Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Mestrado em Matemática

William Frederico Vasconcellos Silva

# Moduli de Feixes de Quádricas e de Formas Binárias

Juiz de Fora

2012

William Frederico Vasconcellos Silva

# Moduli de Feixes de Quádricas e de Formas Binárias

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Álgebra, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Flaviana Andréa Ribeiro
Co-orientadora: Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Juiz de Fora

2012

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, em primeiro lugar.

Agradeço a minha Orientadora Profª. Flaviana Andréa Ribeiro e a minha Co-orientadora Profª. Joana Darc Antonia Santos da Cruz pela dedicação, paciência, incentivos e por todos ensinamentos.

Agradeço ao Prof. Fabio Rodrigues Pereira, pelos incentivos e conselhos.

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio e força em todos os momentos.

Agradeço a CAPES pelo auxilio financeiro.

## RESUMO

O principal objetivo do trabalho é estudar a relação entre o espaço de Moduli de feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$ e o espaço de Moduli de formas binárias de grau $(n+1)$. Este estudo foi baseado no artigo (AVRITZER; LANGE, 2000). Em linhas gerais, um espaço de Moduli é uma variedade algébrica que parametriza uma coleção de objetos C, módulo uma relação de equivalência. No nosso caso, C é o conjunto de feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$ ou o conjunto de formas binárias de grau $(n+1)$, e a relação de equivalência é pertencer à mesma órbita pela ação de um grupo $G$. Para estabelecermos a relação entre esses espaços foi importante considerar o símbolo de Segre que é um invariante dos feixes de quádricas. Além disso, estudamos a forma normal, uma maneira de reescrever o feixe de quádricas, na qual conhecemos facilmente o símbolo de Segre. Estudamos ação de grupos, para podermos classificar um feixe de quádrica e uma forma binária como estável, semi-estável ou instável, e quociente categórico, já que os espaços de Moduli são obtidos através do quociente.

Palavras chave: Espaços de Moduli. Feixe de Quádricas. Formas Binárias. Estabilidade

**ABSTRACT**

The main objective is to study the relationship between space Moduli of pencil of quadrics, and Moduli space of binary forms. This study was based on article (AVRITZER; LANGE, 2000). In general, a Moduli space is an algebraic variety that parametrizes a collection of objects C, modulo an equivalence relation. In our case, $\mathbb{C}$ is the set of pencil of quadrics or set of binary forms of degree $(n + 1)$, and the equivalence relation is to belong to the same orbit by the action of a group G. To establish the relationship between these spaces is important to consider the Segre symbol of which is an invariant of pencils of quadrics. Furthermore, we studied the normal form, a way to rewrite the pencil of quadrics, which easily met the Segre symbol, action of groups, in order to classify a pencil of quadric and a binary form as stable or semistable unstable, and quotient categorical, since the spaces's moduli are obtained by quotient.
Keywords: Moduli Spaces. Bundle of quadrics. Binary forms. Stability

# Sumário

# 1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é estudar a relação entre os espaços de Moduli de feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$ e de formas binárias de grau $n+1$ dada por Dan Avritzer e Herbert Lange em [1].

A teoria de Moduli está em conexão com problemas de classificação em Geometria Algébrica. Os ingredientes básicos de um problema de classificação são uma coleção de objetos $\mathcal{C}$ e uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{C}$. Procura-se dotar $\mathcal{C}/\sim$ de uma estrutura de variedade algébrica e também entender como é possível passar de um objeto para outro "continuamente". Frequentemente existe uma noção geométrica bastante natural do que significa o advérbio "continuamente". Então, para cada problema de classificação precisamos definir formalmente o conceito intuitivo de família. Esta etapa consiste em passar de um problema de classificação para um problema de Moduli. Os espaços de Moduli constituem respostas a problemas de Moduli.

A renovação e aplicação da Teoria dos Invariantes em problemas de Moduli na década de 60, por Mumford em [10], forneceu uma "receita"para a construção de espaços de Moduli. Muitos destes espaços, senão todos, são obtidos algebricamente através de variedades quocientes. Para mais detalhes ver [4] e [9].

Foi no contexto da Teoria Geométrica dos Invariantes que apresentamos as construções dos espaços de Moduli de feixes de quádricas e de formas binárias, ou seja, os espaços de Moduli foram construídos como quociente de variedades sem o cuidado de mostrar que eles são soluções para problemas de Moduli.

No capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados da teoria clássica de geometria algébrica que serão utilizados no trabalho. A escolha dos resultados a serem apresentados e demonstrados foi feita de modo a tornar o trabalho o mais autocontido possível, mas sem torná-lo muito extenso. Como referênica para este capítulo citamos [8],

[7] e [9].

No capítulo 2, definimos $\lambda$-matrizes, forma normal e símbolos de Segre. Em linhas gerais, uma quádrica em $\mathbb{P}^n$ é equivalente por mudança de coordenadas, a uma quádrica que pode ser representada por uma matriz diagonal cujas entradas são apenas $1's$ e $0's$, ou seja, uma quádrica é classificada pelo posto da matriz associada. Quando se considera feixes de quádricas e as matrizes de dois geradores, não há um resultado tão simples e, em geral, matrizes diagonais não são suficientes para classificar feixes. No entanto, é possível obter uma forma normal suficientemente simples que pode ser lida a partir de um invariante chamado símbolo de Segre. As referências para este capítulo são [2] e [1].

No capítulo 3, definimos ação de grupos algébricos em variedades, elementos estáveis e semi-estáveis e apresentamos um critério númerico de estabilidade devido a Hilbert-Mumford. Como referência para estes tópicos citamos [4] e [9]. Aplicamos estes conceitos a duas ações específicas: a de $SL_{n+1}$ na Grassmaniana $Gr(2, N+1)$ que parametriza feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$ e a de $SL_2$ em $\mathbb{P}^{n+1}$, o espaço das formas binárias de grau $n+1$. Através do morfismo discrimante relacionamos estabilidade de feixes e de formas binárias. De posse dos espaços moduli de feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$ $(\mathcal{M}_n^p)$ e de formas binárias de grau $n+1(\mathcal{M}_{n+1}^b)$ e dos símbolos de Segre, mostramos que existe um isomorfismo entre os espaços $\mathcal{M}_n^p$ e $\mathcal{M}_{n+1}^b$ compactificados. Para estes resultados usamos [1].

# 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Em todo o texto $k$ denotará um corpo algebricamente fechado.

O conteúdo deste capítulo foi baseado em [8], [7] e [9] e tem como objetivo apresentar a linguagem básica que será utilizada no trabalho.

**Definição 2.1.** O *espaço afim* de dimensão $n$ sobre um corpo $k$, denotado por $\mathbb{A}_k^m$ ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$, é o conjunto de todas as $n$-úplas de elementos de $k$. Um elemento $p \in \mathbb{A}^n$ será chamado de ponto, e se $p = (a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in k$, então os $a_i$ serão chamados de coordenadas de $p$.

**Definição 2.2.** Um subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é chamado de *fechado* ou fechado afim se existir um subconjunto $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ tal que

$$X = Z(I) := \{p \in \mathbb{A}^n; F(p) = 0, \forall\, F \in I\}.$$

**Definição 2.3.** Definimos a *topologia de Zariski* em $\mathbb{A}^n$ escolhendo para abertos os subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ que são complementares de conjuntos fechados.

**Definição 2.4.** Um subconjunto aberto de um fechado afim é chamado de *variedade quase afim.*

**Definição 2.5.** Um subconjunto $Y$ de um espaço topológico $X$ é *irredutível* se ele não puder ser escrito como a união de dois subconjuntos fechados próprios.

**Definição 2.6.** Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto. Definimos o *ideal de* $X$ por

$$\mathcal{I}(X) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n]; F(p) = 0, \forall p \in X\}.$$

**Proposição 2.7.** *Uma variedade $X$ é irredutível, se e somente se, $\mathcal{I}(X)$ é primo.*

*Demonstração.* Suponha que $X$ é irredutível. Sejam $F$ e $G$ polinômios tais que $FG \in \mathcal{I}(X)$. Assim, $X \subset Z(F) \bigcup Z(G)$ e desta forma $X = (X \bigcap Z(F)) \bigcup (X \bigcap Z(G))$. Como $X$ é irredutível, então $X = X \bigcap Z(F)$ ou $X = X \bigcap Z(G)$. Logo $X \subset Z(F)$ ou $X \subset Z(G)$. Portanto $F \in \mathcal{I}(X)$ ou $G \in \mathcal{I}(X)$, isto é, $\mathcal{I}(X)$ é primo.

Suponha que $\mathcal{I}(X)$ é primo e que $X = X_1 \bigcup X_2$ com $X \supsetneqq X_1$ e $X \supsetneqq X_2$. Assim, $\mathcal{I}(X_1) \supsetneqq \mathcal{I}(X)$ e $\mathcal{I}(X_2) \supsetneqq \mathcal{I}(X)$ e desta forma existem $F \in \mathcal{I}(X_1)$ e $G \in \mathcal{I}(X_2)$ tais que $F, G \notin \mathcal{I}(X)$. Por outro lado, $FG \in \mathcal{I}(X_1 \bigcup X_2) = \mathcal{I}(X)$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{I}(X)$ é primo. Portanto $X$ é irredutível. □

**Exemplo 2.8.** O espaço $\mathbb{A}^n$ com a topologia de Zariski é irredutível.

Como $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = 0 \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ é um ideal primo, então $\mathbb{A}^n$ é irredutível.

**Definição 2.9.** Dado $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto fechado, definimos o *anel de coordenadas de* $X$, denotado por $k[X]$, por

$$k[X] = \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{\mathcal{I}(X)}.$$

**Definição 2.10.** O *espaço projetivo* de dimensão $n$ sobre um corpo $k$, denotado por $\mathbb{P}^n(k)$ ou $\mathbb{P}^n$, é o conjunto das classes de equivalência de $(n+1)$-uplas $(a_0, \ldots, a_n)$ de elementos de $k$, não todos nulos, a relação de equivalência dada por

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k - \{0\}; (b_0, \ldots, b_n) = (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n).$$

Um ponto $p \in \mathbb{P}^n$ será denotado por $p = (a_0 : \ldots : a_n)$ e os $a_i' s$ serão chamados de coordenadas homogêneas de $p$.

**Definição 2.11.** Um subconjunto $Y \subset \mathbb{P}^n$ é dito *fechado projetivo* se existir um conjunto $I$ de polinômios homogêneos em $k[X_0, \ldots, X_n]$ tal que

$$Y = Z(I) := \{p \in \mathbb{P}^n; F(p) = 0, \forall F \in I\}.$$

**Definição 2.12.** Dado $Y$ um subconjunto de $\mathbb{P}^n$, definimos o *ideal homogêneo* de $Y$, denotado por $\mathcal{I}(Y)$, como sendo o ideal gerado pelo conjunto

$$\{F \in k[Y_0, \ldots, Y_n]; F \text{ é homogêneo e } F(p) = 0, \forall p \in Y\}.$$

**Definição 2.13.** Seja $Y \subset \mathbb{P}^n$ um fechado projetivo. Definimos o *anel de coordenadas homogêneas* de $Y$ por

$$k[Y] = \frac{k[X_0, \ldots, X_n]}{\mathcal{I}(Y)}.$$

**Definição 2.14.** Definimos a topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$ escolhendo para abertos os subconjuntos de $\mathbb{P}^n$ que são complementares de fechados projetivos.

Dado $i \in \{0, \cdots, n\}$, seja $\mathbb{A}_i^n \subset \mathbb{P}^n$ o conjunto de pontos $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ tais que $x_i \neq 0$. Então, $\mathbb{A}_i^n$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{P}^n$ definido por $\mathbb{A}_i^n = \mathbb{P}^n - Z(X_i)$ e

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}_i^n.$$

Afirmamos que $\mathbb{A}_i^n$ é homemorfo ao espaço afim $\mathbb{A}^n$. Defina

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{A}_i^n & \to & \mathbb{A}^n \\ & (a_0 : \cdots : a_i : \cdots : a_n) & \mapsto & (a_0/a_i, \cdots, a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i, \cdots, a_n/a_i). \end{array}$$

Suponha que $\varphi(a_0 : \cdots : a_i : \cdots : a_n) = \varphi(b_0 : \cdots : b_i : \cdots : b_n)$, ou seja,

$$(a_0/a_i, \cdots, a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i, \cdots, a_n/a_i) = (b_0/b_i, \cdots, b_{i-1}/b_i, b_{i+1}/b_i, \cdots, a_n/b_i).$$

Desta forma, $a_k/a_i = b_k/b_i$, $\forall\, k \neq i$ e $a_k = (a_i/b_i)b_k$, $\forall\, k \neq i$. Assim,

$$(a_0, \cdots, a_n) = a_i/b_i(b_0, \cdots, b_n) \Rightarrow (a_0 : \cdots : a_n) = (b_0 : \cdots : b_n).$$

Para ver que $\varphi$ é sobrejetiva, seja $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Temos que

$$\varphi(a_1 : \cdots, a_{i-1} : 1 : a_i, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, \cdots, a_n).$$

Logo $\varphi$ é sobrejetiva. Como $\varphi$ e $\varphi^{-1}$ são polinomiais, então $\varphi$ é homeomorfismo.

Assim, o espaço afim $\mathbb{A}^n$, com a topolgia de Zariski, pode ser identificado com qualquer aberto $\mathbb{A}_i^n$ de $\mathbb{P}^n$.

**Definição 2.15.** Dado $X \subset \mathbb{A}^n$ um suconjunto, definimos o *fecho projetivo* $\overline{X}$ de $X$ como sendo a interseção de todos os subconjuntos fechados de $\mathbb{P}^n$ contendo $X$.

**Observação 2.16.** É fácil ver que $X = \overline{X} \cap \mathbb{A}_i^n$

**Definição 2.17.** Um subconjunto aberto de um fechado projetivo é chamado de *variedade quase projetiva.*

**Definição 2.18.** Seja $Y$ uma variedade quase afim. Uma função $f : Y \to k$ é dita *regular* em um ponto $P \in Y$ se existir uma vizinhança aberta $U$ com $p \in U \subset Y$ e polinômios $G, H \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tais que $H$ é não nulo em $U$, e $f = \dfrac{G}{H}$ em $U$. Dizemos que $f$ é regular em $Y$ se $f$ é regular em todo ponto de $Y$.

**Teorema 2.19.** *(Toerma dos Zeros de Hilbert) Seja $k$ um corpo algebricamente fechado e seja $I$ um ideal de $k[X_1, \cdots, X_n]$. Se $F \in k[X_1, \cdots, X_n]$ for tal que $F(P) = 0$, para todo $P \in Z(I)$, então existe um $r > 0$ tal que $F^r \in I$. Em outras palavras,*

$$\mathcal{I}(Z(I)) = \sqrt{I}.$$

*Demonstração.* Ver [14], vol.2, p.164. □

**Lema 2.20.** *Identificando $k$ com o espaço topológico $\mathbb{A}^1(k)$, temos que toda função regular $f : Y \to k$, onde $Y$ é uma variedade quase afim, é uma função contínua.*

*Demonstração.* Os fechados de $\mathbb{A}^1$ são $\emptyset$, conjunto finito de pontos e $\mathbb{A}^1$. Para mostrar que $f$ é contínua, basta mostrar que $f^{-1}$ leva fechado em fechado.

Temos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(\mathbb{A}^1) = Y$. Seja $\{P_1, \cdots, P_n\} \subset \mathbb{A}^1$. Observe que $f^{-1}(\{P_1, \cdots, P_n\}) = f^{-1}(P_1) \bigcup \cdots \bigcup f^{-1}(P_n)$. Logo, basta mostrar que $f^{-1}(P_i)$ é fechado, pois a união finita de fechados é fechado. Como $f$ é regular, então existem abertos $U_a$, com $a \in U_a$, tais que $Y = \bigcup_{a \in Y} U_a$ e $f = G/H$ em $U_a$, com $H(a) \neq 0$.

Temos que $f^{-1}(P_i) \bigcap U_a = Z(G - P_i H) \cap U_a$. De fato, se $x \in Z(G - P_1 H) \cap U_a$, então

$$G(x) - P_i H(x) = 0 \Rightarrow f(x) = G(x)/H(x) = P_i \Rightarrow x \in f^{-1}(P_i) \bigcap U_a.$$

Reciprocamente, se $x \in f^{-1}(P_i) \bigcap U_a$, então $f(x) = G(x)/H(x) = P_i$ e consequentemente $x \in Z(G - P_i H) \cap U_a$. Desta forma, $f^{-1}(P_i) \bigcap U_a$ é fechado, para todo $i = 1, \cdots, n$ e para todo $U_a$, portanto $f^{-1}(P_i)$ é fechado. □

**Definição 2.21.** Seja $X$ uma variedade quase projetiva. Uma função $f : Y \to k$ é *regular* em um ponto $P \in Y$ se existir uma vizinhança aberta $U$ com $P \in U \subset Y$ e polinômios homogêneos $G, H \in k[X_0, \cdots, X_n]$ de mesmo grau tais que $H$ é não nulo em $U$, e $f = \dfrac{G}{H}$ em $U$. Dizemos que $f$ é regular em $Y$ se $f$ é regular em todo ponto de $Y$.

**Lema 2.22.** *Identificando $k$ com o espaço topológico $\mathbb{A}^1(k)$, temos que toda função regular $f : Y \to k$, onde $Y$ é uma variedade quase projetiva, é uma função contínua.*

*Demonstração.* A prova é análoga ao caso quase afim. □

**Definição 2.23.** Seja $X$ uma variedade quase afim ou quase projetiva. O *conjunto das funções regulares* em $X$, com as operações usuais de soma e produto de funções, é um anel que será denotado por $A(X)$. Ao conjunto vazio, associamos o anel nulo.

**Exemplo 2.24.** Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim irredutível. Então

$$A(X) \simeq k[X_1, \cdots, X_n]/\mathcal{I}(X).$$

De fato, dado $F \in k[X_1, \cdots, X_n]$, a função $F|_X : X \to k$ definida por $F|_X(P) = F(P)$ é regular em $X$ e, $\varphi : k[X_1, \cdots, X_n] \to A(X)$ dada por $\varphi(F) = F|_X$ é um homomorfismo de anéis cujo núcleo é $ker(\varphi) = \{F \in k[X_1, \cdots, X_n];\ F(P) = 0, \forall\, P \in X\} = \mathcal{I}(X)$. Falta mostrar que $\varphi$ é sobrejetiva. Dados $f \in A(X)$ e $P \in X$, seja $U_P \subset X$ vizinhança de $P$ tal que $f|_{U_P} = F_P/H_P$, onde $F_P, H_P \in k[X_1, \cdots, X_n]$ e $H_P(P) \neq 0$. Então, $H_P f = F_p$ em $U_P$ e, multiplicando por um polinômio $G$ que se anula em $\mathbb{A}^n - U_P$ e tal que $G(P) \neq 0$, podemos supor que $H_P f = F_p$ em $\mathbb{A}^n$. Considere o ideal $I = \langle H \in k[X_1, \cdots, X_n]; Hf \in k[X_1, \cdots, X_n]\rangle$. Então, $\{H_P; P \in X\} \subset I$ e $Z(I) \cap X = \emptyset$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, temos que

$$1 = A_1H_1 + \cdots + A_rH_r + G_1 + \cdots + G_s;\ \ A_i \in k[X_1, \cdots, X_n] \text{ e } G_j \in \mathcal{I}(X).$$

Logo, $f(P) = [A_1(F_1f) + \cdots + A_r(F_rf)](P) = (A_1F_1 + \cdots + A_rF_1)(P)$, para todo $P \in X$.

**Definição 2.25.** Seja $k$ um corpo algebricamente fechado. Uma *variedade algébrica* sobre $k$ (ou simplesmente variedade) é qualquer variedade quase afim ou quase projetiva.

**Definição 2.26.** Sejam $X$ e $Y$ são duas variedades. Um *morfismo* $\varphi : X \to Y$ é uma aplicação contínua tal que para todo subconjunto aberto $V \subset Y$ e toda $f : V \to k$ função regular, a função $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$ é regular. Um morfismo de variedades $\varphi : X \to Y$ é chamado um isomorfismo se existir uma aplicação $\psi : Y \to X$ também morfismo, tal que $\psi \circ \varphi = Id_X$ e $\varphi \circ \psi = Id_Y$.

**Observação 2.27.** Dados duas variedades $X$ e $Y$ e $\varphi : X \to Y$ um morfismo, a aplicação $\phi^* : A(Y) \to A(X)$ definida por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ é um homomorfismo de anéis.

**Exemplo 2.28.** Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ dois subconjuntos fechados afins. A aplicação $\varphi : X \to Y$ dada por $\varphi = (F_1, \cdots, F_m)$ onde $F_1, \cdots, F_m \in k[X_1, \cdots, X_n]$ são polinômios é um morfismo.

De fato, $\varphi$ é contínua, pois $\varphi = F_1 \times \cdots \times F_m$ e cada $F_i$ é contínua(polinomial). Sejam $V \subset Y$ um subconjunto aberto e $f : V \to k$ uma função regular. Basta mostrar que $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$ é regular.

Como $f : V \to k$ é regular, então existe $F \in k[X_1, \cdots, X_m]$ tal que $f(x) = F(x)$, $\forall\, x \in V$. Se $x \in \varphi^{-1}(V)$, então $\varphi(x) = (F_1(x), \cdots, F_m(x)) \in V \subset Y$. Assim,

$$f(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) = F(F_1(x), \cdots, F_m(x)) = F(F_1, \cdots, F_m)(x).$$

Como $F(F_1, \cdots, F_m)$ é polinomial, então $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$ é regular.

Portanto $\varphi : X \to Y$ é morfismo.

**Exemplo 2.29.** Sejam $X$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ duas variedades quase projetivas e sejam $F_0, \cdots, F_m$ polinômios homogêneos de mesmo grau tais que $\forall x \in X$, $F_i(x) \neq 0$, para algum $i$. A aplicação $\varphi : X \to Y$ dada por $\varphi = (F_0 : \cdots : F_m)$ é um morfismo.

**Exemplo 2.30.** Sejam $n > 0$ um inteiro e $\mathcal{C}$ a coleção de todos os subespaços vetoriais de $k^n$ de dimensão $r$. Sejam $N := \binom{n}{r}$ e $[W]$ um elemento de $\mathcal{C}$.

Tome $\{w_1, \cdots, w_r\} \subset W$ uma base arbitrária e escreva $w_i := (a_{i1}, \cdots, a_{in})$, para todo $i$, e seja $A := (a_{ij})$ a matriz de formato $(r \times n)$.

Para cada sequência crescente $\sigma := (i_1, \cdots, i_r)$ de inteiros em $\{1, \cdots, n\}$, seja $p_\sigma$ o determinante menor de $A$ obtido considerando todas as $r$ linhas e selecionando as colunas de posição $i_1, \cdots, i_r$. Como os vetores $w_1, \cdots, w_r$ são linearmente independentes, segue que $p_\sigma \neq 0$, para alguma sequência $\sigma$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{C} & \to & \mathbb{P}^{N-1} \\ & [W] & \mapsto & (\cdots : p_\sigma : \cdots) \end{array}$$

Sejam $\{w'_1, \cdots, w'_r\} = B$ uma outra base para $W$ e $p_{\sigma'}$ o determinante menor obtido através da escolha da base B para W. Observe que $p'_\sigma = \lambda p_\sigma$, onde $\lambda$ é o determinante da matriz mudança de base.

Logo $\pi([W])$ não depende da escolha da base $w_1, \cdots, w_r$ e a função $\pi$ está bem definida, e é chamada de mergulho de Plücker e $\pi$ é morfismo, já que $p_\sigma$ é polinomial.

**Lema 2.31.** *O mergulho de Plücker é uma bijeção sobre um subconjunto fechado de* $\mathbb{P}^{N-1}$. *Tal fechado será chamado variedade Grassmaniana e denotado por* $Gr(r, n)$.

*Demonstração.* Ver [9], Teorema 1.8, p.19. □

**Definição 2.32.** Uma variedade isomorfa a um subconjunto fechado de um espaço afim será chamada de *variedade afim*. Um subconjunto fechado do espaço projetivo será chamado de *variedade projetiva*.

**Exemplo 2.33.** Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim. Dado $F \in k[X_1, \cdots, X_n]$ seja

$$X_F := X - Z(F) := \{x \in X; F(x) \neq 0\}.$$

Então $X_F$ é isomorfo a uma variedade afim.

Suponha que $X = Z(F_1, \cdots, F_m)$. Defina,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X - Z(F) & \to & \mathbb{A}^{n+1} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (x_1, \cdots, x_n, 1/F(x_1, \cdots, x_n)) \end{array}$$

Afirmamos que $Im\, \varphi = Z(F_1, \cdots, F_m, F(X_1, \cdots, X_n)X_{n+1} - 1) := Y$. De fato,

$$(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in Z(F_1, \cdots, F_m, F(X_1, \cdots, X_n)X_{n+1} - 1) \Leftrightarrow$$

$$F(x_1, \cdots, x_n)x_{n+1} - 1 = 0 \text{ e } F_j(x_1, \cdots, x_n) = 0, \forall j = 1, \cdots, m$$

$$\Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in Im\, \varphi.$$

Defina $\psi : Y \to X - Z(F)$ por $\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Temos que

$$\varphi(\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 1/F(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}).$$

Por outro lado,

$$\psi(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = \psi(x_1, \cdots, x_n, 1/F(x_1, \cdots, x_n)) = (x_1, \cdots, x_n).$$

Sendo, $\varphi$ e $\psi$, polinomiais e portanto contínuas, temos que $X - Z(F)$ é isomorfo a $Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

**Lema 2.34.** *Seja $X$ uma variedade e seja $x \in X$. Existe $U \subset X$ aberto contendo $x$ isomorfo a uma variedade afim. Tal aberto será chamado vizinhança afim de $x \in X$.*

*Suponha $x \in X \subset \mathbb{P}^n$. Pela definição de variedade quase projetiva e pela Observação 2.16, temos que $X \bigcap \mathbb{A}^n_0 = Y - Y_1$, onde $Y$ e $Y_1$ são fechados em $\mathbb{A}^n_0$. Como $x \in Y - Y_1$, existe um polinômio $F$ nas coordenadas de $\mathbb{A}^n_0$ tal que $F = 0$ em $Y_1$ e $F(x) \neq 0$. Então, $x \in Y - Z(F)$, que pelo Exemplo (2.33) isomorfa a uma variedade afim.*

**Definição 2.35.** Seja $X$ uma variedade irredutível. Definimos o *corpo de funções* $K(X)$ de $X$ da seguinte maneira. Um elemento de $K(X)$ é uma classe de equivalência de pares $\langle U, f\rangle$, onde $U$ é aberto em $X$ e $f$ é uma função regular em $U$, e onde $\langle U, f\rangle \sim \langle V, g\rangle$ se $f = g$ em $V \cap U$.

**Definição 2.36.** A *dimensão* de uma variedade quase projetiva $X$ irredutível é o grau de transcendência do corpo de funções $k(X)$ sobre $k$ e é denotado por dim $X$. A *dimensão* de uma variedade redutível é o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis.

**Exemplo 2.37.** A dimensão de $\mathbb{A}^n$ é igual a $n$.

De fato, $k(\mathbb{A}^n)$ é igual ao corpo de frações do anel de polinômios nas variáveis $X_1, \cdots, X_n$ com coeficientes em $k$, $k(X_1, \cdots, X_n)$, cujo grau de transcendência sobre $k$ é $n$.

**Exemplo 2.38.** A dimensão de $\mathbb{P}^n$ é igual a $n$.

Dado $U$ um subconjunto aberto de uma variedade irredutível $X$, é fácil ver que $k(U) = K(X)$. Então, como $\mathbb{A}^n$ é um aberto de $\mathbb{P}^n$, temos que $\dim(\mathbb{P}^n) = n$.

**Definição 2.39.** Seja $A$ um anel. Uma $A$-*álgebra* é um anel $B$ junto com um homomorfismo de anéis $i_B : A \to B$.

**Definição 2.40.** Um *homomorfismo entre duas $A$-álgebras $B$ e $C$* é um homomorfismo de anéis $\varphi : B \to C$ tal que $\varphi(i_B(a)) = i_C(a)$, para todo $a \in A$.

**Definição 2.41.** Sejam $A$ e $B$ anéis tais que $A \subset B$ e $1_A = 1_B$. Dizemos que $b \in B$ é *integral* sobre $A$ se existirem $a_1, \cdots, a_n \in A$ tais que

$$b^n + a_1 b^{n-1} \cdots + a_n = 0.$$

$B$ é dito integral sobre $A$ se todo elemento de $B$ for integral sobre $A$.

**Definição 2.42.** Um morfismo $\varphi : X \to Y$ de variedades é dito *finito* se para todo $y \in Y$ existir aberto afim $U \subset Y$, contendo $y$, tal que $\varphi^{-1}(U)$ é uma variedade afim e $k[\varphi^{-1}(U)]$ é inteiro sobre $k[U]$.

**Definição 2.43.** Um morfismo $\varphi : X \to Y$ é dito *fechado* se $\varphi(Z) \subset Y$ é fechado, para todo $Z \subset X$ fechado.

**Proposição 2.44.** *Todo morfismo finito $\varphi : X \to Y$ é fechado.*

*Demonstração.* Ver [7], Corolário do Teorema 4, p.61. □

**Definição 2.45.** Um morfismo $\varphi : X \to Y$ é dito *próprio*, se para todo inteiro $n \geq 0$, o morfismo $\phi_n := (\varphi, Id_{\mathbb{A}^n}) : X \times \mathbb{A}^n \to Y \times \mathbb{A}^n$ é fechado.

**Proposição 2.46.** *Todo morfismo próprio é fechado.*

*Demonstração.* Faça $n = 0$ na definição. □

**Definição 2.47.** Uma variedade $X$ é dita *completa* se a projeção $\pi_2 : X \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ é fechada para todo inteiro $n \geq 0$.

**Exemplo 2.48.** Toda variedade projetiva é completa.

Ver [7], Teorema 3, p.58.

**Proposição 2.49.** *Seja $\varphi : X \to Y$ for um morfismo próprio. Então $\varphi^{-1}(y)$ é completa, para todo $y \in Y$.*

*Demonstração.* Basta observar que a projeção $\pi_2 : \varphi^{-1}(y) \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ é a composição do morfismo fechado $\phi_n|_{\varphi^{-1}(y)\times\mathbb{A}^n}$ e do isomorfismo $\{y\} \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$. □

**Proposição 2.50.** *Se $X$ for uma variedade completa irredutível, então $A(X) = k$. Se, além disso, $X$ for afim, então $X = \{pt\}$.*

*Demonstração.* Ver [9],Corolário 4.50, p.113. □

**Teorema 2.51.** *Todo morfismo finito de variedades é próprio.*

*Demonstração.* Sejam $\varphi : X \to Y$ um mapa finito. Então $\phi_n = (\varphi, Id_{\mathbb{A}^n})$ é finito, para todo $n \geq 0$. De fato, sem perda de generalidade, podemos supor $X$ e $Y$ afins e, neste caso, $k[X \times \mathbb{A}^n] = k[X][X_1, \cdots, X_n]$ e $k[Y \times \mathbb{A}^n] = k[Y][X_1, \cdots, X_n]$. Pel Proposição 2.44, segue que $\phi_n$ é fechado, para todo $n \geq 0$. □

**Definição 2.52.** Seja $\varphi : X \to Y$ morfismo de variedades. Dizemos que $\varphi$ é *separável* se o morfismo $\Delta : X \to X \times_Y X := \{(x_1, x_2) \in X \times X; \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\}$ dado por $\Delta(x) = (x, x)$ for uma imersão fechada.

**Proposição 2.53.** *Seja $\varphi : X \to Y$ um morfismo de variedades afins. Então $\varphi$ é separável.*

*Demonstração.* Ver [8],Proposição 4.1, p.96. □

**Definição 2.54.** Sejam $X$ e $Y$ duas variedades quase projetivas. Um morfismo $\varphi : X \to Y$ é dito *dominante* se $\overline{\varphi(X)} = Y$.

**Teorema 2.55.** *(Teorema da Dimensão das Fibras) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação regular entre variedades irredutíveis. Suponha que $f$ é sobrejetiva,* $\dim X = n$ *e* $\dim Y = m$*. Então $m \leq n$, e*

*(i) dim $F \geq n - m$, para toda componente $F$ da fibra $f^{-1}(y)$ e todo $y \in Y$;*

*(ii) existe um aberto $U \subset Y$ não vazio tal que dim $f^{-1}(y) = n - m$, para $y \in U$.*

*Demonstração.* Ver [7], Capítulo 6, Teorema 7.

□

**Proposição 2.56.** *Sejam $X, Y$ variedades afins irredutíveis e $f : X \to Y$ um morfismo dominante com fibras finitas. Então existe $U \subset Y$ aberto denso tal que $f|_{f^{-1}U} : f^{-1}(U) \to U$ é finito.*

*Demonstração.* O homomorfismo $f^* : k[Y] \to k[X]$ é injetivo, pois $f : X \to Y$ é dominante. Logo $k[Y] \simeq f^*(k[Y]) \subset k[X]$ e $k(Y) \simeq k(f^*(k[Y])) \subset k(X)$.

Como as fibras de $f$ são finitas, temos pelo Teorema da Dimensão das Fibras que dim(X) = dim(Y) e portanto $k(X)$ é extensão algébrica de $k(f^*(k[Y]))$.

Supondo $k[X] = k[x_1, \cdots, x_n]$, vamos mostrar que, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, existe $f_i(T) \in f^*(k[Y])[T]$ tal que $f_i(x_i) = 0$. De fato, $x_i \in k(X)$ algébrico sobre $k(f^*(k[Y]))$ implica que existe

$$h_i(T) = \frac{a_{in}}{b_{in}}T^n + \cdots + \frac{a_{i1}}{b_{i1}}T + \frac{a_{i0}}{b_{i0}},$$

com $a_{ij}, b_{ij} \in f^*(k[Y])$, $a_{in} \neq 0$ e $b_{ij} \neq 0$, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Então

$$f_i(T) := c_i h_i(T) \in f^*(k[Y])[T],$$

onde $c_i := b_{i1} \cdots b_{in}$, é tal que $f_i(x_i) = 0$. Seja $a_i = f^*(b_i) \in f^*(k[Y])$ o coeficiente líder de $f_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, e seja $U \subset Y$ o aberto definido por

$$U := Y - \bigcup_{i=1}^{n} Z(b_i).$$

Temos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x \in X;\ f(x) \notin \bigcup_{i=1}^{n} Z(b_i)\} = \{x \in X;\ b_i(f(x)) \neq 0, \forall\ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{x \in X; f^*(b_i)(x) \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n\} = \{x \in X; f^*(b_i)(x) \notin \bigcup_{i=1}^{n} Z(a_i)\} \\ &= X - \bigcup_{i=1}^{n} Z(a_i). \end{aligned}$$

Observando que $f^* : k[U] \to k[f^{-1}(U)]$, que $k[Y] \subset k[U] = k[Y][\frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_n}]$ e que

$$k[f^{-1}(U)] = k[X]\left[\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right] = k\left[\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right][X] = k\left[\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right][x_1, \cdots, x_n],$$

temos que $x_i$ é raiz do polinômio mônico $f_i(T)/a_i \in f^*(k[U])[T]$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Portanto $k[f^{-1}(U)]$ é inteiro sobre $f^*(k[U])$ e $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ é um mapa finito. $\square$

# 3 SÍMBOLOS DE SEGRE

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos de $\lambda$-matrizes e forma normal, usados para definir e calcular símbolos de Segre de feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$.

## 3.1 $\lambda$-MATRIZES

**Definição 3.1.** Seja $k[\lambda]$ o anel de polinômios em uma variável com coeficientes em um corpo $k$. Uma matriz de tamanho $m \times n$ cujas entradas são elementos de $k[\lambda]$ é chamada de *$\lambda$-matriz.*

**Definição 3.2.** Uma $\lambda$-matriz $A$ é dita *regular* se $A$ é de ordem $n$ e tem inversa em $k[\lambda]$, isto é, existe uma $\lambda$-matriz $B$, de ordem $n$, tal que $AB = I = BA$.

**Teorema 3.3.** *Uma $\lambda$-matriz $M$ é regular, se e somente se,* $\det M$ *é uma constante não nula.*

*Demonstração.* Sendo $M$ uma $\lambda$-matriz regular, existe uma $\lambda$-matriz $N$, de ordem $n$, tal que $MN = I$. Já que os determinantes de $M$ e $N$ são polinômios na variável $\lambda$, concluímos que

$$\text{grau}(\det M) + \text{grau}(\det N) = 0.$$

Portanto $\det M$ tem grau zero, ou seja, é uma constante. Da relação $(\det M)(\det N) = 1$ segue que $\det M$ é não nulo.

Suponhamos agora que $M$ é uma matriz cujo determinante é uma constante $m$ não nula. Seja $N = (n_{ij})$ a matriz, $n \times n$, em que $n_{ij} = (-1)^{i+j}\, m^{-1} \det M_{ji}$, onde $M_{ji}$ é obtida da matriz $M$ retirando-se a linha $j$ e a coluna $i$. Como as entradas de $M$ são elementos de $k[\lambda]$, então $\det M_{ji}$ é elemento de $k[\lambda]$ e consequentemente $N$ é uma $\lambda$-matriz. Como $N = (\det M)^{-1}\text{Adj}(M)$, segue da álgebra matricial que $N$ é a inversa de $M$ $\square$

**Definição 3.4.** Duas $\lambda$-matrizes $A_{p\times q}$ e $B_{p\times q}$ são ditas *equivalentes* se existirem $\lambda$-matrizes $M$ e $N$ regulares ,de ordens $p$ e $q$, respectivamente, tais que

$$A = MBN \tag{3.1}$$

**Observação 3.5.** As operações elementares feitas nas linhas ou colunas de uma $\lambda$-matriz determinam $\lambda$-matrizes equivalentes a matriz. De fato,

(a) Sejam $l_1, \ldots, l_p$ um rearranjo dos inteiros 1,. . .,$p$. Considere $P$ uma matriz de ordem $p$, cuja entrada $p_{ij} = \delta_{l_ij}$, $i, j = 1, \ldots, p$ e $\delta_{l_ij}$ é o Delta de Kronecker. Observemos que $P$ é obtida da matriz identidade de ordem $p$, trocando-se duas linhas de posição. Como $\det I_p = 1$, então $\det P = \pm\, 1$. Se $B = PAI_p$, então $B$ é equivalente a $A$. Observemos que $B$ é obtida de $A$ trocando-se duas linhas de posição.

(b) Se $B$ é obtida trocando-se as colunas de $A$, pode-se mostrar de maneira análoga ao item anterior que as $\lambda$-matrizes são equivalentes.

(c) Sejam $h \in \{1, \cdots, p\}$ e $R$ a matriz de ordem $p$ cuja entrada $i, j$ é

$$r_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{para}\, i \neq h \\ f_j(\lambda), & \text{com}\, j = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, p\, \text{e}\, f_j(\lambda) \in k[\lambda] \\ a, & \text{onde}\, a \in k - \{0\}\, \text{e}\, i = j = h. \end{cases}$$

Denotemos por $R_{ij}$ a matriz obtida de $R$ retirando-se a linha $i$ e a coluna $j$. Então $R_{hh} = I_{p-1}$ e

$$\det R = 0.\det R_{1h} + \cdots + 0.\det R_{(h-1)h} + a \det R_{hh} +$$
$$+\, 0.detR_{(h+1)h} + \cdots + 0.\det R_{ph} = a.$$

Se $B = RA = RAI_{p-1}$, então $B$ é equivalente a $A$.

(d) Se multiplicarmos uma coluna de uma matriz $A$ por um escalar não nulo e em seguida adicionarmos a tal coluna um múltiplo (de um polinômio) de outra coluna obtemos uma matriz $B$ equivalente a $A$. A prova é semelhante a dada no (c) .

**Teorema 3.6.** *Seja $A_{p\times q}$ uma $\lambda$-matriz, não nula, de posto $r$. Então existem $\lambda$ - matrizes regulares, $M$ e $N$ tais que*

$$MAN = \begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & E_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*onde cada $E_i(\lambda)$ é um polinômio em $k[\lambda]$ e $E_i(\lambda)$ é um fator de $E_{i+1}(\lambda)$.*

*Demonstração.* Como $A = (a_{ij}) \neq 0$, então existem $k, l$ tais que $a_{kl} \neq 0$, com $1 \leq k \leq p$ e $1 \leq l \leq q$. Trocando-se linhas e colunas, se necessário, podemos supor que $k = 1$ e $l = 1$. Seja $t$ o grau de $a_{11}$. Existe uma $\lambda$-matriz $C = (c_{ij})$ equivalente a matriz $A$, com $c_{11}$ não nulo e de grau menor do que $t$. Isto segue das afirmações abaixo.

(i) Suponhamos que $a_{11}$ não é um fator de $a_{1j}$ , para algum $1 \leq j \leq q$. Então existem $b, c \in k[\lambda]$ tais que $a_{1j} = a_{11}\, b + c$ com $c \neq 0$ e grau $c <$ grau $a_{11}$. Subtraindo-se $b(\lambda)$ vezes a primeira coluna de $A$, da $j$-ésima coluna e em seguida trocando-se a primeira e a $j$-ésima colunas obtemos uma matriz equivalente a $A$ que possui $c$ na posição $(1, 1)$.

(ii) Suponhamos que $a_{11}$ não é um fator de $a_{i1}$, para algum $1 \leq i \leq p$. Então existem $b, c \in k[\lambda]$ tais que $a_{j1} = a_{11}\, b + c$ com $c \neq 0$ e grau $c <$ grau $a_{11}$. Subtraindo-se $b(\lambda)$ vezes a primeira linha de $A$, da $j$-ésima linha e em seguida trocando-se a primeira e a $j$-ésima linha obtemos uma matriz equivalente a $A$ que possui $c$ na posição $(1, 1)$.

(iii) Suponha que $a_{11}$ é um fator de todas as entradas, não nulas, da primeira linha e da primeira coluna de $A$, mas não é um fator de $a_{hk}$, para algum $1 < h \leq p$ e $1 < k \leq q$. Seja $a_{i1} = b_i \ . \ a_{11}$ e $a_{1j} = c_j . a_{11}$. Se subtrairmos da $i$-ésima linha de $A$ por $b_i$ vezes a primeira linha, para todo $i > 1$ e então subtrairmos da $j$-ésima coluna $c_j$ vezes a primeira coluna de $A$, para todo $j > 1$, então obtemos uma matriz $B$ equivalente a $A$ satisfazendo $b_{11}$=$a_{11}$, $b_{ij} = 0$, $j > 1$ e $b_{i1}$=0, para $i > 1$. Já que $b_{hk} = a_{hk} - c_k a_{11}$, então $b_{hk}$ não é divisível por $b_{11}$. Trocando a $h$-ésima linha de $B$ com a primeira linha obtemos uma nova matriz equivalente a $B$ tal que $c_{11} \nmid c_{hk}$. Portanto aplicando-se o procedimento i) a esta matriz obtemos uma matriz $D$ equivalente a $A$ com $d_{11} \neq 0$ e grau $d_{11}$ < grau $a_{11}$. Como grau $a_{11} \in \mathbb{N}$, este processo pode ser feito apenas um número finito de vezes. Este processo cessa quando obtivermos uma matriz $B$ equivalente a $A$ em que $b_{11}$ é um fator de todos os elementos $b_{ij}$. Aplicando iii)a $B$ obtemos uma matriz $C$ equivalente a $A$ satisfazendo $c_{i1}$=0, para $i > 1$ e $c_{1j}$=0 para $j > 1$. Mostramos assim que existem $\lambda$-matrizes $P$ e $Q$ tais que

$$PAQ = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

onde $b_{11}$ é um fator de todos os elementos de $b_{ij}$.

Se a submatriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

é não nula, podemos repetir o processo dado acima para obtermos $\lambda$-matrizes $C_2, P_1, Q_1$ e $c_{22} \in k[\lambda]$ tais que

$$P_1 B_1 Q_1 = \begin{pmatrix} c_{22} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

e cada elemento de $C_2$ contém $c_{22}$ como fator. Observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} PAQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & P_1 B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & P_1 B_1 Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

e as transformações elementares feitas na submatriz $B_1$ podem ser consideradas como transformações elementares em $A$.

Continuando este procedimento obtemos uma matriz equivalente a matriz $A$ em que os elementos fora da diagonal principal são todos nulos e a entrada $(i,i)$ da matriz divide os elementos da entrada $(i+1,i+1)$.

Finalmente, multiplicando-se cada linha da matriz por uma constante não nula, podemos assumir que $A$ é equivalente a matriz

$$MAN = \begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & E_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

onde cada $E_i(\lambda)$ é um polinômio em $k[\lambda]$ com coeficiente líder sendo 1 e $E_i(\lambda)$ é um fator de $E_{i+1}(\lambda)$.

Como $\lambda$-matrizes equivalentes tem o mesmo posto e o posto de $MAN$ é evidentemente $s$ segue que $r = s$. □

**Observação 3.7.** Veremos a seguir que os fatores $E_i(\lambda)$ obtidos no Teorema 3.6 são unicamente determinados pelos subdeterminantes de $A$.

Escrevendo $MAN = E = (e_{ij})$, $A = (a_{ij})$,$M = (m_{ij})$ e $N = (n_{ij})$ vamos mostrar que $E_1(\lambda), \dots, E_r(\lambda)$ são fatores invariantes. Segue de [2], Teorema 5, Capítulo 2, a relação

$$\begin{vmatrix} e_{i_1 j_1} & \dots & e_{i_1 j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{i_t j_1} & \dots & e_{i_t j_t} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \begin{vmatrix} m_{i_1 \lambda_1} & \dots & m_{i_1 \lambda_t} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i_t \lambda_1} & \dots & m_{i_t \lambda_t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\lambda_1 \mu_1} & \dots & a_{\lambda_1 \mu_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\lambda_t \mu_1} & \dots & a_{\lambda_t \mu_t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_{\mu_1 j_1} & \dots & n_{\mu_1 j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{\mu_t j_1} & \dots & n_{\mu_t j_t} \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Para cada $1 \leq t \leq r$, seja $D_t A$ um máximo divisor comum de todos menores $t \times t$ da $\lambda$-matriz $A$. Segue da igualdade (3.2) que $D_t A$ é um fator de cada menor de ordem $t$ da

$\lambda$-matriz $E$. Em particular, existe um polinômio $p(\lambda)$ tal que

$$E_1(\lambda)\dots E_t(\lambda) = p(\lambda)\, D_tA. \tag{3.3}$$

Da igualdade $M^{-1}EN^{-1} = A$ e de uma relação análoga à (3.2) segue que existe um polinômio $q(\lambda)$ tal que

$$D_tA = q(\lambda)\, E_1(\lambda)\dots E_t(\lambda). \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4) segue que, a menos de multiplicação por constante, $D_tA$ é igual a $E_1(\lambda)\dots E_t(\lambda)$. Consequentemente

$$\begin{cases} E_i(\lambda) &= \dfrac{D_iA}{D_{i-1}A}, \quad \text{para} \quad 1 \le i \le r \\ \\ D_0A &= 1 \end{cases}$$

Isto mostra que os $E_i(\lambda)$'s são unicamente determinados pelo máximo divisor comum dos menores de $A$.

**Definição 3.8.** Os polinômios $E_i(\lambda)$, para $i \in \{0, \cdots, r\}$ obtidos na demonstração do Teorema (3.6) são chamados de *fatores invariantes* da $\lambda$-matriz $A$.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ são todas as raízes distintas de $E_r(\lambda)$, então podemos escrever os fatores invariantes de uma $\lambda$-matriz $A$, na forma

$$E_i(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{a_{i1}} \dots (\lambda - \alpha_s)^{a_{is}},$$

onde $a_{ij} \ge 0$, $a_{rj} > 0$ e $a_{ij} \le a_{(i+1)j}$ para $1 \le i \le r-1$ e $1 \le j \le s$.

**Definição 3.9.** Os fatores

$$(\lambda - \alpha_1)^{a_{11}}, \dots, (\lambda - \alpha_1)^{a_{r1}}, \dots, (\lambda - \alpha_s)^{a_{rs}}$$

para os quais $a_{ij} > 0$ são ditos *divisores elementares* de $A$.

**Teorema 3.10.** *Duas $\lambda$-matrizes $A_{p\times q}$ e $B_{p\times q}$ são equivalentes, se e somente se, elas possuem os mesmos fatores invariantes.*

*Demonstração.* Sejam $A, B$ $\lambda$-matrizes que possuem os mesmos fatores invariantes. Pelo Teorema (3.6) existem $\lambda$-matrizes regulares $M, N, P$ e $Q$ tais que

$$MAN = \begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$PBQ = \begin{pmatrix} F_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $F_i(\lambda) = E_i(\lambda)$ segue que $MAN = PBQ$ e, como $P$ e $Q$ são regulares, obtemos $B = (P^{-1}M)A(NQ^{-1})$. Como $M$ e $N$ são regulares concluímos que $A$ e $B$ são equivalentes.

Sejam $A$ e $B$ $\lambda$-matrizes equivalentes. Então existem $\lambda$-matrizes $M$ e $N$ regulares tais que $MAN = B$. Pelo Teorema 3.6 existem $\lambda$-matrizes regulares $P$ e $Q$ tais que

$$E := PAQ = \begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & E_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma existem $\lambda$-matrizes regulares $R$ e $S$ tais que

$$F := RBS = \begin{pmatrix} F_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $F = RBS = (RM)A(NS)$

Da relação 3.2 aplicada à igualdade $F = (RM)A(NS)$ obtemos

$$\left| \; F_{t\times t} \; \right| = \sum\sum \left| \; (RM)_{t\times t} \; \right| \left| \; A_{t\times t} \; \right| \left| \; (NS)_{t\times t} \; \right|,$$

onde $(RM)_{t\times t}$, $A_{t\times t}$ e $(NS)_{t\times t}$ denotam menores $t \times t$ das matrizes $RM$, $A$ e $NS$ respectivamente. Como $RM$ e $NS$ são matrizes regulares, de uma conta análoga à feita para mostrar que $E_i(\lambda)$ é invariante, obtemos que $F_1(\lambda)\dots F_t(\lambda)$ é, a menos da multiplicação por uma constante não nula, igual ao $D_tA$.

Por outro lado, como

$$\left| \; F_{t\times t} \; \right| = \sum\sum \left| \; R_{t\times t} \; \right| \left| \; B_{t\times t} \; \right| \left| \; S_{t\times t} \; \right|,$$

onde $R_{t\times t}$, $B_{t\times t}$ e $S_{t\times t}$ denotam menores $t \times t$ das matrizes $R$, $B$ e $S$ respectivamente. Obtemos que $F_1(\lambda)\dots F_t(\lambda)$ é, a menos de multiplicação por constante não nula, igual à $D_tB$. Como $F_i(\lambda) = D_iA/D_{i-1}A$ e $F_i(\lambda) = D_iB/D_{i-1}B$, então

$$\frac{D_iA}{D_{i-1}A} = \frac{D_iB}{D_{i-1}B}.$$

Logo

$$E_i(\lambda) = \frac{D_iA}{D_{i-1}A} = \frac{D_iB}{D_{i-1}B} = F_i(\lambda),$$

a menos de constante. Portanto $A$ e $B$, a menos de multiplicação por constante, tem os mesmos fatores invariantes. □

**Observação 3.11.** Se $E_i(\lambda) = (\lambda$ - $\alpha_1)^{a_{i1}} \dots (\lambda$ - $\alpha_s)^{a_{is}}$, a relação $E_i(\lambda) = c_iF_i(\lambda)$, garante que $F_i$ e $E_i$ possuem as mesmas raízes com a mesma multiplicidade, para todo $i$.

**Teorema 3.12.** *Sejam $A$ e $B$ $\lambda$-matrizes de ordem $n$, não nulas, da forma $A = \lambda A_1 - A_2$ e $B = \lambda B_1 - B_2$, onde $A_1, A_2, B_1$ e $B_2$ são matrizes de ordem $n$ com entradas em $k$ e $B_1$ é não singular. Se $A$ e $B$ são $\lambda$-matrizes equivalentes, então existem matrizes $P$ e $Q$ não singulares, com entradas em $k$, tais que $PAQ = B$.*

*Demonstração.* Como $A$ e $B$ são equivalentes, então existem $\lambda$-matrizes $M$ e $N$, de ordem $n$ e regulares, tais que $MAN = B$.

Escrevamos $M$ na forma $M = M_0 + \lambda M_1 + \cdots + \lambda^r M_r$, onde $M_i$ são matrizes de ordem $n$ com entradas em $k$.

Sejam $X = B_2 B_1^{-1}$, $P = M_0 + XM_1 + \cdots + X^r M_r$ e

$$P' = \lambda^{r-1} M_r + \lambda^{r-2}(M_{r-1} + XM_r) + \cdots + (M_1 + XM_2 + \cdots + X^{r-1} M_r).$$

Então

$$\begin{aligned}
&(\lambda I_n - X)P' + P = \\
&= (\lambda I_n - X)[\lambda^{r-1} M_r + \lambda^{r-2}(M_{r-1} + XM_r) + \cdots + (M_1 + XM_2 + \cdots + X^{r-1} M_r)] + P = \\
&= \lambda^r M_r + \lambda^{r-1}(M_{r-1} + XM_r) + \lambda^{r-2}(M_{r-2} + XM_{r-1} + X^2 M_r) + \cdots + \lambda(M_1 + XM_2 + X^{r-1} M_r) + \\
&- \lambda^{r-1} M_r - \lambda^{r-2}(XM_{r-1} + X^2 M_r) - \cdots - (XM_2 + \cdots + \lambda X^{r-1} M_r) - M_1 X - \cdots - X^r M_r + \\
&\quad + M_0 + M_1 X + \cdots + X^r M_r = \lambda^r M_r + \lambda^{r-1} M_{r-1} + \cdots + \lambda M_1 + M_0 = M. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Da relação (3.5) obtemos que

$$M = (\lambda I_n - X)P' + P = (\lambda B_1 B_1^{-1} - B_2 B_1^{-1})P' + P = (\lambda B_1 - B_2)B_1^{-1} P' + P = BB_1^{-1} P' + P.$$

Fazendo $P_1 = B_1^{-1} P'$ segue que

$$M = BP_1 + P. \tag{3.6}$$

Analogamente, escrevamos $N$ na forma $N = N_0 + N_1 \lambda + \ldots + N_s \lambda^s$.

Sejam $Y = B_1^{-1} B_2$ e $Q = N_0 + N_1 Y + \cdots + N_s Y^s$ e

$$Q' = N_s \lambda^{s-1} + (N_{s-1} + N_s Y)\lambda^{s-2} + \ldots + (N_1 + N_2 Y + \ldots + N_s Y^{s-1}).$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
N = Q'(\lambda I_n - Y) + Q = Q_1 B + Q = Q'(\lambda B_1^{-1} B_1 - B_1^{-1} B_2) + Q = \\
= Q' B_1^{-1}(\lambda B_1 - B_2) + Q = Q' B_2^{-1} B + Q.
\end{aligned}$$

Fazendo $Q_1 = Q'B_1^{-1}$ temos que

$$N = Q_1 B + Q, \tag{3.7}$$

Segue de (3.6) e (3.7) que

$$PAQ - B = (M - BP_1)A(N - Q_1B) - B.$$

Além disso, usando o fato que $MAN = B$ obtemos

$$PAQ - B = MAN - MAQ_1B - BP_1AN + BP_1AQ_1B - B =$$

$$= -BN^{-1}Q_1B - BP_1M^{-1}B + BP_1AQ_1B,$$

ou seja,

$$PAQ - B = B(P_1AQ_1 - N^{-1}Q_1 - P_1M^{-1})B$$

Se $R := P_1AQ_1 - N^{-1}Q_1 - P_1M^{-1}$, então reescrevemos a igualdade anterior na forma

$$PAQ - B = BRB. \tag{3.8}$$

Suponhamos por absurdo que $R \neq 0$, então podemos escrever $R$ na forma

$$R = R_0 + R_1\lambda + \ldots + R_t\lambda^t,$$

sendo $R_i$´s matrizes com entradas em $k$, $R_t \neq 0$ e $t \geq 0$.

Vendo a igualdade (3.8) e as matrizes escritas como polinômios em $\lambda$ com coeficientes no anel das matrizes de ordem $n$ com entradas em $k$, temos que o lado esquerdo da equação tem no máximo grau 1 em $\lambda$, pois $A$ e $B$ tem grau 1 e $P$ e $Q$ tem grau 0, enquanto o lado direito tem grau$(t+2) \geq 2$. O que é um absurdo. Logo $R = 0$ e consequentemente $PAQ = B$. Como $P$ e $Q$ não dependem de $\lambda$, então $PA_1Q = B_1$ e $PA_2Q = B_2$. Observemos que como $B_1$ é não singular, segue que $P$ e $Q$ são não singulares. □

**Definição 3.13.** Uma *forma quadrática* em $\mathbb{P}^n$ é um polinômio homogêneo de grau 2 em $n+1$ variáveis, ou seja,

$$Q(X_0, \cdots, X_n) = a_{00}X_0^2 + \cdots + a_{nn}X_n^2 + a_{01}X_0X_1 + \cdots + a_{(n-1)n}X_{n-1}X_n.$$

**Observação 3.14.** Toda forma quadrática $Q(X_0, \cdots, X_n)$ pode ser escrita na forma $Q(X_0, \cdots, X_n) = X^tAX$, onde $A$ é uma matriz simétrica de ordem $n+1$ com entradas em $k$ e $X^t = (X_0 \cdots X_n)$. De fato,

$$\begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \dots & \dots & \frac{a_{0n}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{0n}}{2} & \frac{a_{1n}}{2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00}X_0 + \frac{1}{2}a_{01}X_1 + \cdots + \frac{1}{2}a_{0n}X_n \\ \frac{1}{2}a_{01}X_0 + a_{11}X_1 + \cdots + \frac{1}{2}a_{1n}X_n \\ \vdots \\ \frac{1}{2}a_{0n}X_0 + \frac{1}{2}a_{1n}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{00}X_0^2 + \frac{a_{01}}{2}X_1X_0 + \cdots + \frac{a_{0n}}{2}X_0X_n + \frac{a_{01}}{2}X_1X_0 + a_{11}X_1^2 + \cdots + \frac{a_{0n}}{2}X_0X_n +$$
$$+ \frac{a_{1n}}{2}X_1X_n + \cdots + a_{nn}X_n^2 = Q(X_0, \dots, X_n).$$

**Teorema 3.15.** *Sejam $X^tAX$ e $X^tBX$ duas formas quadráticas em $X_0, \cdots, X_n$, onde $A$ e $B$ são matrizes simétricas, de ordem $n+1$, e $B$ uma matriz não singular. Existe uma mudança de coordenadas $X = PY$ que transforma $X^tAX$ e $X^tBX$ nas formas quadráticas $Y^tCY$ e $Y^tDY$, respectivamente, se e somente se, as $\lambda$-matrizes $\lambda B - A$ e $\lambda D - C$ tem os mesmos divisores elementares.*

*Demonstração.* Da relação

$$X^tAX = (PY)^tAPY = Y^t(P^tAP)Y,$$

segue que $C = P^tAP$. De forma análoga, podemos concluir que $D = P^tBP$.

Como

$$\lambda D - C = \lambda P^tBP - P^tAP = P^t(\lambda B - A)P,$$

segue que $\lambda D - C$ e $\lambda B - A$ são equivalentes. Do Teorema (3.10), segue que $\lambda B - A$ e $\lambda D - C$ possuem os mesmos divisores elementares.

Reciprocramente, suponhamos que $\lambda B - A$ e $\lambda D - C$ possuem os mesmos divisores elementares. Do Teorema (3.12) segue que existem matrizes $M$ e $N$ não singulares tais que

$$M(\lambda D - C)N = \lambda B - A,$$

ou seja, tais que $MCN = A$ e $MDN = B$. Como $C$ é simétrica temos que

$$A = A^t = (MCN)^t = N^t C^t M^t = N^t C M^t. \tag{3.9}$$

Multiplicando-se a equação (3.9) por $(M^t)^{-1}N$ e usando que $MCN = A$ obtemos que

$$A(M^{-1})^t N = N^t C N = N^t M^{-1} A N^{-1} N = N^t M^{-1} A.$$

Da mesma forma temos que $N^t D M^t = B$ e $B(M^{-1})^t N = N^t M^{-1} B$.

Seja $Q = N^t M^{-1}$, então $Q$ é não singular e $QA = AQ^t$ e $QB = BQ^t$.

Afirmamos que $Q^r A = A(Q^t)^r$, para todo $r \in \mathbb{Z}$ com $r \geq 2$. De fato, seja $r = 2$. Multiplicando-se a relação $QA = AQ^t$ por $Q$, obtemos que

$$Q^2 A = QAQ^t = (QA)Q^t = A(Q^t)^2.$$

Suponhamos que $Q^{r-1}A = A(Q^t)^{r-1}$, então

$$Q^r A = Q(Q^{r-1}A) = Q(A(Q^t)^{r-1}) = (QA)(Q^t)^{r-1} = (AQ^t)(Q^t)^{r-1} = A(Q^t)^r.$$

Analogamente, mostra-se que $Q^r B = B(Q^t)^r$, para todo $r \in \mathbb{Z}$ com $r \geq 2$.

Mais geralmente, se $F(\lambda) = a_o + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n \in k[\lambda]$, então

$$\begin{aligned} F(Q)A = (a_o I + a_1 Q + \cdots + a_n Q^n)A = A(a_o I + a_1 Q^t + \cdots + a_n (Q^t)^n = \\ = A(a_o I + a_1 Q + \cdots + a_n Q^n)^t A = A(F(Q))^t. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Também é válida a relação $F(Q)B = B(F(Q))^t$.

Para $F(\lambda) = \det(\mathrm{Q} - \lambda \mathrm{I_n})$, temos $F(0) \neq 0$, pois $Q$ é não singular. Por [2], Teorema 2, Capítulo 3, §8, existem polinômios $G(\lambda)$, $H(\lambda) \in k[\lambda]$ tais que

$$G(\lambda)^2 - \lambda = F(\lambda)H(\lambda).$$

Logo $G(Q)^2 - Q = 0$, ou seja, $G(Q)^2 = Q$. Tomando-se $S = G(Q)$ teremos que $S^2 = Q$.

Além disso, usando (3.10) temos que $SA = AS^t$ e $SB = BS^t$. Portanto, como $Q = N^t M^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned} C = M^{-1}AN^{-1} = (N^{-1})^t QAN^{-1} = (N^{-1})^t S^2 AN^{-1} = \\ = (N^{-1})^t S(SA)N^{-1} = (N^{-1})^t SAS^t N^{-1} = (S^t N^{-1})^t A(S^t N^{-1}) \end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $D = (S^t N^{-1})^t B (S^t N^{-1})$.

Como $N^{-1}$ e $S^t$ são não singulares, então $P = S^t N^{-1}$ é uma matriz não singular para a qual valem as relações

$$C = P^t A P \quad \text{e} \quad D = P^t B P.$$

Além disso, se $X = PY$, então $X^t A X = Y^t C Y = Y^t P^t A P Y$.

$\square$

### 3.1.1 Forma Normal

Sejam $A$ e $B$ matrizes de ordem $n$ com entradas em $k$ e $B$ não singular. Suponhamos que a $\lambda$-matriz $\lambda B - A$ tem determinante não nulo. Pelo Teorema (3.6) temos que existem $\lambda$-matrizes $M$ e $N$ regulares tais que

$$M(\lambda B - A)N = \begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

onde $E_i$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, são os fatores invariantes de $\lambda B - A$. Escrevamos

$$E_i = (\lambda - \alpha_1)^{a_{i1}} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{a_{is}},$$

onde $\alpha_j$, com $j \in \{1, \cdots, s\}$, são todas as raízes distintas de $E_n(\lambda)$. Então $\sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} a_{kl} = n$. Como $E_i(\lambda) \mid E_{i+1}(\lambda)$, então $a_{ij} \le a_{(i+1)j}$, $\forall\ i \in \{1, \cdots, n-\ 1\ \}$ e para qualquer $j \in \{1, \cdots, s\}$.

Dados um número real $\alpha$ e um número natural $e$, definimos as matrizes $P_e$ e $Q_e$, de ordem $e$, como sendo

$$P_e(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ 0 & \iddots & \iddots & & \\ \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que $a_{i_1 j} \geq \ldots \geq a_{i_{l(j)} j}$ todos expoentes dos divisores elementares de $\lambda B - A$ referentes à raiz $\alpha_j$.

$$P = \begin{pmatrix} P_{a_{i_1 1}}(\alpha_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{a_{i_{l(1)} 1}}(\alpha_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & P_{a_{i_1 s}}(\alpha_s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & P_{a_{i_{l(s)} s}}(\alpha_s) \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{a_{i_1 1}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_{a_{i_{l(1)} 1}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Q_{a_{i_1 s}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Q_{a_{i_{l(s)} s}} \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Afirmamos que os fatores elementares de $\lambda B - A$ e de $\lambda Q - P$ são iguais. De fato, seja $R_{kl} = \lambda Q_{a_{kl}} - P_{a_{kl}}(\alpha_l)$. Temos para cada $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$F_{n-r}(\lambda) = \frac{D_{n-r}(P - \lambda Q)}{D_{n-r-1}(P - \lambda Q)} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ l(j) \geq r+1}} \prod_{r+1 \leq k \leq l(j)} \det R_{i_k j}}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ l(j) \geq r+2}} \prod_{r+2 \leq k \leq l(j)} \det R_{i_k j}} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ l(j) \geq r+1}} \det R_{i_{r+1} j} = E_{n-r}(\lambda).$$

Sendo $B$ não singular, pelo Teorema (3.15), segue que existe uma mudança de coordenadas $X = SY$ tal que $\lambda Q - P = S^t(\lambda B - A)S$. Chamaremos o par $(P, Q)$ de *forma normal*.

## 3.2 FEIXE DE QUÁDRICAS

**Definição 3.16.** O *feixe de quádricas* em $\mathbb{P}^n$, determinado por duas matrizes $A$ e $B$ simétricas, de ordem $n+1$, denotado por $\mathcal{P}$, é o conjunto

$$\mathcal{P} = \{\, \lambda A + \mu B \quad | \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \,\}.$$

**Observação 3.17.** Se $C$ e $D$ são elementos do feixe de quádricas $\mathcal{P}$ que são linearmente independentes, então o feixe de quádricas determinado por $C$ e $D$ é igual a $\mathcal{P}$.

**Definição 3.18.** O *discriminante do feixe de quádricas* $\mathcal{P}$, determinado pelas matrizes simétricas $A$ e $B$, denotado por $\Delta$, é a forma binária nas variáveis $\lambda$ e $\mu$ dado por

$$\Delta = \Delta(\lambda, \mu) := \det(\lambda A + \mu B).$$

**Observação 3.19.** O discriminante $\Delta$ de um feixe de quádricas depende da escolha das matrizes $A$ e $B$ que o determinam. Contudo as raízes de $\Delta$ são unicamente determinadas a menos de um isomorfismo de $\mathbb{P}^1$. Além disso, se $\Delta$ é não nulo, então $\Delta$ é uma forma binária(ver Definição 4.15) de grau igual à ordem das matrizes $A$ e $B$.

De fato, sejam $A_1 = \lambda_0 A + \mu_0 B$ e $B_1 = \lambda_1 A + \mu_1 B$ dois elementos do feixe $\mathcal{P}$ linearmente independentes. Denotemos por $\mathcal{P}'$ o feixe de quádricas determinado por $A_1$ e $B_1$.

Consideremos a função $T : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ definida por

$$T(\alpha : \theta) = (\alpha\lambda_0 + \theta\lambda_1 : \alpha\mu_0 + \theta\mu_1).$$

Observe que $T$ é bijeção. De fato, consideremos a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Como $A_1$ e $B_1$ são linearmente independentes, podemos afirmar que $\det M \neq 0$.

Suponhamos que $T(\alpha_1 : \theta_1) = T(\alpha_2 : \theta_2)$. Então existe um elemento $t \in k$, não nulo, tal que

$$(\alpha_1\lambda_0 + \theta_1\lambda_1 : \alpha_1\mu_0 + \theta_1\mu_1) = t(\alpha_2\lambda_0 + \theta_2\lambda_1 : \alpha_2\mu_0 + \theta_2\mu_1),$$

ou seja,

$$\begin{cases} (\alpha_1 - t\alpha_2)\lambda_0 + (\theta_1 - t\theta_2)\lambda_1 & = & 0 \\ (\alpha_1 - t\alpha_2)\mu_0 + (\theta_1 - t\theta_2)\mu_1 & = & 0 \end{cases}$$

Como $\det M \neq 0$, segue que $\alpha_1 - t\alpha_2 = 0$ e $\theta_1 - t\theta_2 = 0$. Logo $(\alpha_1 : \theta_1) = (\alpha_2 : \theta_2)$.

Dado $(\beta : \gamma) \in \mathbb{P}^1$, se $(\alpha, \theta) = M^{-1}(\beta, \gamma)^t$, então $T(\alpha : \theta) = (\beta : \gamma)$. Portanto $T$ é uma bijeção.

Afirmamos que $T^{-1}$ leva uma raiz do discriminante $\Delta$ de $\mathcal{P}$ em uma raiz do discriminante $\Delta'$ de $\mathcal{P}'$. De fato, seja $(a_0 : b_0) \in \mathbb{P}^1$ uma raiz de $\Delta$. Suponha que $T^{-1}(a_0 : b_0) = (c_0 : d_0)$. Então

$$c_0 A_1 + d_0 B_1 = (c_0\lambda_0 + d_0\lambda_1)A + (c_0\mu_0 + d_0\mu_1)B = a_0 A + b_0 B.$$

Portanto $\Delta(c_0 A_1 + d_0 B_1) = \Delta(a_0 A + b_0 B) = 0$, ou seja, $(c_0 : d_0)$ é uma raiz de $\Delta'$.

Além disso, seja $(c : d)$ uma raiz de $\Delta'$. Então

$$\Delta(T(c : d)) = \det((a\lambda_0 + b\lambda_1)A + (a\mu_0 + b\mu_1)B) = \det(cA_1 + dB_1) = \Delta'(c : d) = 0.$$

Portanto a aplicação $T$ leva raiz de $\Delta'$ em raiz de $\Delta$.

Observamos ainda que as raízes de $\Delta'$ tem a mesma multiplicidade das raízes correspondentes de $\Delta$.

**Definição 3.20.** Seja $\Delta$ o discriminante do feixe de quádricas $\mathcal{P}$ determinado pelas matrizes $A$ e $B$, de ordem $n+1$, com entradas em $k$. Suponhamos que $\Delta$ não é identicamente nulo e seja $(\lambda_0 : \mu_0)$ é raiz de $\Delta$. Seja $d$ um número inteiro não negativo para o qual todos os subdeterminantes de ordem $n+1-d$, de $\lambda_0 A + \mu_0 B$, se anulam, mas nem todos os seus subdeterminantes de ordem $n - d$ se anulam. Definimos, para $0 \leq i \leq d$, $l_i$ como sendo a menor das multiplicidades de $(\lambda_0 : \mu_0)$ como raiz dos subdeterminantes de ordem $n + 1 - i$ da matriz $\lambda A + \mu B$ e $l_{d+1} = 0$. Os números $e_i := l_i - l_{i+1}$ para $0 \leq i \leq d$ são ditos *números característicos* de $\Delta$ associados à raiz $(\lambda_0 : \mu_0)$.

**Observação 3.21.** Para cada $0 \leq i \leq d$, vale a relação que $l_i > l_{i+1}$. Portanto $e_i > 0$. Além disso,

$$\Delta(\lambda, \mu) = (\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_0} \dots (\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_d} \Delta_1(\lambda, \mu),$$

com $\Delta_1(\lambda_0, \mu_0) \neq 0$.

Os fatores $(\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_i}$ são chamados de *divisores elementares* do feixe $\mathcal{P}$.

**Definição 3.22.** Suponha que as raízes distintas de $\Delta$ são $(\lambda_1 : \mu_1), \dots, (\lambda_r : \mu_r)$. Para cada $j \in \{1, \cdots, r\}$, sejam $e_0^j, \cdots, e_{d_j}^j$ os números característicos de $\Delta$ associados à raiz

$(\lambda_j : \mu_j)$. Supondo que $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_r$, o *número de Segre* do feixe $\mathcal{P}$ é definido como sendo

$$[(e_0^1, \ldots, e_{d_1}^1), (e_0^2, \ldots, e_{d_2}^2), \ldots, (e_0^r, \ldots, e_{d_r}^r)].$$

**Observação 3.23.** Se $d_i = 0$ para alguma raiz $(\lambda_i : \mu_i)$ de $\Delta$, omitiremos no Símbolo de Segre os parênteses da parte referente a tal raiz.

**Exemplo 3.24.** Sejam $A$ e $B$ as matrizes dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Então $\Delta(\lambda, \mu) = \det(\lambda A + \mu B) = -\frac{\mu^4 a}{4}$ e (1:0) é a única raiz de $\Delta$. Além disso, $d = 1$, $l_0 = 4$, $l_1 = 1$ e $l_2 = 0$. Logo $e_0 = 3$ e $e_1 = 1$. Portanto o símbolo de Segre deste feixe é $[(3, 1)]$.

**Definição 3.25.** Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$, determinados pelos pares de matrizes simétricas $A$, $B$ e $C$, $D$, respectivamente. Dizemos que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são *projetivamente equivalentes* se existe uma mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^n$ que transforma $\mathcal{P}_1$ em $\mathcal{P}_2$.

**Teorema 3.26.** *Consideremos dois feixes de quádricas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ em $\mathbb{P}^n$ cujos discriminantes são não nulos. Sejam $(\lambda_i^1, \mu_i^1)$ e $(\lambda_i^2, \mu_i^2)$ raízes dos discriminantes de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.*

*Então $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são projetivamente equivalentes, se e somente se, eles tem o mesmo símbolo de Segre e existe um automorfismo de $\mathbb{P}^1$ levando $(\lambda_i^1 : \mu_i^1)$ em $(\lambda_i^2 : \mu_i^2)$;*

*Demonstração.* Denotemos o discriminante de $\mathcal{P}_i$ por $\Delta_i$.

Suponhamos que o feixe $\mathcal{P}_1$ é determinado pelas matrizes $A$ e $B$ e que $\mathcal{P}_2$ é determinado pelas matrizes $C$ e $D$. Como $\Delta_1$ não é identicamente nulo, podemos supor que $B$ é não singular. Logo $(0 : 1)$ não é uma raiz de $\Delta_1$. Portanto $\lambda_i^1 \neq 0$ para todo $i$. Sejam $\alpha_i^1 = \mu_i^1 / \lambda_i^1$ e consideremos a $\alpha$-matriz $A + \alpha B$.

Mostraremos inicialmente uma relação entre os divisores elementares do feixe de quádricas $\mathcal{P}_1$ e os divisores elementares da $\alpha$-matriz $A + \alpha B$. Pelo Teorema 3.6, existem matrizes $M_1$ e $N_1$ invertíveis, com coeficientes em $k$, tais que

$$M_1(A+\alpha B)N_1 = \begin{pmatrix} E_1^1(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2^1(\alpha) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{n+1}^1(\alpha) \end{pmatrix},$$

onde $E_1^1(\alpha), \dots, E_{n+1}^1(\alpha)$ são polinômios na variável $\alpha$. Observemos inicialmente que $\alpha_1^1, \cdots, \alpha_s^1$ são todas as raízes distintas de $E_{n+1}^1(\alpha)$. Escrevamos

$$E_t^1(\alpha) = (\alpha - \alpha_1^1)^{a_{t1}^1} \dots (\alpha - \alpha_s^1)^{a_{ts}^1}$$

sendo $a_{t1}^1, \dots, a_{ts}^1$ números inteiros não negativos e $t \in \{1, \dots, n\}$. Como $E_t(\alpha)|E_{t+1}(\alpha)$, podemos afirmar que

$$a_{ti}^1 \leq a_{(t+1)i}^1, \text{ para cada } 1 \leq i \leq s. \tag{3.12}$$

Fixemos uma raiz $(1 : \alpha_j)$ de $\Delta_1$. Pela Definição 3.20, tendo como referência a raiz fixada, temos que

$$l_i^{j1} = \min_{\sigma \in S_{n+1-i}} \{a_{\sigma(1)j}^1 + \cdots + a_{\sigma(n+1-i)j}^1\},$$

onde $S_{n+1-i}$ denota o conjunto de todas as permutações de $n+1-i$ elementos. Das relações (3.12) segue que $l_i^{j1} = a_{1j}^1 + \cdots + a_{(n+1-i)j}^1$. Observemos agora que

$$e_i^{j1} = l_i^{j1} - l_{i-1}^{j1} = (a_{1j}^1 + \cdots + a_{(n+1-i)j}^1) - (a_{1j}^1 + \cdots + a_{(n-i)j}^1) = a_{(n+1-i)j}^1.$$

Portanto os números característicos $e_i^{j1}$ da raiz $(1 : \alpha_j^1)$ são iguais à multiplicidade da raiz $\alpha_j^1$ em $E_{n+1-i}$.

Suponhamos agora que os feixes possuem os mesmos símbolos de Segre. Logo os divisores irredutíveis dos feixes $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são, respectivamente, da forma

$$(\lambda\mu_i^1 - \lambda_i^1\mu)^{e_0^{i1}}, \dots, (\lambda\mu_i^1 - \lambda_i^1\mu)^{e_{d(i)}^{i1}}$$

$$(\lambda\mu_i^2 - \lambda_i^2\mu)^{e_0^{i2}}, \dots, (\lambda\mu_i^2 - \lambda_i^2\mu)^{e_{d(i)}^{i2}},$$

onde $e_l^{i1} = e_l^{i2}$ para todo $l$. Isto implica que os divisores elementares de $\alpha$-matrizes $A+\alpha B$ e $C+\alpha D$ são

$$(\alpha - \alpha_1^1)^{e_0^{i1}}, \dots, (\alpha - \alpha_s^1)^{e_{d(i)}^{i1}}$$

$$(\alpha - \alpha_1^2)^{e_0^{i2}}, \dots, (\alpha - \alpha_s^2)^{e_{d(i)}^{i2}}.$$

Como existe um automorfismo de $\mathbb{P}^1$ que leva as raízes de $\Delta_1$ nas raízes de $\Delta_2$, vemos que as duas matrizes possuem os mesmos divisores elementares. Logo pelo Teorema 3.10 segue que os feixes são projetivamente equivalentes. (Mantivemos as notações de $\mathcal{P}_1$ para $\mathcal{P}_2$ apenas trocando-se um dos índices superiores por 2.)

Suponhamos que os feixes são projetivamente equivalentes. Isso significa que as formas quadráticas definidas por $A$, $B$ e $C$ e $D$ satisfazem as hipóteses do o Teorema 3.10. Logo as $\alpha$-matrizes $A+\alpha B$ e $C+\alpha D$ possuem os mesmos divisores elementares. Consequentemente também possuem os mesmos fatores invariantes. Portanto existe um automorfismo de $\mathbb{P}^1$ que manda as raízes de $E^1_{n+1}(\lambda)$ nas raízes de $E^2_{n+1}(\lambda)$. □

**Observação 3.27.** Seja $\mathcal{P}$ um feixe de quádricas de $\mathbb{P}^n$, determinado pelas matrizes $A$ e $B$. Suponhamos que o discriminante $\Delta$ de $\mathcal{P}$ é não nulo e sejam $(\lambda_1 : \mu_1), \ldots, (\lambda_s : \mu_s)$ as suas raízes distintas. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $B$ é não singular. Sejam $E_t(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^{a_{t1}} \ldots (\alpha - \alpha_s)^{a_{t1}}$, $1 \leq t \leq n+1$, os fatores invariantes da matriz $A + \alpha B$, onde $\alpha_i = \mu_i/\lambda_i$. Segue da demonstração do Teorema 3.26 que o símbolo de Segre de $\mathcal{P}$ é

$$[(a_{(n+1)1}, \ldots, a_{d_1 1}), \ldots, (a_{(n+1)s}, \ldots, a_{d_s s})].$$

**Observação 3.28.** Sabemos que se $(P, Q)$ é a forma normal de uma $\lambda$-matriz $\lambda B - A$, então ambas tem o mesmos divisores elementares. Usando a Observação 3.27 concluímos que para determinarmos o símbolo de Segre do feixe quádricas $\mathcal{P}$, determinado por matrizes $A$ e $B$, podemos usar a $\lambda$-matriz $\lambda Q - P$.

**Observação 3.29.** Os números característicos que formam o símbolo de Segre de um feixe de quádricas $\mathcal{P} = \lambda Q + \mu P$, onde $P$ e $Q$ satisfazem (3.11), referentes a raiz $\alpha_1$ do discriminante de $\mathcal{P}$, são iguais as ordens dos blocos de $P$ correspondentes a $\alpha$.

Seja $b$ o número de blocos da matriz $\lambda Q + P$ referentes a raiz $\alpha_1$ do discriminante de $\mathcal{P}$, ou seja, $b = l(1)$. Afirmamos que o número $d$, da Definição 3.20, é $b - 1$. Os casos $b = 1$ e $b = 2$ são bem simples de serem verificados, analisaremos a seguir apenas o caso em que $b > 2$. A afirmação segue das observações seguintes.

(a) Os blocos da matriz $\alpha_1 Q + P$ correspondentes a $\alpha_1$ tem determinante nulo e os demais tem determinante não nulo.

(b) Retirando-se a primeira linha e primeira coluna de cada bloco $R_{i_1 1}(\alpha_1), \ldots, R_{i_{l(1)} 1}(\alpha_1)$ obtemos submatrizes cujos determinantes são iguais a 1. Considerando-se estas operações na matriz $\alpha_1 Q + P$ obtemos uma submatriz de posto $(n+1) - b$ cujo determinante é não nulo.

(c) Se retirarmos $(n+1) - (b-1)$ linhas e colunas de $\alpha_1 Q + P$, pode ocorrer uma das seguintes situações:

   (i) Todos os blocos $R_{i_1 1}(\alpha_1), \ldots, R_{i_{l(1)} 1}(\alpha_1)$ ficam inalterados. Neste caso, o determinante da submatriz será 0.

   (ii) Pelo menos um dos blocos $R_{i_1 1}(\alpha_1), \ldots, R_{i_{l(1)} 1}(\alpha_1)$ terá apenas uma linha ou uma coluna retirada. Nesse caso, a submatriz de $\alpha_1 Q + P$ obtida terá um subbloco com um a linha ou uma coluna nula e portanto seu determinante será nulo.

Observamos que ao retirarmos a primeira linha e a primeira coluna de $\alpha_1 Q \ + P$, o determinante da nova matriz terá $\alpha_1$ como uma raiz de multiplicidade $b - a_{i_1 1}$. Entretanto se retirarmos a linha $i$ e a coluna $j$, com $i \neq j$, o determinante da nova matriz será zero ou terá $\alpha_1$ como uma raiz de multiplicidade maior que $b - a_{i_1 1}$. Com isso concluimos que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} l_0 & = & b \\ l_1 & = & b - a_{i_1 1} \\ l_2 & = & b - a_{i_1 1} - a_{i_2 1} \\ \vdots & & \\ l_{b-1} & = & a_{i_{l(1)} 1} \\ l_b & = & 0. \end{array} \right.$$

Portanto os números característicos do feixe são

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} e_0 & = & b - b + a_{i_1 1} & = & a_{i_1 1} \\ e_1 & = & b - a_{i_1 1} - b + a_{i_1 1} + a_{i_2 1} & = & a_{i_2 1} \\ \vdots & & & & \\ e_{b-1} & = & a_{i_{l(1)} 1} & & \end{array} \right.$$

Logo a parte do símbolo de Segre de $\mathcal{P}$ correspondente a raiz $\alpha_1$ é

$$(a_{i_1 1}, \ldots, a_{i_{l(1)} 1})$$

# 4 ESPAÇOS DE MODULI DE FEIXES DE QUÁDRICAS E DE FORMAS BINÁRIAS

O objetivo deste capítulo é relacionar o espaço de Moduli de feixes de quádricas em $\mathbb{P}^n$ e o espaço de Moduli de formas binárias de grau $n+1$.

## 4.1 AÇÕES DE GRUPOS ALGÉBRICOS

Nesta seção apresentaremos um pouco da teoria de ações de grupos abordando a noção de quociente categórico.

**Definição 4.1.** Um *grupo algébrico* é um grupo G com uma estrutura de variedade algébrica tal que as aplicações:

$$\begin{array}{rccc} m: & G \times G & \to & G \\ & (g, g') & \mapsto & gg' \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} i: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

são morfismos de variedades algébricas.

**Definição 4.2.** Um *homomorfismo de grupos algébricos* é uma aplicação que é simultaneamente um homomorfismo de grupos e um morfismo de variedades algébricas.

Daremos a seguir dois exemplos clássicos de grupos algébricos.

Seja $M_n$: $=$ {matrizes quadradas de ordem $n$ com entradas em um corpo $k$ }. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi: & M_n & \to & A^{n^2} \\ & A = (a_{ij}) & \mapsto & (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}) \end{array}$$

é uma bijeção que define em $M_n$ uma estrutura de variedade algébrica.

**Exemplo 4.3.** Seja $GL_n(k) := \{A \in M_n; \det(\mathrm{A}) \neq 0\}$. Então $GL_n(k)$ está em bijeção com o aberto principal $U = \mathbb{A}^{n^2} - Z(\det)$ de $\mathbb{A}^{n^2}$, onde

$$\det(\mathrm{X_{11}}, \cdots, \mathrm{X_{ij}}, \cdots, \mathrm{X_{nn}}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S_n}} \epsilon(\sigma) \mathrm{X}_{1\sigma(1)} \cdots \mathrm{X}_{\mathrm{n}\sigma(\mathrm{n})} \in \mathrm{k}[\mathrm{X_{11}}, \cdots, \mathrm{X_{nn}}],$$

$S_n$ é grupo de permutações de $n$ elementos e $\epsilon(\sigma)$ é o sinal da permutação $\sigma$.

Logo $GL_n(k)$, com a topologia induzida de, é uma subvariedade de $M_n \simeq \mathbb{A}^{n^2}$.

Veremos que $GL_n(k)$ é grupo algébrico com as aplicações:

$$\begin{array}{llcl} m: & GL_n(k) \times GL_n(k) & \to & GL_n(k) \\ & ((a_{11}, \ldots, a_{nn}), (b_{11}, \ldots, b_{nn})) & \mapsto & (\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kn}) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{llcl} i: & GL_n(k) & \to & GL_n(k) \\ & (a_{11} : \cdots : a_{nn}) & \mapsto & (b_{11} : \cdots : b_{nn}) \end{array}$$

onde $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathrm{M_{ij}})/\det(\mathrm{A})$ e $M_{ij}$ é a matriz obtida de $A$ retirando-se a $i$-ésima linha e a $j$-ésima coluna.

As aplicações $m$ e $i$ são morfismos, pois $m$ é polinomial e, pela regra de Cramer, temos que $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $b_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$, onde

$$G_{ij}(X_{11}, \cdots, X_{nn}) = \frac{\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i) \neq j} \varepsilon(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{X_{i\sigma(i)}} \cdots X_{(n-1)\sigma(n-1)}}{\det(\mathrm{X_{11}}, \cdots, \mathrm{X_{nn}})},$$

é racional em $M_n$ e regular em $GL_n(k)$

**Exemplo 4.4.** Seja $SL_n(k) := \{A \in M_n; \det(\mathrm{A}) = 1\}$.

Temos que $SL_n(k) \subset GL_n(k)$ é um subgrupo e uma variedade fechada, pois $SL_n(k) = Z(\det - 1)$.

Observando que os morfismos $m$ e $i$ definidos no exemplo anterior são fechados em $SL_n(k)$ temos que $SL_n(k)$ é um grupo algébrico.

**Definição 4.5.** Um grupo algébrico $G$ que é isomorfo à um subgrupo fechado de $GL_n$, para algum $n$ é chamado de *grupo algébrico linear*.

**Exemplo 4.6.** $SL_n(k)$ e $GL_n(k)$ são grupos algébricos lineares.

**Exemplo 4.7.** Seja $PGL_n(k) := GL_n/\sim$, onde $\sim$ é a seguinte relação de equivalência:

$$A \sim B \Leftrightarrow \lambda \in k\backslash\{0\} \text{ tal que } A = \lambda B.$$

Afirmamos que $PGL_n(k)$ é um grupo algébrico.

De fato, $PGL_n(k)$ é um grupo com a multiplicação usual de matrizes e é a imagem de $GL_n(k)$ em $\mathbb{P}^{n^2-1}$ via a identificação $M_n \simeq A^{n^2}$ e o morfismo canônico $\pi : A^{n^2}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^{n^2-1}$. Como o determinante é um polinômio homogêneo nas entradas da matriz, temos que $PGL_n(k)$ é um aberto principal de $\mathbb{P}^{n^2-1}$ e portanto uma variedade algébrica. Sejam

$$\begin{array}{rccc} m: & PGL_n(k) \times PGL_n(k) & \to & PGL_n(k) \\ & ((a_{00} : \ldots : a_{nn}), (b_{00} : \ldots : b_{nn})) & \mapsto & (\sum_{k=1}^{n} a_{0k}b_{k0} : \ldots : \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn}) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} i: & PGL_n(k) & \to & PGL_n(k) \\ & (a_{00} : \ldots : a_{nn}) & \mapsto & (b_{00} : \ldots : b_{nn}) \end{array}$$

onde $b_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{det}\,(\mathrm{M_{ij}})/\mathrm{det}\,(\mathrm{M_{ij}})$ e $M_{ij}$ é a matriz obtida de $A$ retirando a $i$-ésima linha e a $j$-ésima coluna. Como $m = (F_{11} : \cdots : F_{nn})$ onde $F_{ij}$ é o polinômio bihomogêneo definido por

$$F_{ij}(X_{11}, \cdots, X_{nn}; Y_{11}, \cdots, Y_{nn}) = \sum_{l=1}^{n} X_{il}Y_{lj},\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$$

e $i = (G_{11} : \cdots : G_{nn})$, onde $G_{ij}$ é o polinômio homogêneo dado por

$$G_{ij}(X_{11}, \cdots, X_{nn}) = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i) \neq j} \varepsilon(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{X_{i\sigma(i)}} \cdots X_{(n-1)\sigma(n-1)},\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n,$$

temos que $m, i$ são morfismos e que $PGL_n(k)$ é grupo algébrico.

**Exemplo 4.8.** A inclusão natural de $SL_n(k) \hookrightarrow GL_n(k)$ é um homomorfismo de grupos algébricos.

**Exemplo 4.9.** A projeção canônica $\pi : GL_n(k) \to PGL_n(k)$ é um homomorfismo sobrejetivo de grupos algébricos. É fácil ver que a restrição $\pi|_{SL_n(k)}$ é um homomorfismo de grupos algébricos finito e sobrejetivo.

**Definição 4.10.** Uma *ação* de um grupo algébrico $G$ em uma variedade $X$ é um morfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G \times X & \to & X \\ & (g, x) & \mapsto & \varphi(g, x) \end{array}$$

satisfazendo, $\forall g, g' \in G$ e $\forall x \in X$,

i) $\varphi(g, \varphi(g', x)) = \varphi(gg', x)$

ii) $\varphi(e, x) = x$, em que $e$ é a identidade de $G$.

Usualmente denotamos $\varphi(g, x)$ por $gx$.

**Exemplo 4.11.** O grupo algébrico $PGL_{n+1}(k)$ age em $\mathbb{P}^n$.

De fato, o morfismo

$$\begin{array}{rcc} \varphi : PGL_{n+1} \times \mathbb{P}^n & \to & \mathbb{P}^n \\ ((a_{00} : \ldots : a_{nn}), (x_0 : \ldots : x_n)) & \mapsto & (\sum_{k=0}^{n} a_{0k}x_k : \ldots : \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x_k) \end{array}$$

é tal que para todo $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$,

i) $\varphi(I_{n+1}, x) = I_{n+1}x = x$, onde $I_{n+1}$ é a matriz identidade de ordem $n+1$ e

ii) $\varphi(A, \varphi(B, x)) = \varphi(A, Bx) = A(Bx) = (AB)x = \varphi(AB, x)$, $\forall\, A, B \in PGL_{n+1}(k)$.

**Definição 4.12.** Seja $N := n(n+3)/2$ e considere $\mathbb{P}^N$ o espaço de parâmetro das quádricas em $\mathbb{P}^n$. Um *feixe de quádricas* em $\mathbb{P}^n$ é por definição uma reta em $\mathbb{P}^N$. Então o espaço de parâmetro dos feixes de quádricas é por definição a Grasmaniana $Gr(2, N+1)$. Um feixe $\mathcal{P} \in Gr(2, N+1)$ é dado por $\{\lambda A + \mu B; (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$, onde $A$ e $B$ são matrizes simétricas de ordem $n+1$. Por abuso de notação escreveremos $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$.

**Exemplo 4.13.** O grupo $SL_{n+1}(k)$ age em $Gr(2, N+1)$.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & SL_{n+1} \times Gr(2, N+1) & \to & Gr(2, N+1) \\ & (T, \mathcal{P}) & \mapsto & T \circ \mathcal{P} := \lambda TAT^t + \mu TBT^t, \end{array}$$

onde $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$ e $T^t$ é a matriz transposta de $T$.

Veremos a seguir que $\varphi$ está bem definida, isto é, não depende da escolha de $A$ e $B$.

Suponhamos que $\mathcal{P} = \lambda A_1 + \mu B_1 = \lambda' A + \mu' B$. Então

$$A_1 = \lambda_0 A + \mu_0 B\,,\ B_1 = \lambda_1 A + \mu_1 B \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda' A_1 + \mu' B_1) &= \lambda' T A_1 T^t + \mu' T B_1 T^t = \lambda' T(\lambda_0 A + \mu_0 B)T^t + \mu' T(\lambda_1 A + \mu_1 B)T^t = \\ &= (\lambda'\lambda_0 + \mu'\lambda_1)TAT^t + (\lambda'\mu_0 + \mu'\mu_1)TBT^t = \varphi(T, \lambda A + \mu B). \end{aligned}$$

Mostraremos agora que $\varphi$ é uma ação.

Sejam $\lambda A + \mu B = \mathcal{P} \in Gr(2, N+1)$ e $T_1, T_2 \in SL_{n+1}$. Então

$$\begin{aligned} \varphi(T_1, \varphi(T_2, \mathcal{P})) &= \varphi(T_1, \lambda T_2 A T_2^t + \mu T_2 B T_2^t) = \lambda T_1 (T_2 A T_2^t) T_1^t + \mu T_1 (t_2 B T_2^t) T_1^t \\ &= \lambda (T_1 T_2) A (T_1 T_2)^t + \mu (T_1 T_2) B (T_1 T_2)^t = \varphi(T_1 T_2, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\varphi(I_{n+1}, \mathcal{P}) = \lambda I_{n+1} A I_{n+1}^t + \mu I_{n+1} B I_{n+1}^t = \lambda A + \mu B = \mathcal{P}.$$

Logo $\varphi$ é ação.

**Observação 4.14.** Consideremos $\psi : H \to G$ um homomorfismo de grupos algébricos e $\varphi : X \times G \to X$ uma ação de $G$ em uma variedade $X$. Então, a aplicação $\phi : X \times H \to X$ definida por $\phi(x, h) = \varphi(x, \psi(h))$ é claramente uma ação de $H$ em $G$. Neste caso, o símbolo $xh$ significará $x\psi(h)$.

**Definição 4.15.** Considere $\mathbb{P}^{n+1}$ como espaço de parâmetros das formas binárias de grau $n+1$, isto é,

$$\mathbb{P}^{n+1} := \{f_{n+1}(X, Y) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i X^i Y^{n+1-i}; a_i \in k.\}$$

**Exemplo 4.16.** O grupo $SL_2(k)$ age em $\mathbb{P}^{n+1}$.

Defina

$$\begin{aligned} \varphi : \quad SL_2(k) \times \mathbb{P}^{n+1} &\to \qquad \mathbb{P}^{n+1} \\ (\alpha, f_{n+1}(X, Y)) &\mapsto \sum_{i=0}^{n+1} a_i (\alpha_{11} X + \alpha_{12} Y)^i (\alpha_{21} X + \alpha_{22} Y)^{n+1-i} \end{aligned}$$

onde $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ e $f_{n+1}(X, Y) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i X^i Y^{n+1-i}$

Veremos a seguir que $\varphi$ é ação.

Temos que $\varphi(I_2, f_{n+1}(X, Y)) = \sum_{i+j=n+1} a_i (1X + 0Y)^i (0X + 1Y)^j = f_{n+1}(X, Y)$.

Além disso,

$$\varphi(\beta, \varphi(\alpha, f_{n+1}(X, Y))) = \varphi(\beta, \sum_{i+j=n+1} a_i (\alpha_{11} X + \alpha_{12} Y)^i (\alpha_{21} X + \alpha_{22} Y)^j) =$$

$$= \sum_{i+j=n+1} a_i (\beta_{11}(\alpha_{11} X + \alpha_{12} Y) + \beta_{12}(\alpha_{21} X + \alpha_{22} Y))^i (\beta_{21}(\alpha_{11} X + \alpha_{12} Y) + \beta_{22}(\alpha_{21} X + \alpha_{22} Y))^j$$

$$= \sum_{i+j=n+1} a_i ((\beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{12}\alpha_{21}) X + (\beta_{11}\alpha_{12} + \beta_{12}\alpha_{22}) Y)^i ((\beta_{21}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{21}) X + (\beta_{21}\alpha_{12} + \beta_{22}\alpha_{22}) Y)^j$$

$$= \varphi(\beta\alpha, f_{n+1}(X, Y))$$

**Definição 4.17.** Seja $G$ um grupo algébrico agindo em uma variedade $X$. Para toda $f \in A(X)$ defina $f^g \in A(X)$ por

$$f^g(x) := f(gx).$$

**Observação 4.18.** Temos que $f^{gh} = (f^g)^h$, para todo $g, h \in G$.

De fato, dado $x \in X$, temos

$$f^{gh}(x) = f((gh)x) = f(g(hx)) = f^g(hx) = (f^g)^h(x).$$

Logo $f^{gh} = (f^g)^h$.

**Lema 4.19.** *Dado $g \in G$, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Psi_g : & A(X) & \to & A(X) \\ & f & \mapsto & f^g \end{array}$$

*é $\Psi_g$ um automorfismo de $k$-álgebras.*

*Demonstração.* De fato, $\forall\, x \in$ X

$$\begin{aligned} \Psi_g(f+h)(x) &= (f+h)^g(x) = (f+h)(gx) = f(gx) + h(gx) \\ &= f^g(x) + h^g(x) = \Psi(f)(x) + \Psi(g)(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Psi_g(fh)(x) &= (fh)^g(x) = (fh)(gx) = f(gx)h(gx) \\ &= f^g(x)h^g(x) = \Psi_g(f)(x)\Psi_g(h)(x), \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

Para ver que $\Psi_g$ é injetiva, suponhamos que $f^g = \Psi_g(f) = \Psi_g(h) = h^g$ com $f, h \in A(X)$.

Então, para todo $x \in X$,

$$f(x) = f(g(g^{-1}x)) = f^g(g^{-1}x) = h^g(g^{-1}x) = h(g(g^{-1}x)) = h(x).$$

Logo $f = h$. Para concluir observe que dado $h \in A(X)$, temos que $h = \Psi_g(h^{g^{-1}})$. □

**Definição 4.20.** Seja $G$ um grupo agindo em uma variedade $X$. Dizemos que $f \in A(X)$ é *invariante* se $f^g = f$, para todo $g \in G$.

**Observação 4.21.** A aplicação $\varphi$ definida por

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A(X) \times G & \to & A(X) \\ & (f,g) & \mapsto & f^g \end{array}$$

satisfaz as seguintes propriedades,

(i) $\varphi(f,e)=f$ pois, para todo $x\in X$ , temos $f^e(x)=f(ex)=f(x)$ e

(ii) $\varphi(f,g'g)=\varphi(f^{g'},g)$, pois $(f^{g'}g)(x)=f(g'(gx))=f((g'g)x)=f^{g'g}(x), \forall\, x\in X$.

**Definição 4.22.** Seja $G$ um grupo agindo na variedade $X$. Um *quociente categórico* de $X$ por $G$ é um par $(Y,\phi)$, onde $Y$ é uma variedade e $\phi$: $X\to Y$ é um morfismo tais que:

(i) $\phi$ é constante nas órbitas da ação, isto é, $\phi(gx)=\phi(x)$, para todo $x\in X$ e todo $g\in G$.

(ii) Para toda variedade $Z$ e todo morfismo $\psi: X\to Z$ constante nas órbitas, existe um único morfismo $\alpha: Y\to Z$ tal que $\alpha\circ\,\phi=\psi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & Y \arrow[dl, "\exists!\alpha"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Notação $Y=X/G$.

**Definição 4.23.** Sejam $G$ um grupo agindo na variedade $X$ e $(Y,\phi)$ um quociente categórico de $X$ por $G$. Se $\phi^{-1}(y)$ consiste de uma única órbita para todo $y\in Y$, chamamos $(Y,\phi)$ de *espaço de órbitas*.

**Proposição 4.24.** *Seja $G$ um grupo agindo na variedade $X$. O quociente categórico de $X$ por $G$ é único a menos de isomorfismo.*

*Demonstração.* Sejam $(Y,\phi)$ e $(Z,\Psi)$ quocientes categóricos de $X$ por $G$. Olhemos primeiramente para $(Y,\phi)$ como quociente categórico.

Como $(Z,\Psi)$ é constante nas órbitas, então existe um único morfismo $\alpha: Y\to Z$ tal que $\alpha\circ\phi=\Psi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & Y \arrow[dl, "\exists!\alpha"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Por outro lado, sendo $(Z,\Psi)$ quociente categórico segue que ($\phi$ é constante nas órbitas) existe um único morfismo $\beta: Z\to Y$ tal que $\beta\circ\Psi=\phi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[dl, "\exists!\beta"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Assim, temos que

$$(\beta \circ \alpha) \circ \phi = \beta \circ (\alpha \circ \phi) = \beta \circ \Psi = \phi.$$

Logo, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[dl, "\beta\circ\alpha"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Como $Id_Y$ também faz o diagrama comutar, segue pela unicidade que $Id_Y = \beta \circ \alpha$. Analogamente temos que $Id_Z = \alpha \circ \beta$.

Portanto $Y$ é isomorfo a $Z$. □

## 4.2 AÇÃO LINEAR E CRITÉRIO DE HILBERT-MUMFORD

Nesta seção definiremos os conceitos de estabilidade e semi-estabilidade e apresentaremos um critério númerico de estabilidade devido à Hilbert e Mumford.

**Definição 4.25.** Seja $G$ um grupo algébrico agindo em uma variedade $X$. Dado $x \in X$, definimos o *estabilizador* de $x$, denotado por $G_x$, por

$$G_x = \{g \in G; gx = x\} \subset G.$$

**Definição 4.26.** Seja $G$ um grupo algébrico agindo em uma variedade $X$. Dado $x \in X$, definimos a *órbita* de $x$, denotada por $\mathcal{O}(x)$, por

$$\mathcal{O}(x) := \{gx; g \in G\}.$$

**Definição 4.27.** Se todas as órbitas de uma ação de $G$ em $X$ forem subconjuntos fechados de $X$, diremos que a ação de $G$ em $X$ é *fechada.*

**Definição 4.28.** Um ponto $x$ (resp. subconjunto $W$) de $X$ é dito *invariante* por $G$ se $gx = x$ (resp. $gW = W$), para todo $g \in G$.

**Definição 4.29.** Dizemos que $G$ age *transitivamente* sobre um subconjunto invariante $W \subset X$ se $W$ é uma órbita da ação.

**Definição 4.30.** Um *homomorfismo de grupos algébricos* $\varphi : G \to GL_n(k)$ é chamado de representação racional de $G$.

**Definição 4.31.** Uma *representação racional* de um grupo algébrico $G$, $\varphi : G \to GL_n$, induz uma ação de $G$ em $k^n$,

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G \times k^n & \to & k^n \\ & (g,x) & \mapsto & \varphi(g)x \end{array}$$

chamada de ação linear de $G$ em $k^n$.

**Definição 4.32.** Uma *linearização* de uma ação $\sigma : G \times X \to X$ de um grupo algébrico $G$ em uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma ação linear de $G$ em $k^{n+1}$, induzida por uma representação racional $\rho : G \to GL_{n+1}$ de $G$, tal que

$$\sigma(g,x) = \rho(g)\,\widehat{x}, \forall\, g \in G\,\mathrm{e}\,\forall\,\mathrm{x} \in \mathrm{X},$$

onde $\widehat{x}$ é um representante de $x$ em $k^{n+1}\backslash\{0\}$.

**Definição 4.33.** Uma *ação linear* de um grupo $G$ em uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma ação de $G$ em $X$ junto com a sua linearização. Neste caso, dizemos que $G$ age linearmente em $X$.

**Definição 4.34.** Um grupo algébrico linear $G$ é *redutivo* se para toda ação linear de $G$ em $k^n$ e para todo $v \in k^n$, $v \neq 0$, existir um polinômio homogêneo invariante $f$ de grau $\geq\ 1$ tal que $f(v) \neq 0$.

**Proposição 4.35.** *Os grupos $GL_n(k), SL_n(k)$ e $PGL_n(k)$ são grupos redutivos.*

*Demonstração.* Ver [4], página 50. □

**Definição 4.36.** Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e $G$ um grupo algébrico redutivo agindo linearmente em $X$. Se $x \in X$ e $\widehat{x} \in k^{n+1}$ é um representante de $x$, dizemos que:

(i) $x$ é *semi-estável* se $0 \notin \overline{\mathcal{O}(\widehat{x})}$.

O conjunto de tais pontos será denotado por $X^{ss}$.

(ii) $x$ é *estável* se $\mathcal{O}(\widehat{x})$ é fechada e $G_{\widehat{x}}$ é finito.

O conjunto de tais pontos será denotado por $X_0^s$.

**Observação 4.37.** Um ponto $x \in X$ é dito instável se $x$ não é semi-estável.

**Definição 4.38.** Seja $G$ um grupo algébrico. Um homomorfismo de grupos algébricos não trivial $\lambda : k^* \to G$ é chamado de *subgrupo a um parâmetro*(1-PS) de $G$.

**Observação 4.39.** Se $G$ age linearmente em uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$, então existe uma representação racional $\rho : G \to GL_{n+1}$ tal que

$$gx = \rho(g)\widehat{x}$$

onde $\widehat{x}$ é um representante de $x$. Então dado $\lambda$ 1-PS e $v \in k^{n+1}$ podemos considerar o morfismo induzido

$$\begin{array}{rccc} \lambda_v : & k^* & \to & k^{n+1} \\ & t & \mapsto & \rho(\lambda(t))v \end{array}$$

Por abuso de notação escreveremos $\lambda(t)$ para representar o elemento $\rho(\lambda(t)) \in GL_{n+1}(k)$.

Se $v \neq 0$, existe um único inteiro $\mu$ e polinômios $F_0, \ldots, F_n \in k[t]$, com $F_i \neq 0$, para algum $i$, tal que:

$$\lambda_v(t) = \frac{1}{t^\mu}(F_0(t), \ldots, F_n(t)). \tag{4.1}$$

Como $G$ age linearmente em $k^{n+1}$, então o inteiro $\mu$ não muda se mudarmos $v$ para $cv$, com $c \neq 0$.

**Definição 4.40.** Seja $G$ age linearmente em uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ e seja $\widehat{x}$ um representante do ponto $x \in X$. O inteiro $\mu$ dado em (4.1) será denotado por $\mu(x, \lambda)$.

**Proposição 4.41.** *Seja $\lambda$ 1-PS de $G$. A ação induzida por $\lambda$ em $k^{n+1}$ pode ser diagonalizada, isto é, existem $l_1, \cdots, l_{n+1}$ inteiros tais que*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{l_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t^{l_{n+1}} \end{pmatrix}$$

*Demonstração.* ver [6], p.86

□

**Lema 4.42.** *Seja $G$ um grupo algébrico linear agindo linearmente na variedade afim $X$. Dado $x \in X$ considere o morfismo órbita definido por*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G & \to & X \\ & g & \mapsto & gx \end{array}$$

*Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i)* $\mathcal{O}(x)$ *é fechada em* $X$ *e dim* $G_x = 0$

*(ii)* $\phi$ *é finito.*

*(iii)* $\phi$ *é próprio.*

*Demonstração.* $i) \Rightarrow ii)$ Se $y \in \mathcal{O}(x)$, então $y = gx$, para algum $g \in G$.

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(y) &= \{h \in G; \phi(h) = y\} = \{h \in G; hx = y\} = \{h \in G; hx = gx\} \\ &= \{h \in G; g^{-1}hx = x\} = \{h \in G; g^{-1}h \in G_x\} = gG_x. \end{aligned}$$

Como $G_x$ é finito, temos que $\phi$ tem fibras finitas.

Pela Proposição 2.56, existe $U \subset \mathcal{O}(x)$ aberto denso tal que $\phi^{-1} \mid_{\phi^{-1}(U)}: \phi^{-1}(U) \to U$ é finito.

Observe que $\mathcal{O}(x) = \bigcup_{g \in G} gU$, que

$$\phi^{-1}(gU) = \{h \in G; \phi(h) \in gU\} = \{h \in G; g^{-1}hx \in U\}$$

e que $\phi \mid_{\phi^{-1}(gU)} = m_g \circ \phi \mid_{\phi^{-1}(U)} \circ m_{g^{-1}}$, onde $m_g$ e $m_{g^{-1}}$ são os isomorfismos multiplicação por $g$ e $g^{-1}$, respectivamente. Portanto $\phi^{-1} \mid_{\phi^{-1}(U)}: \phi^{-1}(U) \to gU$ é finito e $\phi$ é finito.

$$\begin{array}{ccccccc} \phi^{-1}(gU) & \xrightarrow{m_{g^{-1}}} & \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U & \xrightarrow{m_g} & gU \\ h & \mapsto & g^{-1}h & \mapsto & g^{-1}hx & \mapsto & hx \end{array}$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Proposição 2.51

$iii) \Rightarrow i)$ Como $\phi$ é próprio, então $\mathcal{O}(x)$ é fechada. Pela Proposição 2.49 temos que $G_x = \phi^{-1}(x)$ é completo. Logo, $G_x$ é completa e afim. Portanto $G_x$ é um conjunto finito, pela Proposição 2.50 □

**Lema 4.43.** *Seja* $G$ *um grupo algébrico linear. Então todo 1-PS* $\lambda : k^* \to G$ *é finito.*

*Demonstração.* Como $G$ é um grupo algébrico linear, existe $\rho : G \to GL_n$, para algum $n$, homomorfismo de grupos algébricos, então podemos assumir que $G = GL_n$. Temos que $\lambda : k^* \to GL_n$ pode ser assumida da forma

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{l_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t^{l_n} \end{pmatrix},$$

para certos inteiros $l_1, \cdots, l_n$. Se $l = \sum_{i=1}^{n} l_i \neq 0$, então $t^{|l|} = \det(\lambda(\mathrm{t}))^{\pm 1}$ e $(1/t)^{|l|} = \det(\lambda(\mathrm{t}))^{\mp 1}$. Desta forma, $t$ e $1/t$ são inteiros sobre $k[GL_n]$.

Se $l = 0$, como $\lambda$ é não trivial, então existem $l_i \geq$ e $l_j \leq 0$, para algum inteiro $i$ e algum inteiro $j$. Então $t^{l_i} = \lambda(t)_{ii}$ e $(1/t)^{-l_j} = \lambda(t)_{jj}$, donde segue que $t$ e $1/t$ são inteiros sobre $k[GL_n]$.

Como $k[k^*] = k[t, 1/t]$, então $k[k^*]$ é inteiro sobre $k[GL_n]$. □

**Teorema 4.44.** *(Critério de Hilbert-Mumford) Seja $G$ um grupo algébrico linear agindo linearmente em um variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ e seja $x \in X$. Então:*

*(i) Se $x$ for semi-estável,então $\mu(x, \lambda) \geq 0$, para todo $\lambda$ 1-PS*

*(ii) Se $x$ for estável, então $\mu(x, \lambda) >0$, para todo $\lambda$ 1-PS*

*A recíproca é verdadeira para grupos redutíveis.*

*Demonstração. i)* Seja $\widehat{x} \in k^{n+1}$ um representante de $x$ e seja $\phi : G \to k^{n+1}$ o morfismo dado por $\phi(g) = g\widehat{x}$. Por abuso de notação, estamos denotando por $g\widehat{x}$ o produto $\rho(g)\widehat{x}$, onde $\rho : G \to GL_{n+1}$ é a reprentação racional de $G$ que induz a ação de $G$ em $X$. Dado $\lambda$ 1-PS de $G$, temos que

$$\begin{array}{rccc} \lambda_{\widehat{x}}: & k^* & \to & k^{n+1} \\ & t & \mapsto & \lambda(t)\widehat{x} \end{array}$$

é morfismo. Assim, existem $F_0, \ldots, F_n \in k[t]$, com $F_i(0) \neq 0$ para algum $i$, tais que ( ver 4.1)

$$\lambda_{\widehat{x}}(t) = t^{-\mu(x,\lambda)}(F_0(t), \ldots, F_n(t)). \tag{4.2}$$

Suponhamos que $\mu(x, \lambda) < 0$. Então podemos extender $\lambda_{\widehat{x}}$ em $t = 0$ definindo $\lambda_{\widehat{x}}(0) = 0$. Logo, $0 \in \overline{O(\widehat{x})}$, ou seja, $x$ não é semi-estável. O que é um absurdo. Portanto $\mu(x, \lambda) \geq 0$.

*ii)* Se $\mu(x, \lambda) = 0$, em (4.2), então $\lambda_{\widehat{x}}$ se estende para $t = 0$ a um vetor não nulo, a saber,$\lambda_{\widehat{x}}(0) = (F_0(0), \cdots, F_n(0))$. Chamaremos esta extensão de $\widetilde{\lambda_{\widehat{x}}}$ . Pelo Lema (4.42) temos que

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G & \to & k^{n+1} \\ & g & \mapsto & g\widehat{x} \end{array}$$

é finito. Como $\lambda : k^* \to G$ é finito (Lema 4.43($iii$)), então $\lambda_{\widehat{x}} = \phi \circ \lambda$ é finito e portanto próprio.

Observe que $k^* \to k$ não é próprio. Como $\widetilde{\lambda}$ é separável e $\widetilde{\lambda_{\widehat{x}}} \circ i = \phi$ é próprio, então $k^* \to k$ é próprio. O que é um absurdo. Portanto $\mu(x, \lambda) > 0$.

Para a demonstração da recíproca ver [10] Teorema 2.1, p.49. □

Aplicaremos o critério apresentado no teorema anterior para determinar formas binárias estáveis e semi-estáveis pela ação do grupo $SL_2(k)$.

**Teorema 4.45.** *Uma forma binária $f$ de grau $n$ é estável (resp. semi-estável), se e somente se, $f$ não admite raízes com multiplicidade $\geq n/2$ (resp. $> n/2$).*

*Demonstração.* Vamos mostrar que uma forma binária $f(X, Y)$ é instável, se somente se, $(0:1) \in \mathbb{P}^1$ é raiz de $f$ com multiplicidade $> n/2$. Sejam $f(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i Y^{n-i}$ uma forma binária de grau $n$ e $\lambda$ um 1-PS de $SL_2(k)$. Pelo Lema (4.41), temos que

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{l_0} & 0 \\ 0 & t^{l_1} \end{pmatrix},$$

com $l_0 + l_1 = 0$, pois $\det(\lambda(\mathrm{t})) = 1$. Sem perda de generalidade podemos supor $l_0 > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda(t)f(X,Y) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(t^{l_0}X)^i(t^{l_1}Y)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i(t^{l_0}X)^i(t^{-l_0}Y)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{l_o(2i-n)} X^i Y^{n-i} \\ &= t^{l_o(2i_0-n)} \sum_{i=0}^{n} a_i t^{2l_o(i-i_0)} X^i Y^{n-i} = t^{-l_o(n-2i_0)} \sum_{i=0}^{n} a_i t^{2l_o(i-i_0)} X^i Y^{n-i}, \end{aligned}$$

onde $i_o$ é menor inteiro $i$ tal que $a_i \neq 0$. Portanto, $\mu(F, \lambda) = l_o(n - 2i_0)$ e

$$\mu(F,\lambda) < 0 \Leftrightarrow i_0 > \frac{n}{2} \Leftrightarrow a_i = 0, \forall\, i < \frac{n}{2} \tag{4.3}$$

isto é, se e somente se, $(0:1)$ é raiz de $f$ de multiplicidade $> n/2$.

Para concluir usaremos que $(x_0 : y_0) \in \mathbb{P}^1$ é raiz de $f(X,Y)$ de multiplicidade $m$, se e somente se, $(0:1) \in \mathbb{P}^1$ é raiz de $g(X,Y) = f(\alpha^{-1}(X,Y)) := \alpha f(X,Y)$ de multiplicidade $m$, onde $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é uma mudança de coordenadas que leva $(x_0 : y_0)$ em $(0:1)$.

Agora, seja $f$ uma forma binária de grau $n$ estável (resp. semi-estável). Suponha que $f$ tem uma raiz de multiplicidade $\geq n/2$ (resp. $> n/2$)). Então, $(0:1)$ é raiz de multiplicidade $\geq n/2$ (resp. $> 0$) de $\alpha f$, para alguma $\alpha \in SL_2$ (mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^1$). Logo, $\mu(\alpha f, \lambda) \leq 0$ (resp. $< 0$), para algum $\lambda$ 1-PS de $SL_2$. Como $\mu(\alpha f, \lambda) = \mu(f, \lambda)$, $f$ seria não estável (resp. instável).

Reciprocamente, se $f$ for uma forma binária que não admite raízes de multiplicidade $\geq n/2$ ($> n/2$), então segue de (4.3) que $\mu(f, \lambda) > 0 (\geq 0)$ para todo $\lambda$. Portanto $f$ é estável (resp. semi-estável). $\square$

## 4.3 FIBRADOS PRINCIPAIS

Nesta seção, um espaço significará sempre um espaço topológico e uma aplicação será sempre uma função contínua.

**Definição 4.46.** Seja $B$ um espaço. Um *fibrado* $E$ sobre $B$ é uma aplicação $p : E \to B$.

**Definição 4.47.** Um *grupo topológico* $G$ é um conjunto $G$ com uma estrutura de grupo e uma topologia em $G$ tal que a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G \times G & \to & G \\ & (s,t) & \mapsto & s\,t^{-1} \end{array}$$

é uma aplicação contínua.

**Definição 4.48.** Um *morfismo* $f : G \to G'$ de grupos topológicos é uma função que é ao mesmo tempo um homomorfismo de grupos e uma aplicação contínua.

**Observação 4.49.** A continuidade em

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G \times G & \to & G \\ & (s,t) & \mapsto & st^{-1} \end{array}$$

é equivalente a

$$\begin{array}{rccc} m : & G \times G & \to & G \\ & (s,t) & \mapsto & st \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} i : & G & \to & G \\ & s & \mapsto & s^{-1} \end{array}$$

serem aplicações contínuas. De fato, $m \circ (Id, i)(s,t) = m(s, t^{-1}) = s\,t^{-1} = \varphi(s,t)$. Desta forma, se $m$ e $i$ forem contínuas, $\varphi$ será contínua.

Por outro lado, se $\varphi$ for contínua, então $\varphi \mid_{\{e\}\times G} = i$ é contínua e $\varphi \circ (Id, i)(s,t) = \varphi(s, t^{-1}) = st = m(s,t)$ é contínua.

**Definição 4.50.** Um *morfismo* $f : G \to G'$ de grupos topológicos é uma função que é ao mesmo tempo um homomorfismo de grupos e uma aplicação contínua.

**Definição 4.51.** Seja $G$ um grupo topológico. Um $G$-*espaço* à esquerda $X$ é um espaço $X$ junto com uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & G \times X & \to & X \\ & (s, x) & \mapsto & s.x \end{array}$$

satisfazendo os seguintes axiomas:

(i) $(s.t).x = s.(t.x)$, para $x \in X$ e $s, t \in G$

(ii) $e.x = x$, para $x \in X$ e $e \in G$ a identidade.

**Observação 4.52.** Um $G$-espaço à esquerda tem uma estrutura natural de $G$-espaço à direita. A recíproca também é verdadeira.

**Definição 4.53.** Para um $G$-espaço à direita $X$ denotamos por $X/G$ o conjunto das órbitas da ação. A projeção $q : X \to X/G$, dada por $q(x) = xG := \mathcal{O}(x)$ define em $X/G$ a topologia quociente.

**Definição 4.54.** Um *morfismo* $f : X \to Y$ de $G$-espaços à direita é uma aplicação $f : X \to Y$ de espaços satisfazendo $f(xs) = sf(x)$, $\forall x \in X$ e $\forall\, s \in G$. Tal morfismo é também chamado de aplicação $G$-equivariante ou $G$-aplicação.

**Exemplo 4.55.** Seja $k$ um corpo. $k^n$ é um $GL_n(k)$ espaço à direita.

De fato, Defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F^n \times GL_n(F) & \to & F^n \\ & ((x_1, \cdots, x_n), A) & \mapsto & (x_1, \cdots, x_n)A \end{array}$$

satisfaz, para todo $x = (x_1 \cdots, x_n) \in k^n$ e todo $A, B \in GL_n(k)$:

(i) $\varphi(x, AB) = x(AB) = (xA)B = \varphi(xA, B) = \varphi(\varphi(x, A), B)$.

(ii) $\varphi(x, I_n) = x.I = x$.

Como já vimos que $GL_n(k)$ é espaço topológico segue que $k^n$ é um $GL_n(k)$-espaço à direita.

**Definição 4.56.** Um *$G$-fibrado* $p : E \to B$ é um fibrado com uma estrutura de $G$ espaço à direita $E \times G \to E$ tal que $p(x) = p(xs)$, $\forall\, x \in X$ e $s \in G$.

**Definição 4.57.** Seja $B$ um espaço topológico. Se $X$ for um $G$-espaço munido de uma aplicação $\pi : X \to B$ equivariante, onde $G$ age trivialmente em $B$, isto é, $sb = b$,$\forall\, s \in G$ e $\forall\, b \in B$, e $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de $B$ por abertos . Então dizemos que $(X, \pi)$ é um *$G$-fibrado principal* sobre $B$, se $\pi$ satisfaz a seguinte condição

- Para cada aberto $U_i$ da cobertura , existe um homeomorfismo $\phi_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ $G$-equivariante tal que $\pi_1 \circ \varphi_{U_i} = \pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$, onde $\pi_1$ é a projeção canônica na primeira coordenada.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}"'] & U_i \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U_i & \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

**Observação 4.58.** Segue da comutatividade do diagrama acima que $\varphi_{U_i}(x) = (\pi(x), g)$.

**Proposição 4.59.** *Se $(X, \pi)$ for um $G$-fibrado principal sobre $B$, então $X/G$ é homeomorfo a $B$.*

*Demonstração.* Considere a função $\overline{\pi} : X/G \to B$ dada por $\overline{\pi}(\overline{x}) = \pi(x)$, onde $\overline{x}$ denota a órbita de $x$. Para verificarmos a boa definição de $\overline{\pi}$ suponha $\overline{x} = \overline{y}$. Então, $y = gx$, para algum $g \in G$ e

$$\overline{\pi}(\overline{y}) = \pi(y) = \pi(gx) = g\pi(x) = \pi(x) = \overline{\pi}(\overline{x}),$$

pois $\pi$ é equivariante e a ação em $B$ é trivial. Afirmamos que $\overline{\pi}$ é injetiva. De fato, se $\overline{\pi}(\overline{y}) = \overline{\pi}(\overline{x})$, então $\pi(x) = \pi(y) \in U_i$, para algum $i$. Logo, $x, y \in \pi^{-1}(U_i)$, $\varphi_{U_i}(x) = (\pi(x), g)$ e $\varphi_{U_i}(y) = (\pi(y), h)$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(x) &= (\pi(x), g) = (\pi(y), g) = (\pi(y), hh^{-1}g) = (\pi(y), h)h^{-1}g \\ &= \varphi_{U_i}(y)h^{-1}g = \varphi_{U_i}(yh^{-1}g) = \varphi_{U_i}(y). \end{aligned}$$

Como $\varphi_{U_i}$ é injetiva temos $x = gh^{-1}y$, ou seja, $\overline{x} = \overline{y}$. A sobrejetividade de $\overline{\pi}$ será óbvia se mostramos que $\pi$ é sobrejetiva. Dados $b \in U_i \subset B$, seja $g \in G$ um elemento qualquer. Então, existe $x \in \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\varphi_{U_i}(x) = (b, g)$, pois $\varphi_{U_i}$ é homeomorfismo. Mas, $(b, g) = \varphi_{U_i}(x) = (\pi(x), g)$. Logo $\pi(x) = b$.

Para concluir devemos mostrar que $\overline{\pi}$ é um homeomorfismo.

**Afirmação 1:** A aplicação $\overline{\pi}$ é contínua.

Seja $q : X \to X/G$ a projeção canônica. Dado $V \subset B$ aberto, temos que $\pi^{-1}(V) = q^{-1}(\overline{\pi}^{-1}(V))$ é aberto em $X$ pois $\pi$ é contínua. Como a topologia em $X/G$ é a topologia quociente, temos que $\overline{\pi}^{-1}(V)$ é aberto em $X/G$.

**Afirmação 2:** A aplicação $\overline{\pi}$ é aberta.

Dado $W \subset X/G$ aberto, temos que $q^{-1}(W)$ é aberto em $X$ e

$$\overline{\pi}(W) = \overline{\pi}(q(q^{-1}(W))) = \pi(q^{-1}(W)).$$

Mas $\pi$ é aberta, pois é localmente a composição de duas aplicações aberta $\phi_{U_i}$ e $\pi_1$. Logo, $\overline{\pi}(W) = \pi(q^{-1}(W))$ é aberto em $B$. $\square$

A seguir consideraremos o exemplo que nos interessa de fibrado principal.

Dado $n$ um inteiro positivo, sejam $N := n(n+3)/2$, $V = k^{N+1}$ o espaço vetorial das quádricas em $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}(V \times V)$ a projetivização do espaço vetorial $V \times V$. Seja $S_n$ o subconjunto de $\mathbb{P}^(V \times V)$ definido da seguinte maneira

$$S_n := \{(A, B) \in \mathbb{P}(V \times V);\ A \text{ e } B \text{ são LI}\}.$$

Observe que se $X_1, \cdots, X_{N+1}, Y_1, \cdots, Y_{N+1}$ forem as funções coordenadas do espaço $\mathbb{P}(V \times V)$ então $S_n$ é o aberto definido por $\mathbb{P}(V \times V)\backslash Z(X_iY_j - X_jY_i; 1 \leq i, j \leq N+1)$.

A ideia agora é mostrar que $S_n$ é um $PGL_2(k)$-fibrado principal sobre $Gr(2, N+1)$.

Primeiramente vamos mostrar que $S_n$ é um $PGL_2(k)$-espaço. Para isto, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S_n \times PGL_2 & \to & S_n \\ & ((A, B), \alpha) & \mapsto & (\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B), \end{array}$$

onde $\alpha$ é a classe da matriz $(\alpha_{ij})_{2\times 2}$ em $PGL_2(k)$, que como veremos a seguir é uma ação.

Para ver que $\varphi$ está bem definida, suponhamos $((A, B), \alpha) = ((C, D)\beta)$ em $S_n \times PGL_2$. Então existem $k_1, k_2 \in k\backslash\{0\}$ tais que $k_1(A, B) = (C, D)$ e $k_2(\alpha_{ij}) = (\beta_{ij})$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi((C, D), \beta) &= (\beta_{11}C + \beta_{21}D, \beta_{12}C + \beta_{22}D) \\ &= (k_2\alpha_{11}(k_1A) + k_2\alpha_{21}(k_1B), k_2\alpha_{12}(k_1A) + k_2\alpha_{22}(k_1B)) \\ &= k_2k_1(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B)\ (\in \mathbb{P}(V \times V)) \\ &= (\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B) = \varphi((A, B), \alpha) \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi((A,B),I_2) = (1.A+0.B, 0.A+1.B) = (A,B)$ e

$$\varphi(\varphi((A,B),\alpha),\beta) = \varphi((\alpha_{11}A+\alpha_{21}B, \alpha_{12}A+\alpha_{22}B),\beta)$$
$$= (\beta_{11}(\alpha_{11}A+\alpha_{21}B)+\beta_{21}(\alpha_{12}A+\beta_{22}B), \beta_{12}(\alpha_{11}A+\alpha_{21}B)+\beta_{22}(\alpha_{12}A+\alpha_{22}B))$$
$$= ((\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21})A+(\alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21})B, (\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22})A+(\alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22})B)$$
$$= \varphi((A,B),\alpha\beta)$$

Portanto, $\varphi$ é uma ação e $S_n$ é um $PGL_2(k)$-espaço à direita.

**Exemplo 4.60.** Segue da Observação (4.14) que $SL_2$ age em $S_n$ por

$$\alpha(A,B) = (\alpha_{11}A+\alpha_{21}B, \alpha_{12}A+\alpha_{22}B), \forall\, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in SL_2.$$

Na que segue vamos mostrar que $S_n$ é um $PGL_2$-fibrado principal.

**Proposição 4.61.** *Seja $\pi : S_n \to Gr(2,N+1)$ definida por $\pi(A,B) = \lambda A+\mu B$ e suponha que $PGL_2$ age em $Gr(2,N+1)$ trivialmente. Então, $(S_n,\pi)$ é um principal $PGL_2$-fibrado principal.*

*Demonstração.* Devemos mostrar que $\pi$ é contínua, $PGL_2$-equivariante e que existe uma cobertura de $Gr(2,N+1)$ por abertos satisfazendo (4.4).

**Afirmação 1:** $\pi$ é um morfismo de variedades, portanto é uma aplicação contínua.

Lembrando que $A$ e $B$ representam matrizes simétricas de ordem $n+1$, denotaremos por $(a_{00} : \cdots : a_{ij} : \cdots : a_{nn} : b_{00} : \cdots : b_{rs} : \cdots : b_{nn})$ um ponto de $\mathbb{P}(V \times V)$, onde $0 \leq i,j,r,s \leq n$, $i \leq j$ e $r \leq s$. Via o mergulho de Plucker, $Gr(2,N+1) \subset \mathbb{P}^{m-1}$, onde $m = N(N+1)/2$, e portanto a reta $\lambda A+\mu B \in Gr(2,N+1)$ corresponde ao ponto $(\cdots : a_{ij}b_{rs} - a_{rs}b_{ij} : \cdots) \in \mathbb{P}^{m-1}$, onde $0 \leq i,j,r,s \leq n$, $i \leq j$ e $r \leq s$. Logo $\pi(a_{00} : \cdots : a_{ij} : \cdots : a_{nn} : b_{00} : \cdots : b_{rs} : \cdots : b_{nn}) = (\cdots : a_{ij}b_{rs} - a_{rs}b_{ij} : \cdots)$, ou seja, $\pi$ é morfismo.

**Afirmação 2:** O morfismo $\pi$ é $PGL_2$-equivariante, isto é, $\pi((A,B)\cdot\alpha) = \pi(A,B)\cdot\alpha$ onde $(A,B)\cdot\alpha := \varphi((A,B),\alpha)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \pi((A,B)\cdot\alpha) &= \pi(\alpha_{11}A+\alpha_{21}B, \alpha_{12}A+\alpha_{22}B) = \lambda(\alpha_{11}A+\alpha_{21}B)+\mu(\alpha_{12}A+\alpha_{22}B) \\ &= (\lambda\alpha_{11}+\mu\alpha_{12})A+(\lambda\alpha_{21}+\mu\alpha_{22})B = \lambda' A+\mu' B = \pi(A,B). \end{aligned}$$

Logo $\pi((A,B)\cdot\alpha) = \pi(A,B) = \pi(A,B)\cdot\alpha$, pois a ação em $Gr(2,N+1)$ é trivial.

**Afirmação 3:** $Gr(2, N+1)$ admite uma cobertura por abertos satisfazendo (4.4).

Dados $p, q \in \{1, \cdots, N+1\}$, tais que $p < q$, seja $V_{pq} = U_{pq} \cap Gr(2, N+1)$, onde $U_{pq}$ são os abertos principais de $\mathbb{P}^{m-1}$. Sejam $X_{ij}$ e $Y_{rs}$ as funções coordenadas de $\mathbb{P}(V \times V)$ e $Q$ o conjunto definido por $Q = \{(i,j); 0 \leq i, j \leq n \text{ e } i \leq j\}$ (conjunto de índices de uma matriz simétrica de ordem $n+1$). Seja $\Psi : \{1, \cdots, N+1\} \to Q$ uma bijeção. Então, é fácil ver que

$$\pi^{-1}(V_{pq}) = \{(A, B) \in \mathbb{P}(V \times V); X_{\Psi(p)}Y_{\Psi(q)} - X_{\Psi(q)}Y_{\Psi(p)} \neq 0\}.$$

Logo $\pi^{-1}(V_{pq}) \subset S_n$ é aberto. Agora, defina $\varphi_{pq} : \pi^{-1}(V_{pq}) \to V_{pq} \times PGL_2$ por

$$\varphi_{pq}(A, B) = \left( \lambda A + \mu B, \begin{pmatrix} a_{\Psi(p)} & a_{\Psi(q)} \\ b_{\Psi(p)} & b_{\Psi(q)} \end{pmatrix} \right)$$

Vamos mostrar que, para todo par $p, q \in \{1, \cdots, N+1\}$ tal que $p < q$, $\varphi_{pq}$ é um bijeção com inversa contínua, já que $\varphi_{pq}$ é polinomial nas coordenadas de $(A, B)$ e portanto contínua. Sem perda de generalidade podemos supor $(p, q) = (1, 2)$.

Para não carregar a notação denotaremos por $(a_1 : \cdots : a_{N+1} : b_1 : \cdots : b_{N+1})$ o ponto $(A, B) \in \mathbb{P}(V \times V)$ ao invés de $(a_{00} : \cdots : a_{ij} : \cdots : a_{nn} : b_{00} : \cdots : b_{rs} : \cdots : b_{nn})$.

Então, $\varphi_{12}(A, B) = \varphi_{12}(A', B')$, se e somente se,

$$\lambda A + \mu B = \lambda' A' + \mu' B' \in Gr(2, N+1) \text{ e } \begin{pmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \text{ com } c \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_i' = c\, a_i, \; i = 1, 2 \\ b_i' = c\, b_i, \; i = 1, 2 \\ a_i' b_j' - a_j' b_i' = d\,(a_i b_j - a_j b_i), \forall\, 1 \leq i, j \leq N+1 \text{ e } i < j. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c^2(a_1 b_2 - a_2 b_1) = d(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ d\,(a_1 b_j - a_j b_1) = a_1' b_j' - a_j' b_1' = (c a_1 b_j' - a_j' c b_1), \forall\, j = 2, \cdots, N+1 \\ d\,(a_2 b_j - a_j b_2) = a_2' b_j' - a_j' b_2' = (c a_2 b_j' - a_j' c b_2), \forall\, j = 3, \cdots, N+1 \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\begin{cases} c^2 = d, \text{ já que } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \text{ por hipótese,} \\ a_1(d b_j - c b_j') - b_1(d a_j - c a_j') = 0, \forall\, j = 2, \cdots, N+1 \\ a_2(d b_j - c b_j') - b_2(d a_j - c a_j') = 0, \forall\, j = 3, \cdots, N+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} db_j - cb'_j = 0 \Rightarrow c^2 b_j - cb'_j = 0 \Rightarrow b'_j = cb_j, \; \forall\, j = 3, \cdots, N+1, \\ da_j - ca'_j = 0 \Rightarrow c^2 a_j - ca'_j = 0 \Rightarrow a'_j = cb_j, \; \forall\, j = 3, \cdots, N+1. \end{cases}$$

Como já tínhamos $a'_i = ca_i$ e $b'_i = cb_i$, para $i = 1, 2$, concluímos que $a'_i = ca_i$ e $b'_i = cb_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, N+1\}$, isto é que $(A, B) = c(A', B') \in \mathbb{P}(V \times V)$.

Para provarmos a sobrejetividade de $\varphi_{12}$ basta observamos que dados $\alpha \in PGL_2$ e $\lambda A + \mu B \in V_{12}$, existem únicos escalares $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ tais que $\lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \neq 0$ e

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, fazendo $A' = \lambda_0 A + \mu_0 B$ e $B' = \lambda_1 A + \mu_1 B$, teremos $\lambda A + \mu B = \lambda A' + \mu B'$ em $Gr(2, N+1)$ e

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_{12}(A', B') = ((A, b), \alpha).$$

Note que é fácil concluir da prova da sobrejetividade de $\varphi_{12}$ que sua inversa $\varphi_{12}^{-1}$ é polinomial nas coordenadas de $((A, B), \alpha) \in V_{12} \times PGL_2$.

Finalmente, devemos mostrar que $\varphi_{12}$ é $PGL_2$-equivariante. Sejam $(A, B) \in \pi^{-1}(V_0)$ e $\alpha \in PGL_2$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_{12}((A, B)\alpha) &= \varphi_{12}(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B) \\ &= \left( \lambda(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B) + \mu(\alpha_{12}A + \alpha_{22}B), \begin{pmatrix} \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}b_1 & \alpha_{11}a_2 + \alpha_{21}b_2 \\ \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}b_1 & \alpha_{12}a_2 + \alpha_{22}b_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( (\lambda\alpha_{11} + \mu\alpha_{12})A + (\lambda\alpha_{21} + \mu\alpha_{22})B, \begin{pmatrix} \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}b_1 & \alpha_{11}a_2 + \alpha_{21}b_2 \\ \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}b_1 & \alpha_{12}a_2 + \alpha_{22}b_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \lambda A + \mu B, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \right) \\ &:= \left( \lambda A + \mu B, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) \alpha \end{aligned}.$$

Portanto $S_n$ é um $PGL_2$-fibrado principal e em particular temos que $Gr(2, N+1)$ é homeomorfo a $S_n/PGL_2$. $\square$

## 4.4 ESTABILIDADE DE FEIXES DE QUÁDRICAS E DE FORMAS BINÁRIAS

Nessa seção o objetivo é estudar a estabilidade do feixe de quádricas pela ação de $SL_{n+1}$ e para isto olharemos a estabilidade em $W_n$ pela ação de $SL_{n+1} \times SL_2$.

Primeiro vamos mostrar que a ação de $SL_{n+1}$ em $Gr(2, N+1)$ (Exemplo (4.13)) levanta para uma ação em $S_n$, isto é, que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} SL_{n+1} \times S_n & \longrightarrow & S_n \\ \quad\downarrow (id, \pi) & & \downarrow \pi \\ SL_{n+1} \times Gr(2, N+1) & \longrightarrow & Gr(2, N+1) \end{array}$$

é comutativo e que esta ação comuta com a ação de $SL_2(k)$ em $S_n$. De fato, a aplicação $\Psi : SL_{n+1}(k) \times S_n \to S_n$ definida por $\Psi(T, (A, B)) = (TAT^t, TBT^t)$ é uma ação e

$$\begin{aligned} T\pi(A, B) \ &:= \psi((T, \pi(A, B)) = \psi(T, \lambda A + \mu B) := \lambda(TAT^t) + \mu(TBT^t) \\ &= \pi(TAT^t, TBT^t) = \pi(T(A, B)). \end{aligned} .$$

Além disso, se $\varphi$ for a ação de $SL_2(k)$ em $S_n$ dada no Exemplo (4.60), temos que

$$\begin{aligned} \Psi(T, \varphi(\alpha, (A, B))) \ &= \Psi(T, (\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B) \\ &= (T(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B)T^t, T(\alpha_{12}A + \alpha_{22}B)T^t) \\ &= (\alpha_{11}TAT^t + \alpha_{21}TBT^t, \alpha_{12}TAT^t + \alpha_{22}TBT^t) \end{aligned} .$$

Por outro lado,

$$\varphi(\alpha, \Psi(T, (A, B))) = \varphi(\alpha, (TAT^t, TBT^t)) = (\alpha_{11}TAT^t + \alpha_{21}TBT^t, \alpha_{12}TAT^t + \alpha_{22}TBT^t).$$

Assim,

$$\alpha.T(A, B) := \varphi(\alpha, \Psi(T, (A, B))) = T.\alpha(A, B) := \Psi(T, \varphi(\alpha, (A, B))).$$

**Definição 4.62.** Um feixe de quádricas é chamado de *não degenerado* se ele contém uma quádrica não degenerada.

**Definição 4.63.** Seja $W_n$ o subconjunto aberto de elementos de $S_n$ cujo correspondente feixe é não degenerado, isto é,

$$W_n := \{(A, B) \in S_n \,;\, \text{posto}(\lambda A + \mu B) = n + 1, \text{ para } (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \text{ genérico}\}.$$

**Lema 4.64.** *$W_n$ é um $PGL_2$-fibrado principal sobre um aberto de $Gr(2, N+1)$. Em particular, temos $\pi(W_n)$ homeomorfo a $W_n/PGL_2$.*

*Demonstração.* Se mostrarmos que $\pi : S_n \to Gr(2, N+1)$ é uma aplicação aberta teremos que $(W_n, \pi|_{W_n})$ é $PGL_2$-fibrado principal sobre o aberto $\pi(W_n) \subset Gr(2, N+1)$. Então, seja $V$ um aberto de $S_n$. Para cada $U \subset Gr(2, N+1)$ aberto satisfazendo (4.4) temos que $\pi^{-1}(\pi(V) \cap U) = V \cap \pi^{-1}(U)$, pois $\pi$ é sobrejetiva, e da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"'] & U \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

segue que $\pi(V) \cap U = \pi_1(\varphi_U(V \cap \pi^{-1}(U))$ é aberto em $U$, já que $\varphi_U$ e $\pi_1$ são aplicações abertas. Logo $\pi(V)$ é aberto em $Gr(2, N+1)$. $\square$

O resultado a seguir nos diz que a estabilidade (respectivamente semi-estabilidade) de um ponto $(A, B) \in W_n$ com respeito a ação de $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$ é equivalente a estabilidade (respectivamente semi-estabilidade) do feixe $\mathcal{P} = \pi(A, B)$ com respeito a acção de $SL_{n+1}(k)$.

**Teorema 4.65.** *$(A, B) \in W_n$ é estável (respectivamente semi-estável) com respeito a ação de $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$, se e somente se, o feixe $\mathcal{P} = \pi(A, B)$ é estável (respectivamente semi-estável) com respeito a acção de $SL_{n+1}$.*

*Demonstração.* Temos que $\pi : W_n \to \pi(W_n) \subset Gr(2, N+1)$ define em $\pi(W_n)$ uma estrutura de $PGL_2$(ou $SL_2(k)$)-fibrado principal. Isto é, $\pi(W_n) \cong W_n/PGL_2$ (ou $W_n/SL_2(k)$). Então, o resultado segue de [11]. $\square$

No que segue estudaremos a estabilidade em $W_n$ com respeito a ação de $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$.

Para aplicarmos o critério de Hilbert-Mumford mostraremos que está ação é linear.

**Lema 4.66.** *A ação de $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$ em $\mathbb{P}(V \times V)$ dada por*

$$T\alpha(A, B) = (\alpha_{11}TAT^t + \alpha_{21}TBT^t, \alpha_{12}TAT^t + \alpha_{22}TBT^t)$$

*é linear.*

*Demonstração.* Dadas $T \in SL_{n+1}(k)$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T: & V \times V & \to & V \times V \\ & (A,B) & \mapsto & (TAT^t, TBT^t) \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Então, fixada a base canônica $\mathcal{C}$ em $V \times V$, existe $[T]_{\mathcal{C}} \in GL_{2N+2}(k)$ tal que $[T(A,B)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}[(A,B)]_{\mathcal{C}}$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi: & SL_{n+1}(k) & \to & GL_{2N+2}(k) \\ & T & \mapsto & [T]_{\mathcal{C}} \end{array}.$$

Afirmamos que $\phi$ é um homomorfismo de grupos. De fato,

$$\varphi(ST) := [ST]_{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}} = \varphi(S)\varphi(T).$$

Agora, dado $\alpha \in SL_2(k)$ considere o isomorfismo de espaços vetoriais definido por

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & V \times V & \to & V \times V \\ & (A,B) & \mapsto & (\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B) \end{array}.$$

Então, fixada a base $\mathcal{C}$ em $V \times V$, existe $[\alpha]_{\mathcal{C}} \in GL_{2N+2}(k)$ tal que

$$[\alpha(A,B)]_{\mathcal{C}} = [\alpha]_{\mathcal{C}}[(A,B)]_{\mathcal{C}}.$$

A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & SL_2 & \to & GL_{2N+2} \\ & \alpha & \mapsto & [\alpha]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

é um homomorfismo grupos. Como $T\alpha(A,B) = \alpha T(A,B)$, para todo $T \in SL_{n+1}(k)$, $\alpha \in SL_2(k)$ e $(A,B) \in \mathbb{P}(V \times V)$ segue que $(\phi, \Theta) : SL_{n+1}(k) \times SL_2(k) \to GL_{(2N+2)}(k)$ dada por $(\phi,\Theta)(T,\alpha) = \phi(T)\Theta(\alpha)$ é um homomorfismo de grupos. Além disso, temos claramente

$$T\alpha(A,B) = (\phi,\Theta)(T,\alpha)(A,B).$$

□

**Definição 4.67.** Definimos o *discriminante* de $(A,B) \in S_n$ por

$$D(A,B) := \det(\lambda \mathrm{A} + \mu \mathrm{B}) = \Delta(\lambda,\mu).$$

**Observação 4.68.** Para $(A,B) \in W_n$, temos que $D(A,B)$ é uma forma binária de grau $n+1$ e portanto $D(A,B)$ é um ponto de $\mathbb{P}^{n+1}$(espaço de parâmetro das formas binárias).

**Lema 4.69.** *A aplicação $D : W_n \to \mathbb{P}^{n+1}$, chamada aplicação discriminante, é um morfismo, sobrejetivo, próprio e equivariante com respeito à ação $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$, onde $SL_{n+1}(k)$ age trivialmente em $\mathbb{P}^{n+1}$.*

*Demonstração.* $D$ é claramente morfismo, pois $\det(\lambda A + \mu B)$ é um polinômio em $(\lambda, \mu)$ cujos coeficientes são polinômios homogêneos nas entradas das matrizes $A$ e $B$. Para ver que $D$ é sobrejetivo, seja $f_{n+1} \in \mathbb{P}^{n+1}$ uma forma binária de grau $n+1$. Como $k$ é algebricamente fechado, podemos reescrever $f_{n+1}(\lambda, \mu)$ da seguinte maneira

$$f_{n+1}(\lambda, \mu) = (\lambda\mu_0 + \lambda_0\mu)^{k_0} \dots (\lambda\mu_s + \lambda_s\mu)^{k_s},$$

onde $k_0 + \dots + k_s = n+1$. Para $\lambda_i \neq 0$, sejam $A_{k_i}$ e $B_{k_i}$ as seguintes matrizes quadradas de ordem $k_i$

$$A_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\mu_i}{\lambda_i} \\ 0 & \dots & \frac{\mu_i}{\lambda_i} & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ \frac{\mu_i}{\lambda_i} & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda_i = 0$, sejam $A_{k_i}$ a matriz identidade e $B_{k_i}$ a matriz nula, ambas de ordem $k_i$.

Fazendo $A = \begin{pmatrix} A_{k_0} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{k_s} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{k_0} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{k_s} \end{pmatrix}$ temos que

$$D(A, B) = \det(\lambda A + \mu B) = \det(\lambda A_{k_0} + \mu B_{k_0}) \dots \det(\lambda A_{k_s} + \mu B_{k_s})$$

Como $\det(\lambda A_{k_i} + \mu B_{k_i}) = (1/\lambda_i)^{k_i}(\lambda\mu_i + \mu\lambda_i)^{k_i}$, se $\lambda_i \neq 0$ e $\det(\lambda A_{k_i} + \mu B_{k_i}) = \lambda^{k_i}$, se $\lambda_i = 0$, temos $D(A, B) = f_{n+1}(\lambda, \mu)$ em $\mathbb{P}^{n+1}$ e $D$ sobrejetiva.

Veremos agora que $D$ é $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$-equivariante. Temos que

$$\begin{aligned} D(T\alpha(A, B) &= D(\alpha T(A, B)) = D(\alpha(TAT^t, TBT^t)) \\ &= \det(\lambda(\alpha_{11}TAT^t + \alpha_{21}TBT^t) + \mu(\alpha_{12}TAT^t + \alpha_{22}TBT^t)) \\ &= \det(T[\lambda(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B) + \mu(\alpha_{12}A + \alpha_{22}B)]T^t) \\ &= \det(\lambda(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B) + \mu(\alpha_{12}A + \alpha_{22}B)) \\ &= \det((\lambda\alpha_{11} + \mu\alpha_{12})A + (\lambda\alpha_{21} + \mu\alpha_{22})B) \\ &= \Delta(\lambda\alpha_{11} + \mu\alpha_{12}, \lambda\alpha_{21} + \mu\alpha_{22})) = \alpha\Delta(\lambda, \mu) = T\alpha\Delta(\lambda, \mu), \end{aligned}$$

pois a ação de $SL_{n+1}$ em $\mathbb{P}^{n+1}$ é trivial. Logo, $D((T\alpha)(A, B)) = (T\alpha)D(A, B)$. $\square$

Para o estudo da estabilidade de feixes de quádricas precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 4.70.** *Seja* $(A, B) \in W_n$ *um par de matrizes tal que* $P = \lambda A + \mu B$ *é um feixe de quádricas do tipo* $[(e_0^1, \cdots, e_{r_1}^1), (e_0^2, \cdots, e_{r_2}^2), \cdots, (e_0^s, \cdots, e_{r_s}^s)]$. *Suponha que* $e_0^i \geq 2$, *para algum* $i$. *Então a* $\mathcal{O}(A, B)$ *sobre a ação de* $SL_{n+1}(k) \times SL_2(k)$ *não é fechada.*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que $\mathcal{O}(A, B)$ não é fechada sobre a ação de $SL_{n+1}(k)$. Sem perda de generalidade podemos supor $e_0^1 \geq 2$. Usando a forma normal do feixe, podemos assumir que $A$ e $B$ são as matrizes da forma $A = diag(P_1, P_2, \cdots, P_s)$ e $B = diag(Q_1, Q_2, \cdots, Q_s)$, onde $P_i$ e $Q_i$ são matrizes em blocos cujos blocos são da forma:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_i & 1 \\ & & \iddots & \iddots & \\ 0 & a_i & 1 & \cdots & 0 \\ a_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de tamanho $e_j^i$. Suponhamos inicialmente que $e_0^1 = 2l_1$, para algum $l_1 \in \mathbb{N}$. Seja $T = \begin{pmatrix} T(e_0^1) & 0 \\ 0 & I_{n+1-e_0^1} \end{pmatrix}$ a matriz de ordem $n+1$ tal que $I_{n+1-e_0^1}$ é a matriz identidade de ordem $n + 1 - e_0^1$ e

$$T(e_0^1) = \begin{pmatrix} s^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}$$

tem ordem $e_0^1$ e $s \in k^*$. Então,

$$P_{01}T(e_0^1)^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_1 s \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a_1 s & s \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_1 s & s & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_1 s^{-1} & s & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 s^{-1} & s^{-1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde o $s$ da diagonal abaixo da diagonal secundária, aparece a última vez na posição $(l_1+1)(l_1+1)$ e

$$T(e_0^1)P_{01}T(e_0^1) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a & s^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

com $s^2$ na posição $(l_1+1)(l_1+1)$. Assim,

$$P_0 = \lim_{s \to 0} T(e_0^1)P_{01}T(e_0^1)^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

e $(A_0, I_{n+1}) = \lim_{s \to 0}(TAT^t, TBT^t) \in \overline{\mathcal{O}(A,B)}$, onde $A_0 = diag(P_0, P_2, \cdots, P_s)$. Como os símbolos de Segre dos feixes $\lambda A_0 + \mu I_{n+1}$ e $\lambda A + \mu B$ são diferentes temos que $(A_0, I_{n+1}) \in \overline{\mathcal{O}(A,B)} - \mathcal{O}(A,B)$. Portanto $\mathcal{O}(A,B)$ não é fechada.

Se $e_0^1 = 2l_1 + 1$, para algum $l_1 \in \mathbb{N}$, seja $T = \begin{pmatrix} T(e_0^1) & 0 \\ 0 & I_{n+1-e_0^1} \end{pmatrix}$ a matriz de ordem $n+1$, tal que $I_{n+1-e_0^1}$ é a matriz identidade de ordem $n+1-e_0^1$,

$$T(e_0^1) = \begin{pmatrix} s^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}$$

tem ordem $e_0^1$, $s \in k^*$ e o 1 está na posição $(l+1)(l+1)$. Então,

$$P_{01}T(e_0^1)^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & as \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & as & s \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & a & s & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & as^{-1} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ as^{-1} & s^{-1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde o último $s$ da diagonal secundária está na posição $(l_1+1)(l_1+2)$ e o 1 aparece uma única vez na posição $(l_1+2)(l_1+1)$. Temos ainda

$$T(e_0^1)P_{01}T(e_0^1)^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a & s & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a & s & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

com $s$ na diagonal abaixo da diagonal secundária somente nas posições $(l_1+1)(l_1+2)$ e

$(l_1+2)(l_1+1)$. Assim,

$$P_0 = \lim_{s\to 0} T(e_0^1)P_{01}T(e_0^1)^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

e $(A_0, I_{n+1}) = \lim_{s\to 0}(TAT^t, TBT^t) \in \overline{\mathcal{O}(A,B)}$, onde $A_0 = diag(P_0, P_2, \cdots, P_s)$. Como os símbolos de Segre dos feixes $\lambda A_0 + \mu I_{n+1}$ e $\lambda A + \mu B$ são diferentes temos que $(A_0, I_{n+1}) \in \overline{\mathcal{O}(A,B)} - \mathcal{O}(A,B)$. Portanto $\mathcal{O}(A,B)$ não é fechada. $\square$

**Teorema 4.71.** *(i) $(A,B) \in W_n$ é semi-estável, se e somente se, $D(A,B)$ não admite raízes de multiplicidade maior do que $(n+1)/2$.*

*(ii) $(A,B) \in W_n$ é estável, se e somente se, $D(A,B)$ não admite raízes múltiplas.*

*Demonstração.* Dado $(A,B) \in W_n \subset \mathbb{P}(V\times V)$, seja $(\hat{A,B}) \in V \times V$ um representante de $(A,B)$. Suponhamos $(A,B)$ instável. Então, $(0,0) \in \overline{\mathcal{O}(\hat{A,B})}$. Afirmamos que $D$ morfismo próprio e equivariante implica $\overline{\mathcal{O}(D(A,B))} = D(\overline{\mathcal{O}(A,B)})$. Com efeito, $D$ equivariante implica $D(\mathcal{O}(A,B)) = \mathcal{O}(D(A,B))$. Além disso,

$$\mathcal{O}(A,B) \subset \overline{\mathcal{O}(A,B)} \Rightarrow D(\mathcal{O}(A,B)) \subset D(\overline{\mathcal{O}(A,B)}) \Rightarrow \overline{D(\mathcal{O}(A,B))} \subset D(\overline{\mathcal{O}(A,B)}),$$

pois $D$ próprio leva fechado em fechado. Por outro lado, $D$ contínua implica $D^{-1}(\overline{D(\mathcal{O}(A,B))})$ fechado. Como $\mathcal{O}(A,B) \subset D^{-1}(D(\mathcal{O}(A,B))) \subset D^{-1}(\overline{D(\mathcal{O}(A,B))})$ temos

$$\overline{\mathcal{O}(A,B)} \subset D^{-1}(\overline{D(\mathcal{O}(A,B))}) \Rightarrow D(\overline{\mathcal{O}(A,B)}) \subset \overline{D(\mathcal{O}(A,B))}.$$

Logo, $(0,0) \in \overline{\mathcal{O}(\hat{A,B})}$ implica $(0,0) \in \overline{\mathcal{O}(D(\hat{A,B}))}$, ou seja, $(A,B)$ instável implica $D(A,B)$ instável. A recíproca é verdadeira e , mas mostrá-la precisaremos usar dois resultados. O primeiro, devido a [12] diz que o anel de invariantes de pares de matrizes simétricas $A$ e $B$ pela ação de $SL_{n+1}(k)$ é gerado pelos coeficientes de $\det(\lambda \mathrm{A} + \mu \mathrm{B})$ que são invariantes pela ação de $SL_2(k)$. O segundo diz que para a ação de um grupo redutivo $G$ em uma variedade projetiva $X$, um ponto $x$ é semi-estável, se e somente se, existe um polinômio homogêneo invariante de grau positivo tal que $F(x) \neq 0$. Logo, $D(A,B) = \det(\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B})$ instável implica que seus coeficientes pensados como um ponto de $\mathbb{P}^{n+1}$ zeram todos os polinômios homogêneos que são $SL_2(k)$ invariantes. Em particular, anula os coeficientes de $\det(\lambda A + \mu B)$ que são $SL_2(k)$ invariantes. Portanto $(A,B)$ anula todo polinômio homogêneo $SL_{n+1}(k)$ invariante o que implica $(A,B)$ instável. Com isso, temos:

*i)* $(A,B) \in W_n$ é semi-estável, se e somente se, a forma binária $D(A,B)$ é semi-estável. Mas, pela Proposição(4.45), $D(A,B)$ é semi-estável, se e somente se, não adimite raízes de multiplicidade $> (n+1)/2$.

*ii)* Vamos mostrar que se $D(A,B)$ não adimite raízes múltiplas, então $(A,B) \in W_n$ é estável. Pela Proposição (4.45), $D(A,B)$ é estável. Logo, $\mathcal{O}(D(A,B)) \subset \mathbb{P}^{n+1}$ é fechada e como $D$ é morfismo, $D^{-1}(\mathcal{O}(D(A,B)))$ é fechada em $W_n$. Seja $(E,F) \in W_n$ tal que $D(E,F) \in \mathcal{O}(D(A,B))$. Então,

$$\det(\lambda E + \mu F) = D(E,F) = \alpha D(A,B) = \det(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B)$$

tem somente raízes simples e, consequentemente, os símbolos de Segre dos feixes $\lambda E+\mu F$ e $\lambda A+\mu B$ são ambos iguais a $[1,\cdots,1]$ Ver (3.28). Pela Proposição 3.25, existe $T \in SL_{n+1}$ tal que $(E,F) = T(A,B)$, isto é, $(E,F) \in \mathcal{O}(A,B)$. Logo, $\mathcal{O}(A,B) = D^{-1}(\mathcal{O}(D(A,B)))$ é fechada em $W_n$. Falta mostrar que o estabilizador de $(A,B)$ é finito. Como o símbolo de Segre do feixe $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$ é $[1,\cdots,1]$, então pela forma normal podemos considerar

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \text{ com } a_i \neq a_j, \forall\, i \neq j \text{ e } B = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $T \in SL_{n+1}(k)$ e $\alpha \in SL_2(k)$ forem matrizes tais que $T\alpha(A,B) = (A,B)$, teremos

$$\begin{cases} \alpha_{11}TAT^t + \alpha_{21}TT^t &= A \\ \alpha_{12}TAT^t + \alpha_{22}TT^t &= I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{22}\alpha_{11})TT^t = \alpha_{12}A - \alpha_{11}I \\ (\alpha_{22}\alpha_{11} - \alpha_{21}\alpha_{12})TAT^t = \alpha_{22}A - \alpha_{21}I \end{cases}$$

Como $\det(\alpha) = (\alpha_{22}\alpha_{11} - \alpha_{21}\alpha_{12}) = 1$, temos

$$\begin{cases} TT^t = \alpha_{11}I - \alpha_{12}A := D_1 \\ TAT^t = \alpha_{22}A - \alpha_{21}I := D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^t = T^{-1}D_1 \\ TAT^{-1}D_1 = D_2 \quad \Rightarrow TA = D_2D_1^{-1}T \end{cases}.$$

Observe que $D_1$ e $D_2$ são matrizes diagonais dadas por

$$D_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{12}a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{11} - \alpha_{12}a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{11} - \alpha_{12}a_n \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{22}a_0 - \alpha_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}a_1 - \alpha_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{22}a_n - \alpha_{21} \end{pmatrix}.$$

Se $D_2D_1^{-1} = (\lambda_i)$, afirmamos que $\lambda_j \neq \lambda_i$, para $i \neq j$. De fato,

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{22}a_i - \alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{12}a_i} = \frac{\alpha_{22}a_j - \alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{12}a_j} = \lambda_j \Rightarrow a_i = a_j.$$

Agora, usando que $TA = D_2D_1^{-1}$ temos

$$\begin{pmatrix} a_0t_{00} & \cdots & a_nt_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_0t_{n0} & \cdots & a_nt_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0t_{00} & \cdots & \lambda_0t_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_nt_{n0} & \cdots & \lambda_nt_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow (a_j - \lambda_i)t_{ij} = 0, \forall\, 0 \leq i, j \leq n.$$

Assim, $a_j - \lambda_i = 0$ se $t_{ij} \neq 0$. Como $\lambda_i \neq \lambda_l$, para $i \neq l$, temos que $t_{ij}$ é não nulo para no máximo um elemento da coluna $j$. Analogamente, usando que $a_j \neq a_l$, para $j \neq l$, temos $t_{ij} \neq 0$ para no máximo um elemento da linha $i$. Donde concluímos que $T$ é uma matiz diagonal. De $TA = D_2D_1^{-1}T$ segue que $a_i = (\alpha_{22}a_i - \alpha_{21})/(\alpha_{11} - \alpha_{12}a_i)$, $\forall i$. Então,

$$\begin{cases} \alpha_{11}a_i - \alpha_{12}a_i^2 &= \alpha_{22}a_i - \alpha_{21} \\ \alpha_{11}a_j - \alpha_{12}a_j^2 &= \alpha_{22}a_j - \alpha_{21} \end{cases} \Rightarrow \alpha_{11} - \alpha_{12}(a_i + a_j) = \alpha_{22}, \forall\, i \neq j \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} - \alpha_{12}(a_i + a_j) &= \alpha_{22} \\ \alpha_{11} - \alpha_{12}(a_i + a_l) &= \alpha_{22} \end{cases} \Rightarrow \alpha_{12}(a_j - a_l) = 0, \forall j \neq l \Rightarrow \alpha_{12} = 0.$$

Então, $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, pois $\alpha_{11} - \alpha_{12}(a_i - a_j) = \alpha_{22}$ e $\alpha_{21} = 0$, pois $\alpha_{11}a_i = \alpha_{11}a_i - \alpha_{21}$. Como $1 = \det(\alpha) = \alpha_{11}\alpha_{22} = (\alpha_{11})^2$, temos $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \pm 1$. Portanto existem duas possibilidades para $\alpha$ e como T depende de $\alpha, A, I$, então existem finitos elementos no estabilizador de $(A, B)$ (ou de $\mathcal{P}$).

Para a recíproca, vamos mostrar inicalmente que o feixe do tipo $[(1,1),1,\cdots,1]$ não é estável. Segue da forma normal de um feixe $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$ com símbolo de Segre $[(1,1),1,\cdots,1]$ que $A$ e $B$ podem ser tomadas da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que matrizes da forma

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos(t) & \text{sen}(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \in SL_{n+1}$$

estão no estabilizador do par $(A, B)$ (ou de $\mathcal{P}$) e portanto este nã é finito.

De fato, $TBT^t = TT^t = I$ e

$$TAT^t = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\cos(t) & a_n\text{sen}(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\text{sen}(t) & a_n\cos(t) \end{pmatrix} T^t = A.$$

Portanto o feixe com Símbolo de Segre $[(1,1),1,\cdots,1]$ não é estável. Com o mesmo raciocínio, mostra-se que feixes do tipo $[(e_1,\cdots,e_{r_1}),(e_{r_1},\cdots,e_{r_2}),\cdots,(e_{r_{s-1}+1},\cdots,e_{r_s})]$, com $e_i = 1$ para todo $i$, não são estáveis pois não têm estabilizador finito.

Segue do Lema (4.70) que feixes do tipo $[(e_1,\cdots,e_{r_1}),(e_{r_1},\cdots,e_{r_2}),\cdots,(e_{r_{s-1}+1},\cdots,e_{r_s})]$, com $e_i \geq 2$, para algum $i$ não são estáveis.

Logo, um feixe $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$ é estável, se e somente se tem símbolo de Segre do tipo $[1,1,\cdots,1]$. Ou seja, se e somente se, $D(A,B)$ não tem raízes múltiplas. $\square$

Podemos reescrever o Teorema (4.71) da seguinte forma.

**Teorema 4.72.** (i) *Um feixe $\mathcal{P} \in Gr(2, N+1)$ é semi-estável, se e somente se, seu discriminante não admite raiz de multiplicidade maior do que $\frac{n}{2}$;*

(ii) *Um feixe de quádricas $\mathcal{P} \in Gr(2, N+1)$ é estável, se e somente se, seu discriminante não admite raiz múltipla.*

## 4.5 ESPAÇOS DE MODULI DE FEIXES DE QUÁDRICAS E DE FORMAS BINÁRIAS

Espaços de Moduli são construídos como quociente de variedades módulo ação de um grupo redutivo. O objetivo desta seção é um apresentar um resultado dado por Dan Avritzer e Herbert Lange em [1] que mostra que existe um isomorfismo entre a compactificação do espaço de Moduli de feixes de quádricas estáveis e a compactificcção do Moduli de formas binárias estáveis.

Para o nosso objetivo precisaremos do teorema dado a seguir.

**Teorema 4.73.** *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Para toda ação linear de um grupo redutivo $G$ em $X$ temos que :*

*(i) Existe uma variedade projetiva $Y$ e um morfismo $\phi : X^{ss} \to Y$ tal que $(Y, \phi)$ é o quociente categórico de $X^{ss}$ por $G$;*

*(ii) Existe um aberto $Y^s$ de $Y$ tal que $\phi^{-1}(Y^s) = X_0^s$ e $(Y^s, \phi)$ é um espaço de órbitas;*

*(iii) Para $x_1, x_2 \in X^{ss}$, $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, se somente se, $\overline{\mathcal{O}(x_1)} \cap \overline{\mathcal{O}(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset$;*

*Demonstração.* Ver [4], Teorema 3.14, pag. 74. □

**Corolário 4.74.** *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e $G$ um grupo redutivo de dimensão finita agindo linearmente em $X$. Então, $X^{ss}/G$ parametriza as órbitas fechadas de $X$.*

*Demonstração.* Seja $(Y := X^{ss}/G, \phi)$ o quociente categórico de $X$ por $G$. Então, pelo Teorema 4.73(*iii*), $x_1, x_2 \in \phi^{-1}(y)$, se e somente se, $\overline{\mathcal{O}(x_1)} \cap \overline{\mathcal{O}(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset$. Então, como órbitas distintas não se interceptam, existe no máximo uma órbita fechada no conjunto

$\phi^{-1}(y) \subset X^{ss}$. Vamos mostrar que sempre existe $x \in \phi^{-1}(y)$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mathcal{O}(x)$ e, neste caso, teremos $y = \phi(x)$. Por [4], Lema 3.7, temos que $\forall\, x \in X$, $\mathcal{O}(x)$ é aberto em $\overline{\mathcal{O}(x)}$ e $\overline{\mathcal{O}(x)} - \mathcal{O}(x)$ é a união de órbitas, todas de dimensão menor. Logo, se $x \in \phi^{-1}(y)$ e $\overline{\mathcal{O}(x)} - \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$, existe $x_1 \in \overline{\mathcal{O}(x)} - \mathcal{O}(x)$ e $\overline{\mathcal{O}(x_1)} \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$. Como

$$\mathrm{dim}(\overline{\mathcal{O}(\mathrm{x}_1)}) = \mathrm{dim}(\mathcal{O}(\mathrm{x}_1) < \mathrm{dim}(\mathcal{O}(\mathrm{x})) = \mathrm{dim}(\overline{\mathcal{O}(\mathrm{x})}) \leq \mathrm{dim}(\mathrm{G}) < \infty,$$

o resultado segue. $\square$

**Observação 4.75.** Um ponto interessante do Teorema (4.73) é que, sendo $Y$ uma variedade projetiva, podemos interpretá-la como a compactificação (no sentido natural) do quociente $X_0^s$ por $G$.

Daremos a seguir os dois exemplos de espaços quocientes de nosso interesse.

**Exemplo 4.76.** Seja $W_n$ o espaço de feixes de quádricas não degeneradas em $\mathbb{P}^n$ e consideremos a ação de $SL_{n+1}(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ em $W_n$. Pelo Teorema 4.73, existe o quociente categórico de $(W_n)_0^s$ (resp. $W_n^{ss}$), o conjunto de feixes de quádricas estáveis (resp. semi-estáveis), por $SL_{n+1}(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$. Tal conjunto será denotado por $\mathcal{M}_n^p$ (resp. $\overline{\mathcal{M}_n^p}$) e será chamado espaço de Moduli de feixes de quádricas estáveis (resp. semi-estáveis).

**Exemplo 4.77.** Seja $\mathbb{P}^{n+1}$ o espaço de formas binárias de grau $n+1$ e consideremos a ação de $SL_2(\mathbb{C})$ em $\mathbb{P}^{n+1}$ (Ver Exemplo 4.16). Pelo Teorema 4.73, existe o quociente categórico de $(\mathbb{P}^{n+1})_0^s$ (resp. $(\mathbb{P}^{n+1})^{ss}$), o conjunto de formas binárias estáveis (resp. semi-estáveis), por $SL_2(\mathbb{C})$. Tal conjunto será denotado por $\mathcal{M}_{n+1}^b$ (resp. $\overline{\mathcal{M}_{n+1}^b}$) e será chamado espaço de Moduli de formas binárias estáveis (resp. semi-estáveis).

A justificativa para a nomeclatura espaço de Moduli está na teoria de Moduli. Esta teoria está em conexão com problemas de classificação em Geometria Algébrica. Os ingredientes básicos de um problema de classificação são uma coleção de objetos $\mathcal{C}$ e uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{C}$. Procura-se dotar $\mathcal{C}/\sim$ de uma estrutura de variedade algébrica e também entender como é possível passar de objeto para outro "continuamente". Frequentemente existe uma noção geométrica bastante natural do que significa o advérbio "continuamente". Em resumo, para cada problema de classificação precisamos definir formalmente o conceito intuitivo de família. Esta etapa consiste em passar de um problema de classificação para um problema de Moduli. Os espaços de Moduli constituem respostas a problemas de Moduli.

A renovação e aplicação da Teoria dos Invariantes em problemas de Moduli na década de 60, por Mumford [10], forneceu uma "receita"para a construção de espaços de Moduli. Muitos destes espaços, senão todos, são obtidos algebricamente através de variedades quocientes. Para mais detalhes ver [9] e [4].

**Definição 4.78.** Chamaremos uma *forma binária de grau $n$ do tipo* $\{m_1, \cdots, m_r\}$ com $(m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r)$ se ela possuir exatamente $r$ raízes com multiplicidades $m_1, \cdots, m_r$.

**Lema 4.79.** *Uma forma binária de grau ímpar é semi-estável, se e somente se, é estável.*

*Demonstração.* Sabemos pela Proposição 4.45 que uma forma binária de grau $n$ é estável (resp. semi-estável), se e somente se, todas as suas raízes têm multiplicidade $< n/2$ $(\leq n/2)$. Como $n$ é ímpar, $n/2$ não é inteiro e uma raiz $f$ tem multiplicidade $\leq n/2$, se e somente se, tem multiplicidade $< n/2$. Logo uma forma binária $f$ semi-estável é sempre estável. □

**Proposição 4.80.** *Suponha que $n+1 = 2m$. Então existe exatamente uma órbita fechada de formas binárias de grau $n+1$ em $\mathbb{P}^n$ estritamente semi-estáveis, a saber a órbita de formas do tipo $\{m, m\}$. Em particular, $\overline{\mathcal{M}^b_{n+1}}$ é a compactificação a um ponto de $\mathcal{M}^b_{n+1}$.*

*Demonstração.* Seja $f$ uma forma binária em $\mathbb{P}^n$ estritamente semi-estável, isto é, semi-estável, mas não estável. Usando o Teorema (4.45), podemos afirmar que $f$ tem uma raiz de multiplicidade $m$. Sem perda de generalidade podemos supor que esta raiz é $(1:0)$, isto é, que $Y^m$ é um fator de $f$. Assim, $f(X,Y) = Y^m(a_0X^m + a_1X^{m-1}Y + \cdots + a_mY^m)$, com $a_0 \neq 0$ e se $\alpha = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \alpha f := f(t^{-1}X, tY) &= t^mY^m(t^{-m}a_0X^m + t^{-m+2}X^{m-1}Y + \cdots + t^m a_mY^m) \\ &= Y^m(a_0X^m + t^2X^{m-1}Y + \cdots + t^{2m}Y^m) \end{aligned}$$

.

Logo, $\lim_{t\to 0} f(t^{-1}X, tY) = a_0X^mY^m := f_n(X,Y) \in \overline{\mathcal{O}(f)}$.

É fácil ver que $\mathcal{O}(f_n(X,Y))$ é fechada e, pelo Teorema 4.73($iii$), temos que $f_n$ e $f$ têm a mesma imagem em $\overline{\mathcal{M}^b_{n+1}} := (\mathbb{P}^n)^{ss}/SL_2$, para toda $f$ estritamente semi-estável. Portanto, $\overline{\mathcal{M}^b_{n+1}} = \mathcal{M}^b_{n+1} \cup \{pt\}$. □

**Definição 4.81.** Seja $f(X,Y)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^{n-i}Y^i$ uma forma binária de grau $n$ em $k[X,Y]$. Se $f(X,Y)$ se fatora com $\Pi_{i=1}^{n}(\alpha_iX-\beta_iY)$, definimos o *discriminante* $d$ de $f$ por:

$$d=\Pi_{i<j}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i).$$

**Teorema 4.82.** (1) *O morfismo discriminante $D:W_n\to\mathbb{P}_{n+1}$ induz um isomorfismo*

$$\overline{D}:\overline{\mathcal{M}_n^p}\to\overline{\mathcal{M}_{n+1}^b}.$$

(2) *O morfismo $\overline{D}$ leva o subconjunto aberto $\mathcal{M}_n^p$ de $\overline{\mathcal{M}_n^p}$ em $\mathcal{M}_{n+1}^b$. O complementar de $\overline{D}(\mathcal{M}_n^p)$ em $\overline{\mathcal{M}_{n+1}^b}$ é o divisor $d=0$, onde $d$ denota o discriminante de formas binárias de grau $n+1$.*

*Demonstração.* Denotemos por $(\overline{\mathcal{M}_n^p},\pi_p)$ e $(\overline{\mathcal{M}_{n+1}^b},\pi_b)$ os quocientes categóricos de $W_n^{ss}$ por $SL_{n+1}\times SL_2$ e de $(\mathbb{P}^n)^{ss}$ por $SL_2$, respectivamente. Pelo Lema 4.69 temos que o morfismo $D:W_n\to\mathbb{P}_{n+1}$ é equivariante com respeito as ações de $SL_{n+1}\times SL_2$ em $W_n$ e de $SL_2$ em $\mathbb{P}_{n+1}$. Além disso, pelo Teorema 4.71, temos que $(A,B)\in W_n^{ss}$, se e somente se, $D(A,B)\in(\mathbb{P}^n)^{ss}$. Então $D$ induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (W_n)^{ss} & \xrightarrow{D} & (\mathbb{P}^{n+1})^{ss} \\ \downarrow\pi_p & & \downarrow\pi_b \\ \dfrac{(W_n)^{ss}}{SL_{n+1}\times SL_2}=\overline{\mathcal{M}_n^p} & \xrightarrow{\overline{D}} & \overline{\mathcal{M}_{n+1}^b}=\dfrac{(\mathbb{P}^{n+1})^{ss}}{SL_{n+1}\times SL_2}. \end{array}$$

De fato, $(\overline{\mathcal{M}_n^p},\pi_p)$ quociente categórico e $\pi_b\circ D:W_n^{ss}\to\overline{\mathcal{M}_{n+1}^b}$ $SL_{n+1}\times SL_2$-invariante garantem a exitência de $\overline{D}$, tal que $\pi_b\circ D=\overline{D}\circ\pi_p$. Como o anel de invariantes $I_n$ das formas binárias de grau $n$ é normal e $\overline{\mathcal{M}_{n+1}^b}=Proj(I_{n+1})$, pelo Teorema Principal de Zariski [13] basta mostrarmos a injetividade e sobrejetividade de $\overline{D}$. Mas, a sobrejetividade de $\overline{D}$ é óbvia, já que $D$ é sobrejetivo (ver Lema 4.69). Resta então mostrarmos que $\overline{D}$ é injetivo.

Seja $f$ uma forma binária do tipo $\{m_1,\cdots,m_r\}$. De acordo com a forma normal de feixes de quádricas 3.28, para cada símbolo de Segre $[(e_1^1,\cdots,e_{d_1}^1),\cdots,(e_1^r,\cdots,e_{d_r}^r)]$ tal que $\sum_{i=1}^{d_1}e_i^1=m_1$, $\sum_{i=1}^{d_2}e_i^2=m_2$, $\cdots$, $\sum_{i=1}^{d_r}e_i^r=m_r$, existe uma única órbita $\mathcal{O}(A,B)\subset W_n$ tal que o feixe correspondente $\mathcal{P}=\lambda A+\mu B$ tem este símbolo de Segre e, neste caso, $D(\mathcal{O}(A,B))=f$.

Dado $y \in \mathcal{M}^b_{n+1}$, como $(\mathcal{M}^b_{n+1}, \pi_b)$ é um espaço de órbitas, existe $f \in (\mathbb{P}^{n+1})^s_0$ tal que $\pi_b^{-1}(y) = \mathcal{O}(f)$. Pelo Lema 4.70, existe uma única órbita fechada contida em $D^{-1}(f)$, a saber, $\mathcal{O}(A, B)$ tal que o feixe $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$ tem como símbolos de Segre $[(1, 1, \cdots, 1), (1, 1, \cdots, 1), \cdots, (1, 1, \cdots, 1)]$, onde o $i-$ésimo parêntese tem tamanho $m_i$. Lembrando que $\overline{\mathcal{M}^p_n}$ parametriza as órbitas fechadas de $W_n$ (Ver Corolário 4.74), temos que $(\overline{D})^{-1}(y) = (\overline{D})^{-1}(\pi_b(f)) = \{\pi_p(A, B)\}$. Desta forma, se $n + 1$ for ímpar, temos $\overline{\mathcal{M}^b_{n+1}} = \mathcal{M}^b_{n+1}$ e $\overline{D}$ injetivo pelo que acabamos de mostrar.

Se $n + 1$ for par, pela Proposição 4.80, $\overline{\mathcal{M}^b_{n+1}} = \mathcal{M}^b_{n+1} \cup \{p_{ss} := \pi_b(\mathcal{O}(f_n))\}$, onde $f_n(X, Y) = a_0 X^m Y^m$ e $n+1 = 2m$. Neste caso, devemos mostrar que $(\overline{D})^{-1}(p_{ss})$ tem um único ponto de $\overline{\mathcal{M}^p_n}$. Seja $f$ estritamente semi-estável tal que $\pi_b(f) = \pi_b(f_n) = p_{ss}$. Pelo Teorema 4.45 e pelo Lema 4.70, temos que a única órbita fechada $\mathcal{O}(A, B) \subset D^{-1}(f)$ tem símbolos de Segre $[(1, \cdots, 1), (1, \cdots, 1), \cdots, (1, \cdots, 1)]$, onde o $i-$ésimo parêntese tem $e_i$ entradas iguais a 1, $e_1 = m \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$ e $e_2 + \cdots + e_r = m$. Se $r \geq 3$, isto é, $e_2 < m$, então $D(\mathcal{O}(A, B)) = O(f)$ é do tipo $\{m, e_2, \cdots, e_r\}$ que não é fechada, absurdo pois $D$ um morfismo próprio leva fechado em fechado. Logo, $(\overline{D})^{-1}(p_{ss}) = \{\pi_p(\mathcal{O}(A, B))\}$, onde $(A, B) \in D^{-1}(f_n)$ é tal que os símbolos de Segre do feixe corrrespondente são $[(1, \cdots, 1), (1, \cdots, 1)]$ com os parênteses de tamanho $m$.

Para a afirmação (2), observe que se $x = \pi_p(\mathcal{O}(A, B)) \in \mathcal{M}^p_n$, então $(A, B) \in (W_n)^s_0$ e $D(A, B) \in \mathbb{P}^{n+1}$ não tem raízes múltiplas (Teorema 4.71). Logo, $D(A, B) \in (\mathbb{P}^{n+1})^s_0$ e $\overline{D}(x) = \pi_b(D(A, B)) \in \mathcal{M}^b_{n+1}$. Finalmente, $\pi_b(f) \in \mathcal{M}^b_{n+1} - \overline{D}(\mathcal{M}^p_n)$, se e somente se, $f$ é estável e tem raiz múltipla, isto é, se e somente se, $f$ é estável e o discriminante de $f$ é nulo. □

# Referências Bibliográficas


[1] AVRITZER, D.; LANGE, H. *Pencil of Quadrics, Binary forms and Hyperlliptic Curves*. Communications in Algebra, Nova York: v. 28, n. 12, p. 5541-5561, 2000.

[2] HODGE, W.V.D.; PERDOE, D. *Methods of algebraic Geometry*. Cambridge University Press, New York: 1994.

[3] HARRIS, J. *Algebraic Geometry: a first course*,Volume 1. Springer Verlag, New York: 1995

[4] NEWSTEAD, P. E *Introduction to moduli problemans and orbit spaces*. Springer Verlag, New York: 1978

[5] HUSEMOLLER, Dale et al. *Basic Bundle Theory and K-Cohomology Invariants*. Springer Verlag, Berlin Heidelber: 2008

[6] BOREL, A. *Linear Algebraic Groups*. Springer Verlag, New York: 1991.

[7] SHAFAREVICH, I. *Basic Algebraic Geometry*, Volume 1. Springer Verlag, New York: 1994.

[8] HARTSHORNE, I. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York: 1997.

[9] ESTEVES, E. *Construção de espaços de Moduli*. IMPA, Rio de Janeiro: 1997.

[10] MUMFORD, D.;FOGARTY, J. *Geometric Invariant Theory*. Springer Verlag, New York: 1982.

[11] Wall, C.T.C*Geometric Invariant Theory of linear systems*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1983), 93,57-62.

[12] ADAMOVICH, O.M.;GOLOVINA, E.O. *Invariants of Pairs of Bilinear Forms*. Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika Vol. 32(1977)15-18.

[13] DIEUDONNÉ, J. *Cors de Géometric algébrique 2*. Presses Universitaires de France, 1974.

[14] ZARISKI, O.; SAMUEL, P. *Commutative Algebra*. Springer-Verlag, New York: 1960.