curvatura não positiva, ilustrada na figura 5.1.

Sabemos que, em superfícies de curvatura  $K < 0$  as órbitas periódicas são densas. Logo temos que verificar a densidade das órbitas periódicas onde  $K = 0$ .

Por [5], sabemos que os círculos obtidos pela interseção do cilindro com planos normais ao eixo do cilindro e as hélices são geodésicas do cilindro. Logo, as órbitas periódicas do cilindro são as que definimos como verticais, destacadas na figura 5.1.

Para cada  $v \in P^+(v)$  dentro do cilindro plano ("flat"), temos que  $v$  é periódico. Logo, a órbita  $\{\varphi_t(v), t \in \mathbb{R}\}$  não pode ser densa. Portanto, o fluxo geodésico restrito a  $\Omega$  não é transitivo.

**Exemplo 2:** Este exemplo foi baseado em [20].

Mostraremos um exemplo no qual a variedade tem curvatura negativa, mas não é variedade de visibilidade. Para tal construimos uma métrica completa  $g$ , com curvatura negativa em  $\mathbb{R}^2$

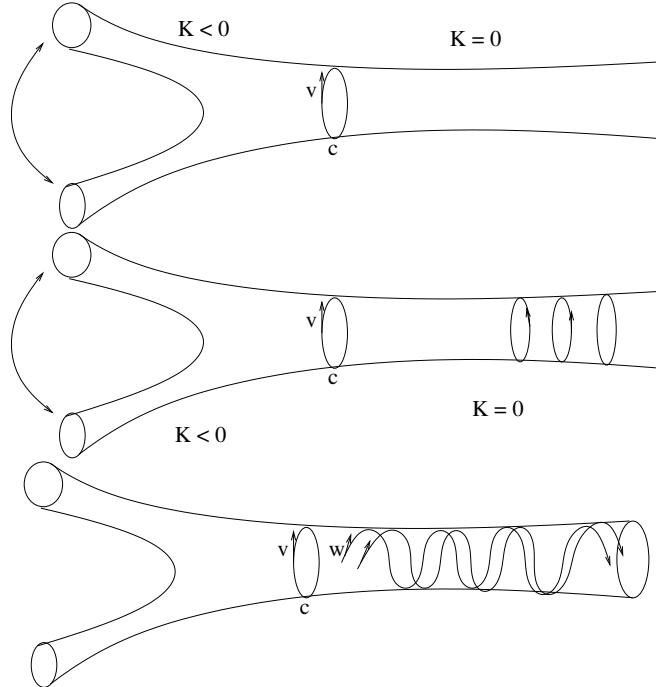


Figura 5.1: Exemplo 1

tal que a variedade Riemanniana com a métrica  $g$  não satisfaz o axioma de visibilidade.

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua que satisfaz  $g''(t) > 0$  e  $g'(\infty) - g'(-\infty) = \frac{\pi}{10}$ .

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por,

$$f(x, y) = g(x) - g(y)$$

Seja  $\tilde{M}$  o gráfico de  $f$  com métrica Riemanniana induzida por  $\mathbb{R}^3$ , e seja  $(x, y)$  parametrização local de  $\tilde{M}$ . A curvatura gaussiana em  $(x, y)$  é

$$K(x, y) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = \frac{-g''(x)g''(y)}{(1 + g'(x)^2 + g'(y)^2)^2} < 0$$

Observe que,

$$g''(x)g''(y) \geq \frac{g''(x)g''(y)}{(1 + g'(x)^2 + g'(y)^2)^2}$$

Então,

$$-g''(x)g''(y) \leq \frac{-g''(x)g''(y)}{(1 + g'(x)^2 + g'(y)^2)^2} = K(x, y)$$

Como a função é contínua, pelo corolário do teorema de Fubini, em [25] temos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g''(x)g''(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} g''(x) dx \times \int_{-\infty}^{\infty} g''(y) dy$$

Logo, a curvatura gaussiana em  $\tilde{M}$  satisfaz o seguinte limite

$$0 \geq \int_{\tilde{M}} K(x, y) dx dy \geq - \int_{-\infty}^{\infty} g''(x) dx \times \int_{-\infty}^{\infty} g''(y) dy$$

Onde,

$$- \int_{-\infty}^{\infty} g''(x) dx \times \int_{-\infty}^{\infty} g''(y) dy = -[g'(\infty) - g'(-\infty)]^2 = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = \frac{\pi^2}{100}$$

A variedade  $\tilde{M}$ , com a métrica Riemanniana induzida por  $\mathbb{R}^3$ , não é variedade de visibilidade mas tem curvatura negativa.

Suponhamos que  $\tilde{M}$  seja variedade de visibilidade. Sejam  $p \in M$  e  $x, y \in \partial_{\infty} \tilde{M}$  tais que, o ângulo  $\alpha$  entre os raios geodésicos  $px$  e  $py$  é  $\frac{\pi}{100}$ .

Por hipótese e pela Proposição 2.10, existe geodésica  $\gamma$  ligando  $x$  e  $y$ .

Consideremos um triângulo com vértices  $p$ ,  $x$  e  $y$ . Pelo teorema de Gauss-Bonnet [8],

$$\int_{\triangle} K = \alpha - \pi = \frac{\pi}{100} - \pi$$

Mas,

$$\int_{\triangle} K \geq \int_{\tilde{M}} K \geq \frac{-\pi^2}{100}$$

Logo, temos uma contradição. Portanto, não existe geodésica que ligue  $x$  a  $y$ . Segue-se que  $\tilde{M}$  não é variedade de visibilidade.

## 5.4 Hiperbolicidade de Gromov e Visibilidade

**Definição 5.6.** Um espaço métrico  $(X, d)$  é chamado um espaço geodésico se todo par de pontos pode ser ligado por um segmento de geodésicas.

**Definição 5.7.** Um espaço geodésico completo  $(X, d)$  é chamado  $\delta$ -hiperbólico (ou simplesmente hiperbólico) se todo triângulo geodésico satisfaz: todo ponto de um dado lado do triângulo tem distância menor do que ou igual a  $\delta$  da união dos outros dois lados. Espaços  $\delta$ -hiperbólicos são frequentemente chamados espaços Gromov-hiperbólicos.

Um exemplo de espaço Gromov-hiperbólico é o plano hiperbólico.

O teorema abaixo dá uma idéia da forte relação entre hiperbolicidade de Gromov e visibilidade.

**Teorema 5.8.** [23] Seja  $(M, g)$  uma variedade compacta sem pontos conjugados. Então, seu re-

cobrimento Riemanniano  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  é uma variedade de visibilidade se, e somente se,  $\tilde{M}$  é Gromov-hiperbólico e raios geodésicos divergem em  $\tilde{M}$ .

## APÊNDICE A

**Proposição A.1.** Seja  $x \in H(\infty)$ . O conjunto dos pontos duais a  $x$  é fechado em  $H(\infty)$  e invariante mediante  $D$ .

### *Demonstração. Fechamento*

Sejam  $x, y \in H(\infty)$  duais. Logo, dados abertos  $U, V$  contendo  $x, y$ , respectivamente, existe  $\phi \in D$  tal que,  $\phi(\overline{H} \setminus U) \subseteq V$  (ou  $\phi^{-1}(\overline{H} \setminus V) \subseteq U$ ).

Queremos mostrar que, dada  $\psi \in D$ ,  $x$  e  $\psi(y)$  são duais.

Observemos que

$$y \in \overline{H} \setminus U \Rightarrow \phi(y) \in \phi(\overline{H} \setminus U) \subseteq V$$

Logo, para  $\psi = \phi$  temos que  $x$  e  $\psi(y)$  são duais.

### **Invariância da dualidade mediante D**

Suponhamos  $x$  e  $y$  duais e sejam  $p \in H$  fixado e  $\phi \in D$  isometria dada.

Queremos mostrar que  $x$  e  $\phi(y)$  são duais, ou seja, que dadas duas vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $x$  e  $\phi(y)$ , respectivamente, existe uma isometria  $\eta \in D$  tal que  $\eta(\overline{H} \setminus V_1) \subseteq V_2$  (ou  $\eta^{-1}(\overline{H} \setminus V_2) \subseteq V_1$ ).

Sejam  $U = \phi^{-1}(V_2)$  uma vizinhança de  $y$  e  $V_1$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $x$  e  $y$  são duais, existe uma isometria  $\psi \in D$  tal que  $\psi^{-1}(\overline{H} \setminus V_1) \subseteq U$  (ou  $\psi(\overline{H} \setminus U) \subseteq V_1$ ).

Fazendo  $\eta = \phi \circ \psi^{-1}$  temos que  $\eta(\overline{H} \setminus V_1) = \phi(\psi^{-1}(\overline{H} \setminus V_1)) \subseteq \phi(U) \subseteq V_2$ .  $\square$

**Proposição A.2.** Se  $L(D)$  contém ao menos três pontos então dois pontos quaisquer de  $L(D)$  são duais.

*Demonstração.* Consideremos  $L(D)$  com, pelo menos três pontos. Pelo item (ii) da Proposição 3.5 podemos escolher  $z \in L(D)$  que não é ponto fixo comum de  $D$ . Seja  $z^*$  dual a  $z$ , então  $z^*$  é dual a todo ponto de  $L(D)$ , pela Proposição 3.4. Seja  $x \neq z^*$  em  $L(D)$ . Pelo Lema 3.7,  $z^*$  não é ponto fixo comum de  $D$ . Logo, pelo Lema 3.8,  $D(z^*)$  é denso em  $L(D)$ .

Portanto, se  $x$  é dual a  $z^*$ , temos que  $x$  é dual a todo ponto de  $L(D)$ , já que  $z^*$  é dual a todo ponto em  $L(D)$ .  $\square$

**Lema A.3.** Se  $(M, g)$  é uma superfície compacta de gênero maior do que 1 e curvatura igual a  $-1$ , então  $(M, g)$  é uma variedade de visibilidade.

*Demonsitração.* Seja  $H$  o recobrimento universal de  $M$  e sejam  $p \in H$ ,  $\rho$  e  $\sigma$  raios geodésicos distintos tais que  $\rho(0) = p = \sigma(0)$ . Para  $i \geq 1$  seja  $\gamma_i$  a geodésica por  $\rho(i)$  e  $\sigma(i)$ . Como em variedades de curvatura  $K \leq c < 0$  a distância de um ponto à geodésica é estritamente convexa (fato que segue da fórmula da segunda variação de energia ([4])) a menor distância de  $p$  a  $\gamma_i$  se dá em um ponto  $\gamma_i(t_i)$  entre  $\rho(i)$  e  $\sigma(i)$ . Sejam  $d_i = d(p, \gamma_i(t_i))$  e  $A_i$  a área do triângulo  $T_i$  composto de todos os segmentos geodésicos de  $p$  a pontos de  $\gamma_i$  entre  $\rho(i)$  e  $\sigma(i)$ . Essa área é maior do que a área de um setor Euclidiano de ângulo  $\theta = \angle(\rho'(0), \sigma'(0))$  e raio  $d_i$ . Então,  $A_i > \frac{\theta}{2} d_i^2$ . Pelo teorema de Gauss-Bonnet ([24]),  $\int_{T_i} K dA > -\pi$  e, então,  $A_i < \pi$ . Portanto,  $d_i$  permanece limitado quando  $i \rightarrow +\infty$ .

$\square$

## Referências Bibliográficas

- [1] BERGER, M. *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer, Berlin, 2007.
- [2] COUDENE, Y.; SCHAPIRA B. *Counterexamples in non-positive Curvature*. Preprint, 2010.
- [3] DO CARMO, M. P. *Differential Forms and Applications*. Springer, 1994.
- [4] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA 2008.
- [5] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [6] DRUETTA, M. J. *O conjunto Limite do Grupo Fundamental das Variedades Riemannianas sem Pontos Focais*. Tese de doutorado, Rio de Janeiro: IMPA 1980.
- [7] EBERLEIN, P. *Geodesic Flow in Certain Manifolds Without Conjugate Points*. Transactions of the American Mathematical Society. vol 167, 1972.
- [8] EBERLEIN, P.; O'NEILL B. *Visibility Manifolds*. Pacific Journal of mathematics. vol. 46 nº 1, 1973.
- [9] GREEN, L. *Geodesic Instability* Proc. AMS, 438-448, 1956.
- [10] ESCHENBURG, J. H.; O'SULLIVAN, J. J. *Growth of Jacobi Fields and Divergence of Geodesics*. Math.Z. 150, 221-37, 1976.
- [11] HURLEY D. *Divergence of Geodesics and Uniform Visibility Manifolds*. Department of mathematics, University College, Cork, 1985.
- [12] ISNARD, C. *Introdução a Medida e Integração*. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [13] KLINGENBERG, W. *Geodatischer Fluss auf Mannigfaltigkeiten vom Hyperbolischen Typ*. Preprint, Bonn, Germany, 1970.
- [14] LIMA, E. L. *Introdução à Topologia Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.
- [15] LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [16] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol.2. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [17] MORSE, M. *A Fundamental Class of Geodesics on any Closed Surface of Genus Greater than one*. Trans. Amer. Math. Soc. 26, 25-60, 1924.
- [18] MUNKRES, J. M. *Topology*. 2.ed. Upper Saddle River - NJ. Prentice Hall, 2000.

- [19] PESIN, Ya. B. *Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds without Focal Points.* Math.USSR Izvestija, 11, 1195-1228. 1977
- [20] PHAN, T. T. N. *On Finite Volume, Negatively Curved Manifolds.* Preprint, 2011.
- [21] ROBINSON, C. *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.* Second edition. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1995.
- [22] RUGGIERO, R. O. *Geodésicas em Superfícies sob o Ponto de Vista Global.* Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Belo Horizonte: ICEX / UFMG, 2002.
- [23] RUGGIERO, R. O. *Dynamics and Global Geometry of Manifolds without Conjugate Points.* Ensaios Matemáticos Vol.12. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [24] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol.3. Houston: Publish or Perish, 1979
- [25] SPIVAK, M. *O Cálculo em Variedades* Tradução de Calculus in Manifolds. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.