Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Mestrado Acadêmico em Matemática

Genaro Pablo Zamudio Chauca

Variedades de Poisson e suas aplicações na descrição semiclássica de spin

Juiz de Fora - MG
2012

Genaro Pablo Zamudio Chauca

Variedades de Poisson e suas aplicações na descrição semiclássica de spin

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexei Deriglazov

Juiz de Fora - MG

2012

A Denisse, mi compañera en este largo camino.

Agradecimentos

- Ao meu orientador professor Alexei Deriglazov pela sua paciência e dedicação.

- Aos funcionarios, colegas e professores do Departamento de Matemática na UFJF que muito contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.

- Aos meus amigos no Brasil, eles foram a minha família emprestada enquanto estive fora do meu país.

- A mi familia en Perú por su afecto y su apoyo incondicional para la realización de mis objetivos.

- A Denisse por su apoyo y sus consejos en los momentos dificiles, por los momentos felices y por estar siempre a mi lado a pesar de la distancia.

- Ao CNPq, pelo apoio financiero.

Resumo

Em este trabalho estudamos algumas estruturas matemáticas presentes no modelo semiclássico para o spin não relativístico proposto nas referências [5] e [6]. Obtemos as equações semiclássicas de movimento para o spin não relativístico aplicando o teorema de Ehrenfest à equação de Pauli. Olhando o spin $\mathbf{S}$ como um momento angular interno, identicamos ele como a aplicação de momento ligada à ação de Poisson de SO(3) sobre o espaço de fase interno $\mathbb{R}^6$. Para eliminar os graus de liberdade extras presentes no modelo restringimos a dinâmica a uma superfície de spin V_3 impondo vínculos. Além disso, mostramos que a superfície de spin V_3 tem estrutura de fibrado com base S^2, fibra típica SO(2) e com aplicação de projeção $\mathbf{S}$. Finalmente apresentamos a formulação do problema variacional para o modelo.

Palavras-chave: Variedades de Poisson, Aplicação de momento, Sistemas com vínculos, Modelos semiclássicos de spin.

Abstract

In this work we study some mathematical structures arising in a nonrelativistic spinning-particle model proposed in [5] and [6]. We obtain the semiclassical equations of motion from the Pauli equation via the Ehrenfest theorem. Looking for the spin $\mathbf{S}$ as an intrisic angular momentum, we identify it with the momentum map of the SO(3) Poisson action on the inner phase space $\mathbb{R}^6$. In order to eliminate the extra degrees of freedom, we impose some constraints which restrict the evolution of the system on the spin surface V_3. We show that V_3 is a fiber bundle with base S^2, standard fiber SO(2) and projection $\mathbf{S}$. Finally, we present the formulation of variational problem for the model.

Keywords: Poisson manifolds, Momentum map, Constrained systems, Semiclassical description of spin.

Conteúdo

Introdução

A interpretação física dos resultados dos cálculos realizados nos quadros da teoria quântica devem ser feita usando os conceitos e as noções clássicas (em termos de partículas e interações entre eles). Portanto, precisamos ter a relação mais exata possível entre os conceitos clássicos e quânticos. Um dos “caminhos” que liga estes conceitos é o paradigma de quantização canônica, que permite construir uma teoria quântica a partir de uma dada teoria clássica.

Em particular, a mecânica quântica da partícula sem spin pode ser obtida aplicando o procedimento da quantização canônica à mecânica clássica descrita pela Lagrangeana $L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x})$. Este procedimento funciona da seguinte maneira: primeiro é construída a formulação Hamiltoniana para o sistema; segundo, seguindo o procedimento de quantização canônica de Dirac associamos as variáveis do espaço de fase aos operadores com comutadores, substituindo os colchetes de Poisson e sobre esta base escrevemos a equação de Schrödinger.

É natural perguntar quanto dessa ideia pode ser realizada em outros sistemas físicos. Em particular, neste trabalho estamos interessados na descrição semiclássica das partículas com spin. Apesar de muitos esforços [2,3,4,7,8,9,10,13,15,16]; este problema não tem uma solução completamente satisfatória até agora. Na nossa opinião, um modelo mecânico razoável de spin não relativística tem que satisfazer as seguintes condições:

- Tem que ser construído sem uso de variáveis de Grassmann.

- Este deve ser obtido de um princípio de mínima ação, isto é admita uma funcional de ação Lagrangeana. Isto implica que na formulação Hamiltoniana obtemos um espaço de fase equipado com o colchete de Poisson canônico

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{\omega_k, \pi_l\} = \delta_{kl}$$

- O modelo deve admitir interação com um campo eletromagnético externo.

- Deve produzir o limite clássico correto quando $\hbar \to 0$. No modelo do spin não relativístico, é esperado que o modelo produza: a equação de Lorentz para a variável de posição e a equação semiclássica de precessão do spin na presença do campo magnético externo.

- O procedimento de quantização canônica para a partícula não relativística produz a teoria de Pauli.

- Os valores do spin estejam fixados no modelo clássico.

Objetivo desta dissertação é observar as estruturas algébricas e da geometria diferencial que ficam por trás deste modelo, e começar o estudo (aplicações) destas estruturas. No primeiro capítulo foi estudado as variedades de Poisson até a versão Hamiltoniana do teorema de Noether e apresentado o exemplo do momento angular como aplicação deste teorema. No segundo capítulo reformulamos o nosso modelo de spin pegando ideias das variedades de Poisson. A reformulação pode ser resumida como se segue

1.- Desenvolvemos um método para produzir uma álgebra de Lie de operadores quânticos $[\widehat{\mathbf{z}}_i, \widehat{\mathbf{z}}_j] = i\hbar c_{ij}^k \widehat{\mathbf{z}}_k$ desde um espaço de fase $\mathbb{R}^{2m}$ com colchete de Poisson canônico, após ter aplicado o procedimento de quantização canônica. Mostramos que para cada representação m-dimensional daquela álgebra de Lie pode ser feita essa construção.

2.- No caso do spin não relativístico, a álgebra dos seus operadores quânticos é a álgebra $\mathfrak{so}(3)$. Tomamos a representação adjunta desta álgebra e definimos as variáveis de spin $\mathbf{S}$ sobre um espaço de fase $\mathbb{R}^6$. Para eliminar os graus de liberdade extras, não presentes na teoria quântica, impomos vínculos restringindo a dinâmica a uma superfície do espaço de fase chamada de superfície de spin não relativística e indicada por V_3.

3.- Mostramos que V_3 é difeomorfa ao grupo SO(3) e portanto herda a estrutura de fibração deste grupo. Assim, temos um fibrado onde V_3 é o espaço total, S^2 é a base, SO(2) é a fibra típica e $\mathbf{S}$ é a projeção.

4.- Propomos uma ação Lagrangeana para o modelo. Esta ação produz tanto as equações semiclássicas de movimento, quanto os vínculos presentes no modelo. Obtida a formulação Hamiltoniana do modelo e após ter aplicado o procedimento de quantização canônica, produzimos o Hamiltoniano quântico da equação de Pauli.

A continuação natural deste trabalho é desenvolver um modelo para o spin relativístico. Parte do nosso objetivo foi tentar entender geometricamente o modelo do spin não relativístico e levar este conhecimento para o spin relativístico.

Preliminares Geométricos

Aqui vamos resumir alguns fatos da geometria diferencial e de sistemas dinâmicos em variedades necessários para a apresentação dos Sistemas Hamiltonianos sobre variedades de Poisson. As principais referências para a geometria diferencial [12], [19] e [20]; e para os sistemas dinâmicos [1] e [18].

Denotaremos por M uma variedade diferencial de dimensão m. O conjunto das funções diferenciáveis $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ será denotado por $\mathfrak{F}(M)$. Se sobre o conjunto $\mathfrak{F}(M)$ definimos as operações de

- soma de funções:

$$\begin{array}{rcccc} F+H & : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & F(p)+H(p) \end{array}$$

- produto de escalar com função:

$$\begin{array}{rcccc} aF & : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & aF(p) \end{array}$$

- produto de funções:

$$\begin{array}{rcccc} FH & : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & F(p)H(p) \end{array}$$

ele torna-se uma álgebra comutativa sobre o corpo dos números reais. Além disso, o conjunto $\mathfrak{F}(M)$ com as operações de soma e produto de funções constitui um anel comutativo.

Na geometria diferencial tem-se duas maneiras de definir campos vetoriais sobre uma variedade de dimensão finita. A primeira delas é como seções do fibrado tangente e a segunda é como derivações da álgebra $\mathfrak{F}(M)$. Neste trabalho utilizaremos a segunda maneira ou seja, vamos definir um **campo vetorial** sobre a variedade M de dimensão finita como uma aplicação linear[1] $X : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ que satisfaz a regra de Leibniz

$$X(FH) = F(XH) + (XF)H$$

[1]Aqui tomamos $\mathfrak{F}(M)$ com a sua estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais

para quaisquer $F, H \in \mathfrak{F}(M)$. O conjunto dos campos vetoriais será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Se sobre o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ definimos as operações de

- soma de campos vetoriais:

$$\begin{array}{rcl} X+Y \ : \ \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ F & \longmapsto & X(F)+Y(F) \end{array}$$

- produto de escalar com campo vetorial:

$$\begin{array}{rcl} aX \ : \ \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ F & \longmapsto & aX(F) \end{array}$$

ele torna-se um espaço vetorial (de dimensão infinita) sobre o corpo dos números reais. Alem disso, se considerarmos a operação

- produto de função com campo vetorial:

$$\begin{array}{rcl} FX \ : \ \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ H & \longmapsto & FX(H) \end{array}$$

o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ torna-se um $\mathfrak{F}(M)$-modulo.

Podemos dar estrutura de álgebra ao conjunto $\mathfrak{X}(M)$ definindo um produto de dois campos vetoriais. Assim definimos o **colchete de Lie** de dois campos vetoriais

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ] \ : \ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & [X,Y] \end{array}$$

como

$$[X,Y](F) = X(YF) - Y(XF)$$

para qualquer $F \in \mathfrak{F}(M)$. O espaço vetorial $\mathfrak{X}(M)$ com o colchete de Lie constitui uma álgebra de Lie.

Seja $\big(U, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)\big)$ uma carta de M. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos a sua expresão local em U

$$X(F) = X(\varphi_i)\partial_i^* F$$

para qualquer $F \in \mathfrak{F}(M)$, onde $\partial_i^* F = \partial_i(F \circ \varphi^{-1})$.

Dado $p \in M$. Um **vetor tangente** a M em p é uma aplicação linear $v : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a regra de Leibniz pontual

$$v(FH) = F(p)v(H) + v(F)H(p)$$

para quaisquer $F, H \in \mathfrak{F}(M)$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será denotado por T_pM. Se sobre o conjunto T_pM definimos as operações

- soma de vetores tangentes:

$$\begin{array}{rccc} v+w & : & \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & F & \longmapsto & v(F)+w(F) \end{array}$$

- produto de escalar com vetor tangente:

$$\begin{array}{rccc} av & : & \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & F & \longmapsto & av(F) \end{array}$$

ele torna-se um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais chamado **espaço tangente** a M em p.

Seja (U, φ) uma carta de M com $p \in U$. Para cada $v \in T_pM$, obtemos a expressão

$$v(F) = a_i \partial_i^* \Big|_p F$$

onde $a_i = v(\varphi_i)$ e $\partial_i^* \Big|_p F = \partial_i(F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$. Assim o conjunto $\left\{ \partial_1^* \Big|_p, \partial_2^* \Big|_p, \ldots, \partial_m^* \Big|_p \right\}$ constitui uma base para T_pM.

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} X_p & : & \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & F & \longmapsto & X(F)(p) \end{array}$$

Pode-se verificar que esta aplicação é linear e satisfaz a regra de Leibniz pontual, logo $X_p \in T_pM$. Por outro lado, pode-se verificar que para cada $v \in T_pM$ existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $v = X_p$.

Uma **curva** sobre M é uma aplicação diferenciável

$$\begin{array}{rccc} \alpha & : & I & \longrightarrow & M \\ & & t & \longmapsto & \alpha(t) \end{array}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Definimos o **vetor velocidade** da curva α em t_0 da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccc} \dot{\alpha}(t_0) & : & \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & F & \longmapsto & (F \circ \alpha)\dot{}(t_0) \end{array}$$

Pode-se verificar que $\dot{\alpha}(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}M$.

Dada uma carta (U, φ) de M, obtemos a expresão do vetor velocidade em coordenadas locais considerando que $F \circ \alpha = (F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha)$, definindo $\boldsymbol{\alpha} = \varphi \circ \alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$ temos $F \circ \alpha = (F \circ \varphi^{-1}) \circ \boldsymbol{\alpha}$, logo

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t_0)(F) &= (F \circ \alpha)\dot{}(t_0) \\
&= (F \circ \varphi^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha})\dot{}(t_0) \\
&= \dot{\alpha}_i(t_0)\partial_i(F \circ \varphi)(\boldsymbol{\alpha}(t_0)) \\
&= \dot{\alpha}_i(t_0)\partial_i^*\Big|_{\alpha(t_0)} F
\end{aligned}$$

ou seja

$$\dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}_i(t_0)\partial_i^*\Big|_{\alpha(t_0)}$$

Uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$ é uma **curva integral** do campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$$

para qualquer $t \in I$. Se expressarmos a condição acima em coordenadas locais (U, φ) temos

$$\dot{\alpha}_i(t)\partial_i^*\Big|_{\alpha(t)} = X(\varphi)(\alpha(t))\partial_i^*\Big|_{\alpha(t)}$$

se definimos $X_i = X(\varphi_i) \circ \varphi^{-1}$, a equação acima torna-se uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\dot{\alpha}_i(t) = X_i(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

ou vetorialmente

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

A teoria de equações diferenciais ordinárias garante a existência e a unicidade de curvas integrais maximais para um campo vetorial sobre uma variedade. Para cada $p \in M$, seja I_p o intervalo maximal e $\gamma_p : I_p \longrightarrow M$ a curva integral maximal com dado inicial $\gamma_p(0) = p$ do campo vetorial X. Seja $W_X = \bigcup\limits_{p \in M} I_p \times \{p\} \subseteq \mathbb{R} \times M$. Pode-se provar que este conjunto é um aberto de $\mathbb{R} \times M$. Definimos a aplicação diferenciável

$$\begin{array}{rccc}
\Phi_X : & W_X & \longrightarrow & M \\
& (t,p) & \longmapsto & \gamma_p(t)
\end{array}$$

chamado de **pseudo fluxo** do campo vetorial X. Este pseudo fluxo possui as seguintes propriedades

$$\Phi_X(0, p) = p, \qquad \forall p \in M \tag{1}$$

$$\Phi_X(t + s, p) = \Phi_X(t, \Phi_X(s, p)), \qquad \forall p \in M, t + s \in I_p \tag{2}$$

Além dessas propriedades, pelo fato de que $\Phi_X(\cdot, p)$ seja uma curva integral maximal do campo vetorial X temos que

$$\partial_t \Phi_X(t,p) = X_{\Phi_X(t,p)}$$

Dizemos que um campo vetorial X é **completo** se $W_X = \mathbb{R} \times M$ e neste caso Φ_X é chamado de **fluxo** do campo vetorial X. Se um campo vetorial X é completo nós podemos definir, para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_X^t : & M & \longrightarrow & M \\ & p & \longmapsto & \Phi_X(t,p) \end{array}$$

As propriedades (1) e (2) do fluxo Φ_X se traduzem para

$$\Phi_X^0 = \mathrm{id}_M$$
$$\Phi_X^{t+s} = \Phi_X^t \circ \Phi_X^s, \qquad \forall t+s \in \mathbb{R}$$

E em particular $(\Phi_X^t)^{-1} = \Phi_X^{-t}$. Logo o conjunto $\left\{\Phi_X^t \in \mathrm{Diff}(M) \,/\, t \in \mathbb{R}\right\}$ é um grupo de difeomorfismos de M chamado de **grupo uniparamétrico de difeomorfismos** ou **$\mathbb{R}$-ação sobre** M.

Por outro lado, se temos uma aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ que satisfaz as seguintes propriedades

$$\Phi(0,p) = p, \qquad \forall p \in M$$
$$\Phi(t+s,p) = \Phi(t, \Phi(s,p)), \qquad \forall p \in M, t+s \in \mathbb{R}$$

então esta aplicação é o fluxo do campo vetorial completo X definido da seguinte maneira

$$X(F) = \partial_t (F \circ \Phi)\Big|_{t=0} \tag{3}$$

ou

$$X_p = \partial_t \Phi(0,p) \tag{4}$$

Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis e $\Psi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Dados os campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$, dizemos que eles são **Ψ-relacionados** se

$$X(F \circ \Psi) = Y(F) \circ \Psi \qquad , \forall F \in \mathfrak{F}(M_2)$$

.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos sobre Variedades de Poisson

Aqui apresentaremos a teoria de Sistemas Hamiltonianos em variedades de Poisson, o que seria uma generalização geométrica da Mecânica Hamiltoniana. As principais referências para este capítulo são [1], [13] e [15].

1.1 Colchetes de Poisson

Um **colchete de Poisson** sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\{\ ,\ \} : \mathfrak{F}(M) \times \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ com as seguintes propriedades básicas

1.- Bilinear:

$$\{aF_1 + bF_2, H\} = a\{F_1, H\} + b\{F_2, H\}$$

$$\{F, aH_1 + bH_2\} = a\{F, H_1\} + b\{F, H_2\}$$

2.- Anti-simétrica:

$$\{F, H\} = -\{H, F\}$$

3.- Identidade de Jacobi:

$$\{\{F, H\}, K\} + \{\{K, F\}, H\} + \{\{H, K\}, F\} = 0$$

4.- Regra de Leibniz:

$$\{FK, H\} = F\{K, H\} + \{F, H\}K$$

As propriedades 1, 2 e 3 tornam o $(\mathfrak{F}(M), \{\ ,\ \})$ uma álgebra de Lie. Uma variedade M munida com um colchete de Poisson é chamada de **variedade de Poisson**, o colchete de Poisson define uma **estrutura de Poisson** sobre M.

Exemplo 1.1. *Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas globais $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ (na física clássica os $\mathbf{q}$'s são as variáveis de posição e os $\mathbf{p}$'s são as variáveis de momento). Sejam $F, H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^{2n})$, definimos o colchete*

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Pode-se provar que este colchete satisfaz às propriedades 1, 2, 3 e 4; e portanto define uma estrutura de Poisson sobre $\mathbb{R}^{2n}$. Olhando as coordenadas globais $q_1, q_2 \ldots, q_n$, $p_1, p_2 \ldots, p_n$ como funções sobre $\mathbb{R}^{2n}$ temos

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

O colchete apresentado neste exemplo é o colchete de Poisson usual da mecânica clássica, também chamado de colchete de Poisson canônico.

Exemplo 1.2. *Generalizando o exemplo 1.1, sejam $M = \mathbb{R}^{2n+l}$ com coordenadas globais $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{z}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, z_1, \ldots z_l)$ e $F, H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^{2n+l})$, definimos o colchete*

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Novamente, pode-se provar que este colchete satisfaz às propriedades 1, 2, 3 e 4; e portanto define uma estrutura de Poisson sobre $\mathbb{R}^{2n+l}$. Neste caso, temos as seguinte relações para as coordenadas globais

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{q_i, z_j\} = 0, \qquad \{p_i, z_j\} = 0, \qquad \{z_i, z_j\} = 0$$

Seja M uma variedade de Poisson. Uma função diferenciável $C \in \mathfrak{F}(M)$ é chamada de **função de Casimir** se $\{C, H\} = 0$ para qualquer $H \in \mathfrak{F}(M)$. Ou seja, as funções de Casimir são o centro[1] da álgebra de Lie $(\mathfrak{F}(M), \{\ ,\ \})$. Note que sobre qualquer variedade de Poisson, as funções constantes são funções de Casimir. No exemplo 1 as únicas funções de Casimir são as funções constantes; no caso do exemplo 2 é simples perceber que qualquer função somente nas variáveis $\mathbf{z}$'s são funções de Casimir.

[1]O centro de uma álgebra é o subconjunto de elementos que comutam com todos os elementos da álgebra.

1.2 Campos Vetoriais Hamiltonianos

Sejam M uma variedade de Poisson e $H \in \mathfrak{F}(M)$. Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} X^H : & \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ & F & \longmapsto & \{F, H\} \end{array}$$

Afirmamos que $X^H \in \mathfrak{X}(M)$. Com efeito:

- X^H é linear: Segue da propriedade 1 do colchete de Poisson.

- X^H satisfaz a regra de Leibniz: Sejam $F, K \in \mathfrak{F}(M)$ então

$$\begin{aligned} X^H(FK) =&\{FK, H\} \\ =&F\{K, H\} + \{F, H\}K \\ =&FX^H(K) + X^H(F)K \end{aligned}$$

Assim para cada $H \in \mathfrak{F}(M)$ podemos associar um campo vetorial X^H chamado de **campo vetorial Hamiltoniano**. As equações que regem o pseudo fluxo (ou fluxo) Φ_H do campo vetorial X^H são chamadas de **equações de Hamilton** para o "Hamiltoniano" H.

Observe que $C \in \mathfrak{F}(M)$ é uma função de Casimir se, e somente se seu campo vetorial Hamiltoniano X^C é nulo. Assim o campo vetorial X^C de uma função de Casimir é completo e gera uma dinâmica trivial, pois seu fluxo associado $\Phi_C : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ é definido por $\Phi_C(t, p) = p$.

Exemplo 1.3. *Voltando ao exemplo 1.2, para cada $H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^{2n+l})$ temos o campo vetorial Hamiltoniano*

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

O fluxo correspondente é obtido pela integração do seguinte sistema de equações

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad \dot{z}_k = 0$$

Nas páginas anteriores foi dito que tanto $(\mathfrak{F}(M), \{\ ,\ \})$ como $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ são álgebras de Lie e estes espaços estão relacionados pela aplicação $H \in \mathfrak{F}(M) \longmapsto X^H \in \mathfrak{X}(M)$. Na verdade temos a seguinte proposição:

Proposição 1.4. *A aplicação $\pounds : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, $\pounds(H) = X^H$ é um antihomomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração.

- $\pounds$ é linear: Sejam $F, H, K \in \mathfrak{F}(M)$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\pounds(F+aH)(K) =& X^{F+aH}(K)\\ =&\{K, F+aH\}\\ =&\{K,F\}+a\{K,H\}\\ =&X^F(K)+aX^H(K)\\ =&\pounds(F)(K)+a\pounds(H)(K)\end{aligned}$$

Portanto: $\pounds(F+aH) = \pounds(F) + a\pounds(H)$

- $\pounds$ é antihomomorfismo: Sejam $F, H, K \in \mathfrak{F}(M)$, temos

$$\begin{aligned}[X^F, X^H](K) =& X^F X^H(K) - X^H X^F(K)\\ =&X^F(\{K,H\}) - X^H(\{K,F\})\\ =&\{\{K,H\},F\} - \{\{K,F\},H\}\\ =&\{\{K,H\},F\} + \{\{F,K\},H\}\\ =&-\{K,\{F,H\}\}\\ =&-X^{\{F,H\}}(K)\end{aligned}$$

Por tanto: $\pounds(\{F,H\}) = -[\pounds(F), \pounds(H)]$ □

A imagem da aplicação linear $\pounds$ é o conjunto dos campos vetoriais Hamiltonianos e será denotada por $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M)$. Desde que $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M)$ é a imagem de um antihomomorfismo, então ele é uma subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$. Como já foi dito, $C \in \mathfrak{F}(M)$ é uma função de Casimir se, e somente se seu campo vetorial Hamiltoniano X^C é nulo. Ou seja, o núcleo da aplicação linear $\pounds$ é o conjunto das funções de Casimir da variedade de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$.

1.3 Funções de Estrutura

Sejam M uma variedade de Poisson e $H \in \mathfrak{F}(M)$, para cada carta (U, φ) de M obtemos a expressão local de X_H

$$X^H = X^H(\varphi_i)\partial_i^* \tag{1.1}$$

ou

$$X^H = \{\varphi_i, H\}\partial_i^*$$

Por outro lado, da antisimetria do colchete de Poisson temos

$$\{\varphi_i, H\} = -\{H, \varphi_i\} = -X^{\varphi_i}(H) = -\{\varphi_j, \varphi_i\}\partial_j^* H$$

portanto

$$X^H = \{\varphi_i, \varphi_j\}\partial_j^* H \partial_i^*$$

logo, para qualquer $F \in \mathfrak{F}(M)$ temos

$$X^H(F) = \{\varphi_i, \varphi_j\}\partial_j^* H \partial_i^* F$$

$$\{F, H\} = \{\varphi_i, \varphi_j\}\partial_j^* H \partial_i^* F$$

Em outras palavras, para achar o colchete de Poisson de duas funções quaisquer nas coordenadas locais (U, φ) é suficiente achar o colchete de Poisson entre as funções coordenadas. Esses colchetes fundamentais

$$\Omega_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\}$$

são chamados de funções de estrutura da variedade de Poisson relativo à carta (U, φ).

Por conveniência escreveremos as funções de estrutura na forma de uma matriz $m \times m$ antisimétrica $\mathbf{\Omega}$ chamada de matriz de estrutura da variedade de Poisson M

$$\mathbf{\Omega} : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}, \quad p \longmapsto \mathbf{\Omega}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12}(p) & \Omega_{13}(p) & \dots & \Omega_{1m}(p) \\ -\Omega_{12}(p) & 0 & \Omega_{23}(p) & \dots & \Omega_{2m}(p) \\ \vdots & \dots & \ddots & & \vdots \\ -\Omega_{1m-1}(p) & \dots & & & \Omega_{m-1m}(p) \\ -\Omega_{1m}(p) & \dots & & & 0 \end{bmatrix}$$

Então o colchete de Poisson de duas funções restrito a U pode ser escrito como

$$\{F, H\} = \Omega_{ij}\partial_i^* F \partial_j^* H$$

Logo obtemos a expressão do colchete de Poisson para duas funções em coordenadas locais

$$\{F, H\} \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = \Omega_{ij}^*(\mathbf{x})\partial_i F^*(\mathbf{x})\partial_j H^*(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \varphi(U)$$

onde $\Omega_{ij}^* = \Omega_{ij} \circ \varphi^{-1}$, $F^* = F \circ \varphi^{-1}$ e $H^* = H \circ \varphi^{-1}$. Se denotamos ∇H^* como sendo o gradiente coluna da função H, o colchete de Poisson em coordenadas locais pode ser escrito como

$$\{F, H\} \circ \varphi^{-1} = (\nabla F^*)^\intercal \mathbf{\Omega}^* \nabla H^*$$

Então a expressão local para o campo vetorial Hamiltoniano associado com $H \in \mathfrak{F}(M)$ tem a seguinte forma

$$X^H = \Omega_{ij}\partial_j^* H \partial_i^* \tag{1.2}$$

Logo de (1.1) e (1.2) temos que as compomentes X_i^H do campo vetorial X^H em coordenadas locais (U, φ) são

$$X_i^H = X^H(\varphi_i) \circ \varphi^{-1} = \Omega_{ij}^* \partial_j H^*$$

Assim obtemos as equações de Hamilton em coordenadas locais

$$\dot{\alpha}_i(t) = \Omega_{ij}^*(\boldsymbol{\alpha}(t))\partial_j H^*(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

ou matricialmente

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\Omega}^*(\boldsymbol{\alpha}(t))\nabla H^*(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

1.4 Fluxos Hamiltonianos

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades dos pseudo fluxos (fluxos) dos campos vetoriais Hamiltonianos ligadas com a estrutura de Poisson. Sejam W_H o domínio do pseudo fluxo (fluxo) e Φ_H o pseudo fluxo (fluxo) do campo vetorial Hamiltoniano X^H.

Proposição 1.5. *Sejam $H \in \mathfrak{F}(M)$ e $\Phi_H : W_H \longrightarrow M$ o pseudo fluxo do seu campo vetorial Hamiltoniano associado X^H. Então:*

i) Para cada $F \in \mathfrak{F}(M)$ temos

$$\partial_t(F \circ \Phi_H)(t,p) = \{F, H\}(\Phi_H(t,p)) \qquad , \forall (t,p) \in W_H$$

ii) Seja $p \in M$

$$H(\Phi_H(t,p)) = H(p) \qquad , \forall t \in I_p$$

Demonstração.

i) Fixando $p \in M$, lembre-se que $\Phi_H(t,p) = \gamma_p(t)$ é a curva integral maximal, com dado inicial $\gamma_p(0) = p$, do campo vetorial Hamiltoniano X^H, logo para cada $F \in \mathfrak{F}(M)$ temos

$$\begin{aligned}\partial_t(F \circ \Phi_H)(t,p) =& (F \circ \gamma_p)\dot{}(t)\\ =& \dot{\gamma}_p(t)(F)\\ =& X^H(F)(\gamma_p(t))\\ =& \{F, H\}(\Phi_H(t,p))\end{aligned}$$

ii) Por (i) temos $\partial_t(H\circ\Phi_H)(t,p)=0$, $\forall(t,p)\in W_H$. Segue que $H(\Phi_H(t,p))=H(\Phi_H(s,p))$, $\forall t,s\in I_p$. Escolhendo $s=0\in I_p$ obtemos $H(\Phi_H(t,p))=H(p)$, $\forall t\in I_p$. □

Corolário 1.6. *Sejam $F,H\in\mathfrak{F}(M)$. Então F é constante ao longo das curvas integrais*[2] *de X^H se, e somente se $\{F,H\}=0$. Equivalentemente, temos que H é constante ao longo das curvas integrais de X^F.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se F é constante ao longo das curvas integrais de X^H então $\partial_t(F\circ\Phi_H)(t,p)=0$. Pela Prop. 1.5 segue $\{F,H\}(\Phi_H(t,p))=0,\forall(t,p)\in W_H$. Escolhendo $t=0$, $\{F,H\}(p)=\{F,H\}(\Phi_H(0,p))=0$. ($\Leftarrow$) Se $\{F,H\}=0$, a Prop. 1.5 diz que $\partial_t(F\circ\Phi_H)(t,p)=0$, logo F é constante ao longo das curvas integrais de X^H. □

Daqui para frente vamos trabalhar com campos vetoriais Hamiltonianos X^H completos. Então se F é constante ao longo das curvas integrais de X^H, pelo Corolário 1.6 sabemos $\{F,H\}=0$, então $\partial_t(H\circ\Phi_F)(t,p)=0$, $\forall(t,p)\in W_F=\mathbb{R}\times M$, ou seja

$$H(\Phi_F(t,p))=H(p)$$

ou

$$H\circ\Phi_F^t=H,\qquad t\in\mathbb{R}$$

Resumindo, para cada grandeza conservada $F\in\mathfrak{F}(M)$ do sistema Hamiltoniano associado ao $H\in\mathfrak{F}(M)$ existe um grupo uniparamétrico de difeomorfismos ou grupo de simetria. Além disso, note que pela Proposição 1.5.ii) temos que:

$$H\circ\Phi_H^s=H\qquad,\forall s\in\mathbb{R}\tag{1.3}$$

Uma aplicação diferenciável $\Psi:M_1\longrightarrow M_2$ entre duas variedades de Poisson $(M_1,\{\ ,\ \}_1)$ e $(M_2,\{\ ,\ \}_2)$ é chamada de **aplicação canônica** ou **aplicação de Poisson** se

$$\{F,H\}_2\circ\Psi=\{F\circ\Psi,H\circ\Psi\}_1\qquad,\forall F,H\in\mathfrak{F}(M_2)$$

Proposição 1.7. *Sejam $\Psi:M_1\longrightarrow M_2$ uma aplicação de Poisson e $H\in\mathfrak{F}(M_2)$. Se Φ_H é o fluxo de X^H e $\Phi_{H\circ\Psi}$ é o fluxo de $X^{H\circ\Psi}$ então*

$$\Phi_H^t\circ\Psi=\Psi\circ\Phi_{H\circ\Psi}^t\qquad,\forall t\in\mathbb{R}$$

e os campos $X^{H\circ\Psi}$ e X^H são Ψ-relacionados. Contrariamente, se $\Psi:M_1\longrightarrow M_2$ é uma aplicação diferenciável tal que para todo $H\in\mathfrak{F}(M_2)$ os campos vetoriais Hamiltonianos $X^{H\circ\Psi}\in\mathfrak{X}(M_1)$ e $X^H\in\mathfrak{X}(M_2)$ são Ψ-relacionados, então Ψ é uma aplicação de Poisson.

[2]Na Física estas funções são chamadas de grandezas conservadas.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $p \in M_1$, defina a curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M_2$, $\gamma(t) = \Psi \circ \Phi_{H\circ\Psi}(t,p)$. Dado $F \in \mathfrak{F}(M_2)$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t)(F) =& (F \circ \gamma)\dot{}(t)\\ =& \partial_t(F \circ \Psi \circ \Phi_{H\circ\Psi})(t,p)\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.5.i) e pelo fato de que Ψ seja Poisson temos

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t)(F) =& \{F \circ \Psi, H \circ \Psi\}_1(\Phi_{H\circ\Psi}(t,p))\\ =& \{F, H\}_2(\Psi(\Phi_{H\circ\Psi}(t,p)))\\ =& X^H(F)(\Psi(\Phi_{H\circ\Psi}(t,p)))\\ =& X^H_{\gamma(t)}(F)\end{aligned}$$

Logo γ é uma curva integral maximal do campo vetorial X^H com uma condição inicial $\gamma(0) = \Psi(p)$, portanto $\gamma(t) = \Phi_H(t, \Psi(p))$ ou

$$\Psi \circ \Phi_{H\circ\Psi}(t,p) = \Phi_H(t, \Psi(p)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in M_1$$

Fixando $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\Phi^t_H \circ \Psi = \Psi \circ \Phi^t_{H\circ\Psi}$$

Além disso, note que

$$X^{H\circ\Psi}(F \circ \Psi) = \{F \circ \Psi, H \circ \Psi\}_1 = \{F, H\}_2 \circ \Psi = X^H(F) \circ \Psi \quad , \forall F \in \mathfrak{F}(M_2)$$

Portanto os campos $X^{H\circ\Psi}$ e X^H são Ψ-relacionados.

($\Leftarrow$) Segue da própria definição. □

Proposição 1.8. *Sejam $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e Φ_H o fluxo do campo vetorial Hamiltoniano X^H. Então*

$$\{F, K\} \circ \Phi^s_H = \{F \circ \Phi^s_H, K \circ \Phi^s_H\} \qquad , \forall s \in \mathbb{R}$$

Ou seja, Φ^s_H é uma aplicação de Poisson para cada $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Veja a referência [13], Proposição 10.3.1 (página 338). □

1.5 Subvariedades de Poisson

Uma **subvariedade** de dimensão k de uma variedade M de dimensão m é um subconjunto $S \subset M$ com a propriedade de que para cada ponto $p \in S$ existe uma carta (U, φ) em M que satisfaz

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

Com essa definição de subvariedade, temos que a aplicação inclusão $i : S \longrightarrow M$ é diferenciável[3].

Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson. Dizemos que $S \subset M$ é uma **subvariedade de Poisson** se a aplicação inclusão é uma aplicação de Poisson.

Proposição 1.9. *Uma subvariedade S de M é uma subvariedade de Poisson se somente se cada campo vetorial Hamiltoniano de M é tangente a S, isto é, $X_p^H \in T_pS, \forall p \in S, \forall H \in \mathfrak{F}(M)$.*

Demonstração. Veja a referência [15], Proposição 6.19 (página 402). □

1.6 Campos vetoriais invariantes à esquerda de um Grupo de Lie

Seja G um grupo de Lie[4]. Para cada $g \in G$ definimos a aplicação $L^g : G \longrightarrow G$, $L^g(h) = gh$, chamada de multiplicação à esquerda por g. Note que $L^{g_1} \circ L^{g_2} = L^{g_1 g_2}$ e $(L^g)^{-1} = L^{g^{-1}}$, portanto L^g é um difeomorfismo de G. Na verdade, temos que a aplicação $g \in G \longmapsto L^g \in \mathrm{Diff}(G)$ é um homomorfismo de grupos.

Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à esquerda se para cada $g \in G$ temos

$$X(F) \circ L^g = X(F \circ L^g) \qquad , \forall F \in \mathfrak{F}(G)$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}_L(G)$ o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda de G.

Proposição 1.10. *$\mathfrak{X}_L(G)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$, isomorfo a T_eG.*

Demonstração.

[3] Na verdade temos mais do que isso, temos que $i : S \longrightarrow M$ é uma imersão.

[4] e denota o elemento identidade do grupo G

i) $\mathfrak{X}_L(G)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$: Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ e $a \in \mathbb{R}$. Dados $g \in G$ e $F \in \mathfrak{F}(G)$ temos

$$\begin{aligned}(X + aY)(F \circ L^g) =& X(F \circ L^g) + aY(F \circ L^g)\\ =& X(F) \circ L^g + aY(F) \circ L^g\\ =& (X + aY)(F) \circ L^g\end{aligned}$$

Logo $X + aY \in \mathfrak{X}_L(G)$

ii) Para cada $\xi \in T_eG$ definimos o campo vetorial X^ξ como sendo $X^\xi(F)(g) = \xi(F \circ L^g)$. Note que, dado $F \in \mathfrak{F}(G)$ e $h, g \in G$, temos

$$\begin{aligned}X^\xi(F \circ L^h)(g) =& \xi((F \circ L^h) \circ L^g)\\ =& \xi(F \circ L^{hg})\\ =& X^\xi(F)(hg)\\ =& X^\xi(F) \circ L^h(g)\end{aligned}$$

Portanto $X^\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$. Assim temos a aplicação $\rho_1 : T_eG \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G)$, $\xi \longmapsto X^\xi$. Essa aplicação é linear, pois dados $\xi, \eta \in T_eG$, $a \in \mathbb{R}$, $g \in G$ e $F \in \mathfrak{F}(M)$, temos

$$\begin{aligned}X^{\xi + a\eta}(F)(g) =& (\xi + a\eta)(F \circ L^g)\\ =& \xi(F \circ L^g) + a\eta(F \circ L^g)\\ =& X^\xi(F)(g) + aX^\eta(F)(g)\end{aligned}$$

Além disso, a aplicação linear $\rho_2 : \mathfrak{X}_L(M) \longrightarrow T_eG$, $X \longrightarrow X_e$ é a inversa da aplicação ρ_1. Logo, $\mathfrak{X}_L(M)$ e T_eG são isomorfos. $\square$

O isomorfismo apresentado na Proposição 1.10 permite transferir a estrutura de álgebra de Lie para o espaço tangente T_eG. Assim definimos a operação $[\ ,\ ] : T_eG \times T_eG \longrightarrow T_eG$, dado por

$$[\xi, \eta] = [X^\xi, X^\eta](e)$$

Com essa operação T_eG torna-se uma álgebra de Lie e será denotada por $\mathcal{G}$.

Lema 1.11. *Seja $\phi : (a, b) \longrightarrow G$ curva integral do campo vetorial invariante à esquerda X^ξ com condição inicial $\phi(0) = e$. Então, para todo $g \in G$, a curva $\psi : (a, b) \longrightarrow G$, definida por $\psi(t) = g\phi(t)$ é uma curva integral de X^ξ com condição inicial $\psi(0) = g$.*

Demonstração. Note que $\psi = L^g \circ \phi$. Logo, para qualquer $F \in \mathfrak{F}(G)$ temos

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t)(F) &= (F \circ \psi)\dot{}(t) \\
&= (F \circ L^g \circ \phi)\dot{}(t) \\
&= \dot{\phi}(t)(F \circ L^g) \\
&= X^\xi (F \circ L^g)(\phi(t)) \\
&= X^\xi (F) \circ L^g(\phi(t)) \\
&= X^\xi (F)(\psi(t))
\end{aligned}$$

Portanto ψ é curva integral de X^ξ e satisfaz a condição inicial $\psi(0) = g\phi(0) = g$. $\square$

Proposição 1.12. *Todo campo vetorial invariante à esquerda é completo*

Demonstração. Dado o campo vetorial invariante à esquerda X^ξ e seja $\phi : (a,b) \longrightarrow G$ a sua curva integral maximal com condição inicial $\phi(0) = e$. Note que pelo lema anterior é suficiente provar que $(a,b) = \mathbb{R}$. Suponha que[5] $b < \infty$ e $g = \phi\left(\frac{b}{2}\right)$. Novamente, pelo lema 1.11 sabemos que $\psi : (a,b) \longrightarrow G$, $\psi(t) = g\phi(t)$ é a curva integral de X^ξ com condição inicial $\psi(0) = g = \phi\left(\frac{b}{2}\right)$.

Então, se definimos $\widetilde{\phi} : \left(a, \frac{3b}{2}\right) \longrightarrow G$ por

$$\widetilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t) & , \quad \text{se} \quad t \in \left(a, \frac{b}{2}\right] \\ \psi(t - \frac{b}{2}) & , \quad \text{se} \quad t \in \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right) \end{cases}$$

temos

- É claro que $\widetilde{\phi}$ é diferenciável em $\left(a, \frac{b}{2}\right) \cup \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$. A boa definição e diferenciabilidade de $\widetilde{\phi}$ em $t = \frac{b}{2}$ é garantida pela unicidade da curva integral de X^ξ com condição inicial $\psi(0) = g$.

- Como ϕ e ψ são curvas integrais de X^ξ, segue que $\widetilde{\phi}$ também é curva integral de X^ξ.

Logo, $\widetilde{\phi}$ é curva integral de X^ξ com condição inicial $\widetilde{\phi}(0) = e$, o que contradiz a maximalidade da ϕ. Portanto $b = \infty$. Semelhantemente prova-se que $a = -\infty$. $\square$

Dado $\xi \in \mathcal{G}$, seja $\phi_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ a curva integral maximal do campo vetorial invariante à esquerda X^ξ com condição inicial $\phi_\xi(0) = e$, isto é

$$\dot{\phi}_\xi(t) = X^\xi_{\phi_\xi(t)}$$

[5]Como $0 \in (a,b)$, segue que $b > 0$.

Daqui temos $\dot{\phi}_\xi(0) = X^\xi_{\phi_\xi(0)} = \xi$. Das propriedades do fluxo segue que ϕ_ξ satisfaz

$$\phi_\xi(t+s) = \phi_\xi(t)\phi_\xi(s), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

É por essa propriedade, que a aplicação $\xi \in \mathcal{G} \longmapsto \phi_\xi$ é chamada de **aplicação exponencial** da álgebra de Lie $\mathcal{G}$.

1.7 Aplicação de Momento

Seja M uma variedade diferenciável. Uma **ação** do grupo de Lie G sobre M é uma aplicação diferenciável $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ que satisfaz

i) $\Phi(e,p) = p, \quad , \forall p \in M$

ii) $\Phi(g_1 g_2, p) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, p)) \quad , \forall g_1, g_2 \in G, \forall p \in M$

Se para cada $g \in G$, definimos $\Phi^g : M \longrightarrow M$, $\Phi^g(p) = \Phi(g,p)$, das propriedades (i) e (ii) temos

- $\Phi^e = \mathrm{id}_G$

- $\Phi^{g_1 g_2} = \Phi^{g_1} \circ \Phi^{g_2}$, e isso implica $(\Phi^g)^{-1} = \Phi^{g^{-1}}$

Logo Φ^g é um difeomorfismo sobre M. Na verdade, temos que a aplicação $g \in G \longmapsto \Phi^g \in \mathrm{Diff}(M)$ é um homomorfismo de grupos. Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson, dizemos que a ação $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ é uma **ação de Poisson** se Φ^g é uma aplicação de Poisson, para todo $g \in G$.

Seja $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação. Para cada $\xi \in \mathcal{G}$ temos que $\Phi_\xi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, $\Phi_\xi(t,p) = \Phi(\phi_\xi(t), p)$ é uma $\mathbb{R}$-ação ou fluxo sobre M. Logo, esse fluxo define um campo vetorial sobre M dado por

$$\xi^M(F) = (F \circ \Phi_\xi)^{\cdot}\Big|_{t=0}$$

Naturalmente Φ_ξ é o fluxo do campo vetorial ξ^M e aquele campo vetorial é chamado de **gerador infinitesimal** da ação correspondente a ξ.

Proposição 1.13. *A aplicação $\xi \in \mathcal{G} \longmapsto \xi^M \in \mathfrak{X}(M)$ é um antihomomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração. Veja a referência [13], Proposição 9.3.6 (página 316). $\square$

Seja $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e uma ação de Poisson $\Phi : G \times M \longrightarrow M$. Suponha que existe uma aplicação linear $\widehat{J} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ que satisfaz

$$X^{\widehat{J}(\xi)} = \xi^M$$

isto é

$$\{F, \widehat{J}(\xi)\} = (F \circ \Phi_\xi)^{\cdot}\Big|_{t=0} \qquad , \forall F \in \mathfrak{F}(M)$$

Logo, para cada $p \in M$ defina a aplicação $\mathbf{J}(p) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{J}(p)(\xi) = \widehat{J}(\xi)(p)$. Note que $\mathbf{J}(p)$ é linear, pois se $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(p)(\xi + a\eta) =& \widehat{J}(\xi + a\eta)(p) \\ =& \left(\widehat{J}(\xi) + a\widehat{J}(\eta)\right)(p) \\ =& \mathbf{J}(p)(\xi) + a\mathbf{J}(p)(\eta) \end{aligned}$$

Assim temos a aplicação $\mathbf{J} : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$, $p \longmapsto \mathbf{J}(p)$, chamada de **aplicação de momento** para a ação Φ.

Proposição 1.14. *Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{G}$. Então $X^{\widehat{J}([\xi,\eta])} = X^{\{\widehat{J}(\xi), \widehat{J}(\eta)\}}$*

Demonstração. Com efeito

$$\begin{aligned} X^{\widehat{J}([\xi,\eta])} =& ([\xi, \eta])^M \\ =& -[\xi^M, \eta^M] \quad \text{(Pela Proposição 1.13)} \\ =& -[X^{\widehat{J}(\xi)}, X^{\widehat{J}(\eta)}] \\ =& X^{\{\widehat{J}(\xi), \widehat{J}(\eta)\}} \quad \text{(Pela Proposição 1.4)} \end{aligned}$$

□

Sejam G um grupo de Lie, $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson e $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação. Dizemos que $H \in \mathfrak{F}(M)$ é **G-invariante** se $H \circ \Phi^g = H$, $\forall g \in G$. O seguinte teorema é a versão Hamiltoniana do teorema de Noether.

Teorema 1.15. *Sejam G um grupo de Lie, $(M, \{\ ,\ \})$ uma variedade de Poisson, e $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação de Poisson que admite uma aplicação de momento $\mathbf{J} : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$. Se $H \in \mathfrak{F}(M)$ é G-invariante, então $\mathbf{J}$ é uma grandeza conservada do sistema Hamiltoniano definido por H, isto é*

$$\mathbf{J} \circ \Phi_H^t = \mathbf{J} \qquad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Seja $\xi \in \mathcal{G}$, do fato que H seja G-invariante temos

$$H \circ \Phi^{\phi_\xi(t)} = H, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

dado $p \in M$ qualquer, a equação acima implica

$$H \circ \Phi_\xi(t,p) = H(p), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando no tempo e substituindo $t = 0$ obtemos

$$\xi^M(H)(p) = 0$$

como $p \in M$ foi qualquer, segue $\xi^M(H) = 0$, e isto implica

$$\{\widehat{J}(\xi), H\} = 0$$

Logo $\widehat{J}(\xi)$, para qualquer $\xi \in \mathcal{G}$ é uma grandeza conservada do Hamiltoniano H; isto é, para qualquer $p \in M$ temos

$$\widehat{J}(\xi)(\Phi_H(t,p)) = \widehat{J}(\xi)(p), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Então, dados $t \in \mathbb{R}$ e $p \in M$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\Phi_H(t,p))(\xi) &= \widehat{J}(\xi)(\Phi_H(t,p)) \\ &= \widehat{J}(\xi)(p) \\ &= \mathbf{J}(p)(\xi)\end{aligned}$$

para qualquer $\xi \in \mathcal{G}$. Portanto

$$\mathbf{J}(\Phi_H(t,p)) = \mathbf{J}(p)$$

□

1.8 Momento Angular como aplicação de momento

Nesta seção apresentamos o exemplo de momento angular como aplicação do teorema 1.15.

1. Sejam $M = \mathbb{R}^6$ com coordenadas globais $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $F, H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^6)$, definimos o colchete

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Sabemos que $M = \mathbb{R}^6$ com esse colchete constitui uma variedade de Poisson. Para simplificar vamos escrever

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot \mathbf{\Omega} \nabla H$$

onde o "$\cdot$" indica o produto escalar em $\mathbb{R}^6$ e

$$\nabla F = \begin{bmatrix} \partial_{q_1} F \\ \partial_{q_2} F \\ \partial_{q_3} F \\ \partial_{p_1} F \\ \partial_{p_2} F \\ \partial_{p_3} F \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, para $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^6)$ seu campo vetorial Hamiltoniano é

$$X^F = \mathbf{\Omega} \nabla F$$

2. Seja o grupo de Lie $\mathrm{SO}(3) = \Big\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3} \,/\, \mathbf{R}^\intercal \mathbf{R} = \mathbf{1}\,,\, \det(\mathbf{R}) = 1 \Big\}$, com a sua álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3) = \Big\{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{3\times3} \,/\, \boldsymbol{a}^\intercal + \boldsymbol{a} = 0 \Big\}$. A aplicação exponencial da álgebra de Lie neste caso coincide com a exponencial da matriz $\phi_{\boldsymbol{a}}(t) = \exp(t\boldsymbol{a})$

3. Defina a ação

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^6 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^6 \\ (\mathbf{R}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) & \longmapsto \ (\mathbf{Rq}, \mathbf{Rp}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Essa ação induz o grupo de difeomorfismos $\Phi^{\mathbf{R}} : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$, $\Phi^{\mathbf{R}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{Rq}, \mathbf{Rp})$. Seja $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^6)$, note que

$$\nabla(F \circ \Phi^{\mathbf{R}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} (\nabla F) \circ \Phi^{\mathbf{R}}$$

logo, dadas $F, K \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^6)$

$$\{F \circ \Phi^{\mathbf{R}}, K \circ \Phi^{\mathbf{R}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} (\nabla F) \circ \Phi^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} (\nabla K) \circ \Phi^{\mathbf{R}} \tag{1.5}$$

mas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^\intercal & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^\intercal \end{bmatrix} \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}$$

então

$$\begin{aligned}\{F \circ \Phi^{\mathbf{R}}, K \circ \Phi^{\mathbf{R}}\} =& (\nabla F \cdot \mathbf{\Omega} \nabla K) \circ \Phi^{\mathbf{R}} \\ =& \{F, K\} \circ \Phi^{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

Portanto Φ é uma ação de Poisson.

4. Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{so}(3)$ temos o fluxo $\Phi_{\boldsymbol{a}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\exp(t\boldsymbol{a})\mathbf{q}, \exp(t\boldsymbol{a})\mathbf{p})$. Esse fluxo define o campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \dot{\Phi}_{\boldsymbol{a}}(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\boldsymbol{a}\mathbf{q}, \boldsymbol{a}\mathbf{p})$, que é o gerador infinitesimal da ação correspondente a $\boldsymbol{a}$.

5. Defina a aplicação $\widehat{J} : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R}^6)$ por $\widehat{J}(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widehat{J}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$. É simples verificar que $\widehat{J}$ é linear e que se satisfaz a condição

$$X^{\widehat{J}(\boldsymbol{a})}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Assim temos satisfeitas as condições para se ter uma aplicação de momento para a ação Φ. Antes de apresentar essa aplicação de momento, note que para cada $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{so}(3)$ existe um único vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{a}\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Então com essa identificação temos que

$$\widehat{J}(\boldsymbol{a})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{a} \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{a}$$

Logo a aplicação de momento para a ação Φ é definida por

$$\begin{array}{rccc}\mathbf{J} : & \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathfrak{so}(3)^* \\ & (\mathbf{q}, \mathbf{p}) & \longmapsto & \mathbf{q} \times \mathbf{p}\end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc}\mathbf{q} \times \mathbf{p} : & \mathfrak{so}(3) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{a} & \longmapsto & \mathbf{q} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}\end{array}$$

Então, após fazer a identificação entre os elementos de $\mathfrak{so}(3)$ e os vetores de $\mathbb{R}^3$, temos que a aplicação de momento para a ação Φ é o momento angular $\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Logo, pelo teorema 1.15, se $H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^6)$ é SO(3)-invariante, então o sistema Hamiltoniano definido por H terá ao momento angular como grandeza conservada.

Capítulo 2

Modelos semiclássicos para a descrição de spin

A mecânica quântica de partículas sem spin pode ser obtida aplicando-se o procedimento de quantização canônica à mecânica clássica descrita pela Lagrangeana $L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x})$. Este procedimento funciona da seguinte maneira: primeiro é construída a formulação Hamiltoniana para o sistema; segundo, seguindo o procedimento de quantização canônica de Dirac associamos as variáveis do espaço de fase a operadores com comutadores, substituindo os colchetes de Poisson canônicos e sobre esta base escrevemos a equação de Schrödinger.

É natural perguntar quanto desta ideia pode ser realizada em outros sistemas físicos. Neste capítulo estamos interessados na descrição semiclássica das partículas com spin.

Os experimentos com partículas elementares e átomos mostram que a equação de Schrödinger para funções de onda de uma componente não descrevem adequadamente o comportamento destes sistemas na presença do campo magnético. Assim, precisamos além das variáveis de posição e momento, de outras variáveis de spin cujos operadores quânticos completam a descrição do sistema. Para o caso do spin não relativístico, os operadores de spin são proporcionais as matrizes de Pauli, $\widehat{\mathbf{S}}_i = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$, $i = 1, 2, 3$; e eles satisfazem a álgebra

$$[\widehat{\mathbf{S}}_i, \widehat{\mathbf{S}}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{\mathbf{S}}_k \tag{2.1}$$

Esta álgebra é a álgebra do operador de momento angular, assim a teoria matemática dos operadores de spin é semelhante ao formalismo do momento angular. Intuitivamente, uma partícula elementar carrega um momento angular intrínseco.

Para construir um modelo semiclássico para o spin, vamos iniciar desde um sistema clássico, o qual possui variáveis de posição x_i e variáveis adicionais ω_k apropriadas para a descrição do espaço de spin. Na formulação Hamiltoniana, este espaço de spin deve ter três funções S_i as que produziram os operadores de spin $\widehat{\mathbf{S}}_i$ e portanto relativo ao colchete de Poisson canônico, deveram satisfazer a álgebra

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k \tag{2.2}$$

Berezin e Marinov [3] obtiveram um modelo semiclássico para a descrição do spin usando variáveis de Grassmann para parametrizar o espaço de spin. Este modelo é mais uma construção matemática e deixa outras dificultades ao nível clássico antes da quantização.

Apresentaremos um modelo sem uso das variáveis de Grassmann, obtido desde uma funcional de ação Lagrangeana. Uma importante consequência deste fato é que o formalismo pode ser escrito em uma versão Hamiltoniana, a qual deixa um espaço de fase equipado com o colchete de Poisson canônico

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{\omega_k, \pi_l\} = \delta_{kl}$$

Obtido desta maneira, o espaço de spin tem dimensão par. No entanto, na teoria quântica do spin não relativístico temos somente três operadores de spin, assim temos graus de liberdade extras presentes no modelo. Para eliminar esses graus de liberdade extras impomos vínculos no modelo, restringindo a dinâmica sobre uma superfície do espaço de spin. Sobre essa superfície de spin o colchete de Dirac $\{\ ,\ \}_D$ define uma estrutura de Poisson. Para manter a álgebra dos operadores de spin (2.1) precisamos que as funções S_i's restritas à superfície de spin mantenham a álgebra (2.2) relativa ao colchete de Dirac, isto é

$$\{S_i, S_j\}_D = \epsilon_{ijk} S_k$$

Devemos esperar que, após ter colocado todos os ingredientes necessários, o modelo produz as equações semiclássicas do spin, isto é, as equações obtidas desde a equação de Pauli após ter aplicado o teorema de Ehrenfest[1]

$$m\ddot{x}_i = qE_i + \frac{q}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k + \frac{q}{mc} S_j \partial_i B_j$$
$$\dot{S}_i = \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk} S_j B_k$$

[1]Estas equações serão obtidas na seção 2.1

e que o procedimento de quantização canônica aplicado a esse modelo produza a teoria de Pauli para o spin. As referências deste capitulo são [5], [6] e [7].

2.1 Equação de Pauli e equações semiclássicas para o spin não relativístico

A mecânica quântica do spin não relativístico é dada pela equação de Pauli

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(H_0\mathbf{1} - \frac{q}{mc}B_i\widehat{\mathbf{S}}_i\right)\Psi$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2,

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(\widehat{p}_i - \frac{q}{c}A_i\right)^2 - qA_0$$

com $(A_0, \mathbf{A})$ é o potencial tetravetor do campo eletromagnético externo[2]; e $\widehat{\mathbf{S}}_i = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$, com $\boldsymbol{\sigma}_i$ as matrizes de Pauli escolhidas da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Estas matrizes satisfazem as seguintes propriedades

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_i = 2i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma}_k$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_1)^2 = (\boldsymbol{\sigma}_2)^2 = (\boldsymbol{\sigma}_3)^2 = \mathbf{1}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_i] = 0$$

Para usar o teorema de Ehrenfest e obter as equações semiclássicas de movimento do spin, precisamos definir os operadores matriciais

$$\widehat{\mathbf{X}}_i \equiv \widehat{x}_i\mathbf{1} = \mathbf{1}\widehat{x}_i$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_i \equiv \widehat{p}_i\mathbf{1} = \mathbf{1}\widehat{p}_i$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_\mu \equiv A_\mu\mathbf{1} = \mathbf{1}A_\mu$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_i \equiv B_i\mathbf{1} = \mathbf{1}B_i$$

[2]Os campos estão dados por $\mathbf{E} = \nabla A_0 - \frac{1}{c}\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Com esses operadores temos os comutadores

$$
\begin{gathered}
[\widehat{\mathbf{X}}_i,\widehat{\mathbf{X}}_j]=\mathbf{0},\quad [\widehat{\mathbf{P}}_i,\widehat{\mathbf{P}}_j]=\mathbf{0},\quad [\widehat{\mathbf{X}}_i,\widehat{\mathbf{P}}_j]=i\hbar\delta_{ij}\mathbf{1},\quad [\widehat{\mathbf{X}}_i,\widehat{\mathbf{A}}_\mu]=\mathbf{0}\\
[\widehat{\mathbf{P}}_i,\widehat{\mathbf{A}}_\mu]=-i\hbar\partial_i A_\mu\mathbf{1},\quad [\widehat{\mathbf{X}}_i,\widehat{\mathbf{B}}_j]=\mathbf{0},\quad [\widehat{\mathbf{P}}_i,\widehat{\mathbf{B}}_j]=-i\hbar\partial_i B_j\mathbf{1}\\
[\widehat{\mathbf{S}}_i,\widehat{\mathbf{S}}_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{\mathbf{S}}_k,\quad [\widehat{\mathbf{X}}_i,\widehat{\mathbf{S}}_j]=\mathbf{0},\quad [\widehat{\mathbf{P}}_i,\widehat{\mathbf{S}}_j]=\mathbf{0}\\
[\widehat{\mathbf{S}}_i,\widehat{\mathbf{A}}_\mu]=\mathbf{0},\quad [\widehat{\mathbf{S}}_i,\widehat{\mathbf{B}}_j]=\mathbf{0}
\end{gathered}
$$

O Hamiltoniano da equação de Pauli pode ser escrito como

$$
\mathbf{H}=\frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{P}}_i-\frac{q}{c}\widehat{\mathbf{A}}_i\right)^2-q\widehat{\mathbf{A}}_0-\frac{q}{mc}\widehat{\mathbf{B}}_i\widehat{\mathbf{S}}_i \tag{2.3}
$$

Logo, o teorema de Ehrenfest deixa as equações com a seguinte forma

$$
\begin{gathered}
\langle\dot{\widehat{\mathbf{X}}}_i\rangle=\frac{1}{m}\langle\widehat{\mathbf{P}}_i-\frac{q}{c}\widehat{\mathbf{A}}_i\rangle\\
\langle\dot{\widehat{\mathbf{P}}}_i\rangle=\frac{q}{mc}\left\{\frac{1}{2}\langle\left(\widehat{\mathbf{P}}_j-\frac{q}{c}\widehat{\mathbf{A}}_j\right)\partial_i\widehat{\mathbf{A}}_j\rangle+\frac{1}{2}\langle\partial_i\widehat{\mathbf{A}}_j\left(\widehat{\mathbf{P}}_j-\frac{q}{c}\widehat{\mathbf{A}}_j\right)\rangle\right\}+q\langle\partial_i\widehat{\mathbf{A}}_0\rangle+\frac{q}{mc}\langle\widehat{\mathbf{S}}_j\partial_i\widehat{\mathbf{B}}_j\rangle\\
\langle\dot{\widehat{\mathbf{S}}}_i\rangle=\frac{q}{mc}\langle\epsilon_{ijk}\widehat{\mathbf{S}}_j\widehat{\mathbf{B}}_k\rangle
\end{gathered}
$$

Estas equações de movimento para os valores médios produzem as equações semiclássicas de movimento para as variáveis $\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{S}$

$$
\dot{x}_i=\frac{1}{m}\left(p_i-\frac{q}{c}A_i\right) \tag{2.4}
$$

$$
\dot{p}_i=\frac{q}{mc}\left(p_j-\frac{q}{c}A_j\right)\partial_i A_j+q\partial_i A_0+\frac{q}{mc}S_j\partial_i B_j \tag{2.5}
$$

$$
\dot{S}_i=\frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}S_jB_k \tag{2.6}
$$

De (2.4) e (2.5) obtemos

$$
m\ddot{x}_i=qE_i+\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_jB_k+\frac{q}{mc}S_j\partial_i B_j \tag{2.7}
$$

2.2 Espaços de fase que geram uma álgebra especifica

A álgebra de funções de nosso interesse é a álgebra (2.2) e desejamos produzir ela sobre um espaço de fase com um colchete de Poisson canônico, isto é definir as S_i como funções deste espaço de fase tal que elas satisfaçam a álgebra (2.2).

Primeiro vamos expor as ideias no caso geral de (2.1). Suponha que temos uma teoria quântica com operadores $\widehat{\mathbf{z}}_i$, com $i=1,2,\ldots,n$, os quais satisfazem a álgebra

$$
[\widehat{\mathbf{z}}_i,\widehat{\mathbf{z}}_j]=i\hbar c_{ij}^k\widehat{\mathbf{z}}_k \tag{2.8}
$$

onde as c_{ij}^k são constantes. Então desejamos definir funções z_i em um espaço de fase tal que elas satisfaçam a álgebra

$$\{z_i, z_j\} = c_{ij}^k z_k \tag{2.9}$$

onde $\{\ ,\ \}$ é o colchete de Poisson canônico do espaço de fase.

Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie n-dimensional, vamos pensar as c_{ij}^k's como as constantes de estrutura de $\mathcal{G}$ relativa a uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, isto é

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = c_{ij}^k \mathbf{e}_k \tag{2.10}$$

Da identidade de Jacobi para a álgebra de Lie $\mathcal{G}$, temos que as constantes de estrutura satisfazem

$$c_{ij}^l c_{lk}^r + c_{ki}^p c_{pj}^r + c_{jk}^q c_{qi}^r = 0$$

Seja $\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ uma representação m-dimensional da álgebra $\mathcal{G}$. Se denotamos $\boldsymbol{\varphi}^i = \varphi(\mathbf{e}_i)$, de (2.9) obtemos

$$\boldsymbol{\varphi}^i \boldsymbol{\varphi}^j - \boldsymbol{\varphi}^j \boldsymbol{\varphi}^i = c_{ij}^k \boldsymbol{\varphi}^k \tag{2.11}$$

Agora tomamos o espaço de fase $\mathbb{R}^{2m}$ com coordenadas globais $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = (\omega_1, \ldots, \omega_m, \pi_1, \ldots, \pi_m)$, e com o colchete de Poisson canônico. Definimos as funções

$$\begin{array}{rccc} z_i : & \mathbb{R}^{2m} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) & \longmapsto & \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\varphi}^i \boldsymbol{\omega} \end{array} \tag{2.12}$$

Vamos achar o colchete de Poisson entre as funções z_i's e verificar que elas satisfazem (2.9). Para isso note que

$$z_i = \varphi_{lp}^i \omega_p \pi_l$$

onde φ_{lp}^i são as compomentes da matriz $\boldsymbol{\varphi}^i$. Além disso, sabemos que as coordenadas globais $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$ satisfazem

$$\{\omega_i, \omega_j\} = 0, \qquad \{\pi_i, \pi_j\} = 0, \qquad \{\omega_i, \pi_j\} = \delta_{ij}$$

Então

$$\begin{aligned} \{z_i, z_j\} &= \{\varphi_{lp}^i \omega_p \pi_l, \varphi_{qr}^j \omega_r \pi_q\} \\ &= \varphi_{lp}^i \varphi_{qr}^j \{\omega_p \pi_l, \omega_r \pi_q\} \end{aligned}$$

mas $\{\omega_p\pi_l, \omega_r\pi_q\} = \omega_r\pi_l\delta_{pq} - \omega_p\pi_q\delta_{lr}$, logo

$$\begin{aligned}\{z_i, z_j\} &= \varphi^i_{lp}\varphi^j_{pr}\omega_r\pi_l - \varphi^i_{lp}\varphi^j_{ql}\omega_p\pi_q \\ &= \left(\varphi^i_{lp}\varphi^j_{pr} - \varphi^j_{lp}\varphi^i_{pr}\right)\omega_r\pi_l \\ &= c^k_{ij}\varphi^k_{lr}\omega_r\pi_l \qquad \text{, por (2.11)} \\ &= c^k_{ij}z_k\end{aligned}$$

Assim verificamos que as funções z_i's definidas em (2.12) satisfazem a álgebra (2.9). Note que para cada representação φ da álgebra $\mathcal{G}$ temos uma realização da álgebra fechada de funções (2.9), isto é as z_i's podem ser modeladas em diferentes espaços de fase, tantos como representações possua a álgebra de Lie $\mathcal{G}$.

Tendo definidas as z_i's de acordo com (2.12). Se $2m > n$, então temos graus de liberdade extras presentes no modelo semiclássico que não estão presentes na teoria quântica. Para eliminar esses graus de liberdade extras vamos impor vínculos $T_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = a_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$; e restringir a dinâmica a uma superfície do espaço de fase $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$. Essa superfície pode ser pensada como a superfície de nível $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{a})$ da aplicação

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_N) : \quad \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^N \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) &\longmapsto \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})\end{aligned}$$

No formalismo Hamiltoniano, as equações da superfície de nível $\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{c}$ aparecem como vínculos de Dirac. Assim, devemos classificá-los de acordo com as suas propriedades algébricas com respeito ao colchete de Poisson canônico e depois aplicar o formalismo de Dirac para as teoria com vínculos. Informalmente isto é dividir as $\mathbf{T} = (G, K)$ onde G são vínculos de primeira classe e K são vínculos de segunda classe.

Existem algumas razões para procurar as T_j satisfazendo

$$\{z_i, T_j\} = 0, \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.13}$$

Aqui apresentamos essas razões:

1.- A consistência do procedimento de quantização canônica do sistema com vínculos de segunda classe implica substituir os colchetes de Poisson pelos colchetes de Dirac, estes construídos com ajuda dos vínculos. Então em vez de trabalhar com o colchete (2.8), lidamos com o colchete de Dirac

$$\{z_i, z_j\}_D = \{z_i, z_j\} - \{z_i, K\}\Delta^{-1}\{K, z_j\}$$

onde $\Delta = \det(\{K, K\})$. Então se os vínculos de segunda classe K satisfazem (2.13) temos que os colchetes de Dirac das funções z_i's vão coincidir com os seus colchetes de Poisson. Assim, mantemos a álgebra desejada para as funções z_i's.

2.- A presença de vínculos de primeira classe G implica uma teoria com uma simetria local. Os geradores para aquela simetria são proporcionais aos vínculos. Suponha que os vínculos de primeira classe não satisfaçam (2.13), isso deve implicar que as variáveis z_i's não são inertes sob a simetria local, $\delta z_i = \{G, z_i\} \neq 0$. Portanto, vínculos não invariantes seriam responsáveis pela alteração do comportamento de gauge das variáveis z_i's, fato que não desejamos.

Note que, olhar para a estrutura de Poisson de $\mathbb{R}^{2m}$, (2.13) é equivalente a tomar Hamiltonianos T_j que possuem à aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{Z} = (z_1, \ldots, z_n) \; : & \mathbb{R}^{2m} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) & \longmapsto & \mathbf{Z}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) \end{array}$$

como grandeza conservada.

2.3 Superficie de spin não relativística

No caso da álgebra do spin não relativístico (2.1), os seus coeficientes podem ser identificados com os coeficientes de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ relativa à base formada pelas matrizes

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então podemos classificar diferentes modelos para o spin não relativístico obtidos pela escolha da representação da álgebra SO(3). Provavelmente o modelo mais econômico seja aquele que toma a representação de menor dimensão.

O modelo para o spin não relativístico que vamos apresentar nesta seção é baseado na representação adjunta da álgebra $\mathfrak{so}(3)$. Sobre o espaço de fase 6-dimensional com coordenadas globais $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$ e com o colchete de Poisson canônico, introduzimos o momento angular interno de acordo com (2.12)

$$S_i = \epsilon_{ijk}\omega_j\pi_k \tag{2.14}$$

Os colchetes de Poisson para as S_i satisfazem a álgebra (2.2) pelo dito na seção 2.2. Assim fica definida a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \quad \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) &\longmapsto \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Na seção 1.8 mostramos que o momento angular é a aplicação de momento para a ação do grupo SO(3) sobre $\mathbb{R}^6$ definida em (1.4), também dizemos que qualquer Hamiltoniano SO(3)-invariante possuirá ao momento angular como grandeza conservada. Da análise feita na seção 2.2, temos que procurar as T_j que pussuem o momento angular (2.15) como grandeza conservada, isto é, temos que procurar T_j que sejam SO(3)-invariantes no sentido da ação (1.4).

Os únicos invariantes globais da ação (1.4) são as funções

$$T_1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\omega}^2, \qquad T_2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\pi}, \qquad T_3(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}^2 \tag{2.16}$$

Essas funções satisfazem a álgebra

$$\{T_1, T_2\} = 2T_1, \qquad \{T_1, T_3\} = 4T_2, \qquad \{T_2, T_3\} = 2T_3$$

Além disso, para a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3): \quad \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) &\longmapsto \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

a sua derivada de $\mathbf{T}$ no ponto $(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\pi}_0)$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\pi}_0): \quad \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{h}, \mathbf{k}) &\longmapsto (2\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\pi}_0 \cdot \mathbf{h}, 2\boldsymbol{\pi}_0 \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

tem posto:

- igual a 2, se $(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\pi}_0)$ são l.d,

- igual a 3, se $(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\pi}_0)$ são l.i.

Vamos tomar a superfície de spin não relativística V_3 definida pelas equações

$$T_1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = a^2, \qquad T_2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = 0, \qquad T_3(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = b^2 \tag{2.17}$$

Esses vínculos implicam que $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$ são l.i. Logo, pelo teorema do conjunto de nível regular[3] temos que a superfície de spin V_3 definida em (2.17) é uma subvariedade regular de dimensão 3.

[3] Veja a referêrencia [19], Teorema 9.9 (página 105).

Agora para classificar os vínculos, redefinimos eles como

$$K_1 = T_1 - a^2 = 0, \qquad K_2 = T_2 = 0, \qquad G = T_3 - b^2 + \frac{b^2}{a^2}K_1 = 0$$

os quais satisfazem

$$\{K_1, K_2\} = 2K_1 + 2a^2, \quad \{K_1, G\} = 4K_2, \quad \{K_2, G\} = 2G - \frac{4b^2}{a^2}K_1$$

Assim temos que K_1, K_2 são vínculos de segunda classe e G é vínculo de primeira classe.

Fazendo uso da identidade $\mathbf{S}^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi})^2 = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\pi}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\pi})^2$, temos

$$\mathbf{S}^2 = T_1 T_3 - T_2^2$$

logo, restringindo a superfície de spin $T_1 = a^2$, $T_2 = 0$ e $T_3 = b^2$ obtemos

$$\mathbf{S}^2 = a^2 b^2 \tag{2.18}$$

Então $\mathbf{S}^2$ é constante sobre a superfície de spin. Desde que o colchete de Dirac define uma estrutura de Poisson sobre a superfície de spin, segue que $\mathbf{S}^2$ é uma função de Casimir para a superfície de spin com o colchete de Dirac.

2.4 Superficie de spin não relativística V_3 é difeomorfa ao $\mathrm{SO}(3)$

Nesta seção vamos considerar a superfície de spin V_3 definida pela escolha de $a = b = 1$. Indicaremos por $\overline{\mathbf{a}}$ ao vetor $\mathbf{a}$ escrito como coluna e $\overline{\mathbf{a}}^\intercal$ ao vetor $\mathbf{a}$ escrito como fila. Levando em conta isso, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{a}} & \overline{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{c}} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Também temos as expressões

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{b}} \times \overline{\mathbf{c}})^\intercal \\ (\overline{\mathbf{c}} \times \overline{\mathbf{a}})^\intercal \\ (\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}})^\intercal \end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Aplicando essa descrição ao grupo $\mathrm{SO}(3) = \left\{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3} \,/\, \mathbf{R}^\intercal\mathbf{R} = \mathbf{1}\,,\, \det(\mathbf{R}) = 1\right\}$ obtemos que

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{a}} & \overline{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3) \iff \begin{array}{cc} \mathbf{a}^2 = 1, & \mathbf{b}^2 = 1 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, & \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{array}$$

Logo, temos

$$\mathrm{SO}(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{a}} & \overline{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \Big/ \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,\, \mathbf{a}^2 = 1,\, \mathbf{b}^2 = 1,\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \right\}$$

Tome as aplicações diferenciáveis

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbb{R}^6 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^{3\times 3} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \; &\longmapsto \; \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{a}} & \overline{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}} : \quad \mathbb{R}^{3\times 3} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^6 \\ \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{a}} & \overline{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \; &\longmapsto \; (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Por cálculo direto se verifica

$$\mathcal{F}\Big|_{V_3} : V_3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3) \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{F}}\Big|_{\mathrm{SO}(3)} : \mathrm{SO}(3) \longrightarrow V_3$$

Além disso, a aplicação $\mathcal{F}\Big|_{V_3}$ é a inversa da aplicação $\widetilde{\mathcal{F}}\Big|_{\mathrm{SO}(3)}$. Portanto V_3 é difeomorfa ao grupo SO(3) onde, o difeomorfismo é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} V_3 \quad &\longleftrightarrow \quad \mathrm{SO}(3) \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) \; &\longleftrightarrow \; \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{\omega}} & \overline{\boldsymbol{\pi}} & \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\boldsymbol{\pi}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por outro lado, definida a ação do grupo SO(3) sobre a esfera 2-dimensional

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(3) \times S^2 \; &\longrightarrow \; S^2 \\ (\mathbf{R}, \mathbf{q}) \quad &\longmapsto \; \mathbf{R}\mathbf{q} \end{aligned}$$

Esta ação é transitiva. O subgrupo de isotropia H_0 do elemento $\mathbf{q}_0 = (0, 0, 1)$ é homomorfo ao grupo SO(2)

$$\mathrm{H}_0 = \left\{ \mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3) \,/\, \mathbf{R}\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0 \right\} \simeq \mathrm{SO}(2)$$

É um fato conhecido[4] que SO(3) tem estrutura de fibrado com base S^2 e fibra típica SO(2), onde a aplicação de projeção deste fibrado é

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(3) \; &\longrightarrow \; S^2 \\ \mathbf{R} \quad &\longmapsto \; \mathbf{R}\mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

O difeomorfismo (2.19) leva a estrutura de fibrado para a superfície de spin V_3, onde a aplicação de projeção deste fibrado é a composta das aplicações (2.19) e (2.20). Mas note

[4]Veja a referência [10], teorema E.4 (página 334).

que $\mathbf{R}\mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}$. Isto implica, que a aplicação de momento (2.15) restrita a superfície de spin V_3

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{S}\Big|_{V_3} : & V_3 & \longrightarrow & S^2 \\ & (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) & \longmapsto & \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi} \end{array}$$

é a aplicação de projeção do fibrado $\mathrm{SO}(2) \to V_3 \to S^2$.

2.5 Formulação variacional para o spin não relativístico

Como já foi dito, a mecânica quântica do spin não relativístico é dada pela equação de Pauli, e esta equação é definida pelo Hamiltoniano quântico (2.2). Assim precisamos de uma mecânica clássica que produza tanto o correspondente Hamiltoniano clássico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)^2 - qA_0 - \frac{q}{mc}B_iS_i \tag{2.21}$$

quanto os vínculos (2.17).

Começamos uma breve discussão da teoria de Lagrangeanas singulares de uma forma especial. Considere um espaço de configuração com variáveis $(\mathbf{Q}, \mathbf{y})$; onde $\mathbf{Q} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ sendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ as variáveis de posição e $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ as variáveis do espaço de spin e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$ um conjunto auxiliar de variáveis. Para o nosso objetivo é suficiente discutir ações Lagrangeanas da forma

$$S = \int dtL(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{y}) \tag{2.22}$$

isto é, a Lagrangeana não possui derivadas das variáveis $\mathbf{y}$. Também vamos supor

$$\det\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\mathbf{Q}}\partial\dot{\mathbf{Q}}} \neq 0 \tag{2.23}$$

Seguindo o procedimento padrão, construimos a formulação Hamiltoniana para a ação (2.22). Os momentos canônicos são definidos por

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{Q}}} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{y}}} = \mathbf{0} \tag{2.25}$$

O espaço de fase com coordenadas globais $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ possui uma estrutura de variedade de Poisson com colchete de Poisson canônico. De acordo com (2.25), na teoria estão presentes os vínculos primários $u_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Pela condição (2.23), as equações (2.24) podem ser resolvidas com respeito a $\dot{\mathbf{Q}}$, isto é $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{y})$. Usando essas expressões construimos o Hamiltoniano completo

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Big[\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{y}} - L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{y})\Big]\Big|_{\dot{\mathbf{Q}}=\mathbf{f}(\mathbf{Q},\mathbf{P},\mathbf{y})} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} \tag{2.26}$$

onde λ_a são os multiplicadores de Lagrange para os vínculos primários (2.25). Dado o Hamiltoniano e o colchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ canônico, a evolução temporal de qualquer grandeza A é dada pela equação $\dot{A} = \{A, H\}$. No caso particular, as coordenadas globais obedecem as equações de Hamilton

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, H\}, \qquad \dot{P}_j = \{P_j, H\}, \qquad \dot{y}_k = \lambda_k, \qquad \dot{u}_k = 0 \tag{2.27}$$

A conservação no tempo dos vínculos primários produz vínculos secundários indicados por T_k

$$\dot{u}_a = \{u_a, H\} = -\frac{\partial H}{\partial y_k} \equiv T_k = 0 \tag{2.28}$$

A dinâmica do sistema pode ser equivalentemente obtida desde a ação Hamiltoniana

$$S_H = \int dt \Big[\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{y}} - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\Big] \tag{2.29}$$

Achando as equações de Euler-Lagrange para esta ação obtemos o conjunto completo de equações (2.25), (2.27) e (2.28) que governam a dinâmica das variáveis $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$.

Estamos interesados em construir um problema variacional para um sistema com Hamiltoniano $H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$ e com vínculos da forma

$$\breve{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) = (\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}), \widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}))$$

onde os vínculos $\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$ são como os vínculos (2.17), e $\widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$ são possíveis vínculos extras não presentes no modelo do spin não relativístico. A análise feita acima sugere tomar um Hamiltoniano completo da forma

$$H = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{y} \cdot \breve{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} \tag{2.30}$$

A ação correspondente ao Hamiltoniano é

$$S_H = \int dt \Big[\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \big(H_0 + \mathbf{y} \cdot \breve{\mathbf{T}} + (\boldsymbol{\lambda} - \dot{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{u}\big)\Big] \tag{2.31}$$

e as suas equações de Euler-Lagrange são

$$\begin{gathered} \dot{Q}_i = \{Q_i, H_0\} + y_k\{Q_i, \breve{T}_k\}, \qquad \dot{P}_i = \{P_i, H_0\} + y_k\{P_i, \breve{T}_k\}, \\ \dot{y}_k = \lambda_k, \qquad \dot{u}_k = -\breve{T}_k, \qquad u_k = 0 \end{gathered} \tag{2.32}$$

as duas últimas equações em (2.32) implicam nos vínculos desejados $\breve{T}_k = 0$. Logo a ação (2.31) resolve nosso problema pois temos construído uma formulação variacional para um sistema Hamiltoniano sobre uma superfície com colchete de Poisson degenerado.

Dada a ação Hamiltoniana (2.31), podemos restaurar a correspondente ação Lagrangeana. Neste processo, podemos deixar de lado as $\mathbf{u}$ porque $\mathbf{y}$ entra na formulação sem derivadas. Supondo que o Hamiltoniano (2.30) é uma função quadrática nas variáveis de momento $\mathbf{P}$, escrito $H = \frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Theta}(\mathbf{Q},\mathbf{y})\mathbf{P} + \gamma(\mathbf{Q},\mathbf{y})$. Resolvendo as equações $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Theta}\mathbf{P}$ com respeito a $\mathbf{P}$, obtemos $\mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{\Theta}}\dot{\mathbf{Q}}$, onde $\widetilde{\mathbf{\Theta}}$ é matriz inversa de $\mathbf{\Theta}$. Substituindo estas $\mathbf{P}$'s em (2.31), obtemos a ação Lagrangeana

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}\widetilde{\mathbf{\Theta}}\dot{\mathbf{Q}} - \gamma(\mathbf{Q},\mathbf{y})\right] \tag{2.33}$$

Aplicando o procedimento para obter a formulação Hamiltoniana da ação (2.33) imediatamente chegamos na ação Hamiltoniana (2.31)

Resumindo as discussões prévias, para descrever o spin não relativístico precisamos de uma mecânica clássica que produza tanto o Hamiltoniano (2.21) quanto os vínculos (2.17). Isto é conseguido pela ação Lagrangiana

$$S = \int dt \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}} + qA_0 + \frac{1}{2g}\left(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \frac{q}{mc}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B}\right)^2 + \frac{1}{2}gb^2 + \frac{1}{\phi}(\boldsymbol{\omega}^2 - a^2)\right] \tag{2.34}$$

As variáveis do espaço de configuração são $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, g, \phi)$. Aqui, $\mathbf{x}$ representa as coordenadas espaciais de uma partícula com massa m e carga q, $\boldsymbol{\omega}$ são as coordenadas do espaço de spin, g e ϕ são as variáveis auxiliares, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, a e b são constantes.

Os segundo e terceiro termos em (2.34) representam a interação mínima com o potencial tretavetor $(A_0, \mathbf{A})$ de um campo eletromagnético externo, o quarto termo contém a interação do spin com o campo magnético. No final, este termo produz o termo de Pauli no Hamiltoniano (2.21).

Agora vamos construir a formulação Hamiltoniana para o modelo. As equações para os momentos canônicos $\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\pi}$ podem ser resolvidas com respeito as velocidades

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i \quad \rightarrow \quad x_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)$$
$$\pi_i = \frac{1}{g}\left(\dot{\omega}_i - \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}\omega_j B_k\right) \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_i = g\pi + \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}\omega_j B_k$$

no entanto, os momentos das variáveis auxiliares tornan-se os vínculos primários $u_g = 0$ e $u_\phi = 0$. A expressão completa do Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 - qA_0 - \frac{q}{mc}\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{g}{2}(\boldsymbol{\pi}^2 - b^2) - \frac{1}{\phi}(\boldsymbol{\omega}^2 - a^2) + \lambda_g u_g + \lambda_\phi u_\phi \tag{2.35}$$

Aplicando o procedimento de Dirac, obtemos a seguinte sequência de vínculos e as equações para os multiplicadores de Lagrange são

$$u_g = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\pi}^2 - b^2 = 0$$
$$u_\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}^2 - a^2 = 0$$

O vínculo secundário $\boldsymbol{\pi}^2 - b^2 = 0$ implica $\frac{1}{\phi}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\pi} = 0$ e portanto $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\pi} = 0$. Logo

$$b^2 g + \frac{2a^2}{\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad b^2 \lambda_g + \frac{2a^2}{\phi^2}\lambda_\phi = 0 \tag{2.36}$$

além dessas equações, o Hamiltoniano (2.35) implica nas equações dinâmicas

$$\dot{\phi} = \lambda_\phi, \qquad \dot{u}_\phi = 0 \tag{2.37}$$

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right), \qquad \dot{p}_i = q\partial_i A_0 + \frac{q}{c}\dot{x}_j \partial_i A_j + \frac{q}{mc}S_j \partial_i B_j \tag{2.38}$$

$$\dot{\omega}_i = -\frac{2a^2 b^2}{\phi}\pi_i + \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}\omega_j B_k, \qquad \dot{\pi}_i = \frac{2}{\phi}\omega_i + \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}\pi_j B_k \tag{2.39}$$

onde $S_i = \epsilon_{ijk}\omega_j \pi_k$. Omitimos as equações Hamiltonianas para g e u_g porque estas variáveis são determinadas pelas equações algébricas (2.36). As equações (2.36)-(2.39) não determinam a variável ϕ e esta entra como função arbitrária na solução geral das variáveis $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\pi}$, portanto a dinâmica destas variáveis é ambígua e elas são grandezas não observáveis o que é consistente com a presença do vínculo de primeira classe G no modelo. Enquanto a evolução das variáveis S_i não é ambígua, como deveria ser

$$\dot{S}_i = \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}S_j B_k \tag{2.40}$$

Esta é a equação clássica da precessão do spin em um campo magnético externo. Além da equação (2.40), as variáveis S_i devem satisfazer $\mathbf{S}^2 = a^2 b^2$. Sabemos que os operadores de spin $\widehat{\mathbf{S}}_i = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$ satisfazem $\widehat{\mathbf{S}}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}$. Se tomarmos $b^2 = \frac{3\hbar^2}{4a^2}$ então o valor da variável clássica $\mathbf{S}^2$ coincide com o autovalor do operador quântico $\widehat{\mathbf{S}}^2$

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \tag{2.41}$$

As equações (2.38) implicam na equação de segundo ordem para x_i

$$m\ddot{x}_i = qE_i + \frac{q}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k + \frac{q}{mc}S_j \partial_i B_j \tag{2.42}$$

Como $\mathbf{S}^2 \approx \hbar^2$, o $\mathbf{S}$-termo na equação (2.42) pode sumir no limite clássico. Assim, esta equação produz a equação clássica de movimento de uma partícula sobre a força de

Lorentz. Note também que na falta de interação, a partícula com spin não experimenta autoaceleração.

Para escrever o Hamiltoniano físico, temos que levar em conta os vínculos presentes no modelo. Vamos tomar o gauge $\phi = 1$ para o vínculo de primeira classe u_ϕ. No final chegamos ao Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)^2 - qA_0 - \frac{q}{mc}B_iS_i \tag{2.43}$$

Para as variáveis físicas x_i, p_i, S_i, os colchetes de Dirac são

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{2.44}$$

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk}S_k \tag{2.45}$$

Agora já temos completada a quantização canônica do modelo. A equação (2.44) implica a quantização padrão das variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$, isto é $\widehat{x}_i = x_i$ e $\widehat{p}_i = -i\hbar\partial_i$. De acordo com a equação (2.45) temos que procurar um espaço de funções de onda o qual seja uma representação do grupo SO(3). As representações do grupo são enumeradas pelo spin s o qual esta ligado ao valor do operador de Casimir $\widehat{\mathbf{S}}^2 \sim s(s+1)$. Então a equação (2.41) fixa o spin $s = \frac{1}{2}$ e as variáveis S_i são quantizadas por $\widehat{\mathbf{S}}_i = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$. Esses operadores agem sobre o espaço de spinores complexos 2-dimensionais Ψ. O Hamiltoniano quântico é obtido das equações (2.44) e (2.45) substituindo as variáveis clássicas pelos seus operadores. Isto implica na equação de Pauli

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(\frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{P}}_i - \frac{q}{c}\widehat{\mathbf{A}}_i\right)^2 - q\widehat{\mathbf{A}}_0 - \frac{q}{mc}\widehat{\mathbf{B}}_i\widehat{\mathbf{S}}_i\right)\Psi \tag{2.46}$$

Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um modelo semiclássico para o spin não relativístico. O spin foi considerado como um momento angular interno e foi construído sobre um espaço de fase $\mathbb{R}^6$ com colchete de Poisson canônico. Para eliminar os graus de liberdade extras, não presentes na teoria quântica, foram impostos vínculos restringindo a dinâmica à superfície de spin V_3. Estes vínculos foram escolhidos de forma que a álgebra do spin seja mantida quando passamos do colchete de Poisson canônico para o colchete de Dirac. Dessa forma, neste trabalho temos apresentado um exemplo de quantização sobre uma variedade que tem interpretação física direta. Também a formulação Lagrangeana do modelo é um exemplo de construção do problema variacional para um sistema Hamiltoniano sobre a variedade de Poisson.

Contribuições Científicas

1.- A. A. Deriglazov, B. F. Rizzuti, G. P. Zamudio, P. S. Castro, "Non-Grassmann mechanical model of the Dirac equation", 48 páginas, enviado para o jornal Physical Review D; arXiv:1202.5757.

2.- A. A. Deriglazov, G. P. Zamudio, "Formal similarities between the Maxwell and the Schrödinger equations", Apresentação no XXXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos (XXXI ENFPC, Passa Quatro - MG, de 30 de agosto a 03 de setembro de 2010).

Bibliografia

[1] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, Second Edition (1987).

[2] V. Bargmann, L. Michel and V.L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2** (1959) 435.

[3] F. A. Berezin and M. S. Marinov, JETP Lett **21** (1975) 320; Ann. Phys. **104** (1977) 336.

[4] H. C. Corben, *Classical and Quantum Theories of Spinning Particles*, Holden-Day (1968).

[5] A. A. Deriglazov, *Classical Mechanics, Hamiltonian and Lagrangian Formalism*, Springer, First Edition (2010).

[6] A. A. Deriglazov, SIGMA **6**, 016 (2010).

[7] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover, 2001.

[8] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78** (1950) 29.

[9] J. Frenkel, Z. fur Physik **37**, (1926) 243.

[10] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* - *An elementary introduction*, Springer, First Edition (2004)

[11] A. J. Hanson and T. Regge , Ann. Phys. **87** (1974) 498.

[12] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, First Edition (1978).

[13] J. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry, A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Springer, Second Edition (1999).

[14] T. D. Newton and E. P. Wigner, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 400.

[15] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, Second Edition (1993)

[16] M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. **A 195** (1948) 62.

[17] E. Schrödinger, Sitzunger. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. **24** (1930) 418.

[18] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA - Projeto Euclides (1979)

[19] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, Second Edition (2010).

[20] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, First Edition (1983)