Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Mestrado Acadêmico em Matemática

Edson Martins Gagliardi

Equações de Pfaff e a Não Existência de Soluções Algébricas

Juiz de Fora - MG

2012

Edson Martins Gagliardi

Equações de Pfaff e a Não Existência de Soluções Algébricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Geometria Algébrica.

Orientador: Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Co-orientador: Profa. Dra. Flaviana Andrea Ribeiro

Juiz de Fora - MG

2012

Gagliardi, Edson Martins.

Equações de Pfaff e a Não Existência de Soluções Algébricas/ Edson Martins Gagliardi. - 2012

80 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

1 -1. Equações de Pfaff. 2. Campos Vetoriais. 3. Geometria Algébrica. 4. Curvas Invariantes. 5. Integral Primeira de Darboux. I. Título.

Edson Martins Gagliardi

Equações de Pfaff e a Não Existência de Soluções Algébricas

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Joana Darc A S da Cruz

Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz
(Orientadora)
Instituto de Ciências Exatas – UFJF

Flaviana Andrea Ribeiro

Profa. Dra. Flaviana Andrea Ribeiro
(Co-orientadora)
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Maurício Barros Corrêa Júnior
UFV

Regis Castijos Alves Soares Jr.

Prof. Dr. Régis Castijos Alves Soares Júnior
UFJF

Juiz de Fora, 04 de outubro de 2012.

A Maria Eduarda Gagliardi.

Agradecimentos

A Deus, São Judas Tadeu e Nossa Senhora de Fátima, por sempre intercederem por mim.

A minhas orientadoras Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz e Profa. Dra. Flaviana Andrea por partilharem o conhecimento, pela boa vontade, dedicação e disposição em ajudar, pelo incentivo nos momentos difíceis e pelos elogios nos momentos certos.

A minha família pelo apoio incondicional, a eles devo tudo que conquistei.

Aos professores, colegas e amigos do Departamento de Matemática da UFJF, por estarem sempre dispostos a ajudar e pela grande contribuição que deram no meu crescimento profissional.

A Capes pelo suporte financeiro.

A Luisa por ser o meu porto seguro.

Resumo

Em 1979, J.P. Jouanolou em seu livro "Equations de Pfaff Algébriques "[12] apresenta um resultado de densidade que diz que o conjunto de equações algébricas de Pfaff de grau $m > 2$ em $\mathbb{P}^2$ sem soluções algébricas é denso no conjunto das equações algébricas de Pfaff.

Por se tratar de um resultado de densidade, era preciso garantir que o conjunto das equações algébricas de Pfaff sem soluções algébricas não é vazio. Para isso, Jouanolou apresenta, neste mesmo trabalho, um exemplo de equação de Pfaff sem solução algébrica.

Neste trabalho, estudamos o exemplo do Jouanolou, com base no artigo [23] de Zoladek. O autor traz uma abordagem mais analítica para este problema e apresenta uma demonstração baseada em uma generalização do Teorema de Integração de Darboux, (ver [4]), proposta pelo autor neste mesmo artigo.

Palavras-chave: Equações de Pfaff, Campos Vetoriais, Geometria Algébrica, Curvas Invariantes, Integral Primeira de Darboux.

Abstract

In 1979, J.P.Jouanolou, in his book "Equations de Pfaff Algébriques"[12], presents a density's result which says that the set of Pfaff's algebraic equations of degree $m > 2$ in $\mathbb{P}^2$ without algebraic solutions is dense in the set of Pfaff's algebraic equations.

As this is a result about density, it is necessary to ensure that the set of Pfaff's algebraic equations without algebraic solutions is not empty. In order to do it, Jouanolou presents in the same paper an example of Pfaff's equation without algebraic solution.

In this work, we study the example of Jouanolou, based on the Zoladek's article [23]. The author brings a more analytical approach to this problem and presents one proof based on a generalization of the Integration Theorem of Darboux (see [4]) proposed by the author in the same article.

Keywords: Pfaff's equations, Vector Fields, Algebraic Geometry, Invariant Curves, Darboux's First Integral.

Sumário

Introdução **9**

1 Noções Básicas **12**

1.1 Variedades Algébricas 12

1.2 Grupos Algébricos 15

1.3 Fibrados 16

1.4 Fibrados em retas sobre $\mathbb{P}^n$ 25

1.5 Sequência de Euler 27

1.6 Campo de vetores algébricos em $\mathbb{P}^n$ 32

1.7 1-formas diferenciais em $\mathbb{P}^n$ 36

1.8 Equações diferenciais lineares com autovalores conjugados 39

1.9 Um pouco de Sistemas Dinâmicos e EDO 41

1.10 Teoria de Integrabilidade de Darboux 43

2 Equações de Pfaff e Não Existencia de Soluções Algébricas **50**

2.1 Propriedades qualitativas do campo vetorial (2.2) 51

2.2 Generalização do Teorema de Darboux 56

2.3 Demonstração do Teorema de Jouanolou 76

Bibliografia **78**

Introdução

Sejam $m \geq 1$ um inteiro. Uma *equação algébrica de Pfaff* de grau m em $\mathbb{P}^2$ é uma expressão da forma

$$\omega = P_0(z_0, z_1, z_2)dz_0 + P_1(z_0, z_1, z_2)dz_1 + P_2(z_0, z_1, z_2)dz_2 = 0,$$

onde os $P_i's$ são polinômios homogêneos, nulos ou de grau m, que satisfazem a relação

$$z_0P_0 + z_zP_1 + z_2P_2 = 0.$$

Dizemos que duas equações algébricas de Pfaff $\omega = 0$ e $\omega' = 0$ são iguais se existe um escalar não nulo λ tal que $P_0 = \lambda Q_0$, $P_1 = \lambda Q_1$, e $P_2 = \lambda Q_2$, onde

$$\omega' = Q_0(z_0, z_1, z_2)dz_0 + Q_1(z_0, z_1, z_2)dz_1 + Q_2(z_0, z_1, z_2)dz_2 = 0.$$

Já que o espaço vetorial $\mathbb{V}_m$ formado por todos os polinômios homogêneos de grau m tem dimensão finita, segue da definição acima que o conjunto das equações algébricas de Pfaff é uma variedade projetiva, a saber $\mathbb{P}(\mathbb{V}_m)$.

Em 1979, J.P. Jouanolou apresentou em seu livro "Equations de Pfaff Algébriques " o seguinte resultado de densidade:

Teorema. (Jouanolou) *O conjunto das equações de Pfaff de grau $m > 2$, em $\mathbb{P}^2$, sem soluções algébricas é um subconjunto denso de $\mathbb{P}(\mathbb{V}_m)$, com a topologia usual.*

Primeiramente era necessário garantir que o conjunto das equações algébricas de Pfaff sem soluções algébricas é diferente de vazio. Para isso Jouanolou mostra que a equação algébrica de Pfaff

$$(x^{m-1}z - y^m)dx + (y^{m-1}x - z^m)dy + (z^{m-1}y - x^m)dz = 0 \qquad (1)$$

não possui soluções algébricas.

Além disso, em [13], Alcides Lins Neto mostra que conjunto das equações algébricas de Pfaff sobre $\mathbb{P}^2$ sem soluções algébricas contém um conjunto aberto que é denso em $\mathbb{P}(\mathbb{V}_m)$. Ele também utiliza o resultado de Jouanolou para garantir que o conjunto das equações algébricas de Pfaff sem soluções algébricas é não vazio.

Este trabalho é baseado no artigo "On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations" de Zoladek, [23], e tem como objetivo estudar a equação de Pfaff (1). A demonstração apresentada por ele tem um foco analítico com base na generalização do seguinte Método de Integração de Darboux:

Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$ de grau d. Suponhamos que ω admite k curvas algébricas irredutíveis invariantes. Se $k \geq d(d+1)/2$, então ω tem uma integral primeira da forma

$$F = \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}.$$

Uma primeira generalização do Método de Integração de Darboux está enunciada no Teorema 2.9. Ela foi estabelecida por Christopher e usada em vários artigos, entre eles [3], sem ter sido provada. A prova desta generalização, Zoladek teria apresentado no preprint [22], que não foi publicado. Apresentamos neste trabalho a demonstração feita por Christopher, Pantazi, Llibre e Zhand em [2]. Uma segunda generalização é dada no Teorema 2.14, onde estendemos o Teorema 2.9 para o caso em que as curvas invariantes pela 1-forma possuem, no máximo, singularidades do tipo nodal. A demonstração que apresentamos foi feita seguindo sugestões dadas por Zoladek, já que no artigo original não foram dados detalhes da prova.

Dividimos o trabalho em duas partes. Inicialmente apresentamos alguns conceitos que julgamos fundamentais para o desenvolvimento dos resultados principais estudados no Capítulo 2.

No Capítulo 1 definimos variedades algébricas, grupos algébricos, ações de grupos e o quociente de uma variedade por um grupo algébrico, apresentando o $\mathbb{P}^n$ como uma variedade quociente. Para mais detalhes sobre estes assuntos recomendamos [14] e [7]. Em seguida estudamos os fibrados, mais especificamente os fibrados vetoriais algébricos. Além disso apresentamos alguns exemplos particulares de fibrados com objetivo de construir a sequência de Euler. Usamos como referências básicas [16], [11] e [14].

Ainda no Capítulo 1, definimos campos de vetores algébricos em $\mathbb{P}^n$ como seções do fibrado tangente. Utilizamos a sequência de Euler para identificarmos um campo vetorial algébrico com uma $n+1$-upla de polinômios homogêneos de grau d. Na sequência definimos 1-formas em $\mathbb{P}^n$.

Nas Seções 1.8 e 1.9, estudamos sistemas de equações diferenciais com autovalores complexos conjugados e alguns tópicos de sistemas dinâmicos. Os estudos apresentados foram baseadas em [17], [9] e [10].

Na Seção 1.10 fazemos um estudo do Método de Integração de Darboux com base em [15].

No Capítulo 2 relacionamos a 1-forma da equação algébrica de Pfaff (1) com um sistema de equações diferenciais e com um campo vetorial polinomial em $\mathbb{P}^2$. Como referência citamos [18]. Em seguida apresentamos as demonstrações das duas generalizações do Teorema de Integração de Darboux. Terminamos o Capítulo com a demonstração da não existência de solução algébrica da equação de Pfaff (1).

Capítulo 1

Noções Básicas

Neste capítulo vamos estudar vários temas que consideramos essenciais para o desenvolvimento do assunto e que por terem um caráter de pré-requisito foram destacados do texto principal.

1.1 Variedades Algébricas

Denota-se por $\mathbb{A}^n(k)$ ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$ o espaço afim n dimensional sobre um corpo k cujos os pontos são da forma $p = (z_1, \ldots, z_n)$, com $z_i \in k$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Definição 1.1. Um *subconjunto fechado* de $\mathbb{A}^n$ é um subconjunto V formado pelos zeros de um número finito de polinômios de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$ formam um topologia chamada *topologia de Zariski*. Os abertos desta topologia são os complementares dos subconjuntos fechados.

Definição 1.2. Um *sistema de coordenadas algébricas* (U, φ) de um espaço topológico X consiste de um conjunto aberto $U \subset X$ e um homeomorfismo $\varphi : U \to B$, onde B é um conjunto localmente fechado de $\mathbb{A}^n$, ou seja, a interseção de um aberto com um fechado.

Seja p um ponto de X. Um sistema de coordenadas algébricas (U, φ) de X, tal que $p \in U$, é chamado *sistema de coordenadas algébricas de* p. As coordenadas z_i de $\varphi(p) = (z_1, \ldots, z_n)$ são chamadas *coordenadas algébricas* (ou afins) em torno de p.

Seja (U, φ) um sistema de coordenadas algébricas de X. Dada f uma função em U, podemos considerá-la como uma função de $\varphi(U) \subset \mathbb{A}^n$, nas coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{A}^n$, dada por

$$(z_1, ..., z_n) \longmapsto f \circ \varphi^{-1}(z_1, ..., z_n).$$

Definição 1.3. Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n$ localmente fechado. Uma função $f : X \to k$ é dita *regular* se para todo $x \in X$, existirem polinômios $P, Q \in k[X_1, .., X_n]$ com $Q(x) \neq 0$, tais que $f = P/Q$ em alguma vizinhança de x.

Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ localmente fechados. Uma aplicação $g : X \to Y$ dada por $g = (g_1, \ldots, g_m)$ é dita *regular*, ou um *morfismo*, se g_i for regular para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. A aplicação g é dita um *isomorfismo* se for bijetiva, regular, com inversa regular.

Definição 1.4. Dois sistemas de coordenadas algébricas (U, φ) e (V, ψ) em X são chamados compatíveis se $U \cap V = \emptyset$ ou, caso $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

for isomorfismo.

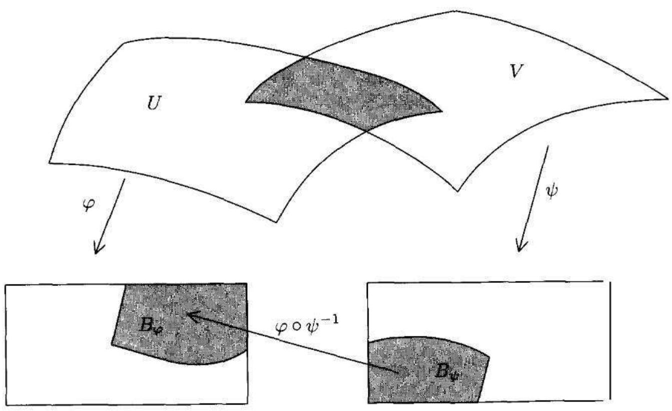


Figura 1.1: Gráfico

Sejam $z_1, \ldots, z_n$ e $w_1, \ldots, w_n$ coordenadas de $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$, respectivamente. A compatibilidade do sistema de coordenadas diz que as funções $z_i|_{\varphi(U \cap V)} = z_i(w_1, ..., w_n)$ e $w_j|_{\psi(U \cap V)} = w_j(z_1, ...z_n)$ são isomorfismos.

Uma cobertura aberta de X, munida de um sistema de coordenadas algébricas, é chamada *atlas algébrico* de X. Dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ ditos são equivalentes se quaisquer dois sistemas de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_1$ e $(V, \psi) \in \mathcal{A}_2$ forem compatíveis. Uma classe de equivalência de um atlas algébrico em X é chamada de *estrutura algébrica* de X. Toda estrutura algébrica de X contém um atlas maximal, a saber, a união de todos os atlas nesta classe de equivalência.

Definição 1.5. Uma *variedade algébrica* é um espaço topológico munido de uma estrutura algébrica.

A seguir daremos dois exemplos clássicos de variedades algébricas.

Exemplo 1.6. Seja $\mathbb{C}^n$ com a topologia de Zariski. Então $(\mathbb{C}^n, Id_{\mathbb{C}^n})$ é uma variedade algébrica.

Exemplo 1.7. Seja $\mathbb{P}^n(k)$, ou simplesmente $\mathbb{P}^n$, o conjunto das classes de equivalência definidas pelas retas de k^{n+1} que passam pela origem. Mais precisamente, dados $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ e $(z'_0, z'_1, \ldots, z'_n) \in k^{n+1}\backslash\{0\}$, definimos que $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ é equivalente a $(z'_0, z'_1, \ldots, z'_n)$ se, e somente se, $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ e $(z'_0, z'_1, \ldots, z'_n)$ estão sobre a mesma reta passando pela origem de k^{n+1}, isto é, se $(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \lambda(z'_0, z'_1, \ldots, z'_n)$, para algum $\lambda \in k\backslash\{0\}$.

Vamos denotar por $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ a classe do elemento $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ de $k^{n+1}\backslash\{0\}$.

Chamamos $\mathbb{P}^n$ de espaço projetivo n-dimensional.

Um *subconjunto fechado* de $\mathbb{P}^n$ é um conjunto $V \subset \mathbb{P}^n$ formado pelos zeros de um número finito de polinômios homogêneos de $k[X_0, \ldots, X_n]$.

Os fechados de $\mathbb{P}^n$ formam uma topologia chamada *topologia de Zariski.*

Dado um ponto $p = (z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ de $\mathbb{P}^n$, temos que $z_i \neq 0$ para algum $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. A família de subconjuntos $\{U_i\}_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$, onde

$$U_i = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n; z_i \neq 0\},$$

é aberto na topologia de Zariski, é uma cobertura de $\mathbb{P}^n$. Além disso, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\{0,..,n\}}$ é uma estrutura algébrica de $\mathbb{P}^n$, onde

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ & (z_0 : \ldots : z_i : \ldots : z_n) & \mapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_{i-1}}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_n}{z_i}\right), \end{array}$$

é homeomorfismo, para todo $i \in \{0, 2, \ldots, n\}$, tal que

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i^{-1} : & \mathbb{C}^n & \to & U_i \\ & (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : & \varphi_j(U_i \cap U_j) & \to & \varphi_i(U_i \cap U_j) \\ & (x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) & \to & \left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_{j-1}}{x_i}, \dfrac{1}{x_i}, \dfrac{x_{j+1}}{x_i} \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) \end{array}$$

é um isomorfismo, para todo $i, j \in \{0, ..., n\}$. Chamamos os U_i's de abertos afins de $\mathbb{P}^n$ e, se $\varphi_i(p) = (x_1, \ldots, x_n)$, chamamos $x_1, \ldots, x_n$ de coordenadas afins de p em U_i. Caso a coordenada z_i de $p = (z_0 : \ldots : z_n)$ seja igual a zero dizemos, que p é um ponto no infinito de U_i.

Definição 1.8. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua entre variedades algébricas. Dizemos que f é regular se, para todo $x \in X$, existirem cartas locais (U, φ) e (V, ψ) com $x \in U$ e $f(x) \in V$ tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$$

é regular.

Dada uma variedade algébrica X, denotaremos por $A(X)$ o anel das funções $f : X \to k$ regulares.

1.2 Grupos Algébricos

Definição 1.9. Um *grupo algébrico* é uma variedade X com aplicações regulares

$$\begin{aligned} m : X \times X &\longrightarrow X \\ i : X &\longrightarrow X \end{aligned}$$

satisfazendo as regras usuais para multiplicação e inversa de grupo.

Definição 1.10. Um *morfismo de grupos algébricos* é uma aplicação $\varphi : G \longrightarrow H$ que é ao mesmo tempo uma aplicação regular e um homomorfismo de grupos.

Definição 1.11. Uma *ação* de um grupo G em uma variedade algébrica X é uma aplicação regular

$$\varphi : G \times X \longrightarrow X$$

satisfazendo,

(i) $\varphi(e, x) = x$, onde e é o elemento neutro de G,

(ii) $\varphi(g, \varphi(g', x)) = \varphi(gg', x)$

para todo $x \in X$ e $g, g' \in G$.

Denotaremos $\varphi(g, x)$ apenas por gx.

Definição 1.12. Dada uma ação de um grupo algébrico G em uma variedade X definimos a *órbita* de x como sendo o conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{gx; g \in G\}.$$

Definição 1.13. Dizemos que $Y \subset X$ é invariante pela ação de G, ou $G - invariante$, se para todo $g \in G$, $gY := \{gy; y \in Y\}$ for igual a Y.

Definição 1.14. Sejam X e Y variedades algébricas e G um grupo algébrico agindo em X e Y. Dizemos que um morfismo $\psi : X \to Y$ é G-invariante se

$$\psi(gx) = g\psi(x),$$

para todo x em X e g em G.

Definição 1.15. Sejam G um grupo algébrico, X uma variedade algébrica e $\varphi : G \times X \to X$ uma ação de G em X. O quociente de X por G é um par (Y, π), onde Y é uma variedade cujos pontos correspondem um a um as órbitas de X, a projeção $\pi : X \longrightarrow Y$ é regular e, além disso, toda aplicação regular $\phi : X \longrightarrow Z$ se fatora por π se e somente se $\phi(x) = \phi(gx)$, para todo $x \in X$ e $g \in G$.

Denotaremos a variedade Y por X/G ou por X/φ.

Exemplo 1.16. Dado o conjunto $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ e a apicação

$$\begin{array}{rrcl} \phi_0 : & \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}) & \to & \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \\ & (t, v) & \mapsto & (tv) \end{array}$$

temos que ϕ_0 é uma ação e que o quociente $(\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\})/_{\phi_0}$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$.

1.3 Fibrados

Iniciaremos definindo o que é um fibrado e logo depois apresentaremos dois exemplos de fibrados que aparecerão ao longo do texto.

Nesta seção, um espaço será sempre um espaço topológico e uma aplicação será sempre uma aplicação contínua.

Definição 1.17. Um *fibrado* é uma terna (E, p, B), onde $p : E \longrightarrow B$ é uma aplicação. O espaço B é chamado espaço base, o espaço E espaço total e a aplicação p de projeção. Para cada $b \in B$, o espaço $p^{-1}(b)$ é chamado de fibra sobre b. Algumas vezes, por abuso de notação, vamos denotar o fibrado (E, p, B) apenas por E.

Exemplo 1.18. Seja $A \times B$ o produto cartesiano dos espaços A e B e π_1 a projeção na primeira coordenada dada por

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1 : & A \times B & \to & A \\ & (a, b) & \mapsto & a. \end{array}$$

Então, $(A \times B, \pi_1, A)$ é um fibrado sobre A chamado *fibrado trivial.*

Exemplo 1.19. Dados (E_1, p_1, B) e (E_2, p_2, B) dois fibrados sobre B, seja $E_1 \oplus E_2$ o subconjunto de todos os pares $(x, x') \in E_1 \times E_2$ com $p_1(x) = p_2(x)$ e seja

$$\begin{array}{rccl} q: & E_1 \oplus E_2 & \to & B \\ & (x, x') & \mapsto & q(x, x') = p_1(x) = p_2(x'). \end{array}$$

O fibrado $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ é chamado *produto fibrado* de $E_1 \oplus E_2$ sobre B. Oberve que $q^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$.

Definição 1.20. Um fibrado (E', p', B') é um *subfibrado* de (E, p, B) se E' for um subespaço de E, B' for um subespaço de B e $p' = p\,|_{E'}: E' \longrightarrow B'$.

Definição 1.21. Uma *seção* de um fibrado (E, p, B) é uma aplicação $s : B \longrightarrow E$ tal que $p \circ s = I_B$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, shift right, "p"'] \\ B \arrow[u, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Observe que uma seção de um fibrado (E, p, B) é uma aplicação $s : B \longrightarrow E$ tal que $s(b) \in p^{-1}(b)$, para cada $b \in B$.

Proposição 1.22. *Toda seção s do fibrado trivial $(B \times F, \pi_1, B)$ tem a forma $s(b) = (b, f(b))$, onde $f : B \longrightarrow F$ é uma aplicação unicamente determinada por s.*

Demonstração. Como $s(b) \in p^{-1}(b) = \{b\} \times F$, temos que $s(b) = (b, f(b))$, onde $f(b) = \pi_2(s(b))$ e π_2 é a projeção na segunda coordenada. Logo, concluímos que o conjunto das seções de $(B \times F, p, b)$ está em bijeção com o conjunto das aplicações $B \to F$. □

Definição 1.23. Dados os fibrados (E, p, B) e (E', p', B'), um *morfismo de fibrados* $(u, f) : (E, p, B) \to (E', p', B')$ é um par de aplicações $u : E \longrightarrow E'$ e $f : B \longrightarrow B'$ tais que $p'u = fp$, isto é, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

é comutativo. Observe que neste caso, a fibra sobre $b \in B$ é levada por u na fibra sobre $f(b)$.

Exemplo 1.24. Sejam (E,p,B), (E',p',B) fibrados e $u : E \to E'$ uma aplicação tal que $p = p'u$. Temos sobre eles o morfismo de fibrados $(u, I_B) : (E,p,B) \to (E',p',B)$, onde I_B é a identidade em B.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.25. Se $(u,f) : (E,p,B) \longrightarrow (E',p',B')$ e $(u',f') : (E',p',B') \longrightarrow (E'',p'',B'')$ forem morfismos de fibrados, então o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p'"'] & E'' \arrow[d, "p''"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, "f'"] & B'' \end{tikzcd}$$

e, neste caso $(u'u, f'f)) : (E,p,B) \longrightarrow (E'',p'',B'')$ é um morfismo de fibrados.

Definição 1.26. Um morfismo de fibrados $(u,f) : (E,p,B) \longrightarrow (E',p',B')$ é um isomorfismo se existir um morfismo de fibrados $(u',f') : (E',p',B') \longrightarrow (E,p,B)$ com $f'f = I_B$, $ff' = I_{B'}$, $u'u = I_E$ e $uu' = I_{E'}$.

Definição 1.27. O espaço F é uma fibra típica do fibrado (E,p,B) se, para todo $b \in B$, a fibra $p^{-1}(b)$ for homeomorfa a F. Um fibrado (E,p,B) é trivial com fibra típica F se (E,p,B) for isomorfo ao fibrado trivial $(B \times F, \pi_1, B)$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Dados um fibrado (E,p,B) e um subespaço A de B, a *restrição* do fibrado (E,p,B) a A, denotada por $E\mid_A$, é o fibrado (E',p',A), onde $E' = p^{-1}(A)$ e $p' = p\mid_{E'}$

1.3.1 Fibrados vetoriais algébricos

Definição 1.28. Um *fibrado vetorial algébrico de posto* r é um fibrado $E = (E,p,X)$, onde E e X são variedades algébricas, $p : E \longrightarrow X$ é um morfismo sobrejetor de variedades algébricas, cada fibra $p^{-1}(b)$ tem estrutura de espaço vetorial de dimensão r sobre $\mathbb{C}$ e a seguinte condição de trivialidade local é satisfeita:

i) para todo b de X, existe uma vizinhança U de b e um isomorfismo $h : U \times \mathbb{C}^r \longrightarrow p^{-1}(U)$ de fibrados tal que a restrição $h : \{b\} \times \mathbb{C}^r \longrightarrow p^{-1}(b)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. O isomorfismo h é chamado de *carta local* ou *trivialização* do fibrado vetorial.

Proposição 1.29. *Se $\varphi_i : E\mid_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$ e $\varphi_j : E\mid_{U_j} \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^r$ são cartas locais sobre os abertos U_i e U_j, respectivamente, a mudança de cartas definida sobre $U_{ij} = U_i \cap U_j$ é dada por*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : & U_{ij} \times \mathbb{C}^r & \longrightarrow & U_{ij} \times \mathbb{C}^r \\ & (x, v) & \mapsto & (x, g_{ij}(x)v) \end{array}$$

onde $g_{ij} : U_{i,j} \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ satisfaz

a) $g_{ii} = Id_{\mathbb{C}^r}$ no aberto U_i,

b) $g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ no aberto U_{ijk}.

Demonstração. Segue do diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "p"'] & U_i \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

que $\varphi_i \circ p^{-1}(x) = \pi_1^{-1}(x)$, ou seja, que $p^{-1}(x)$ é isomorfo a $\{x\} \times \mathbb{C}^r$, via φ_i. Logo, para todo x pertencente a $U_i \cap U_j$, temos que

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \{x\} \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^r$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais da forma $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v)$, onde $g_{ij}(x) \in GL(r, \mathbb{C})$. Para $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, temos que

$$\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}(x, v) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_k^{-1}(x, v) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, g_{jk}(x)v) = (x, g_{ij}(x)g_{jk}(x)v)$$

e o resultado segue. □

Definição 1.30. Sejam (E, p, B) e (E', p', B') fibrados vetoriais. Um morfismo de fibrados $(u, f) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$ é dito um *morfismo de fibrados vetoriais* se a restrição $u : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f(b))$ for linear, para todo $b \in B$.

Teorema 1.31. *Seja $(u, I_B) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B)$ um morfismo de fibrados vetoriais. Então (u, I_B) é um isomorfismo se e somente se $u : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(b)$ for um isomorfismo de espaços vetoriais, para todo $b \in B$.*

Demonstração. A prova se encontra em [11] cap 3, pag.27, Teorema 2.5. □

Definição 1.32. Uma sequência de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

é dita sequência exata curta se, f é injetivo, g sobrejetivo e $Im(f) = Ker(g)$.

Definição 1.33. Uma sequência de fibrados vetoriais

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$$

é dita sequência exata curta de fibrados sobre X se para todo $x \in X$, a sequência

$$0 \longrightarrow E_x \xrightarrow{f_x} E'_x \xrightarrow{g_x} E''_x \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de espaços vetoriais.

1.3.2 Fibrados vetoriais associados à funções de transição

Seja $U = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de um espaço X. Suponhamos que para cada par $(i, j) \in I^2$, tal que $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, é dada uma aplicação

$$g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

satisfazendo (a) e (b) da Proposição (1.29). Seja

$$R = \coprod (U_i \times \mathbb{C}^r) = \{(i, x, v); i \in I, x \in U_i \text{ e } v \in \mathbb{C}^r\},$$

a união disjunta da coleção $\{U_i \times \mathbb{C}^r\}_{i \in I}$, com a topologia cujos os abertos são da forma $\coprod A_i$, onde A_i é um aberto de $U_i \times \mathbb{C}^r$, e considere em R a seguinte relação de equivalência

$$(i, x, v) \sim (j, y, w) \Leftrightarrow x = y \text{ e } v = g_{ij}(x)w.$$

Denotemos por $[i, x, v]$ a classe de um elemento $(i, x, v) \in R$.

Mostraremos que (E, p, X) é um fibrado vetorial de posto r, onde

$$E = (\coprod U_i \times \mathbb{C}^r)/ \sim$$

tem topologia quociente e $p : E \to X$ é tal que $p([i, x, v]) = x$. Observe que p está bem definida pois,

$$[i, x, v] = [j, y, w] \Leftrightarrow x = y \text{ e } v = g_{ij}(x)w.$$

Afirmação 1: A projeção natural π de R para E restrita a $U_i \times \mathbb{C}^r$ é um homeomorfismo sobre a imagem.

Pela definição de topologia quociente temos que $\pi|_{U_i \times \mathbb{C}^r}$ é contínua. Falta mostrarmos a injetividade. Dados (i, x, v), $(i, y, w) \in U_i \times \mathbb{C}^r$ temos que $\pi(i, x, v) = \pi(i, y, w)$ se, e somente se, $[i, x, v] = [i, y, w]$ o que só ocorre se $x = y$ e $v = g_{ii}(x)w = w$.

Afirmação 2: A aplicação p é contínua.

De fato, como $p \circ \pi(i, x, v) = p([i, x, v]) = x = \pi_1(i, x, v)$, pela propriedade universal da topologia quociente, basta mostrarmos que π_1 é contínua.

Dado um aberto U de X, temos que $\pi_1^{-1}(U) = \coprod((U \cap U_i) \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$ que é aberto em R. Logo, π_1 é contínua.

Afirmação 3: Existe um homeomorfismo entre $E|_{U_i}$ e $U_i \times \mathbb{C}^r$.

Observe que $\pi(U_i \times \mathbb{C}^r) = p^{-1}(U_i)$. Logo, pela afirmação (1), temos que

$$\begin{array}{rccc} \pi: & U_i \times \mathbb{C}^r & \longrightarrow & E|_{U_i} \\ & (i, x, v) & \longmapsto & [i, x, v] \end{array}$$

é um homeomorfismo.

Afirmação 4: $E_x = p^{-1}(x)$ tem estrutura de espaço vetorial.

Temos que $E_x = \{[k, x, v]; k \in I, U_k \cap U_i \neq \emptyset \text{ e } v \in \mathbb{C}^r\}$. Então, dados $[k, x, v], [j, x, w] \in E_x$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, as operações

$$[k, x, v] + [j, x, w] = [i, x, g_{ki}(x)v + g_{ji}(x)w]$$

e

$$\lambda[j, x, v] = [i, x, \lambda g_{ji} v]$$

estão bem definidas e definem em E_x uma estrutura de espaço vetorial.

É fácil ver que os espaços vetoriais E_x e $\{x\} \times \mathbb{C}^r$ são isomorfos via a aplicação π.

Dando ao espaço topológico E a estrutura de uma variedade algébrica induzida pela estrutura de variedade algébrica de $U_i \times \mathbb{C}^r$ teremos que (E, p, X) é um fibrado vetorial algébrico de posto r.

Usaremos a construção de fibrado vetorial a partir de funções de transição para obter o fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$. Antes disto, definiremos espaço tangente a variedade em um ponto.

Definição 1.34. Sejam X uma variedade algébrica afim, isto é, um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^n$ e $x \in X$. Definimos o *espaço tangente* a X em x, denotado por T_xX, por

$$T_xX = \{v \in \mathbb{A}^n; (d_xf)(v) = 0,\ \forall f \in I(X)\},$$

onde $I(X) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n]; f(x) = 0,\ \forall\ x \in X\}$ e

$$(d_xf)(v) := \sum_{i+1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)(x)(v_i - p_i).$$

Observação 1.35. Temos que T_xX tem estrutura natural de espaço vetorial se o identificarmos com o conjunto

$$\{v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{A}^n; \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)(x) = 0,\ \forall f \in I(X)\}.$$

Um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{A}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)(x) = 0$ é chamado vetor tangente a X em x.

Uma outra definição de espaço tangente pode ser dada usando o conceito de derivação. Dados R um anel, A uma R-álgebra e M um A-módulo, uma R-*derivação* de A em M é uma aplicação R-linear $D : A \to M$ satisfazendo

$$D(ab) = bD(a) + aD(b).$$

É fácil ver que todo vetor $v \in \mathbb{A}^n$, tangente a X em x, define uma k-derivação de $A(X) = k[X_1, \ldots, X_n]/I(X)$ em k, a saber, $D_v(x) : A(X) \to k$ dada por

$$D_v(x)(\bar{f}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)(x).$$

Reciprocamente, dada $D : A(X) \to k$ uma k-derivação, o vetor $v = (D(\overline{X_1}), \ldots, D(\overline{X_n}))$ é tangente a X em x. Logo, temos uma identificação natural entre T_xX e $Der_k(A(X), k)$, o conjunto das k-derivações de $A(X)$ em k. Segue desta identificação que T_xX é gerado como espaço vetorial sobre k por

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial X_n}(x),$$

as derivadas parciais com respeito a $X_1, \ldots, X_n$, respectivamente, calculadas em x.

Dado um morfismo $\varphi : X \to Y$ entre variedades afins, seja $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$ o homomorfismo de álgebras definido por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in A(Y)$. Se $D \in D_k(A(X), k)$, então $D \circ \varphi^* \in D_k(A(Y), k)$, isto é, existe uma transformação linear

$$d_x\varphi : T_xX \to T_{\varphi(x)}Y,$$

chamada diferencial de φ em x.

Para X, variedade algébrica qualquer, e $x \in X$, definimos T_xX para ser T_xU, onde U é qualquer vizinhança afim de x, isto é, U é um aberto de X isomorfo a uma fechado afim. Se V for outra vizinhança afim de x, mostra-se que $T_xU \simeq T_xV$ (ver [21], Cap. 3). Portanto, a definição de espaço tangente independe da vizinhança.

Como no caso afim, todo morfismo $\varphi : X \to Y$ entre variedades algébricas define uma transformação linear

$$d_x\varphi : T_xX \to T_{\varphi(x)}Y.$$

Exemplo 1.36. (*Fibrado Tangente de $\mathbb{P}^n(k)$*). Dado $x \in \mathbb{P}^n$, suponhamos sem perda de generalidade que $x \in U_0 \cap U_1$. Como U_0 e U_1 são isomorfos a $\mathbb{C}^n$, temos que

$$T_xU_0 = Der_k(k[x_1, \ldots, x_n], k) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \rangle,$$

onde $x_i = X_i/X_0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, e que

$$T_xU_1 = Der_k(k[y_1, \ldots, y_n], k) = \langle \frac{\partial}{\partial y_1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}(x) \rangle,$$

onde $y_1 = X_0/X_1, y_2 = X_2/X_1, \ldots, y_n = X_n/X_1$. Para $x \in U_0 \cap U_1$, temos

$$(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (1/x_1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

isto é, $y_1 = 1/x_1$ e $y_j = x_j/x_1$, para $j = 2, \ldots, n$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(y_1, \ldots, y_n)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(f(y_1, \ldots, y_n))\frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \ \ \forall i = 1, \ldots, n,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \frac{\partial y_3}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & -\frac{x_2}{x_1^2} & -\frac{x_3}{x_1^2} & \cdots & -\frac{x_n}{x_1^2} \\ 0 & \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Logo, o isomorfismo entre T_xU_0 e T_xU_1 é dado pela matriz (1.1).

Mais geralmente, para $x \in U_i \cap U_j$, o isomorfismo entre T_xU_j e T_xU_i é dado pela matriz $J_{\varphi_j\varphi_i^{-1}} := (\partial y_l/\partial x_k)_{k,l} \in GL(n, \mathbb{C})$.

O fibrado vetorial sobre $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ obtido usando como funções de transição as funções $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C})$, onde $g_{ij}(x) = ((\partial y_l/\partial x_k)(x))$ e $(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_1, \ldots, x_n)$, é chamado fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$. Tal fibrado será denotado por $(T\mathbb{P}^n, p, \mathbb{P}^n)$ ou por $T\mathbb{P}^n$. Segue da construção que para todo $x \in U_i$,

$$T_x\mathbb{P}^n = Der_k([X_0/X_i, \ldots, X_{i-1}/X_i, X_{i+1}/X_i, \ldots, X_n/X_i], k).$$

Definição 1.37. O fibrado tangente a $\mathbb{C}^n$ é o fibrado trivial $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \pi_1, \mathbb{C}^n)$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada e $\pi_1^{-1}(x) = \mathbb{C}^n$ é identificada com $Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n], \mathbb{C})$.

Observação 1.38. Sejam (E, p, B) e (E', p', B) fibrados vetoriais e

$$(u, I_B) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B)$$

um morfismo de fibrados vetoriais. Se $\varphi : E\mid_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$ e $\psi : E'\mid_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^s$ forem cartas locais dos fibrados E e E' sobre o mesmo aberto U, então a expressão local de u nas cartas φ e ψ é dada pela aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \overline{u} = \psi \circ u \circ \varphi^{-1} : & U \times \mathbb{C}^r & \longrightarrow & U \times \mathbb{C}^s \\ & (x, v) & \mapsto & (x, g(x)v) \end{array}$$

onde $g : U \longrightarrow L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ é uma aplicação de variedades algébricas e $L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ é o espaço vetorial das transformações lineares de $\mathbb{C}^r$ em $\mathbb{C}^s$.

Observação 1.39. Observe que o produto fibrado $E \oplus E'$ de dois fibrados vetoriais sobre B é um fibrado vetorial sobre B. De fato, $q^{-1}(b) = p^{-1}(b) \times p'^{-1}(b)$ é a soma direta de dois espaços vetoriais. Além disso, se $h_1 : U \times \mathbb{C}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ é uma carta local de E e $h_2 : U \times \mathbb{C}^m \longrightarrow p'^{-1}(b)$ é uma carta local de E', então $h_1 \oplus h_2 : U \times \mathbb{C}^{n+m} \longrightarrow q^{-1}(U)$ é uma carta local de $E \oplus E'$.

Seja $F \subset E$ um subfibrado vetorial algébrico. Considere a familia de espaços vetoriais sobre X

$$E/F = \coprod_{x \in X} (E_x/F_x).$$

Proposição 1.40. *Existe uma única estrutura de fibrado vetorial algébrico em $E/F \to X$ satisfazendo a seguinte propriedade universal, para cada morfismo de fibrados $f : E \to G$ que se anula em F a aplicação $\overline{f} : E/F \to G$ é um morfismo de fibrados vetoriais algébricos.*

Demonstração. A demonstração se encontra em [16] pag17 Proposição 1.7.1. □

1.4 Fibrados em retas sobre $\mathbb{P}^n$

1.4.1 O fibrado vetorial $\mathcal{O}(d)$

Considere o conjunto $B \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ definido por

$$B = \{((x_0 : \ldots : x_n), (v_0, \ldots, v_n)) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}; x_i v_j = x_j v_i, \ \forall\, i, j = 1, \ldots, n\}$$

e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & B & \to & \mathbb{P}^n \\ & ([x], v) & \mapsto & [x] \end{array},$$

onde $[x] = (x_0 : ... : x_n)$.

Afirmamos que $(B, \sigma, \mathbb{P}^n)$ é um fibrado vetorial algébrico de posto 1, que será denotado por $\mathcal{O}(-1)$. De fato, dado $([x], v) \in B$ temos que $[x] \in U_k$, para algum aberto afim U_k (ver Exemplo 1.7). As aplicações

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & B|_{U_k} & \to & U_k \times \mathbb{C} \\ & ([x], v) & \mapsto & ([x], v_k) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k^{-1} : & U_k \times \mathbb{C} & \to & B\,|_{U_k} \\ & ([x], t) & \mapsto & \left([x], t\left(\dfrac{x_0}{x_k}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_k}\right)\right) \end{array}$$

são isomorfismo e cada par (U_i, φ_i) é uma trivialização do fibrado $(B, \sigma, \mathbb{P}^n)$.

1.4.2 $\mathcal{O}(d)$ como quociente

Considere $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^n$ a aplicação quociente.

Lema 1.41. *Seja* $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}, \pi_1, \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})$ *o fibrado trivial de posto 1. Então* π_1 *é invariante pelas ações*

$$\begin{array}{rrcl} \phi_d: & \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \\ & (t,(v,z)) & \mapsto & (tv, t^d z), \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \phi_o: & \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}) & \to & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \\ & (t,v) & \mapsto & (tv) \end{array}$$

e $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C})/_{\phi_d}, \overline{\pi_1}, \mathbb{P}^n)$ *é um fibrado vetorial algébrico de posto 1, denotado por* $\mathcal{O}(d)$*, onde* $\pi_1([v,z]) = [v]$ *e* $[v,z] \in (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d}$ *é a classe de* (v,z)*.*

Demonstração. Segue das definições de π_1, ϕ_d e ϕ_0 que

$$\pi_1(\phi_d(t,(v,z))) = \phi_1(tv, t^d z) = (tv) = \phi_0(t,v),\ \forall\,(v,z)\ \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \text{ e } \forall\, t \in \mathbb{C}^*.$$

Logo π_1 é invariante pelas ações ϕ_d e ϕ_0.

Considerando *a projeção natural*

$$\begin{array}{rrcl} \pi_d: & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} & \to & (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d} \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

temos que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_d"'] & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d} \arrow[r, "\overline{\pi_1}"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Para ver que $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d}, \psi, \mathbb{P}^n)$ é localmente trivial, seja U_i um aberto afim canônico de $\mathbb{P}^n$. Da comutatividade do diagrama (1.2), temos que

$$\pi_d^{-1}(\overline{\pi_1}^{-1}(U_i)) = \pi_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) = U_i \times \mathbb{C},$$

ou ainda,

$$\overline{\pi_1}^{-1}(U_i) = \pi_d(U_i \times \mathbb{C}) = \{[u,z]; u \in U_i \text{ e } z \in \mathbb{C}\}.$$

Defina

$$\begin{array}{rrcl} \psi_i: & \overline{\pi_1}^{-1}(U_i) & \to & U_i \times \mathbb{C} \\ & [u,z] & \mapsto & ([u], u_i^{-d} z) \end{array} \tag{1.3}$$

onde $[u] = (u_0 : \ldots : u_n) \in \mathbb{P}^n$. Observe que ψ_i está bem definida pois

$$\psi_i([tu, t^d z]) = ([tu], (tu_i)^{-d} t^d z) = ([u], u_i^{-d} z) = \psi_i([u, z]).$$

É fácil ver que ψ_i é isomorfismo cuja inversa é dada por

$$\begin{array}{rccc} \psi_i^{-1}: & U_i \times \mathbb{C} & \to & \psi^{-1}(U_i) \\ & ([u], z) & \mapsto & [u, u_i^d z]. \end{array}$$

Além disso, em $\psi_i(\overline{\pi_1}^{-1}(U_i) \cap \overline{\pi_1}^{-1}(U_j))$, temos

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}([u], z) = \psi_j([u, v_i^d z]) = ([u], u_j^{-d} u_i^d z) := ([u], g_{ji}(u) z),$$

com $g_{ji}(u) = (u_i/u_j)^d \in GL(1, \mathbb{C})$ regular em $U_i \cap U_j$. □

De maneira análoga, podemos definir $\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}$, o fibrado produto de $\mathcal{O}(d)$ de posto $n+1$. Para isto, considere o fibrado trivial $(\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}^{n+1}, \pi_1, \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\})$ e a ação

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\phi_d}: & \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}^{n+1}) & \to & \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C} \\ & (t, (v, z)) & \mapsto & (tv, t^d z). \end{array}$$

Então, a projeção $\pi_1 : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ é invariante pelas ações $\widehat{\phi_d}$ e ϕ_0 e $((\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}^{n+1})/_{\phi_d}, \overline{\pi_1}, \mathbb{P}^n)$ é um fibrado de posto $n+1$. Para ver que este fibrado pode ser naturalmente identificado com o fibrado produto $\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}$, observe que

$$\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}|_{U_i} = \oplus^{n+1}(\mathcal{O}(d)|_{U_i}) = \{([u, z_1], \ldots, [u, z_{n+1}]); u \in U_i \text{ e } z_l \in \mathbb{C}, \forall\, l = 1, \ldots, n+1\}$$

e que existe uma identificação natural entre $([u, z_1], \ldots, [u, z_{n+1}])$ e $([u, (z_1, \ldots, z_{n+1})])$.

1.5 Sequência de Euler

Nesta seção, vamos construir a sequência exata de fibrados sobre $\mathbb{P}^n$

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \to T\mathbb{P}^n \to 0,$$

conhecida como sequência de Euler.

Considere o homomorfismo de fibrados

$$(\Phi, id) : (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}, \pi_1, \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}) \to (\mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1} |_{\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}}, \pi, \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}),$$

onde $\Phi(v, z) = D_{zv}(v)$, $D_w(v) := \sum_{i=1}^{n+1} w_i D_i(v)$ e D_i é a i-ésima derivada parcial.

Afirmamos ver que Φ é invariante pelas ações ϕ_d e

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{d+1}: & \mathbb{C}^* \times T\mathbb{C}^{n+1} & \to & T\mathbb{C}^{n+1} \\ & (t, D_w(v)) & \mapsto & D_{t^{d+1}w}(tv). \end{array}$$

De fato, $\Phi(\phi_d(t,x,z)) = \Phi(tx, t^d z) = D_{t^{d+1}xz}(tx) = \Phi_{d+1}(D_{xz}(x))$ e, por Φ, podemos induzir um homomorfismo de $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d}$ para $(\mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}})/_{\phi_{d+1}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \arrow[r, "(id,\Phi)"] \arrow[d, "\phi_d"'] & \mathbb{C}^* \times \mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[d, "\Phi_{d+1}"] \\
\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[d] \\
(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d} \arrow[r] & (\mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}})/_{\Phi_{d+1}}
\end{tikzcd}$$

Considerando o isomorfismo de fibrados

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} & \to & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}^{n+1} \\ D_w(v) & \mapsto & (v, w) \end{array}$$

e observando que $\widehat{\phi}_{d+1} = \phi_{d+1}$, podemos completar o diagrama anterior e obter o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}) \arrow[r, "(id,\Phi)"] \arrow[d, "\phi_d"'] & \mathbb{C}^* \times \mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\Phi_{d+1}"] & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}^{n+1} \arrow[d, "\widehat{\phi}_{d+1}"] \\
\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}^{n+1} \arrow[d] \\
(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C})/_{\phi_d} \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"'] & (\mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}})/_{\Phi_{d+1}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\parallel"'] & (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}^{n+1})/_{\widehat{\phi}_{d+1}} \arrow[d, "\parallel"'] \\
\mathcal{O}(d) \arrow[r] & (\mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}})/_{\Phi_{d+1}} \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{O}(d+1)^{\oplus n+1}
\end{tikzcd}$$

que nos dá o seguinte morfismo de fibrados

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{O}(d) \to \mathcal{O}(d+1)^{\oplus n+1}. \tag{1.4}$$

A seguir vamos construir, a partir de algumas ações específicas, um morfismo entre o fibrado $\mathcal{O}(d+1)^{\oplus n+1}$ e o fibrado $T\mathbb{P}^n(d)$ que será definido no que segue.

Seja $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n$ o produto fibrado de $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}, \pi, \mathbb{P}^n)$ e $(T\mathbb{P}^n, p, \mathbb{P}^n)$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n &= \{(v, D_w([y])); v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}, D_w([y]) \in T_{[y]}\mathbb{P}^n \text{ e } \pi(v) = p(D_w([y]))\} \\ &= \{(v, D_w([y])); v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}, D_w([y]) \in T_{[y]}\mathbb{P}^n \text{ e } [v] = [y]\}. \end{aligned}$$

Afirmamos que o morfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{T}\mathbb{C}^{n+1} \mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} & \to & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi \mathbb{T}\mathbb{P}^n \\ D_w(v) & \mapsto & (v, D_{d\pi_v(w)}([v])) \end{array}$$

é invariante pelas ações Φ_d e

$$\begin{array}{rl} \rho_d : \quad \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n) & \to \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n \\ (t, (v, D_w([v]))) & \mapsto (tv, t^{d-1}D_w([v]) \end{array}$$

isto é, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \times T\mathbb{C}^{n+1} \mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[r, "(id,\psi)"] \arrow[d, "\Phi_d"'] & \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n) \arrow[d, "\rho_d"'] \\ T\mathbb{C}^{n+1} \mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

De fato,

$$\psi(\phi_d(t, D_w(v))) = \psi(D_{t^d w}(tv)) = (tv, D_{d\pi_{tv}(t^d w)}([tv])) \quad \text{e}$$

$$\rho_d((id, \psi)(t, D_w(v))) = \rho_d(t, (v, D_{d\pi_v(w)}([v])) = (tv, t^{d-1}D_{d\pi_v(w)}([v])).$$

Para concluir, precisamos ver que $t^{d-1}D_{d\pi_v(w)}([v]) = D_{d\pi_{tv}(t^d w)}([tv])$.

Dado $v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, suponhamos sem perda de generalidade que $v_0 \neq 0$. Seja $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^n$ carta local em U_0. Então,

$$\varphi_0 \circ \pi(v_0, ...v_n) = (\frac{v_1}{v_0}, ..., \frac{v_n}{v_0}),$$

$$d\pi_v := d(\pi \circ \varphi_0)_v = \frac{1}{v_0} \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{v_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{v_2}{v_0} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{v_n}{v_0} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

e $d\pi_{tv} = t^{-1}d\pi_v$. Logo,

$$D_{d\pi_{tv}(t^d w)}([tv]) = D_{t^{-1}d\pi_v(t^d w)}([v]) = D_{t^{d-1}d\pi_v(w)}([v]) = t^{d-1}D_{d\pi_v(w)}([v]).$$

Lembrando a definição de produto fibrado, temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T\mathbb{C}^{n+1} \mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n & \xrightarrow{p_2} & T\mathbb{P}^n \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \xrightarrow{=} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n, \end{array}$$

onde p_1 e p_2 são projeções, é comutativo. Logo, usando o isomorfismo $T\mathbb{C}^{n+1}|_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \simeq \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}^{n+1}$, que p_1 é invariante por ρ_d e ϕ_0 e denotando $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n)/\rho_d$ por $T\mathbb{P}^n(d-1)$, temos que existe um morfismo de fibrados sobre $\mathbb{P}^n$

$$\widetilde{\psi} : \mathcal{O}(d)^{\oplus n+1} \to T\mathbb{P}^n(d-1), \tag{1.6}$$

fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1} & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n)/\rho_d & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
T\mathbb{C}^{n+1}\ |_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n & \xrightarrow{p_2} & T\mathbb{P}^n \\
\downarrow \pi_1 & & \downarrow p_1 & & \downarrow p \\
\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \xrightarrow{=} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n,
\end{array}$$

comutar. As setas verticais para cima são as projeções nos quocientes por $\widehat{\phi}_d$ e ρ_d, respectivamente. Os morfismos (1.4) e (1.6) juntos nos dão a sequência

$$\mathcal{O}(d) \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} \mathcal{O}(d+1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} T\mathbb{P}^n(d).$$

Observe que para $d = 1$,

$$\psi(\widehat{\phi}_1(t, D_w(v))) = \psi(D_{tw}(tv)) = (tv, D_{d\pi_{tv}(tw)}([tv])) = (tv, D_{d\pi_v(w)}([v])),$$

isto é, que $\mathbb{C}^*$ age somente na primeira coordenada. Então, $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n)/\rho_1 \simeq T\mathbb{P}^n$. Assim, para $d = 1$, temos a sequência

$$\mathcal{O}(0) := \mathcal{O} \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} T\mathbb{P}^n.$$

Teorema 1.42. *A sequência*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \overset{\widetilde{\Phi}}{\hookrightarrow} T\mathbb{C}^{n+1}\ |_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0 \tag{1.7}$$

é uma sequência exata de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$.

Demonstração. Fixado $v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, devemos mostrar:

1. Injetividade de

$$\begin{array}{rccl}
\Phi_v : & \{v\} \times \mathbb{C} & \to & T_v\mathbb{C}^{n+1}\ |_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \\
& (v, z) & \mapsto & D_{vz}(v)
\end{array}$$

Para isto, suponha que para $\Phi_v(v,z) = (v,0)$. Então,

$$D_{vz}(v) = \sum_{n=1}^{n+1} v_i \frac{\partial}{\partial(zv_i)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{n+1}(zv_i)\frac{\partial}{\partial(zv_i)} = 0 \Rightarrow zv_i = 0,\ \forall\ i = 1,\ldots,n+1.$$

Como $v \neq 0$, temos que $z = 0$.

2. Sobrejetividade de

$$\begin{array}{rcl} \psi_v \quad : T_v\mathbb{C}^{n+1}\mid_{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}} & \to & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \times_\pi T_v\mathbb{P}^n \\ D_w(v) & \mapsto & (v, D_{d\pi_v(w)}([v])). \end{array}$$

Segue da representaçãLo matricial de $d\pi_v$ dada em (1.5), que

$$d\pi_v(0,w_1,\ldots,w_n) = (w_1,\ldots,w_n),\ \forall(w_1,\ldots,w_n),$$

isto é, $d\pi_v$ é sobrejetiva. Logo,

$$(v, D_{(w_1,\ldots,w_n)}([v])) = (v, D_{d\pi_v(0,w_1,\ldots,w_n)}([v])) = \psi(D_{(0,w_1,\ldots,w_n)}(v)),$$

para todo $D_w([v]) \in T_{[v]}\mathbb{P}^n$.

3. $Ker(\psi_v) = Im(\Phi_v)$.

$\psi_v(\Phi_v(v,z)) = \psi_v(D_{vz}(v)) = (v, D_{d\pi_v(vz)}([v])) = (v,0)$, pois

$$d\pi_v(vz) = \frac{1}{v_0}.\begin{bmatrix} -\frac{v_1}{v_0} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{v_n}{v_0} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} zv_0 \\ \vdots \\ zv_n \end{bmatrix} = 0.$$

Então $Im(\Phi_v) \subset Ker(\psi_v)$. Para mostrar a inclusão contrária, seja $D_w(v) \in T_v\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $D_{d\pi_v(w)}([v]) = 0$, isto é, $d\pi_v(w) = 0$. Então,

$$d\pi_v(w) = \frac{1}{v_0}.\begin{bmatrix} -\frac{v_1}{v_0} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{v_n}{v_0} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$w = \frac{w_0}{v_0}(v_0,\ldots,v_n) = \left(\frac{w_0}{v_0}\right)v \Rightarrow D_w(v) = D_{(w_0/v_0)v}(v) = \Phi_v(w_0/v_0, v).$$

□

Teorema 1.43. *A sequência*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(d) \xhookrightarrow{\widetilde{\Phi}} \mathcal{O}(d+1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} T\mathbb{P}^n(d) \longrightarrow 0 \tag{1.8}$$

de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^n$ é exata.

Demonstração. A sequência (1.8) é obtida passando os fibrados da sequência (1.7) ao quociente pelas ações ϕ_d, ϕ_{d+1} e ρ_{d+1}, respectivamente. Logo, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \arrow[r, hook, "\Phi"] \arrow[d] & T\mathbb{C}^{n+1} \mid_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{P}^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}(d) \arrow[r, hook, "\widetilde{\Phi}"] & \mathcal{O}(d+1)^{\oplus n+1} \arrow[r, two heads, "\widetilde{\psi}"] & T\mathbb{P}^n(d) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde as setas verticais são as projeções quocientes, e a exatidão do sequência (1.8) é uma consequência direta do Teorema 1.42.

□

1.6 Campo de vetores algébricos em $\mathbb{P}^n$

Um campo de vetores em uma variedade X é uma função $\mathcal{X}$ que associa a cada ponto $p \in X$, um vetor $\mathcal{X}(p) \in T_pX$. Dependendo da regularidade (contínua, diferenciável, holomorfa, polinomial, etc.) desta correspondência, o campo será chamado contínuo, diferenciável, holomorfo, polinomial, etc.

Trabalharemos na maior parte deste trabalho com campos vetoriais polinomiais.

Definição 1.44. Um *campo de vetores polinomial de grau* $d \geq 1$ em $\mathbb{P}^n$é uma seção do fibrado $(T\mathbb{P}^n(d-1), \pi, \mathbb{P}^n)$, isto é, um morfismo $\mathcal{X} : \mathbb{P}^n \to T\mathbb{P}^n(d-1)$ tal que $\pi \circ \mathcal{X} = Id$.

Dado E um fibrado sobre $\mathbb{P}^n$, denotaremos por $H^0(E)$ o espaço vetorial das seções de E. Usando a sequência (1.8), é fácil ver que existe uma sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \to H^0(\mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\lambda} H^0(\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}) \xrightarrow{\mu} H^0(T\mathbb{P}^n(d-1)),$$

onde $\lambda(s) = \widetilde{\Phi} \circ s$, para toda $s \in H^0(\mathcal{O}(d-1))$ e $\mu(s) = \widetilde{\psi} \circ s$, para toda $s \in H^0(\mathcal{O}(d))$.

Além disso, μ é sobrejetiva (ver [8]), isto é,

$$0 \to H^0(\mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\lambda} H^0(\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}) \xrightarrow{\mu} H^0(T\mathbb{P}^n(d-1)) \to 0 \tag{1.9}$$

é uma sequência exta curta.

Proposição 1.45. *Para todo inteiro positivo d, $H^0(\mathcal{O}(d))$ é isomorfo ao espaço vetorial*

$$S_d = \{H \in k[X_0, \ldots, X_n];\ H \textit{ é homogêneo de grau } d\} \cup \{0\}.$$

Demonstração. Seja $s : \mathbb{P}^n \to \mathcal{O}(d)$ uma seção e seja U_i um aberto básico de $\mathbb{P}^n$. Então, $S|_{U_i}(x) = (x, F_i(x)/x_i^{n_i})$, onde $F_i \in k[X_0, \ldots, X_n]$ é homgêneo de grau n_i e X_i não divide F_i. Além disso, vimos na demonstração do Lema 1.41 que, para $x \in U_i \cap U_j$,vale

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, F_i(x)/x_i^{n_i}) = (x, (x_i/x_j)^d F_i(x)/x_i^{n_i}) \Rightarrow (x, F_j(x)/x_j^{n_j}) = (x, (x_i/x_j)^d F_i(x)/x_i^{n_i})$$

$$\Rightarrow F_i(x)x_i^{d-n_i} = F_j(x)x_j^{d-n_j}.$$

Observe que supondo que X_i não divide F_i temos que $n_i \leq d$ para todo i. Logo,

$$F_iX_i^{d-n_i} - F_jX_j^{d-n_j} = 0 \text{ em } U_i \cap U_j \Rightarrow F_iX_i^{d-n_i} - F_jX_j^{d-n_j} = 0 \text{ em } \mathbb{P}^n.$$

Definindo $H_s = F_iX_i^{d-n_i} = F_jX_j^{d-n_j}$, temos que H_s é homgêneo de grau d, $H_s(x)/x_i^d = F_i(x)x_i^{n_i}$, para todo $x \in U_i$ e $H_s(x)/x_j^d = F_j(x)x_j^{n_j}$, para todo $x \in U_j$. Logo, $s|_{U_i}(x) = (x, H_s(x)/x_i^d)$, para todo $i = 0, \ldots, n$. É fácil ver que a aplicação

$$\begin{array}{rll} T: & H^0(\mathcal{O}(d)) & \to S_d \\ & s & \mapsto H_s \end{array}$$

é um isomorfismo. □

Proposição 1.46. *As transformações lineares da sequência (1.9) ou equivalentemente da sequência*

$$0 \to S_{d-1} \xrightarrow{\lambda} S_d^{\oplus n+1} \xrightarrow{\mu} T\mathbb{P}^n(d-1) \to 0$$

são dados por $\lambda(F) = (X_0F, \ldots, X_nF)$ *e* $\mu(F_0, \ldots, F_n) = F_0\dfrac{\partial}{\partial X_0} + \ldots + F_n\dfrac{\partial}{\partial X_n}$.

Demonstração. Usando as definições dos fibrado envolvidos temos que

$$\mathcal{O}(d-1) = \{[v, z]; v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}, z \in \mathbb{C}\} \text{ onde } [v, z] = \{(tv, t^{d-1}z); t \in \mathbb{C}^*\},$$

$$\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1} = \{[v, w]; v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}, w \in \mathbb{C}^{n+1}\} \text{ onde } [v, w] = \{(tv, t^d w); t \in \mathbb{C}^*\},$$

onde $[v, w]$ está identificado com $(([v], w_0), \ldots, ([v], w_n))$ e $\widetilde{\Phi} : \mathcal{O}(d-1) \to \mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}$ é tal que $\widetilde{\Phi}([v, z]) = [v, zv]$. Logo, dada $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \simeq S_{d-1}$, existe $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogêneo de grau $d-1$ tal que, para todo $[v] \in U_i$, $s([v]) = ([v], F(v)/v_i^{d-1})$ e portanto

$$\begin{aligned} \lambda(s)([v]) &= \widetilde{\Phi}(\psi_i^{-1}([v], F(v)/v_i^{d-1})) = \widetilde{\Phi}([v], F(v)v) \\ &= (([v], F(v)v_0/v_i^d), \ldots, ([v], F(v)v_n/v_i^d)) \\ &= (([v], (FX_0)(v)/v_i^d), \ldots, ([v], (FX_n)(v)/v_i^d)). \end{aligned}$$

Veja (1.3) para a definição de ψ_i. Então, $\lambda(s) \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)^{n+1}) \simeq S_d^{\oplus n+1}$ é dada por $(FX_0, \ldots, FX_n)$, ou equivalentemente, $\lambda(F) = (FX_0, \ldots, FX_n)$.

Além disso,

$$T\mathbb{P}^n(d-1) = \{[v, D_w([v])]; v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}, D_w([v]) \in T_{[v]}\mathbb{P}^n\},$$

onde $[v, D_w([v])] = \{(tv, t^{d-1}D_w([v])); t \in \mathbb{C}^*\}$, $\widetilde{\psi} : \mathcal{O}(d)^{\oplus n+1} \to T\mathbb{P}^n(d-1)$, é tal que $\widetilde{\psi}([v, w]) = [v, D_{d\pi_v(w)}([v])]$ e, dada $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \simeq S_{d-1}$, existem $F_0, \ldots, F_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogêneos de grau d tais que, para todo $[v] \in U_i$,

$$\begin{aligned}
\mu(s)([v]) &= \widetilde{\psi}(\psi_i^{-1}(([v], F_0(v)/v_i^d), \ldots, ([v], F_n(v)/v_i^d)) = \widetilde{\psi}([v, (F_0(v), \ldots, F_n(v))]) \\
&= [v, D_{d\pi_v(F_0(v), \ldots, F_n(v))}([v])] \\
&= [v, \textstyle\sum_{i=0}^n F_j(v)\dfrac{\partial}{\partial X_j} \mid_v) = [v, \textstyle\sum_{i=0}^n (F_j\dfrac{\partial}{\partial X_j}) \mid_v].
\end{aligned}$$

Denotando $\mu(s) = \mu(F_0, \ldots, F_n)$ por $\sum_{i=0}^n (F_j\dfrac{\partial}{\partial X_j})$, o resultado segue. □

Segue da Proposição 1.46 que um campo vetorial de grau d em $\mathbb{P}^n$ pode ser escrito em coordenadas homogêneas na forma

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial X_0} + \ldots + F_n\frac{\partial}{\partial X_n}, \tag{1.10}$$

onde $F_0, \ldots, F_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ são polinômios homogêneos de grau d satisfazendo a relação

$$X_0F_0 + \ldots + X_nF_n = 0.$$

A expressão (1.10) é chamada *expressão global* do campo $\mathcal{X}$.

Para obtermos uma expressão do campo $\mathcal{X}$ no aberto principal U_i, escrevemos $[v] = [x_0/x_i : \ldots : 1 : \ldots : x_n/x_i] \in U_i$. Então, como derivação em $A(U_i) = k[y_1, \ldots, y_n]$, onde $y_1 = X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}([v])(f(y_1, \ldots, y_1)) &= \textstyle\sum_{j=0}^n F_j\left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right)\dfrac{\partial}{\partial X_j} \mid_v f(y_1, \ldots, y_n) \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^n F_j\left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right)\left(\textstyle\sum_{k=1}^n \dfrac{\partial}{\partial y_k}f(y_1, \ldots, y_n)\dfrac{\partial y_k}{\partial X_j} \mid_v\right) \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i} F_j\left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right)\left(\dfrac{1}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_j}f(y_1, \ldots, y_n)\right) \\
&+ F_i\left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right)\left(-\dfrac{x_j}{x_i^2}\dfrac{\partial}{\partial y_j}f(y_1, \ldots, y_n)\right)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{X} \mid_{U_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{x_i}F_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) - \frac{x_j}{x_i^2}F_i\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Sejam $f_j(y_1,\ldots,y_n) = F_j(x_0/x_i,\ldots,x_n/x_i)$, para $j = 0,\ldots,n$, a desomogeinização de F_j com respeito a x_i, então

$$\mathcal{X}\mid_{U_i} = \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}(f_j(y_1,\ldots,y_n) - y_j f_i(y_1,\ldots,y_n))\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Representaremos o campo $\mathcal{X}$ em U_i simplesmente por

$$\mathcal{X}\mid_{U_i} = \sum_{j=1}^{n}(f_j(y_1,\ldots,y_n) - y_j f_i(y_1,\ldots,y_n))\frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{1.11}$$

A expressão (1.11) é chamada *expressão local* do campo $\mathcal{X}$ em U_i.

Definição 1.47. Seja $\mathcal{X}$ um campo de vetores em $\mathbb{P}^n$. Dizemos que um ponto $p \in U_i$ é uma singularidade de $\mathcal{X}$ se anular a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_i.

É fácil ver que a definição anterior não depende do aberto U_i tal que $p \in U_i$.

Exemplo 1.48 (Forma global e local de um campo vetorial em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$)**.** Chamamos de forma global de um campo vetorial $\mathcal{X}$ de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o campo escrito na forma

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2} \tag{1.12}$$

onde $F_0, F_1, F_2 \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ são polinômios homogêneos grau d satisfazendo a relação $z_0F_0 + z_1F_1 + z_2F_2 = 0$.

De acordo com (1.11) as expressões locais do campo vetorial (1.12) nos abertos U_0, U_1 e U_2 são:

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}$$

onde $x = \frac{z_1}{z_0}$ e $y = \frac{z_2}{z_0}$ são coordenadas locais em U_0 e $f_i(x,y) = F_i(1,x,y)$.

$$\mathcal{X}_{U_1} = (f_0 - xf_1)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_1)\frac{\partial}{\partial y}$$

onde $x = \frac{z_0}{z_1}$ e $y = \frac{z_2}{z_1}$ são coordenadas locais em U_1 e $f_i(x,y) = F_i(x,1,y)$.

$$\mathcal{X}_{U_2} = (f_0 - xf_2)\frac{\partial}{\partial x} + (f_1 - yf_2)\frac{\partial}{\partial y}$$

onde $x = \frac{z_0}{z_2}$ e $y = \frac{z_1}{z_2}$ são coordenadas locais em U_2 e $f_i(x,y) = F_i(x,y,1)$.

1.7 1-formas diferenciais em $\mathbb{P}^n$

Analogamente ao que fizemos para campos de vetores, definimos uma $1-$*forma* em uma variedade X como sendo uma correspondência ω que associa a cada ponto $x \in X$ um funcional $\omega(x) \in \Omega_x(X) := (T_xX)^*$, onde $(T_xX)^*$ é o espaço vetorial dual de T_xX.

Estudaremos $1-$formas polinomiais, isto é, tais que a correspondência acima depende polinomialmente de x. Alguns dos resultados apresentados se estendem naturalmente para 1-formas racionais.

Vimos na definição de espaço tangente a $\mathbb{P}^n$ em ponto $[v] \in U_i$ que se $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ for carta local em U_i e $y = (y_1, \dots, y_n) = \varphi_i([v])$, então

$$T_{[v]}\mathbb{P}^n = Der_k(k[y_1, \dots, y_n], k) = \langle \frac{\partial}{\partial y_1} |_y, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} |_y \rangle.$$

Seja $\{dy_1|_y, \dots, dy_n|_y\}$ base de $(T_{[v]}\mathbb{P}^n)^*$, dual de $\{\frac{\partial}{\partial y_1} |_y, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} |_y\}$, isto é,

$$dy_j|_y \left(\frac{\partial}{\partial y_i}|_y\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i, \\ 1 & \text{se } j = i. \end{cases}$$

Então, uma $1-$forma ω em $U_i \subset \mathbb{P}^n$ é dada por

$$\omega |_{U_i} = f_1(y_1, \dots, y_n)dy_1 + \dots + f_n(y_1, \dots, y_n)dy_n, \tag{1.13}$$

com $f_j(y_1, \dots, y_n) \in k[y_1, \dots, y_n]$.

No que segue, vamos procurar por uma expressão global para uma 1-forma em $\mathbb{P}^n$.

Dado $v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, seja $\{dX_0|_v, \dots, dX_n|_v\}$ base de $(T_v\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})^*$, dual da base

$$\{\frac{\partial}{\partial X_0} |_v, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} |_v\}$$

de $T_v\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, e seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n$ a projeção canônica. Supondo sem perda de generalidade que $[v] \in U_0$, temos que

$$\begin{array}{rccl} d\pi_v : & T_v\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \to & T_{[v]}\mathbb{P}^n \\ & \frac{\partial}{\partial X_0} |_v & \mapsto & \sum_{j=1}^n (-\frac{v_j}{v_0^2}) \frac{\partial}{\partial y_j} |_y \\ & \frac{\partial}{\partial X_i}|_v & \mapsto & (\frac{1}{v_0})\frac{\partial}{\partial y_i}|_y. \end{array}$$

Então, $dy_k|_y \circ d\pi_v$ é um funcional linear em $T_v\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ tal que

$$dy_k|_v \circ d\pi_v(\frac{\partial}{\partial X_i}) = \begin{cases} -\frac{v_k}{v_0^2} & \text{se } i = 0, \\ \frac{1}{v_0} & \text{se } i = k, \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \Rightarrow dy_k|_y \circ d\pi_v(\frac{\partial}{\partial X_i}) = -\frac{v_k}{v_0^2}dX_0|_v + \frac{1}{v_0}dX_k|_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\omega([v])\circ d\pi_v &= f_1(v_1/v_0,\ldots,v_n/v_0)dy_1|_y\circ d\pi_v+\ldots+f_n(v_1/v_0,\ldots,v_n/v_0)dy_n|_y\\ &= \frac{1}{v_0}\left(-\textstyle\sum_{j=1}^n \frac{v_j}{v_0}f_j(v_1/v_0,\ldots,v_n/v_0)\right)dX_0|_v+\textstyle\sum_{j=1}^n f_j(v_1/v_0,\ldots,v_n/v_0)dX_j|_v.\end{aligned}$$

Seja $d = max_{\{j=1,\ldots,n\}}\{grau(f_j(y_1,\ldots,y_n))\}$. Definimos

$$A_0(X_0,\ldots,X_n)=X_0^{d+1}\left(-\sum_{j=1}^n\frac{X_j}{X_0}f_j(\frac{X_1}{X_0},\ldots,\frac{X_n}{X_0})\right)\text{ e}$$

$$A_j(X_0,\ldots,X_n)=X_0^{d+1}f_j(\frac{X_1}{X_0},\ldots,\frac{X_n}{X_0}),\ \forall\ j=1,\ldots,n.$$

Então, $A_i(X_0,\ldots,X_n)\in k[X_0,\ldots,X_0]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ tais que

$$X_0A_0+\ldots+X_nA_n=0$$

e

$$\omega([v])\circ d\pi_v=\frac{1}{v_0^{d+2}}\sum_{j=0}^n A_j(1,v_1/v_0,\ldots,v_n/v_0)dX_j|_v.$$

Motivados pela igualdade acima, escrevemos

$$\omega = A_0dX_0+\ldots+A_ndX_n \tag{1.14}$$

e chamamos (1.14) de *uma expressão global* da $1-$forma ω.

Definição 1.49. Dado uma $1-$forma ω em $\mathbb{P}^n$, um ponto $p\in U_i$, é uma singularidade de ω se p anula a expressão de ω em U_i.

Exemplo 1.50 (Expressão global e local de uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$)**.** A forma global de uma 1-forma em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma expressão da forma

$$\omega = A_0dz_0+A_1dz_1+A_3dz_3 \tag{1.15}$$

onde $A_0,A_1,A_2\in\mathbb{C}[T_0,T_1,T_2]$ são polinômios homogêneos e $z_0A_0+z_1A_1+z_2A_2=0$.

De acordo com (1.13) as expressões locais da 1-forma (1.15) nos abertos U_0,U_1 e U_2 são:

$$\omega|_{U_0}=a_1dx+a_2dy$$

onde $a_1=A_1(1,x,y)$ e $a_2=A_2(1,x,y)$,

$$\omega|_{U_1} = b_1 dx + b_2 dy$$

onde $a_1 = A_0(x, 1, y)$ e $b_2 = A_2(x, 1, y)$,

$$\omega|_{U_2} = c_1 dx + c_2 dy$$

onde $c_1 = A_0(x, y, 1)$ e $c_2 = A_1(x, y, 1)$.

1.7.1 Produto exterior de 1-formas

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo k e sejam $T_1, T_2 : \mathbb{A}^n \to k$ dois funcionais lineares. O produto exterior de T_1 e T_2, denotado por $T_1 \wedge T_2$, é a aplicação bilinear dada por

$$(T_1 \wedge T_2)(u, v) = \det \begin{bmatrix} T_1(u) & T_2(u) \\ T_1(v) & T_2(v) \end{bmatrix} = T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u).$$

Decorrem imediatamente das propriedades de determinantes que:

i) $T_1 \wedge (aT_2 + T_3) = a(T_1 \wedge T_2) + (T_1 \wedge T_3)$,

ii) $T_2 \wedge T_1 = -(T_1 \wedge T_2)$,

iii) $T \wedge T = 0$.

Fixada uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, sejam $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ dois vetores em V. Então,

$$(T_1 \wedge T_2)(u, v) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)(T_1 \wedge T_2)(e_i, e_j).$$

Ou ainda, se $\{de_1, \ldots, de_n\}$ for uma base de V^* (espaço dual de V), segue da propriedade (i) do produto exterior que, para $T_1 = \sum_{i=1}^n a_i de_i$ e $T_2 = \sum_{i=1}^n b_i de_i$,

$$(T_1 \wedge T_2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) de_i \wedge de_j.$$

Definição 1.51. Dadas duas 1-formas ω_1, ω_2 em $\mathbb{P}^n$, o produto exterior de ω_1 com ω_2 é a aplicação $\omega_1 \wedge \omega_2$ definida por $(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p)$ e será chamada de uma *2-forma*.

As propriedades do produto exterior de dois funcionais lineares são transportadas de maneira natural para o produto exterior de duas 1-formas; assim, valem $\omega \wedge \omega = 0$, $\omega_2 \wedge \omega_1 = -(\omega_1 \wedge \omega_2)$ e $\omega_1 \wedge (a\omega_2 + \omega_3) = a(\omega_1 \wedge \omega_2) + (\omega_1 \wedge \omega_3)$.

Exemplo 1.52. Em $\mathbb{C}^2$, se $\omega_1 = a_1dx + a_2dy$ e $\omega_2 = b_1dx + b_2dy$ são duas formas polinomiais, então

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= (a_1b_1)(dx \wedge dx) + (a_1b_2)(dx \wedge dy) + (a_2b_1)(dy \wedge dx) + (a_2b_2)(dy \wedge dy)\\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)(dx \wedge dy),\end{aligned} \tag{1.16}$$

uma vez que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ e $dy \wedge dx = -(dx \wedge dy)$. Logo, toda 2-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$ é da forma $g(x,y)dx \wedge dy$, para algum polinômio $g \in k[x,y]$.

1.8 Equações diferenciais lineares com autovalores conjugados

Seja A uma matriz de ordem 2 com entradas reais. Suponhamos que A possui autovalores complexos. Sendo A uma matriz real tais autovalores são conjugados. Sejam $\lambda = a + bi$ e $\overline{\lambda} = a - bi$ tais autovalores, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Suponhamos ainda que $u + vi$ é um autovetor de A correspondente à λ, onde u e v são vetores de $\mathbb{R}^2$. Observamos ainda que os vetores u, v são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos a equação diferencial $\dot{X} = AX$, onde $X = (x, y)$. Por definição

$$A(u + vi) = \lambda(u + vi) = (au - bv) + (bu + av)i.$$

Considerando que A define um operador $\mathbb{C}$-linear de $\mathbb{C}^2$, então teremos

$$A(u) + A(v)i = (au - bv) + (bu + av)i,$$

ou seja, $A(u) = au - bv$ e $A(v) = bu + av$. Portanto, se denotarmos por $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vetores u e v, então

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$A(u - vi) = A(u) - A(v)i = (a - bi)(u - vi),$$

ou seja, $u - vi$ é um autovetor de A correspondente ao autovalor $\overline{\lambda}$. Portanto, se P é a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores $u + vi$ e $u - vi$ e

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix},$$

então $P^{-1}AP = B$. Portanto a equação diferencial $\dot{X} = AX$ é equivalente a equação diferencial $\dot{Y} = BY$, onde $Y := P^{-1}X$.

As soluções complexas de $\dot{Y} = BY$ são dadas por, ver [19],

$$Y(t) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\overline{\lambda} t}), \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Logo as soluções complexas de $\dot{X} = AX$ são dadas por

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t}(u + iv) + c_2 e^{\overline{\lambda} t}(u - iv). \tag{1.17}$$

Reescrevendo a equação (1.17) na forma

$$X(t) = e^{at}\{(c_1 + c_2)[(\cos bt)u - v(sen bt)] + (c_1 - c_2)[v(\cos bt) + u(sen bt)]i\}, \tag{1.18}$$

e considerando-se $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$ e $c_1 = c_2 = -\dfrac{1}{2}i$, obtemos que

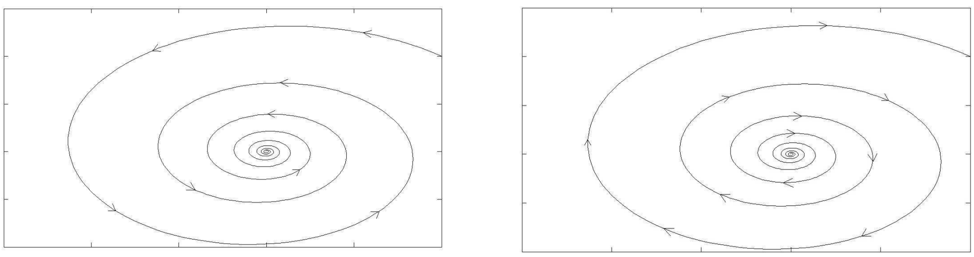
$$\begin{cases} X_1(t) &= e^{at}(\cos bt)u - e^{at}(sen bt)v \\ X_2(t) &= e^{at}(\cos bt)v + e^{at}(sen bt)u \end{cases}$$

são soluções reais de $\dot{X} = AX$.

Observamos ainda que as soluções acima podem ser escritas na forma

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & -\text{sen}\, bt \\ \text{sen}\, bt & \cos bt \end{bmatrix}.$$

O retrato de fase do sistema acima é mostrado na figura abaixo para o caso de $b > 0$.



(a) $a < 0$ (b) $a > 0$

Figura 1.2: Foco

Quando $a < 0$ a origem é chamada de foco estável e quando $a > 0$ de *foco instável.* Notemos que as soluções da figura (a) se aproximam da origem quando $t \to \infty$ e $|\theta(t)| \to \infty$ quando $t \to \infty$, onde $\theta(t)$ é o ângulo que o vetor $y(t)$ forma com o eixo horizontal.

1.9 Um pouco de Sistemas Dinâmicos e EDO

Nesta seção enunciaremos algumas definições e resultados de Sistemas Dinâmicos, assim como da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que serão uteis ao longo deste trabalho. Alguns dos resultados apresentados valem em $\mathbb{R}^n$ mas como trabalharemos no plano, optamos por enunciá-los em $\mathbb{R}^2$.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{X} = f(X), \tag{1.19}$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável e U é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

Na seção 1.8 estudamos os sistemas da forma (1.19) com f sendo uma função linear. Nesta seção estudaremos os demais casos, ou seja, os sistemas (1.19) tais que f não é uma função linear. Tais sistemas são ditos não lineares.

Como, para cada $p \in U$, os espaços T_pU e $T_p\mathbb{R}^2$ são iguais, podemos associar a função f a um campo vetorial em U. Isto é feito da seguinte forma, em cada ponto $p \in U$ consideramos o vetor $f(p)$.

Definição 1.53. Uma solução do sistema (1.19), ou uma solução do campo f, é uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo contendo 0, satisfazendo a condição

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t)), \quad \text{para todo } t \in I. \tag{1.20}$$

Teorema 1.54 (Teorema Fundamental de Existência e Unicidade)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo $X_0 = (x_0, y_0)$ e f uma função definida em U. Se f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em U, então existe $a > 0$ tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{X} & = & f(X) \\ X(0) & = & X_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

tem uma única solução definida no intervalo $(-a, a)$.

Para uma explicação mais detalhada sobre o Teorema de Existência e Unicidade ver [10], capitulo 1, seção 1.

Dado um sistema de equações diferenciais que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.54 e um ponto $X_0 = (x_0, y_0) \in U$, a solução que satisfaz a condição $X(0) = X_0$ será denotada por $\varphi^t(x_0, y_0)$ ou por $\varphi_{x_0,y_0}(t)$.

Segue da definição de solução que o vetor tangente a curva solução, $(x'(t), y'(t))$, é igual a $f(x(t), y(t))$.

Definição 1.55. Dado um ponto inicial X_0, seja $(-t, t+)$ o intervalo maximal de definição da solução de (1.21). O conjunto

$$\mathcal{O}(X_0) = \{\varphi^t(X_0) : t \in (-t, t+)\}$$

é chamado de órbita de X_0.

Um ponto p é chamado *ponto fixo*, ponto singular, ou ponto de equilíbrio, do sistema (1.19), se $f(p) = 0$, ou equivalentemente, se $\varphi^t(p) = p, \forall t \in (-t, t+)$.

Um ponto p é dito *ponto periódico,* se existe $T > 0$ tal que $\varphi^T(p) = p$ e $\varphi^t(p) \neq p$, se $0 < t < T$. O tempo $T > 0$, que satisfaz as condições acima, é chamado de *período da órbita.* A órbita de um ponto periódico p, de período $T > 0$, é chamada de *órbita periódica* de período T, ou órbita fechada.

Um ponto fixo p é chamado de *ponto hiperbólico* do sistema (1.19), se $\Re e(\lambda) \neq 0$, para todos os autovalores λ da matriz Jacobiana de f, denotada por $D_p f$.

Teorema 1.56 (Hartman-Grobman)**.** *Seja p um ponto fixo hiperbólico do sistema de equações diferenciais (1.19). Então existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo $h : V \to V$ tal que $\varphi^t(h(x)) = h(p + e^{tD_p f}(x - p))$, enquanto $p + e^{tD_p f}(x - p) \in V$. O homeomorfismo h preserva o sentido das órbitas e pode ser escolhido de forma a preservar a parametrização.*

Definição 1.57. A órbita de um ponto p é dita *atratora* se satisfaz as seguintes condições:

(a) Dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $||x - p|| < \delta$, então $||\varphi^t(x) - \varphi^t(p)|| < \varepsilon$.

(b) Existe $\delta_1 > 0$ tal que se $||x - p|| < \delta_1$, então $||\varphi^t(x) - \varphi^t(p)|| \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Observação 1.58. A órbita de um ponto fixo hiperbólico é atratora se a parte real de todos autovalores de $D_p f$ é negativa.

Definição 1.59. Um ponto y é um ω-*limite* de um ponto p, por φ^t, se existe uma sequência $\{t_k\}$, com $t_k \to \infty$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} ||\varphi^{t_k}(p) - y|| = 0.$$

O conjunto de todos os pontos que são ω-limites de p para φ^t é denotado por $\omega(p)$ ou $L_\omega(p)$ e é chamado de *conjunto ω-limite.*

Um ponto y para o qual existe uma sequência $\{t_k\}$, tal que $t_k \to -\infty$ e satisfaz as condições acima, é dito ser um *α-limite.*

Definição 1.60. Seja $f(x,y) = f_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + f_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^2$. Se f_1 e f_2 são funções diferenciáveis em um ponto (x_0,y_0), o divergente de f em (x_0,y_0) é definido como sendo

$$\operatorname{div}(f)(x_0,y_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Suponha $D \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo, e seja $D(t) = \varphi^t(D)$ e $V(t)$ o volume de $D(t)$. Então, segundo [9], pag 309, pelo Teorema de Liouville temos que

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} div f dx dy.$$

Teorema 1.61 (Critério de Bendixson)**.** *Seja o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = f(x)$ em $\mathbb{R}^2$. Se em uma região simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$ o divergente de f é diferente de zero e não muda de sinal, então o sistema não tem órbitas fechadas em D.*

Demonstração. Ver [10], pag44. □

1.10 Teoria de Integrabilidade de Darboux

Nesta seção introduziremos o conceito de integral primeira e apresentaremos alguns resultados que serão utilizados para demonstrarmos o Teorema de Integrabilidade de Darboux.

Sejam P e $Q \in \mathbb{C}[x,y]$ polinômios. Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{1.22}$$

Uma função holomorfa $\varphi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ é uma solução de (1.22) se, para qualquer $t \in U$, vale que

$$\varphi^{'}(t) = (P \circ \varphi(t), Q \circ \varphi(t)).$$

Observamos que o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, Teorema 1.54, é também válido, em $\mathbb{C}^2$, para o sistema de equações diferenciais (1.22).

Definição 1.62. Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante. Dizemos que F é uma *integral primeira* em U para o sistema de equações (1.22) se F for constante ao longo de todas as soluções holomorfas de (1.22) contidas em U.

Definição 1.63. Seja $F : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ cujas derivadas parciais estão definidas. Definimos a diferencial dF por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Pela definição dada na Seção 1.7 uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$ é dada por

$$\omega = a_1(x,y)dx + a_2(x,y)dy,$$

onde $\{dx_p, dy_p\}$ é a base dual de $(T_p\mathbb{C}^2)^*$ relativa a $\{\partial/\partial x|_p, \partial/\partial y|_p\}$, para todo $p \in \mathbb{C}^2$, e $a_1(x,y), a_2(x,y)$ são polinômios.

Podemos associar ao sistema de equações diferenciais (1.22) a 1-forma polinomial

$$\omega = -Q(x,y)dx + P(x,y)dy \tag{1.23}$$

e o campo vetorial

$$\mathcal{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.24}$$

Proposição 1.64. *Uma função holomorfa F é uma integral primeira para o sistema (1.22) se, e somente se,*

$$\omega \wedge dF = 0. \tag{1.25}$$

Demonstração. Observamos inicialmente que

$$\omega \wedge dF = \left(P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Sejam p um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\varphi(t)$ uma solução do sistema (1.22), definida em um intervalo I contendo 0, tal que $\varphi(0) = p$. Para cada $t \in I$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = & \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)), \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t))\right) \cdot \varphi'(t) = \\ = & P(\varphi(t))\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)) + Q(\varphi(t))\frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t)). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Se F é uma integral primeira do sistema (1.22), então como $F(\varphi(t)) = c$, para alguma constante c e portanto

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Portanto, considerando $t = 0$ e usando (1.26), concluímos que

$$P(p)\frac{\partial F}{\partial x}(p) + Q(p)\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0, \qquad \text{para todo ponto } p \in C.$$

Por outro lado, se vale (1.25), então segue de (1.26) que $dF(\varphi(t))/dt = 0$ para todo $t \in I$. Logo $F(\varphi(t)) = c$, para alguma constante c. Donde segue a afirmação.

$\square$

Suponhamos que os polinômios P e Q de (1.22) são tais que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y},$$

isto é, $d\omega = 0$. Neste caso, a integral

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega$$

está bem definida (ver [5], pag 24) e podemos considerar a função $F: \ \mathbb{C}^2 \ \to \ \mathbb{C}$, dada por

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega.$$

Segue então da Proposição 1.64 que F é uma integral primeira de (1.22).

Definição 1.65. Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $\mu : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante. Dizemos que μ é um fator de integração para o sistema (1.22) se

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y}$$

Notemos que μ é um fator de integração do sistema (1.22) se, e somente se, vale a relação $d(\mu\omega) = 0$, onde ω é a 1-forma associada ao sistema.

Definição 1.66. Dizemos que uma solução $\varphi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ de (1.22) é uma solução algébrica de (1.22), se existe um polinômio $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, não nulo, tal que $f(\varphi(t)) = 0$, para qualquer $t \in V$.

Definição 1.67. Seja C a curva algébrica plana definida por um polinômio não nulo $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Dizemos C é invariante por (1.22), se para qualquer solução

$$\varphi : D(0,r) \to \mathbb{C}^2$$

de (1.22) tal que $f(\varphi(0)) = 0$ tivermos que

$$f(\varphi(t)) = 0 \quad \forall t \in D(0,r), \tag{1.27}$$

onde $D(0,r) := \{t \in \mathbb{C}; |t| = r\}$.

Proposição 1.68. *Seja ω 1-forma dada em (1.23) e $\mathcal{X}$ o campo vetorial dado em (1.24). Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$ um polinômio. Existe um polinômio H tal que*

$$\omega \wedge df = fH \, dx \wedge dy$$

se, e somente se,

$$\mathcal{X}(f) := P(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = fL_f,$$

para algum polinômio $L_f \in \mathbb{C}[x,y]$.

Demonstração. Basta observarmos que

$$\omega \wedge df = \left(-Q\frac{\partial f}{\partial y} - P\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

□

Usaremos a notação $\theta_f := H\, dx \wedge dy$, quando as hipóteses do Teorema 1.68 forem satisfeitas.

Proposição 1.69. *Seja* $f \in \mathbb{C}[x,y]$ *um polinômio reduzido. A curva algébrica* $C = Z(f)$ *é invariante por (1.22) se, e somente se, existe um polinômio* L_f *tal que*

$$\mathcal{X}(f) := P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = L_f \cdot f. \tag{1.28}$$

Demonstração. Suponhamos que C é invariante por (1.22). Sejam p um ponto de C e $\varphi : D(0,r) \to \mathbb{C}^2$ a solução de (1.22) tal que $\varphi(0) = p$. Segue de (1.27) que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))\right) \cdot \varphi'(t) = 0, \quad \forall t \in D(0,r).$$

Como $\varphi'(t) = (P(\varphi(t)), Q(\varphi(t)))$, obtemos que

$$P(p)\frac{\partial f}{\partial x}(p) + Q(p)\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$$

Logo o polinômio $P\,\partial f/\partial x + Q\,\partial f/\partial y$ se anula em todos os pontos de C. Como f é reduzido, segue do Teorema dos Zeros de Hilbert que existe um polinômio L_f tal que

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = L_f f.$$

Suponhamos que a condição (1.28) é satisfeita. Seja φ uma solução de (1.22), definida em $D(0,r)$, tal que $f(\varphi(0)) = 0$. Então em $D(0,r)$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{d(f\circ\varphi)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi), \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\right) \cdot \varphi' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi), \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\right) \cdot (P(\varphi), Q(\varphi)) = \\ = P(\varphi)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi) + Q(\varphi)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)) = L_f(\varphi))f(\varphi).\end{aligned}$$

Donde segue que $f(\varphi(t)) = ae^{B(t)}$, onde $a \in \mathbb{C}$. Como $f(\varphi(0)) = 0$ segue que $a = 0$ e portanto $f(\varphi(t)) = 0$ para todo $t \in D(0,r)$. □

Definição 1.70. Dizemos que uma curva algébrica afim $C = Z(f)$ é invariante por uma 1-forma ω se C é invariante pelo sistema de equações diferencias associado a ω

Proposição 1.71. *Sejam $C_1 = Z(f_1), \ldots, C_n = Z(f_n)$ curvas algébricas invariantes por uma 1-forma polinomial ω. Se existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1\theta_{f_1} + \cdots + \alpha_n\theta_{f_n} = 0,$$

então ω admite uma integral primeira multivaluada da forma

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log(f_i).$$

Demonstração. Consideremos a 1-forma η dada por

$$\eta = \frac{\alpha_1}{f_1} df_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{f_n} df_n.$$

Um cálculo simples mostra que

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \omega \wedge \frac{df_i}{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \theta_{f_i} = 0.$$

Se mostramos que $\eta = dF$, para alguma função F, usando a Proposição 1.64, teremos que F é uma integral primeira de ω. Como

$$d\eta = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\alpha_i}{f_i}\right) \wedge df_i = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\alpha_i}{f_i^2} \, df_i \wedge df_i = 0,$$

segue de [5], pag 24 que

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \eta \tag{1.29}$$

é uma função bem definida e satisfaz a condição $\eta = dF$. Basta observamos agora que

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log(f_i).$$

□

Proposição 1.72. *Sejam $C_1 = Z(f_1), \ldots, C_n = Z(f_n)$ curvas algébricas invariantes por uma 1-forma polinomial ω. Se existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1\theta_{f_1} + \cdots + \alpha_n\theta_{f_n} = d\omega,$$

então a função multivaluada $\prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}$ é um fator de integração de ω.

Demonstração. Se tomarmos a 1-forma

$$\eta = \frac{\alpha_1}{f_1}df_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{f_n}df_n,$$

como visto na demonstração da Proposição 1.71, teremos que $d\eta = 0$. Usando a função F, dada em (1.29), definimos uma nova função multivaluada G por

$$G(x, y) \; = \; \exp(F(x, y)).$$

Então $dG = G\eta$ e

$$d(G\omega) = dG \wedge \omega + Gd\omega = G\eta \wedge \omega - G\eta \wedge \omega = 0,$$

pois

$$d\omega = \alpha_1\, \omega \wedge \frac{df_1}{f_1} + \cdots + \alpha_n\, \omega \wedge \frac{df_n}{f_n} = \left(\alpha_1\frac{df_1}{f_1} + ... + \alpha_n\frac{df_n}{f_n}\right) \wedge \omega = -\eta \wedge \omega.$$

Da igualdade $d(G\omega) = 0$, segue que G é um fator de integração de ω. Além disso

$$G(x, y) = \exp(F(x, y)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log(f_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}.$$

□

Corolário 1.73. *Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$ de grau d. Suponhamos que ω admite k curvas, $C_i = Z(f_i)$ com $i = 1, \ldots, k$, algébricas irredutíveis invariantes. Se $k > d(d+1)/2$, então ω tem uma integral primeira multivaluada da forma*

$$F = \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}.$$

Demonstração. Se f é um polinômio para o qual $\omega \wedge df = f\theta_f$, então θ_f tem grau menor ou igual a $d-1$. A dimensão do espaço vetorial dos polinômios em duas variáveis de grau menor ou igual a $d-1$ é igual a $d(d+1)/2$. Então, o espaço das 2-formas polinomiais de grau menor ou igual a $d-1$ tem dimensão igual a $d(d+1)/2$.

Sejam $Z(f_1), \ldots, Z(f_k)$ as k curvas algébricas invariantes por ω. Pela Proposição 1.68, para cada i, existe uma 2-forma θ_i satisfazendo a relação $\omega \wedge df_i = f_i\theta_i$. Logo, pelas observações acima, $\theta_1, \ldots, \theta_k$ são 2-formas linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}$. Portanto existem números complexos, não todos nulos, $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tais que

$$\alpha_1\theta_1 + \cdots + \alpha_k\theta_k = 0.$$

Pela Proposição 1.71 temos que

$$F = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log(f_i)$$

é uma integral primeira para ω. Como $d(exp(F)) = exp(F)dF$, segue que $\prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}$ é também uma integral primeira de ω. $\square$

Capítulo 2

Equações de Pfaff e Não Existencia de Soluções Algébricas

Neste capítulo $\mathbb{P}^r$ denotará o r-dimensional espaço projetivo sobre o corpo dos números complexos. Além disso, $z_0, ..., z_r$ denotarão as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^r$.

Convencionamos que a projetivização de uma curva C também será denotada por C.

Definição 2.1. Sejam $m \geq 1$ um inteiro. Uma *forma de Pfaff* de grau m em $\mathbb{P}^r$ é uma 1-forma

$$\omega = \sum_{i=0}^{r} P_i(z)dz_i,$$

onde os $P_i's$ são polinômios homogêneos, nulos ou de grau m, que satisfazem a relação

$$z_0P_0 + ... + z_rP_r = 0.$$

A equação $\omega = 0$ é chamada *equação algébrica de Pfaff* de grau m.

Trabalharemos ao longo do capítulo com a equação algébrica de Pfaff, de grau $m \geq 2$, em $\mathbb{P}^2$, dada por

$$(z_0^{m-1}z_2 - z_1^m)dz_0 + (z_1^{m-1}z_0 - z_2^m)dz_1 + (z_2^{m-1}z_1 - z_0^m)dz_2 = 0. \tag{2.1}$$

A forma de Pfaff da equação (2.1) esta associada ao seguinte campo vetorial de $\mathbb{P}^2$:

$$\mathcal{X} = z_2^{m-1}\frac{\partial}{\partial z_0} + z_0^{m-1}\frac{\partial}{\partial z_1} + z_1^{m-1}\frac{\partial}{\partial z_2} \tag{2.2}$$

De acordo com a Seção 1.6 do capítulo anterior, o campo vetorial (2.2) é dado localmente como segue:

$$\mathcal{X}\mid_{U_0} = (1 - xy^{m-1})\frac{\partial}{\partial x} + (x^{m-1} - y^m)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{onde} \quad x = \frac{z_1}{z_0},\ y = \frac{z_2}{z_0}; \tag{2.3}$$

$$\mathcal{X}\mid_{U_1}=(y^{m-1}-x^m)\frac{\partial}{\partial x}+(1-yx^{m-1})\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{onde} \quad x=\frac{z_0}{z_1},\, y=\frac{z_2}{z_1}; \tag{2.4}$$

$$\mathcal{X}\mid_{U_2}=(1-xy^{m-1})\frac{\partial}{\partial x}+(x^{m-1}-y^m)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{onde} \quad x=\frac{z_0}{z_2},\, y=\frac{z_1}{z_2}. \tag{2.5}$$

O campo vetorial (2.2) está associado ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = z_2^{m-1} \\ \dot{z}_1 = z_0^{m-1} \\ \dot{z}_3 = z_1^{m-1}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Da mesma forma, podemos considerar os sistemas de equações diferenciais associados as expressões locais de (2.2). Por exemplo, o sistema de equações diferenciais associado a (2.5) é

$$\begin{cases} \dot{x} = 1-xy^{m-1} \\ \dot{y} = x^{m-1}-y^m. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.1 Propriedades qualitativas do campo vetorial (2.2)

Para fazermos a análise qualitativa, muitas vezes é conveniente estudarmos o campo vetorial (2.2) na sua forma local. Então, em muitas passagens, quando julgarmos que está suficientemente claro de que estamos trabalhando sobre os abertos afins, ocultaremos a coordenada não nula que define o aberto no qual trabalharemos, fazendo-se todas as contas sobre $\mathbb{C}^2$, o conjunto imagem das cartas locais $\{U_i,\varphi_i\}_{i=0,1,2}$, descritas no exemplo (1.7).

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos singulares da equação de Pfaff dada em (2.1). Dado $(z_0:z_1:z_2)\in\mathcal{S}$ temos que

$$z_0^{m-1}z_2-z_1^m=z_1^{m-1}z_0-z_2^m=z_2^{m-1}z_1-z_0^m=0 \tag{2.8}$$

e $z_0z_2z_1\neq 0$. Fazendo $s:=m-1$, da relação (2.8), obtemos as seguintes relações

$$\frac{z_2^s}{z_0} \;=\; \frac{z_0^s}{z_1} \;=\; \frac{z_1^s}{z_2}. \tag{2.9}$$

Lema 2.2. *Consideremos o campo vetorial dado em (2.1). Sejam $\mathcal{S}$ o seu lugar singular, ζ uma (s^2+s+1)-raiz primitiva da unidade e $s=m-1$.*

(a) O conjunto $\mathcal{S}$ tem s^2+s+1 elementos e seus pontos são da forma

$$p_j=((\zeta^{s^2+1})^j:\zeta^j:1), \;\; \textit{para } j\in\{0,\dots,s^2+s\}.$$

(b) *Os autovalores das partes lineares do sistema de equações diferencias (2.7) em cada ponto p_j são*

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(-s-2+is\sqrt{3})\zeta^{sj} \quad e \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(-s-2-is\sqrt{3})\zeta^{sj}.$$

(c) *Para cada p_j, $j \in \{0, \ldots, s^2+s\}$, existem apenas duas curvas localmente analíticas invariantes pelo campo vetorial (2.5) e passando por p_j. Além disso elas se interceptam transversalmente.*

(d) *A reta $z_2 = 0$ de $\mathbb{P}^2$, denotada por l_∞, não é invariante pelo campo vetorial (2.2). As soluções de (2.2) interceptam l_∞ transversalmente, exceto a solução γ que passa pelo ponto $(1:0:0)$. Uma parte da parte real de γ (vista sobre o aberto afim U_0 que contém o ponto (1:0:0)) está contida no primeiro quadrante*

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ e } y > 0\}.$$

(e) *O único ponto singular do campo de vetores (2.5) em $\mathbb{R}^2$, p_0, é um foco estável e as soluções que começam no primeiro quadrante tendem a p_0. Nenhuma destas soluções é algébrica. Se s é um número par então nenhuma solução real de dimensão 1 é algébrica.*

Demonstração.

(a) Se $(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathcal{S}$ então, das relações (2.9), segue que

$$\frac{z_1^s}{z_2^s} = \frac{z_2}{z_0} \quad \text{e} \quad \frac{z_2^s}{z_0^s} = \frac{z_0}{z_1}. \tag{2.10}$$

Usando as relações (2.10) obtemos que

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{s^2+s+1} = \left(\frac{z_1^s}{z_2^s}\right)^{s+1} \cdot \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_2^s}{z_0^s} \cdot \frac{z_2}{z_0} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_0}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_0} = 1.$$

Portanto existe $j \in \{0, \ldots, s^2+s\}$ tal que $z_1/z_2 = \zeta^j$. Como

$$(z_0 : z_1 : z_2) = (z_0/z_2 : z_1/z_2 : 1)$$

e $z_0/z_2 = z_2^s/z_1^s$, então

$$(z_0 : z_1 : z_2) = ((\zeta^{-s})^j : \zeta^j : 1) = (\zeta^{s^2+1})^j : \zeta^j : 1).$$

(b) Consideremos a aplicação $g(x,y) = (1 - xy^s, x^s - y^{s+1})$. Então a matriz Jacobiana de g é

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} -y^s & -sxy^{s-1} \\ sx^{s-1} & -(s+1)y^s \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de Dg no ponto p_j são as soluções da equação

$$\det \begin{bmatrix} -\zeta^{js} - \lambda & -s\zeta^{-j} \\ s\zeta^{-js(s-1)} & -(s+1)\zeta^{js} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + (s+2)\zeta^{js}\lambda + (s^2+s+1)\zeta^{2js} = 0.$$

Portanto os autovalores de Dg em são

$$\lambda_1 = \frac{-(s+2)\zeta^{js} + s\zeta^{js}i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-(s+2)\zeta^{js} - s\zeta^{js}i\sqrt{3}}{2}. \tag{2.11}$$

(c) A demonstração detalhada deste item encontra-se em [20]. Nos permitimos ocultá-la pela grande quantidade de conceitos e resultados que teríamos que desenvolver, desviando-nos do nosso foco principal.

(d) Como $\mathcal{X}(z_2) = z_1^s$, segue da proposição 1.64 que l_∞ não é invariante pelo campo (2.2).

Uma solução de (2.2) é não transversal a l_∞, se em algum ponto da interseção desta solução com l_∞ tivermos que o espaço tangente é igual a l_∞. Seja φ uma solução de $\mathcal{X}$. No aberto U_0 a reta l_∞ é descrita por $y = 0$. Suponhamos que neste aberto φ se escreve na forma $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Então

$$\varphi'(t) = (1 - \varphi_1(t)\varphi_2^s(t), \varphi_1^s(t) - \varphi_2^{s+1}(t)).$$

Se $t_r \in \mathbb{R}$ é tal que $(\varphi_1(t_r), \varphi_2(t_r)) \in l_\infty \cap U_0$, então temos que $\varphi_2(t_r) = 0$ e $\varphi'(t_r) = (1, \varphi_1^s(t_r))$. Logo $\varphi'(t_r)$ é paralelo a $(1,0)$ se, e somente se, $\varphi_1(t_r) = 0$, ou seja, se, e somente se a solução passa por $(1:0:0)$. Já no aberto U_1, a reta l_∞ também é descrita por $y = 0$. O vetor tangente a φ em um ponto da interseção da solução com $l_\infty \cap U_1$ é da forma $\varphi'(t) = (-\varphi_0^{s+1}(t), 1)$. Portanto a solução em U_1 é transversal a l_∞.

Vamos agora estudar as soluções analíticas que passam pelo ponto $(1:0:0)$. Pela forma local do campo (2.2) em U_0, obtemos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^s - y^{s+1}}{1 - xy^s}. \tag{2.12}$$

Consideremos uma solução de (2.12) que passa pelo ponto $(0,0)$. Escrevendo $y(x)$ na forma

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \text{com } a_n \in \mathbb{C},$$

obtemos

$$\begin{aligned} y^s(x) &= x^s \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \\ y^{s+1}(x) &= x^{s+1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \\ xy^s(x) &= x^{s+1} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k, \end{aligned}$$

onde as constantes b_k's e c_k's dependem dos a_n's. Se $d_j \in \mathbb{C}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, são constantes tais que

$$(1 - xy^s) \sum_{j=0}^{+\infty} d_j x^j = 1,$$

então $d_0 = 1$ e $d_1 = 0, \ldots, d_s = 0$. Substituindo-se as relações acima na equação diferencial (2.12) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = (x^s - y^{s+1}) \cdot \frac{1}{1 - xy^s} &= \left(x^s - y^{s+1})(1 + \sum_{k=s+1}^{+\infty} d_k x^k \right) = \\ &= \left(x^s - x^{s+1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \right) \left(1 + x^{s+1} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k \right) = \\ &= x^s \left(1 - x \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right) \left(1 + x^s \sum_{k=1}^{+\infty} d_k x^k \right) = x^s + h(s), \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $h(s)$ é uma série de potências cujos termos tem grau maior ou igual a $s+1$. Logo y é da forma

$$y = \frac{x^{s+1}}{s+1} + \sum_{k=s+2}^{+\infty} e_k \, \frac{x^k}{k}, \qquad \text{onde}\, e_k \in \mathbb{C}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ temos

$$\Re e(y) = \frac{x^{s+1}}{s+1} \left[1 + \sum_{k=s+2}^{\infty} \Re e(e_k) \frac{x^{k-s-1}}{k} \right] > 0,$$

para x próximo de zero.

(e) Os autovalores de $Dg(1,1)$ são conjugados com parte real menor que zero. Logo, como visto na seção (1.8) do capitulo 1, p_0 é um foco estável da linearizarão de g , isto é, existe uma vizinhança em que as soluções da linearizarão convergem para p_0 e o fazem espiralando.

Note que, em U_2, $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = -y^{s+1}$, quando $x = 0$, e $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = -x^s$, quando $y = 0$. Então temos que na fronteira de Δ, o campo vetorial aponta para dentro de Δ. Logo, as soluções que começam em Δ não saem de Δ. Como o divergente de $\mathcal{X}\mid_{U_2}$ é igual a $-(s+2)y^s < 0$ para $y > 0$, então temos que todos os conjuntos limite são não errantes (ver [9] , pag 309). Por [1], Capítulo VI, Seção 2, os conjuntos limite não errantes de $\mathbb{R}^2$ podem ser divididos em:

(i) pontos fixos;

(ii) órbitas fechadas;

(iii) a união de pontos fixos e as trajetórias que os conecta.

Além disso, pelo critério de Bendixson (ver [10], pag44), quando o divergente não é identicamente nulo e não muda de sinal em Δ, o campo não possui órbitas fechadas em Δ. Temos que o único conjunto limite é p_0. Se s é par então o argumento acima é válido qualquer que seja y.

□

Corolário 2.3. *Seja C uma curva algébrica plana afim irredutível. Se C é invariante pelo campo vetorial (2.5), então são válidas as seguintes propriedades:*

(i) Os pontos singulares de C são todos nós.

(ii) C intercepta a reta l_∞ transversalmente.

Além disso, se $C_1, ..., C_p$ são curvas algébricas afins planas, distintas, irredutíveis e invariantes pelo campo vetorial dado em (2.5), então também são válidas as seguintes afirmações:

(iii) Quaisquer duas destas curvas, quando se interceptam, o fazem transversalmente.

(iv) Quaisquer três destas curvas não se interceptam num mesmo ponto.

(v) Quaisquer duas destas curvas não se interceptam no infinito, isto é, em l_∞.

Demonstração.

(i) Seja p um ponto singular de C. Então localmente existem pelo menos dois ramos de C passando por p. Portanto p é um ponto singular do campo vetorial. De fato, se p não fosse um ponto singular do campo vetorial, então, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais, existiria apenas uma solução do campo passando por p. A afirmação então segue diretamente do item (c) do Lema 2.2.

(ii) Do item (d) do Lema 2.2 temos que existe uma única solução que não intercepta l_∞ transversalmente e pelo item (e) deste mesmo Lema, temos que essa solução não é algébrica.

(iii) Seja p um ponto de $C_i \cap C_j$, com $i \neq j$. Usando-se o Teorema de existência e unicidade de soluções concluímos que p é um ponto singular do campo. Pelo item (c) do Lema 2.2, segue que as duas curvas interceptam-se transversalmente.

(iv) Suponhamos que exista um ponto p em $C_i \cap C_j \cap C_k$, com i, j e k distintos. Usando-se o Teorema de existência e unicidade de soluções concluímos que p é um ponto singular do campo. Pelo item (c) do Lema 2.2, concluímos que isso é um absurdo.

(v) Basta observarmos que o campo vetorial (2.5) não tem pontos singulares em l_∞.

□

2.2 Generalização do Teorema de Darboux

O objetivo desta seção é apresentar uma generalização do Teorema de Darboux que foi enunciado e provado na Seção 1.10.

A partir de agora sempre que tivermos um polinômio $A \in k[x,y]$ denotaremos o seu grau por a e o seu termo homogêneo de maior grau por A^a.

Definição 2.4. Sejam $C_1, ..., C_p$ curvas algébricas, onde $C_i = Z(F_i)$ e F_i é um polinômio. Dizemos que $C_1, ..., C_p$ são curvas genéricas se elas satisfazem as seguintes condições:

(i) Nenhuma delas tem pontos singulares.

(ii) O termo homogêneo de maior grau de cada F_i não tem fatores repetidos.

(iii) Quando duas curvas se interceptam elas o fazem transversalmente.

(iv) Quaisquer três destas curvas não se interceptam num mesmo ponto.

(v) Quaisquer duas destas curvas não se interceptam em l_∞, ou seja, dados dois polinômios F_i e F_j, $i \neq j$, os seus termos homogêneos de maior grau não tem fator irredutível em comum.

Lema 2.5. *Seja $f \in k[x,y]$ um polinômio e f^c o termo homogêneo de maior grau de f. Se f^c não tem fatores repetidos então* $\operatorname{mdc}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$.

Demonstração. Suponha que $\operatorname{mdc}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ é diferente de 1. Logo existe um polinômio A não constante tal que A divide $\frac{\partial f}{\partial x}$ e A divide $\frac{\partial f}{\partial y}$. Então A^a divide $\frac{\partial f^c}{\partial x}$ e $\frac{\partial f^c}{\partial y}$. Usando o Teorema de Euler, (ver[6]), obtemos que

$$cf^c = x\frac{\partial f^c}{\partial x} + y\frac{\partial f^c}{\partial y}.$$

Donde segue que A^a divide f^c.

Suponhamos que $A^a = h^m b$, onde o polinômio h é irredutível e $h \nmid b$. Como $A^a | f^c$, segue que $f^c = h^n g$, com $n \geq m$. Segue de $A^a | f^c_x$, $A^a | f^c_y$, $f^c_x = h^{n-1}(nh_x g + hg_x)$ e $f^c_y = h^{n-1}(nh_y g + hg_y)$ que $n \geq m+1$. Portanto os fatores irredutíveis de A^a são fatores múltiplos de f^c. O que é um absurdo.

□

Teorema 2.6. *Consideremos o campo vetorial polinomial, de grau m, dado por*

$$\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}.$$

Seja $C = Z(f)$ uma curva algébrica, não singular e de grau c. Suponhamos que C é invariante pelo campo $\mathcal{X}$.

(a) Se $\operatorname{mdc}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$, *então existem polinômios A, B e D tais que*

$$P = Af - D\frac{\partial f}{\partial y} \qquad Q = Bf + D\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.14}$$

(b) Se o termo de maior grau, f^c, de f não tem fatores repetidos, então P e Q tem a forma (2.14) *com grau de A e de B menores ou iguais a $m-c$ e grau de D menor ou igual a $m-c-1$. Além disso, se f^c não tiver x e nem y como fatores, então*

$\operatorname{grau}(A) \leq \operatorname{grau}(P) - c$,

$\operatorname{grau}(B) \leq \operatorname{grau}(Q) - c$ *e*

$\operatorname{grau}(D) \leq \min\{\operatorname{grau}(P), \operatorname{grau}(Q)\} - c + 1$.

Demonstração.

(a) Como por hipótese $f = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ não tem solução em $\mathbb{C}^2$, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, existem polinômios E, F e G tais que

$$E\frac{\partial f}{\partial x} + F\frac{\partial f}{\partial y} + Gf = 1. \tag{2.15}$$

A curva C ser invariante pelo campo $\mathcal{X}$, significa que existe um polinômio K tal que

$$\mathcal{X}f = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{2.16}$$

Multiplicando-se (2.15) por K e em seguida substituindo-se Kf por (2.16) obtemos

$$K = KE\frac{\partial f}{\partial x} + KF\frac{\partial f}{\partial y} + GP\frac{\partial f}{\partial x} + GQ\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.17}$$

Substituindo o K em (2.16) por sua expressão em (2.17) obtemos

$$[P - (KE + GP)f]\frac{\partial f}{\partial x} = -[Q - (KF + GQ)f]\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Como $\operatorname{mdc}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$ segue que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ divide } [P - (KE + GP)f].$$

Logo existe um polinômio D tal que

$$[P - (KE + GP)f] = -D\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad [Q - (KF + GQ)f] = D\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.18}$$

Denotando $KE + GP$ por A e $KF + GQ$ por B obtemos a expressão dada em (2.14).

(b) Como f^c não tem fatores repetidos, pelo Lema 2.5, segue que

$$\operatorname{mdc}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1.$$

Logo P e Q tem a forma (2.14). Sem perda de generalidade, vamos supor que $\operatorname{grau}(P) \leq \operatorname{grau}(Q)$.

Suponhamos inicialmente que x e y não dividem f^c. Seja g um polinômio mônico e irredutível tal que g divide f^c e g divide $\partial f^c/\partial x$. Da relação

$$x\frac{\partial f^c}{\partial x} + y\frac{\partial f^c}{\partial y} = cf^c$$

segue que $g = y$ ou g divide $\dfrac{\partial f^c}{\partial y}$. Como, por hipótese, f^c não tem fatores múltiplos e y não divide f^c segue que

$$\operatorname{mdc}\left(f^c, \frac{\partial f^c}{\partial x}\right) = 1. \tag{2.19}$$

Da mesma forma mostra-se que

$$\operatorname{mdc}\left(f^c, \frac{\partial f^c}{\partial y}\right) = 1. \tag{2.20}$$

Suponhamos que grau$(A) >$ grau$(P) - c$, caso contrário temos que o resultado é satisfeito. Então grau$(D) =$ grau$(A) + 1$. Comparando-se os termos de maior grau de de P em Q dados em (2.14) obtemos

$$A^a f^c = D^{a+1} \frac{\partial f^c}{\partial y}.$$

Segue de (2.20) que existe um polinômio F tal que

$$A^a = F\frac{\partial f^c}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad D^{a+1} = F f^c.$$

Em (2.14) trocando-se A por $A - F\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e D por $D - Ff$ obtemos

$$P = \left(A - F\frac{\partial f}{\partial y}\right) f - (D - Ff)\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

e os graus dos polinômios em consideração são reduzidos em pelo menos 1.

Continuamos este processo, e fazendo-se o mesmo tipo de redução em Q, se necessário, até obtermos as igualdades

$$\begin{aligned} P &= \left(A - F\frac{\partial f}{\partial y}\right) f - (D - Ff)\frac{\partial f}{\partial y}, \\ Q &= \left(B - E\frac{\partial f}{\partial x}\right) f + (D - Ef)\frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

com

$$\begin{cases} \operatorname{grau}\left(A - F\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \leq \operatorname{grau}(P) - c, \\ \operatorname{grau}(D - Ff) \leq \operatorname{grau}(P) - c + 1, \\ \operatorname{grau}\left(B - E\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \leq \operatorname{grau}(Q) - c, \\ \operatorname{grau}(D - Ef) \leq \operatorname{grau}(Q) - c + 1. \end{cases}$$

Para maior organização, vamos denotar $\left(A - F\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ por A,$\left(B - E\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ por B, $(D - Ff)$ por D e $(D - Ef)$ por E.

Como f é uma curva algébrica invariante então existe um polinômio K tal que

$$f\left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(E - D) = Kf.$$

Como f é irredutível, segue que f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não tem fatores em comum. Logo existe um polinômio R tal que

$$E - D = Rf.$$

Se grau$(E) <$ grau(D), então grau$(R) =$ grau$(D) - c$. Escrevemos

$$Af - D\frac{\partial f}{\partial y} = \left(A + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) f - E\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.22}$$

Denotando-se $A + R\partial f/\partial x$ novamente por A, as expressões dadas em (2.21) ficam da forma (2.14). Além disso, A, B e D tem os graus requeridos.

Se grau$(E)\ \geq$grau(D), então grau$(R)\ \leq$grau$(E) - c$. Escrevendo-se

$$Bf + E\frac{\partial f}{\partial x} = \left(B + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) f + D\frac{\partial f}{\partial x}$$

e denotando-se $B + R\dfrac{\partial f}{\partial x}$ novamente por B, o sistema (2.21) fica da forma (2.14) com A, B e D tendo os graus requeridos.

Agora vamos provar a primeira parte de (b). Note que mesmo que f^c não tenha fatores repetidos, f^c com $\dfrac{\partial f^c}{\partial x}$ ou f^c com $\dfrac{\partial f^c}{\partial y}$ podem ter x ou y como fator comum. Para contornar esta dificuldade podemos fazer uma mudança de variáveis, especificamente uma rotação de eixos, para que f^c não tenha x e nem y como fatores. Então aplicando o método acima ao novo sistema teremos que ele tem a forma 2.14 com os graus de A, B e D na forma da segunda parte de (b).

Afirmamos que mesmo sob mudança de coordenadas afins o sistema 2.14 preserva sua forma e o limite super do grau dos polinômios. De fato, consideremos a mudança de variáveis afins $u = ax + by$ e $v = -bx + ay$, com $a^2 + b^2 = 1$. Então

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = -b\dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases} \tag{2.23}$$

O campo $\mathcal{X}$ se escreve no sistema de coordenadas uv como

$$\overline{\mathcal{X}} = (aP + bQ)\frac{\partial}{\partial u} + (-bP + aQ)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Suponhamos que

$$\begin{aligned} aP + bQ &= A(u,v)f - D(u,v)\frac{\partial f}{\partial v}, \\ -bP + aQ &= B(u,v)f + D(u,v)\frac{\partial f}{\partial u}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

A partir das relações (2.23) e (2.24) obtemos

$$\begin{aligned} P &= (aA - bB)f - D\frac{\partial f}{\partial y}, \\ Q &= (bA + aB)f + D\frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

Donde segue a afirmação.

$\square$

Teorema 2.7. *Sejam $C_1 = Z(f)$ e $C_2 = Z(h)$ curvas algébricas distintas, irredutíveis e de graus c e d, respectivamente. Suponhamos que C_1 e C_2 são invariantes pelo campo vetorial*

$$\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y},$$

de grau m, e satisfazem as condições de generalidade (i) e (iii) da Definição 2.4.

(a) Se $\mathrm{mdc}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$ e $\mathrm{mdc}\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 1$, então P e Q podem ser escritos na forma

$$P = Afh - E\frac{\partial f}{\partial y}h - Rf\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad Q = Bfh + E\frac{\partial f}{\partial x}h + Rf\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{2.25}$$

(b) Se C_1 e C_2 satisfazem as condições de generalidade (ii) e (v), da Definição 2.4, então P e Q tem a forma (2.25) com os graus de A e B menores ou iguais a $(m - c - d)$ e os graus de E e R menores ou iguais a $(m - c - d + 1)$.

Demonstração. (a) Como C_1 e C_2 são curvas irredutíveis distintas pelo Teorema de Bézout elas se interceptam em um número finito de pontos. Como C_1 e C_2 são não singulares, em cada ponto em que se interceptam elas tem pelo menos uma das derivadas parciais diferente de zero. De forma similar ao que foi feito na prova do Teorema 2.6, mostra-se que as equações dadas em (2.25) tem a sua forma preservada quando fazemos uma rotação de eixos no plano afim, assim como a cota superior dos graus de A, B, E e F. Fazendo-se, se necessário, uma rotação de eixos no sistema de coordenadas inicial podemos supor que as derivadas parciais de f e h em relação a x e a y são diferentes de zero, em todos os pontos de interseção das curvas C_1 e C_2.

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, existem polinômios M_i, N_i e R_i com $i \in \{1, 2\}$ tais que

$$M_1 f + N_1 h + R_1 \frac{\partial h}{\partial y} = 1, \qquad M_2 f + N_2 h + R_2 \frac{\partial f}{\partial y} = 1. \tag{2.26}$$

Usando o Teorema 2.6 podemos escrever P nas formas

$$P = A_1 f - E_1 \frac{\partial f}{\partial y} = G_1 h - F_1 \frac{\partial h}{\partial y}, \tag{2.27}$$

onde A_1, E_1, G_1 e F_1 são polinômios.Donde segue que

$$F_1 \frac{\partial h}{\partial y} = G_1 h - A_1 f + E_1 \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.28}$$

Multiplicando-se a primeira equação de (2.26) por F_1 e usando-se (2.28) obtemos

$$\begin{aligned} F_1 = &\ (F_1 M_1) f + (N_1 F_1) h + (R_1 F_1) \frac{\partial h}{\partial y} \\ = &\ (F_1 M_1) f + (N_1 F_1) h + (R_1 G_1) h - (R_1 A_1) f + R_1 E_1 \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Denotando-se $(F_1 M_1 - R_1 A_1)$ por S, $(N_1 F_1 + R_1 G_1)$ por T e $(R_1 E_1)$ por U, teremos

$$F_1 = Sf + Th + U \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.29}$$

Substituindo-se a expressão de F_1, dada em (2.29), na última igualdade de (2.27), obtemos

$$\left(A_1 + S \frac{\partial h}{\partial y}\right) f + \left(-G + T \frac{\partial h}{\partial y}\right) h + \left(-E_1 + U \frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2.30}$$

Multiplicando-se a segunda equação de (2.26) por $(-E_1 + U \frac{\partial h}{\partial y})$, e a equação (2.30) por $-R_2$ e somando-as obtemos

$$-E_1 + U \frac{\partial h}{\partial y} = Vf + Wh, \tag{2.31}$$

onde V e W são polinômios. Substituindo-se (2.31) em (2.30), temos que

$$\left(A_{1+}S\frac{\partial h}{\partial y}+V\frac{\partial f}{\partial y}\right)f=\left(G_1-T\frac{\partial h}{\partial y}-W\frac{\partial f}{\partial y}\right)h. \tag{2.32}$$

Como f e h são irredutíveis e distintos, existe um polinômio K tal que

$$A_1+S\frac{\partial h}{\partial y}+V\frac{\partial f}{\partial y}=Kh \qquad G_1-T\frac{\partial h}{\partial y}-W\frac{\partial f}{\partial y}=Kf. \tag{2.33}$$

Substituindo a expressão de E_1 obtida em (2.31) e a de A_1 obtida em (2.33) em (2.27), chegamos a igualdade

$$P=Kfh-Sf\frac{\partial h}{\partial y}+W\frac{\partial f}{\partial y}h-U\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{2.34}$$

De forma similar, prova-se que existem polinômios K', S', W' e U' tais que

$$Q=K'fh+S'f\frac{\partial h}{\partial x}-W'\frac{\partial f}{\partial x}h+U'\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2.35}$$

Como C_1 é invariante por $\mathcal{X}$, segue que existe um polinômio K_c tal que

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}=K_cf. \tag{2.36}$$

Substituindo-se as relações (2.34) e (2.35) em (2.36) teremos

$$\begin{aligned} K_cf = \;& f\left[h\left(K\frac{\partial f}{\partial x}+K'\frac{\partial f}{\partial y}\right)-S\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+S'\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right]+ \\ &+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\left[h(W-W')-U\frac{\partial h}{\partial y}+U'\frac{\partial h}{\partial x}\right]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Como f é irredutível e os graus de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são menores do que o grau de f, concluimos que f não divide nem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e nem $\frac{\partial f}{\partial y}$. Logo existe um polinômio Z tal que

$$h(W-W')-U\frac{\partial h}{\partial y}+U'\frac{\partial h}{\partial x}=Zf. \tag{2.38}$$

Substituindo-se a expressão $hW-U\frac{\partial h}{\partial y}$, obtida em (2.38), em (2.34), temos que

$$P=Kfh-Sf\frac{\partial h}{\partial y}+W'\frac{\partial f}{\partial y}h-U'\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+Zf\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.39}$$

Sendo C_2 invariante por $\mathcal{X}$ temos que existe um polinômio K_d tal que

$$P\frac{\partial h}{\partial x}+Q\frac{\partial h}{\partial y}=K_dh. \tag{2.40}$$

Substituindo-se (2.35) e (2.39) em(2.40), teremos

$$\begin{aligned} K_d h = \; & h\left[f\left(K\frac{\partial h}{\partial x}+K'\frac{\partial h}{\partial y}\right)+W'\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] \\ & +\frac{\partial h}{\partial x}\left[f\frac{\partial h}{\partial y}(-S+S')+U'\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+Zf\frac{\partial f}{\partial y}\right]. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Como h e $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ são primos entre si, existe um polinômio M tal que

$$f\frac{\partial h}{\partial y}(-S+S')+U'\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+Zf\frac{\partial f}{\partial y}=Mh. \tag{2.42}$$

Por hipótese, as curvas C_1 e C_2 são transversais, ou seja, seus espaços tangentes nos pontos de interseção não são paralelos. Logo os vetores gradientes nestes pontos são linearmente independentes e teremos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\neq 0, \qquad \text{em } C_1\cap C_2.$$

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, existem M_3, N_3 e R_3 tais que

$$M_3 f+N_3 h+R_3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)=1. \tag{2.43}$$

Multiplicando-se (2.42) por R_3, (2.43) por U' e subtraindo-se as equações, concluímos que U' pertence ao ideal gerado por f e h, ou seja, $U'=If+Jh$, onde I e J são polinômios. Substituindo-se em (2.42) teremos

$$\begin{aligned} & f\left[I\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}(-S+S')+Z\frac{\partial f}{\partial y}\right]+ \\ & +h\left[J\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)-M\right]=0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Como f e h são irredutíveis e distintos, existe um polinômio G tal que

$$\begin{aligned} & M=J\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+Gf, \\ & I\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}(-S+S')+Z\frac{\partial f}{\partial y}=Gh. \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$Z\frac{\partial f}{\partial y}-S\frac{\partial h}{\partial y}=Gh-I\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial h}{\partial y}S'. \tag{2.46}$$

Substituindo-se $Z\dfrac{\partial f}{\partial y}-S\dfrac{\partial h}{\partial y}$ e U' em (2.39) teremos que

$$P=(K+G)fh-f\left(I\frac{\partial f}{\partial x}+S'\right)\frac{\partial h}{\partial y}+h\left(W'-J\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Então podemos expressar P na forma (2.34) com $U = 0$.

De forma similar, podemos escrever Q na forma (2.35) com $U' = 0$. Então (2.38) é reescrita na forma $h(W - W') = Zf$. Donde segue que existe um polinômio T tal que $W = W' + fT$. Consequentemente, $Z = Th$. Substituindo-se esta relação em (2.42), ainda com $U' = 0$, obtemos que

$$f(-S + S')\frac{\partial h}{\partial y} = h\left(M - Tf\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Como C_1 e C_2 são curvas irredutíveis distintas e h não divide$\frac{\partial h}{\partial y}$, teremos que h divide $(-S + S')$. Portanto, existe um polinômio L, tal que $S = S' + Lh$. Substituindo-se W e S em (2.34), e considerando $U' = 0$, obtemos que P e Q tem a forma (2.25).

(b) Assim como foi feito no Teorema 2.6, prova-se que as expressões de P e Q dadas em (2.14) e a cota superior dos graus dos polinômios A, B, E e F são invariantes por mudança de coordenadas afins. Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que os termos de maior grau de f e h não são divisíveis nem por x e nem por y.

Como as curvas satisfazem a condição (ii) da Definição 2.4, usamos o Lema 2.5 para garantirmos que as hipóteses do item (a) deste Teorema são válidas, podemos escrever o campo $\mathcal{X}$ na forma (2.25). Se as cotas superiores dos graus de A, B, E e F não forem satisfeitas por (2.25) teremos que

$$\begin{aligned} A^a f^c h^d - E^e h^d \frac{\partial f^c}{\partial y} - R^r f^c \frac{\partial h^d}{\partial y} &= 0 \\ B^b f^c h^d + E^e h^d \frac{\partial f^c}{\partial x} + R^r f^c \frac{\partial h^d}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

onde A^a, B^b, E^e e R^r são os termos homogêneos de maior grau dos polinômios A, B, E e R respectivamente.

Observemos que se um dos números $(a+c+d), (e+c-1+d)$ e $(r+c+d-1)$ for menor do que os outros dois, então seu termo correspondente na primeira equação de (2.47) é igual a zero. A mesma observação é valida para a segunda equação de (2.47).Por hipótese, segue que f^c e $\frac{\partial f^c}{\partial y}$ não tem fator irredutível em comum, o mesmo valendo para h^d e $\frac{\partial h^d}{\partial x}$ e f^c e h^d. Então, segue de (2.47) que f^c divide E^e e h^d divide R^r. Logo existem polinômios K e L tais que $E^e = Kf_c$ e $R^r = Lh^d$. Substituindo-se estas relações em (2.47) e simplificando-as obtemos

$$\begin{cases} A^a = K\dfrac{\partial f^c}{\partial y} + L\dfrac{\partial h^d}{\partial y} \\ B^b = -K\dfrac{\partial f^c}{\partial x} - L\dfrac{\partial h^d}{\partial x} \end{cases} \tag{2.48}$$

Reescrevemos as equações (2.25) na forma

$$\begin{aligned} P &= \left(A - K\frac{\partial f}{\partial y} - L\frac{\partial h}{\partial y}\right) fh - (E - Kf)\frac{\partial f}{\partial y}h - (R - Lh)f\frac{\partial h}{\partial y} \\ Q &= \left(B + K\frac{\partial f}{\partial x} + L\frac{\partial h}{\partial x}\right) fh + (E - Kf)\frac{\partial f}{\partial x}h + (R - Lh)f\frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.49}$$

e observamos que os graus de A, B, E e R de (2.25) diminuem em pelo menos 1 nas expressões acima. Continuamos este processo até que os graus de A, B, E e R satisfação a a condição pedida.

□

Teorema 2.8. *Sejam $C_i = Z(f_i)$, para $i = 1, .., p$, curvas algébricas afins, irredutíveis, distintas e de graus c_i's. Suponhamos que tais curvas são invariantes por um campo vetorial $\mathcal{X}$, de grau m, e satisfazem as condições de generalidade (i), (iii) e (iv) da Definição 2.4.*

(a) Se $\mathrm{mdc}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x}, \dfrac{\partial f_i}{\partial y}\right) = 1$, *para cada $i = 1, \ldots, p$, então o campo vetorial $\mathcal{X}$ pode ser escrito na forma*

$$\mathcal{X} = \left[\left(B - \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)\prod_{i=1}^{p} f_i\right]\frac{\partial}{\partial x} + \left[\left(D + \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\prod_{i=1}^{p} f_i\right]\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.50}$$

onde A_i, B e D são polinômios.

(b) Se as curvas satisfazem as condições genéricas (ii) e (v), então $\mathcal{X}$ pode ser escrito na forma (2.50) com os graus de B e D menores ou iguais a $(m - \sum_{i=1}^{p} c_i)$ e o grau de cada A_i menor ou igual a $(m - \sum_{i=1}^{p} c_i + 1)$.

Demonstração. (a) Vamos usar indução para provar o teorema. Do Teoremas 2.6 segue que a afirmação é verdadeira quando $p = 1$. Suponhamos que para $2 \leq l < p$ valem as igualdades

$$P = \left[\sum_{i=1}^{l}\left(B_i - \frac{A_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)\right]\prod_{i=1}^{l} f_i, \quad Q = \left[\sum_{i=1}^{l}\left(D_i + \frac{A_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)\right]\prod_{i=1}^{l} f_i. \tag{2.51}$$

Observamos que o Teorema 2.7 garante a veracidade da afirmação acima no caso em que $l = 2$.

Provemos que (2.51) é valida para $l+1$. Como f_{l+1} é uma curva algébrica invariante pelo campo $\mathcal{X}$, pelo Teorema 2.6, existem polinômios E, G e H tais que

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^{l}\left(B_i - \frac{A_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)\prod_{i=1}^{l} f_i = E f_{l+1} - G\frac{\partial f_{l+1}}{\partial y},\\
Q &= \sum_{i=1}^{l}\left(D_i + \frac{A_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)\prod_{i=1}^{l} f_i = H f_{l+1} + G\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

Agora considere as curvas definidas pelos polinômios

$$K_j = \prod_{i=1,\, i\neq j}^{l} f_i, \qquad j = 1, \ldots, l.$$

Da condição (iv) de generalidade das curvas C_i's, segue que não existem pontos em que todas as curvas $Z(K_i)$ e C_{l+1} se interceptam. Logo existem polinômios U e V_i com $i = 1, \ldots, l$ tais que

$$U f_{l+1} + \sum_{i=1}^{l} V_i K_i = 1. \tag{2.53}$$

Multiplicando-se (2.53) por G e substituindo-se tal igualdade em (2.52) obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(E - GU\frac{\partial f_{l+1}}{\partial y}\right) f_{l+1} &= \sum_{i=1}^{l}\left(B_i f_i - A_i\frac{\partial f_i}{\partial y} + GV_i\frac{\partial f_{l+1}}{\partial y}\right) K_i,\\
\left(H + GU\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x}\right) f_{l+1} &= \sum_{i=1}^{l}\left(D_i f_i + A_i\frac{\partial f_i}{\partial x} - GV_i\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x}\right) K_i.
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

Segue de (2.54) e de (2.53) que

$$\left(E - GU\frac{\partial f_{l+1}}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(H + GU\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x}\right)$$

pertencem ao ideal gerado por $K_1, \ldots, K_l$. Logo existem polinômios I_i e J_i tais que

$$E - GU\frac{\partial f_{l+1}}{\partial y} = \sum_{i=1}^{l} I_i K_i, \qquad H + GU\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{l} J_i K_i \tag{2.55}$$

Substituindo-se (2.55) em (2.54) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l}\left(B_i f_i - A_i\frac{\partial f_i}{\partial y} + GV_i\frac{\partial f_{l+1}}{\partial y} - I_i f_{l+1}\right) K_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{l}\left(D_i f_i + A_i\frac{\partial f_i}{\partial x} - GV_i\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x} - J_i f_{l+1}\right) K_i = 0.
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

É fácil ver que as expressões multiplicando K_i nos dois somatórios de (2.56) são divisíveis por f_i. Logo existem polinômios L_i e F_i com $i = 1, \dots, l$ tais que

$$\begin{aligned} B_i f_i - A_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + GV_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial y} - I_i f_{l+1} = L_i f_i, \\ D_i f_i + A_i \frac{\partial f_i}{\partial x} - GV_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial x} - J_i f_{l+1} = F_i f_i. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Então, de (2.56), temos que $\sum_{i=1}^{l} L_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{l} F_i = 0$. Portanto podemos reescrever (2.51) como

$$P = \sum_{i=1}^{l} \left((B_i - L_i) f_i - A_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) K_i \quad \text{e} \quad Q = \sum_{i=1}^{l} \left((D_i - F_i) f_i + A_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) K_i. \tag{2.58}$$

Além disso, de (2.57) definimos para cada $i \in \{1, \dots, l\}$

$$\begin{aligned} P_i &:= (B_i - L_i) f_i - A_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = I_i f_{l+1} - GV_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial y}, \\ Q_i &:= (D_i - F_i) f_i - A_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = J_i f_{l+1} + GV_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Segue de um cálculo simples, que C_i e C_{l+1} são curvas algébricas invariantes pelo campo

$$\mathcal{X}_i = P_i \frac{\partial}{\partial x} + Q_i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pelo item (a) do Teorema 2.7, os polinômios P_i e Q_i podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} P_i &= (B_i - L_i) f_i - A_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = X_i f_i f_{l+1} - Y_i \frac{\partial f_i}{\partial y} f_{l+1} - N_i f_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial y}, \\ Q_i &= (D_i - F_i) f_i + A_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = Z_i f_i f_{l+1} + Y_i \frac{\partial f_i}{\partial x} f_{l+1} + N_i f_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Substituindo-se as equações de (2.60) em (2.58) obtemos que

$$P = \sum_{i=1}^{l} \left(X_i f_i f_{l+1} - Y_i \frac{\partial f_i}{\partial y} f_{l+1} - N_i f_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial y} \right) K_i,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{l} \left(Z_i f_i f_{l+1} + Y_i \frac{\partial f_i}{\partial x} f_{l+1} + N_i f_i \frac{\partial f_{l+1}}{\partial x} \right) K_i.$$

Donde segue que as relações dadas em (2.51) são válidas para $l + 1$.

Reescrevemos P e Q na forma

$$P = \sum_{i=1}^{l} \left(X_i - \frac{Y_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} - \frac{N_i}{f_{l+1}} \frac{\partial f_{l+1}}{\partial y} \right) K_i f i f_{l+1} = \left(S - \sum_{i=1}^{l+1} \frac{Y_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \prod_{i=1}^{l+1} f_i,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{l} \left(Z_i + \frac{Y_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{N_i}{f_{l+1}}\frac{\partial f_{l+1}}{\partial X} \right) K_i f i f_{l+1} = \left(S' + \sum_{i=1}^{l+1} \frac{Y_i}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \prod_{i=1}^{l+1} f_i,$$

onde $Y_{l+1} := \sum_{i=1}^{l} N_i$, $S := \sum_{i=1}^{l} X_i$ e $S' := \sum_{i=1}^{l} Z_i$, vemos que segue o resultado.

(b) Segue do Lema 2.5 que as curvas satisfazem as hipóteses do item (a) deste Teorema e que portanto podemos escrever P e Q na forma (2.50). A demonstração para se obter as cotas superiores para os graus dos polinômios é análoga a do item (b) do Teorema 2.6 no caso em que $p = 1$ e análoga a do item (b) do Teorema 2.7 no caso em que $p > 1$.

□

Teorema 2.9. *Sejam $C_1, \ldots, C_p$ curvas algébricas afins, irredutíveis e que satisfazem todas as condições de generalidade da Definição 2.4. Se tais curvas são invariantes pelo campo polinomial*

$$\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial_x} + Q\frac{\partial}{\partial_y},$$

de grau m, e $r := \sum_{i=1}^{p} grau(f_i)$, então $\mathcal{X}$ satisfaz uma das afirmações seguintes.

(a) Se $m + 1 > r$, então

$$\mathcal{X} = Y \prod_{i=1}^{p} f_i + \sum_{i=1}^{p} h_i \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) \mathcal{X}_{f_i} \tag{2.61}$$

onde os h_i's são polinômios de grau menor ou igual a $(m - r + 1)$, Y é um campo vetorial polinomial de grau menor ou igual a $m - r$ e

$$\mathcal{X}_{f_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

(b) Se $r = m + 1$, então existem números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tais que

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) \mathcal{X}_{f_i}. \tag{2.62}$$

Neste caso existe uma integral primeira de Darboux.

(c) Se $r > m + 1$, então $\mathcal{X} = 0$.

Demonstração. (a) Do item (a) Teorema 2.8, segue que

$$P = \left(B - \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i \quad \text{e} \quad Q = \left(D + \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i. \tag{2.63}$$

Logo o campo vetorial $\mathcal{X}$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \left(B - \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i \frac{\partial}{\partial x} + \left(D + \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \left(B \frac{\partial}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i + \sum_{i=1}^{p} A_i \left(\prod_{j=1,\, j \neq i}^{p} f_j \right) \left(- \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Pelo item (b) do Teorema 2.8, segue que os graus de B e D são menores ou iguais a $(m - r)$ e os graus dos A_i's são menores do que $(m - r + 1)$.

(b) Se $r = m + 1$, segue que os graus de B e D são menores ou iguais a (-1) e o grau dos A_i's são menores ou iguais a zero, ou seja, $B = D = 0$ e $A_i \in \mathbb{C}$. Além disso temos que o campo $\mathcal{X}$ esta associado a 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) dx + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) dy$$

Afirmamos que $H = \prod_{j=1}^{p} f_j^{-1}$ é uma integral primeira de ω. De fato

$$dH = - \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x} \prod_{l=1}^{p} f_l^{-1} \right) dx - \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial y} \prod_{l=1}^{p} f_l^{-1} \right) dy,$$

logo

$$\begin{aligned} \omega \wedge dH = & - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial y} \prod_{l=1}^{p} f_l^{-1} \right) dx \wedge dy \\ & + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x} \prod_{l=1}^{p} f_i^{-1} \right) dx \wedge dy \\ = & - \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i . \frac{1}{f_k} \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_k}{\partial y} dx \wedge dy \\ & + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i . \frac{1}{f_k} \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial f_k}{\partial x} dx \wedge dy \\ = & \ 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

(c) Ainda pelo item (b) do Teorema 2.8 temos que

$$\text{grau}(A_i) \leq m - r + 1 < r - r = 0.$$

Portanto A_i=0 e $\mathcal{X} = 0$.

$\square$

Apresentamos a seguir as condições de Noether e o Teorema de Nother. As demonstrações e uma explicação mais detalhada do assunto pode ser encontradas em [6], pag 60.

Definição 2.10. Sejam $p \in \mathbb{P}^2$, F e G curvas curvas sem componentes em comum contendo p e H uma outra curva. Dizemos que *as condições de Noether são satisfeitas* em p se

$$H(z_0, z_1, 1) \in \langle\, F(z_0, z_1, 1), G(z_0, z_1, 1)\,\rangle \subset \mathcal{O}_p(\mathbb{P}^2),$$

onde $\mathcal{O}_p(\mathbb{P}^2)$ é o conjunto das funções racionais de $\mathbb{P}^2$ que estão definidas em p.

Isto é, se existem $a, b \in \mathcal{O}_p(\mathbb{P}^2)$ tais que $H(z_0, z_1, 1) = aF(z_0, z_1, 1) + bG(z_0, z_1, 1)$.

Teorema 2.11 (Teorema Fundamental de Noether)**.** *Sejam F, G, H curvas planas projetivas. Suponhamos que F e G não tem componentes irredutíveis em comum. Existem polinômios A e B homogêneos, com* $\text{grau}(A) = \text{grau}(H) - \text{grau}(F)$ *e* $\text{grau}(B) = \text{grau}(H) - \text{grau}(G)$ *tais que $H = AF + BG$, se, e somente se, as condições de Noether são satisfeitas em cada ponto $p \in F \cap G$.*

Proposição 2.12. *Sejam F, G, H curvas planas projetivas e $p \in F \cap G$. As condições de Noether são satisfeitas em p, se F e G interceptam-se transversalmente em p e $p \in H$.*

Lema 2.13. *Sejam V e W subconjuntos finitos de $\mathbb{P}^n$. Se $V \cap W = \emptyset$, então existe um polinômio $D \in k[z_0, \ldots, z_n]$ tal que $D(p) = 0$ para todo $p \in V$ e $D(q) \neq 0$ para todo $q \in W$.*

Demonstração. Como $W \cap V = \emptyset$, dado um ponto $q \in W$, existe um polinômio $F \in I(V)$ tal que $F(q) \neq 0$, onde $I(V)$ denota o ideal formado por todos os polinômios que se anulam em V.

Dados dois pontos q_1 e q_2 em W, sejam $F_1,\ F_2 \in I(V)$ tais que $F_1(q_1) \neq 0$ e $F_2(q_2) \neq 0$. Se $F_2(q_1) \neq 0$, então tomemos $D = F_2$. Se $F_1(q_2) \neq 0$, então tomemos $D = F_1$. Por outro lado, se $F_2(q_1) = 0$ e $F_1(q_2) = 0$, tomemos $D = F_1 + F_2$.

Suponhamos que $W = \{q_1, \ldots, q_r\}$. Como hipótese de indução, assumimos que para cada subconjunto W' de W, com $r-1$ elementos, existe um polinômio $F \in I(V)$ tal que $F(q) \neq 0$ para todo $q \in W'$. Sejam $F_2, F_1 \in I(V)$ tais que

$$\begin{cases} F_2(q_i) & \neq & 0, \quad \text{para cada } i \in \{1, 3, \ldots, r\} \\ F_1(q_j) & \neq & 0, \quad \text{para cada } j \in \{2, 3, \ldots, r\}. \end{cases}$$

Se $F_1(q_1) \neq 0$ ou $F_2(q_2) \neq 0$ tomamos $D = F_1$ ou $D = F_2$, respectivamente, e teremos $D(q_i) \neq 0$ para $i \in \{1, 2, 3, ..., r\}$. Caso $F_1(q_1) = 0$ e $F_2(q_2) = 0$, tomamos $D = F_1 + F_2$ e teremos $D(q_i) \neq 0$ para $i \in \{1, 2, 3, ..., r\}$.

Dadas curvas algébricas afins $C_1, \ldots, C_p$, sejam V o conjunto formado por todos os pontos singulares das projetivizações das curvas C_i's e $W = l_\infty \cap (\bigcup_{i=1}^{p} C_i)$. Decorre diretamente do Lema 2.13 que existe um polinômios D tal que $D(q) = 0$ para todo $q \in V$ e $D(p) \neq 0$ para todo $p \in W$. Com este fato podemos enunciar o teorema seguinte. $\square$

Teorema 2.14. *Sejam $C_1, \ldots, C_p$ curvas algébricas afins, irredutíveis e que satisfazem as condições (ii), (iii), (iv) e (v) da Definição 2.4. Suponhamos que $C_i = Z(f_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$. Seja D um polinômio tal que a curva $Z(D)$ passa pelos pontos singulares de C_i e $Z(D) \cap C_i \cap l_\infty = \emptyset$, para cada i. Se cada curva C_i é invariante por um campo vetorial $\mathcal{X}$ e suas singularidades são nós, então existem polinômios L, M e H_i tais que*

$$\mathcal{X} = \left(\frac{L}{D}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{M}{D}\frac{\partial}{\partial y}\right)\prod_{i=1}^{p} f_i + \sum_{i=1}^{p}\frac{H_i}{D}\left(\prod_{j=1,\, j\neq i}^{p} f_j\right)\mathcal{X}_{f_i},$$

os grau de L e M são menores ou iguais a $(m+d-r)$ e o grau de cada H_i é menor ou igual a $(m+d-r+1)$, onde $r = \sum_{i=1}^{p} grau(C_i)$, d é o grau de D e m é o grau de $\mathcal{X}$.

Demonstração. Como cada curva C_i é invariante por $\mathcal{X}$, temos que $\mathcal{X}(f_i) = K_i f_i$. Logo cada C_i também é invariante por $D\mathcal{X}$, pois

$$D\mathcal{X}(f_i) = (DK_i)f_i. \tag{2.65}$$

Da equação (2.65) segue que

$$DP\frac{\partial f_i}{\partial x} + DQ\frac{\partial f_i}{\partial y} = 0 \ \text{ em } C_i, \tag{2.66}$$

ou, equivalentemente, que

$$-DP\frac{\partial f_i}{\partial x} = DQ\frac{\partial f_i}{\partial y} \ \text{ em } C_i. \tag{2.67}$$

Fixemos $i \in \{1, \ldots, s\}$ e consideremos a função $h_D : C_i \setminus \mathrm{Sing}(C_i) \to K$ definida por

$$h_D(q) = \begin{cases} -\dfrac{DP(q)}{\dfrac{\partial f_i}{\partial y}(q)}, & \text{se } \dfrac{\partial f_i}{\partial y}(q) \neq 0 \\ \\ \dfrac{DQ(p)}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x}(q)}, & \text{se } \dfrac{\partial f_i}{\partial x}(q) \neq 0. \end{cases}$$

Seja $q = (q_0, q_1)$ um ponto singular de C_i. Como q é um nó de C_i, fazendo-se uma mudança de coordenadas, podemos escrever f_i na forma

$$f_i(x, y) = xy + ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + \cdots .$$

Por outro lado, como C_i é localmente uma função analítica podemos considerar que $y(x) = a_0x + \sum_{i>1} a_i x^i$, com $a_0 \neq 0$, em uma parte de C_i contendo q. Portanto localmente teremos

$$f_i(x, y(x)) = a_0x^2 + a'x^3 + b'x^4 + \cdots . \tag{2.68}$$

Como $Z(D)$ contém q, podemos considerar que D é, numa vizinhança de C_i contendo q, dado por

$$D(x, y(x)) = \alpha\, x + \beta x^2 + \cdots . \tag{2.69}$$

Portanto segue das expressões (2.68) e (2.69) que

$$\frac{DQ}{\dfrac{\partial f_i}{\partial x}} = \frac{(\alpha\, x + \beta x^2 + \cdots)Q(x, y(x))}{2a_0x + 3a'x^2 + 4b'x^3 + \cdots} = \frac{(\alpha\, + \beta x + \cdots)Q(x, y(x))}{2a_0 + 3a'x^2 + 4b'x^2 + \cdots}, \tag{2.70}$$

ou seja, o quociente $DQ/(\partial f_i/\partial x)$ pode ser definido em q. Logo podemos estender a definição de h_D aos pontos singulares de C_i. Portanto existe um polinômio H tal que $h_D = H\,|_{C_i}$. Donde concluímos que

$$D\mathcal{X} = DP\frac{\partial}{\partial x} + DQ\frac{\partial}{\partial y} = H\, X_{f_i} \quad \text{em} \quad C_i. \tag{2.71}$$

Tomemos $j \neq i$. Como, por hipótese, $\mathcal{X}(f_j) = K_j f_j$, segue que

$$DK_j f_j = HX_{f_i}(f_j) \quad \text{em } C_i. \tag{2.72}$$

Se $q \in C_i \cap C_j$, segue de (2.72), que $H(q)X_{f_i}(f_j)(q) = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $X_{f_i}(f_j)(q) = 0$. Então os vetores

$$\left(-\frac{\partial f_i}{\partial y}(q), \frac{\partial f_i}{\partial x}(q)\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f_j}{\partial x}(q), \frac{\partial f_j}{\partial y}(q)\right)$$

são ortogonais. Como estamos no plano afim, isso significa que o espaço tangente a curva C_i em q é igual ao espaço tangente a C_j em q. O que é um absurdo pois as duas curvas interceptam-se transversalmente. Logo $H(q) = 0$, para todo $q \in C_i \cap C_j$. Como C_i e C_j são curvas irredutíveis, transversais e não se interceptam em l_∞, usando-se o Teorema Fundamental de Noether (2.11) nas projetivizações de C_i, C_j e S, garantimos que existem polinômios A_j e B_j tais que $H = A_j f_i + B_j f_j$, com $\text{grau}(A_j) = \text{grau}(H) - c_i$ e $\text{grau}(B_j) = \text{grau}(H) - c_j$. Donde segue que $H = B_j f_j$ em C_i e que

$$D\mathcal{X} = B_j f_j X_{f_i} \quad \text{em } C_i.$$

Consideremos agora $l \neq i$ e $l \neq j$. Temos que

$$DK_l f_l = B_j f_j X_{f_i}(f_l) \quad \text{em } C_i.$$

Usando-se os mesmos argumentos anteriores concluímos que $B_j f_j = 0$ em $C_i \cap C_l$. Já que $C_i \cap C_j \cap C_l = \emptyset$, concluímos que $B_j = 0$ em $C_i \cap C_l$. Usando-se novamente o Teorema Fundamental de Noether, concluímos que existem polinômios A_l e B_l tais que $B_j = A_l f_i + B_l f_l$, com $\text{grau}(A_l) = \text{grau}(B_j) - c_i$ e $\text{grau}(B_l) = \text{grau}(B_j) - c_l$. Portanto obtemos que

$$D\mathcal{X} = B_l f_l f_j X_{f_i} \quad \text{em } C_i.$$

Indutivamente, mostra-se que

$$D\mathcal{X} = h_i \prod_{j \neq i} f_j \, X_{f_i} \quad \text{em} \quad C_i, \tag{2.73}$$

onde $\text{grau}(h_i) = \text{grau}(H) - \sum_{j \neq i} c_j$.

Afirmamos que

$$D\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{s} h_i \prod_{j \neq i} f_j \, X_{f_i} \quad \text{em} \quad \bigcup_{i=1}^{l} C_i. \tag{2.74}$$

De fato, dado $p \in C_k$, como $f_k(p) = 0$, segue de (2.73) que

$$\left(\sum_{i=1}^{s} h_i \prod_{j \neq i} f_j \, X_{f_i} \right)(p) = (h_k \prod_{j \neq k} f_j \, X_{f_k})(p) = D\mathcal{X} \mid_{C_k} (p).$$

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert segue que

$$DP + \sum_{i=1}^{s} h_i \prod_{j \neq i} f_j \frac{\partial f_i}{\partial y} \in \sqrt{< f_1 \dots f_s >}\,;$$

e

$$DQ - \sum_{i=1}^{s} h_i \prod_{j \neq i} f_j \frac{\partial f_i}{\partial x} \in \sqrt{< f_1 \dots f_s >}\,.$$

Como os polinômios f_i são irredutíveis e distintos, segue que $f_1 \dots f_s$ é reduzido e portanto $\sqrt{< f_1 \dots f_s >} =< f_1 \dots f_s >$. Logo existem polinômios L e M tais que

$$DP + \sum_{i=1}^{s} h_i \prod_{j \neq i} f_j \frac{\partial f_i}{\partial y} = L \prod f_i;$$

$$DQ - \sum_{i=1}^{s} h_i \prod_{j \neq i} f_j \frac{\partial f_i}{\partial x} = M \prod f_i.$$

Para garantirmos que L, M e os h_i's podem ser tomados de modo que as cotas superiores dos graus são satisfeitas basta usarmos os mesmos argumentos da demonstração do item (b) do Teoremas 2.6 e do item (b) do Teoremas 2.8. □

Teorema 2.15. *Sejam $C_1, \dots, C_p$ curvas algébricas afins, irredutíveis e que satisfazem as condições (ii), (iii), (iv) e (v) da Definição 2.4. Suponhamos que $C_i = Z(f_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, e seja $r = \sum_{i=1}^{p} grau(C_i)$. Seja D um polinômio tal que a curva $Z(D)$ passa pelos pontos singulares de C_i e $Z(D) \cap C_i \cap l_\infty = \emptyset$, para cada i. Se cada curva C_i é invariante por um campo vetorial $\mathcal{X}$, de grau m, e suas singularidades são nós, então $\mathcal{X}$ satisfaz uma das afirmações abaixo.*

(a) Se $m > r - d - 1$, onde $d = grau(D)$, então

$$\mathcal{X} = \frac{Y}{D} \prod f_i + \sum \frac{h_i}{D} \left(\prod_{j \neq i} f_j \right) \mathcal{X}_{f_i} \tag{2.75}$$

onde os h_i's são polinômios de grau menor ou igual a $(m - r + 1)$, Y é um campo vetorial polinomial de grau menor ou igual a $m - r$ e

$$\mathcal{X}_{f_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

(b) Se $m = r - d - 1$, então $\mathcal{X}$ tem uma primeira integral de Darboux.

(c) Se $m < r - d - 1$, então $\mathcal{X} = 0$

Demonstração. (a) Segue diretamente do Teorema 2.14.

(b) Se $m = r - d - 1$, então os graus de L e M são menores ou iguais a (-1). Logo $M = L = 0$. Além disso, sendo o grau de cada H_i menor ou igual a

$$m + d - r + 1 = r - d - 1 + d - r + 1 = 0,$$

temos que $H_i \in \mathbb{C}$.

Então o campo fica da forma

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{D} \prod_{i \neq j} f_j \tag{2.76}$$

e identicamente ao que foi feito no Teorema (2.9), item (b), mostra-se que ele possui integral primeira de Darboux.

(c) Se $m < r - d - 1$, então os graus de L e M são menores ou iguais a (-1). Logo $M = L = 0$. Além disso, sendo o grau de cada H_i menor ou igual a

$$m + d - r + 1 < r - d - 1 + d - r + 1 = 0,$$

temos que $H_i = 0$.

$\square$

2.3 Demonstração do Teorema de Jouanolou

Teorema 2.16. *(Jouanolou)Se $s \geq 2$, então o campo vetorial $\mathcal{X}$, dado em (2.2), não tem curvas algébricas invariantes em $\mathbb{P}^2$.*

Demonstração. Suponhamos que exista uma curva algébrica $C = Z(F)$ invariante pelo campo vetorial (2.2). Seja $f(x, y) := F(x, y, 1)$, onde $x = z_0/z_2$ e $y = z_1/z_2$. Então a curva definida por f, que também será denotada por C, é invariante pelo campo vetorial (2.5), ou seja, existe um polinômio H tal que $\mathcal{X}\mid_{U_2}(f) = Hf$.

Seja ζ uma raiz $(s^2 + s + 1)$-primitiva da unidade, com $s = m - 1$. Consideremos a função bijetora

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (\zeta^{-s}x, \zeta y). \end{array}$$

Dado um número inteiro $k > 0$, σ^k denotará a composta de σ com ela mesma k vezes e σ^{-k} denotará a composta de σ^{-1} com ela mesma k vezes. Observemos que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma^k(x, y) = (\zeta^{-sk}x, \zeta^k y)$.

Suponhamos que

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq c} \alpha_{i,j} x^i y^j, \text{ onde } \alpha_{i,j} \in \mathbb{C},$$

e consideremos, para cada número inteiro $k > 0$, o polinômio

$$g_k(x, y) = \sum_{i+j \leq c} \alpha_{i,j} (\zeta^{sk}x)^i (\zeta^{-k}y)^j.$$

Observemos que $g_k(x,y) = 0$ se, e somente se, $f(\sigma^{-k}(x,y)) = 0$. Portanto a imagem de C por σ^k é também uma curva algébrica. Além disso, como

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\mid_{U_2}(g_k) &= (1-xy^s)\frac{\partial g_k}{\partial x}(x,y) + (x^s - y^{s+1})\frac{\partial g_k}{\partial y}(x,y) = \\ &= (1-xy^s)\zeta^{sk}\frac{\partial f}{\partial x}(\zeta^{sk}x, \zeta^{-k}y) + (x^s - y^{s+1})\zeta^{-k}\frac{\partial f}{\partial y}(\zeta^{sk}x,\zeta^{-k}y) = \\ &= \zeta^{sk}\mathcal{X}\mid_{U_2}(f(\sigma^{-k}(x,y))) = \zeta^{sk}H(\sigma^{-k}(x,y))g_k, \quad (2.77)\end{aligned}$$

segue que $\sigma^k(C)$ é também invariante por $\mathcal{X}\mid_{U_2}$.

Consideremos também a função

$$\begin{array}{rccc}\varrho: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\overline{x},\overline{y}),\end{array}$$

onde $\overline{x}$ é o conjugado de x. Dado um polinômio qualquer $W(x,y) = \sum a_{i,j}x^iy^j$, definimos $\overline{W}(x,y) = \sum \overline{a_{i,j}}\, x^iy^j$.

Observemos que $(x,y) \in \varrho(\sigma^k(C))$ se, e somente se, $f(\sigma^{-k}(\varrho(x,y))) = 0$. Como $f(\sigma^{-k}(\varrho(x,y))) = \overline{\overline{g}(x,y)}$, segue que a imagem de $\sigma^k(C)$ por ϱ é a curva algébrica definida pelo polinômio $\overline{g}(x,y)$. Além disso, da relação

$$\mathcal{X}\mid_{U_2}(\overline{g}) = \overline{H}\,\overline{\zeta}^{ks}\overline{g},$$

concluímos que as curvas $\varrho(\sigma^k(C))$ são invariantes pelo campo vetorial $\mathcal{X}\mid_{U_2}$.

Vamos estimar o número total de pontos de interseção das projetivizações destas curvas com l_∞. Observemos que se $a_0 = (x_0 : y_0 : 0) \in C \cap l_\infty$, então os pontos $\sigma^k(x_0,y_0)$ e $\varrho(\sigma^k(x_0,y_0))$ determinam pontos de $\sigma^k(C) \cap l_\infty$ e $\varrho(\sigma^k(C)) \cap l_\infty$. Se $a_0 = (x_0 : y_0 : 0)$, com $x_0y_0 \neq 0$, então $\sigma^i(x_0,y_0) = \sigma^j(a_0)$ se, e somente se, $\zeta^{-si}x_0 = \zeta^{-sj}x_0$ e $\zeta^iy_0 = \zeta^jy_0$. As últimas igualdades são válidas se, e somente se, $\zeta^{s(j-i)} = 1$ e $\zeta^{-(j-i)} = 1$. Portanto, como s^2+s+1 e $s+1$ são primos entre si, segue que $\sigma^i(a_0) = \sigma^j(a_0)$ se, e somente se, $\zeta^{(s+1)(j-i)} = 1$. Ainda pelo fato de s^2+s+1 e $s+1$ serem primos entre si, segue que a única possibilidade é $i = j$. Logo $\sigma^k(a_0)$ são pontos distintos para $k = 1,\ldots,s^2+s$. Afirmamos que os pontos $(0:1:0)$ e $(1:0:0)$ não pertencem a nenhuma destas curvas. Caso contrário, a trajetória passando por tal ponto interceptaria Δ e pelo item (e) do Corolário 2.2 ela não seria algébrica. Se $\varrho(\sigma^i(x_0,y_0)) = \sigma^i(x_0,y_0)$, então $\sigma^i(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Se $\varrho(\sigma^i(x_0,y_0)) = \sigma^k(x_0,y_0)$, então um dos pontos destes conjuntos também pertence a $\mathbb{R}^2$. Portanto segue do Lema 2.2 (e) que se s é par os conjuntos $\{\varrho\sigma^ia_0\}_{i=0,..}$ e $\{\sigma^ia_0\}$

não se interceptam. Logo as curvas $\{\sigma^k(C)\}_{k=0,1,\ldots}$ e $\{\varrho(\sigma^k(C))\}_{k=0,1,\ldots}$ tem pelo menos $2s^2+2s+2$ pontos em l_∞ se s é par e pelo menos s^2+s+1 pontos se s é ímpar.

Sejam $C_0 := C$, C_1, $C_2, \ldots$ todas as curvas algébricas invariantes por $\mathcal{X}$. Então

$$\left(\bigcup_{k=0}^{s^2+s+1}\sigma^k(C)\right)\cup\left(\bigcup_{k=0}^{s^2+s+1}\varrho(\sigma^k(C))\right)\subseteq\bigcup C_i.$$

Se $r=\sum \mathrm{grau}(\sigma^i(C))+\sum \mathrm{grau}(\varrho(\sigma^i(C)))$, consideramos nestes somatórios apenas curvas distintas, então

$$\begin{cases} r \;\geq\; s^2+s+1, & \text{se } s \text{ é ímpar}\\ r \;\geq\; 2s^2+2s+2, & \text{se } s \text{ é par.}\end{cases}$$

Segue do Corolário 2.3 que as hipóteses do Teorema 2.15 são verificadas. O polinômio $D(x,y)=a(1-xy^s)+b(x^s-y^{s+1})$ é tal que

(a) $Z(D)\cap l_\infty=\{(1:0:0),(b:-a:0)\}$.

(b) Os pontos singulares de $\mathcal{X}$, descritos em Teorema 2.2 (a), pertencem a curva $Z(D)$.

Escolhendo-se a e $b\in\mathbb{C}$ de modo que o ponto $(b:-a:0)$ não pertença as curvas C_i's, podemos considerar o polinômio D para usarmos o Teorema 2.15. Como

$$\begin{cases} m-r+d+1\leq(s+1)(2-s)<0, & \text{se } s \text{ é ímpar e } s>2;\\ m-r+d+1\leq 2(s+1)(1-s)-1<0, & \text{se } s \text{ é par e } s\geq 2,\end{cases}$$

segue, do item (c) do Teorema 2.15, que $\mathcal{X}=0$. O que é um absurdo. $\square$

Bibliografia

[1] A. Vitt E.A. Andronov, A and S.E. Khaiken. *Theory of Oscillators*. Pergamon Press, Oxford, 1966.

[2] C. J. Christoper, J. Llibre, C. Pantazi, and X. Zhand. Darboux integrability and invariante algebraic curves for planar polynomial systems. *J. Physics A: Gen. Math.*, 35:2457–2476, 2002.

[3] C. Christopher. Invariant algebraic curves and conditions for center. *Proc. Roy Soc.*, 124A:1209–1229, 1994.

[4] G. Darboux. Mémoire sur lés équations différentieles algébriques du premier ordre et du premier degré. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2:60–96, 1878.

[5] Manfredo P. do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Springer, 1994.

[6] Willian Fulton. Algebraic curves. a introduction to algebraic geometry. http://www.math.lsa.umich.edu/ wfulton/CurveBook.pdf, 2008.

[7] Joe Harris. *Algebraic Geometry a first curse*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlang, 1992.

[8] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate texts in Mathematics. Springuer.

[9] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier:Academic Press, San Diego, 2ª edition, 2004.

[10] J. Guckenheimer; P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences 42. Springuer-Verlag, 1983.

[11] Dale Husemoller. *Fiber Bundles.* Springuer-Verlang, New York; Berlin; Heidelberg; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest, 3ª edition, 1993.

[12] J.P. Jouanolou. *Equations de Pfaff Algébriques.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlang, 1979.

[13] A. Lins Neto. Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two. *Holomorphic Dynamics, Lecture Notes in Math*, 1345:193–232, 1988.

[14] Fábio Xavier Penna. Folheações e a grassmanniana de retas em p^n. Master's thesis, UFMG, 2005.

[15] Jorge Vitório Pereira. *Integrabilidade de Folheações Holomorfas.* Publicações em Matemática, 24º Colóquio Brasileiro de Matemática. Impa, Rio de Janeiro, 2003.

[16] J. Le Potier. *Lectures on Vector Bundles.* The Press Syndicate of the University of Cambrige, Great Britain, 1ª edition, 1997.

[17] Clark Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.* Studies in Advanced Mathematics. CRC press, 2º edition, 1999.

[18] Artur Afonso Guedes Rossini. Folheações algébricas projetivas. Master's thesis, UFJF, 2011.

[19] Reginaldo J. Santos. Tópicos de equações diferenciais. http://www.mat.ufmg.br/ regi/eqdif/topeqdif.pdf, Julho 2011.

[20] A. Seidenberg. Reduction of singularities of differential equations $ady = bdx$. *American Journal of Mathematics*, 90(1):248–269, January 1986.

[21] T.A. Springer. *Linear Algebraic Groups*, volume 9 of *Progres in Mathematics.* Birkhauser, Boston, 2ª edition, 1998.

[22] Henryk Zoladek. The solutions of center-focus problem,. *preprint*, 1992.

[23] Henryk Zoladek. On algebraic sotutions of algebraic pfaff equations. *Studia Mathematica*, 114(2):117–126, 1995.