Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Mestrado acadêmico em Matemática

Divane Aparecida de Moraes Dantas

Espaço de Moduli das Configurações de Desargues

Juiz de Fora- MG

Março/2012

Divane Aparecida de Moraes Dantas

Espaço de Moduli das Configurações de Desargues

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Acadêmico em Matemática, área de concentração: Álgebra, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof^{a}. Dr^{a}. Flaviana Andréa Ribeiro

Co-orientador: Prof^{a}. Dr^{a}. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Juiz de Fora- MG

Março/2012

Dantas, Divane Aparecida de Moraes.
Espaço de Moduli das Configurações de Desargues / Divane Aparecida de Moraes Dantas. - 2012
95 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

1. Espaços de Moduli. 2. Configurações de Desargues. 3. Quocientes Categóricos. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: "Espaço de Moduli das Configurações de Desargues"

NOME DA AUTORA: Divane Aparecida de Moraes Dantas

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Flaviana Andréa Ribeiro

Profa. Dra. Flaviana Andrea Ribeiro
(Orientadora)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Joana Darc A. S. da Cruz

Profa. Dra. Joana Darc Antônia Santos da Cruz
(Co-orientadora)
Mestrado Acadêmico em Matemática
UFJF

Prof. Dr. Dan Avritzer
UFMG

Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
FEIS-UNESP

Juiz de Fora, 08 de março de 2012.

Agradecimentos

À Deus, por me abençoar e prover tudo o que foi necessário para que mais esse objetivo fosse alcançado.

À minha orientadora Flaviana, por todo apoio, amizade e dedicação ao longo desse trabalho.

À minha co-orientadora Joana Darc, pela enorme contribuição dada no decorrer de todo o trabalho.

A todos os membros da banca que contribuíram para melhorias no meu trabalho.

À minha família, pelo carinho, paciência e incentivo.

Ao meu namorado Marcelo, por acreditar em mim e principalmente pelo amor e paciência que me dedicou durante a elaboração desse trabalho.

Aos amigos que me apoiaram, agradeço por todo o companheirismo e momentos de descontração vividos ao longo desses anos.

A todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A FAPEMIG, pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento das atividades de mestrado.

Mais vale o fim de uma coisa do que seu começo. Um espírito paciente vale mais que um espírito orgulhoso.
ECLE 07, 08.

Resumo

O principal objetivo do trabalho é estudar os Espaços de Moduli das Configurações de Desargues, e este estudo é baseado no artigo (AVRITZER; LANGE, 2002). Uma configuração de 10 pontos e 10 retas, chamada uma configuração 10_3,obtidas do clássico teorema de Desargues, é chamada uma configuração de Desargues. Muitos espaços de moduli, senão todos, são obtidos algebricamente através das variedades algébricas de quociente, por isso estudamos um pouco de Teoria Geométrica dos Invariantes, ações de grupos algébricos em variedades algébricas e mostramos que existe o quociente categórico de uma variedade algébrica X por um grupo finito G e quando ele é o espaço e moduli grosso. Além disso mostramos que quando a variedade algébrica é afim (resp. quase projetiva) o quociente categórico é uma variedade algébrica afim (resp. quase projetiva). Finalmente, provamos que o quociente categórico(M_D, π) de $\check{\mathbb{P}}^3$ pelo grupo finito $\mathcal{S}_5$ é o espaço de moduli grosso para as configurações de Desargues.
Palavras chaves: Espaços de Moduli. Configurações de Desargues. Quocientes Categóricos.

Abstract

The main aim of this work is to study the moduli space of Desargues configurations and it was based in (AVRITZER; LANGE, 2002). A configurations of 10 points and 10 line of the classic Desargues Theorem is called a Desargues configuration. Many moduli spaces, if not all, are obtained algebraically through the quotient of algebraic varieties. So we have studied a little about Geometric Invariant Theory and actions of algebraic group on varieties. We have showed that there exist the categorical quotient of a algebraic variety X by a finite algebraic group G and that it is a coarse moduli space. Moreover, we have showed that if X is a affine (resp. quasi-projective) the categorical quotient is an affine (resp. quasi-projective) variety Finally, we proved that the categorical quotient (M_D, π) of the $\check{\mathbb{P}}^3$ by the algebraic group finite $\mathcal{S}_5$ is the moduli space coarse for the Desargues configurations.
Keywords: Moduli space. Desargues configurations. Categorical quotients.

Sumário

1 Introdução

Espaços de Moduli estão em conexão com os problemas de classificação em geometria algébrica. Os ingredientes básicos de um problema de classificação são uma coleção de objetos $\mathcal{A}$ e uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{A}$. O problema é descrever o conjunto de classes de equivalências $\mathcal{A}/\sim$.

Quase sempre existe uma noção de "famílias contínuas" de objetos de $\mathcal{A}$, e gostaríamos de colocar em $\mathcal{A}/\sim$ uma estrutura algébrica e geométrica que reflita este fato. Este é o objetivo da teoria de moduli.

Os ingredientes básicos para o *problema de moduli* são uma coleção de objetos $\mathcal{A}$, uma relação de equivalência sobre $\mathcal{A}$ e o conceito de família em $\mathcal{A}/\sim$. Espaços de moduli constituem resposta para o problema de moduli.

Quem faz geometria algébrica sabe que existem várias linguagens para essencialmente dizer a mesma coisa. Muitos autores, como (MUMFORD; FOGARTY; KIRWAN, 1994), usam a linguagem de esquemas para descrever a teoria de moduli. Neste trabalho damos uma ideia da teoria de moduli usando a linguagem de variedade algébrica apresentada em (NEWSTEAD, 1978) e (ESTEVES, 1997).

O objetivo principal deste trabalho é estudar os Espaços de Moduli das configurações de Desargues. Uma configuração de Desargues é formada por 10 retas e 10 pontos obtidos do clássico teorema de Desargues no plano projetivo complexo, que diz: Se dois triângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ estão em perspectiva a partir de um ponto X, então os três pares de lados correspondentes dos triângulos se intersectam em três pontos colineares. Reciprocamente, se os lados dos dois triângulos se intersectam em três pontos colineares, então os triângulos estão em perspectiva. (TODD, 1952).

No **Capítulo 2** apresentamos definições de variedades algébricas como espaços topológicos, fibrados vetoriais e resultados importantes que serão usados no trabalho todo.

Como muitos espaços de moduli, senão todos, são obtidos algebricamente através de variedades de quocientes, estudamos um pouco de teoria invariante para encontrar essas variedades. No **Capítulo 3** falaremos um pouco dessa teoria, focando em ações de grupos algébricos em uma variedade algébrica e na construção do quociente categórico de uma variedade algébrica X afim (quase projetiva) por um grupo algébrico finito G que age em X e mostramos que este é uma variedade algébrica afim (quase projetiva).

No **Capítulo 4** estudamos a teoria de moduli, definimos o espaço de moduli fino e o espaço de moduli grosso com a linguagem de categoria e expomos estas definições com alguns resultados sem a linguagem de categoria. Além disso, demonstramos uma importante proposição usada para encontrar os espaços de moduli por meio de quocientes categóricos.

E finalmente, no **Capítulo 5** apresentamos uma demonstração do Teorema de Desargues e construímos os espaços de moduli das configurações de Desargues utilizando o **Capítulo 4** .

2 Fibrados Vetoriais

Neste capítulo apresentaremos definições de variedades algébricas como espaços topológicos, fibrados vetoriais e resultados importantes que serão usados no trabalho todo. Além disso, usaremos sempre que o corpo k é algebricamente fechado e $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(k) = k^{n+1}/\sim$.

2.1 Variedades Algébricas

Definição 2.1. Um subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}^n$ é dito localmente fechado se $V = Z \cap U$ com $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ fechado e $U \subseteq \mathbb{A}^n$ aberto.

Definição 2.2. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é localmente fechado, uma função $f : X \to k$ é dita regular se para todo $x \in X$, existem polinômios P e Q em n variáveis tais que $Q(x) \neq 0$ e $f = \frac{P}{Q}$ numa vizinhança de x.

Observação 2.1. O conjunto formado por todas as funções regulares em X formam um anel, que denotamos por $A(X)$.

Definição 2.3. Sejam $U \subseteq \mathbb{A}^n$ e $V \subseteq \mathbb{A}^m$ subconjuntos localmente fechados. Um morfismo de U em V é uma função $\varphi : U \to V$, dada por $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$, tal que φ_i é regular em U, para todo $i = 1, \cdots, m$.

Definição 2.4. Sejam $U \subseteq \mathbb{A}^n \subseteq$ e $V \subseteq \mathbb{A}^m$ subconjuntos localmente fechados. Um morfismo $\varphi : U \to V$ é um isomorfismo se φ é uma função bijetiva e φ^{-1} é um morfismo.

Definição 2.5. Um homeomorfismo $h : X \to Y$, de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y, é uma aplicação contínua e biunívoca de X sobre Y, cuja inversa $h^{-1} : Y \to X$ também é contínua.

Definição 2.6. Seja V um espaço topológico. Um par ordenado (U, ϕ) onde $U \subseteq V$ é aberto e $\phi : U \to X$ é um homeomorfismo com $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é um conjunto localmente fechado é dito um sistema de coordenadas. Um atlas algébrico sobre V é uma coleção de sistemas de coordenadas (U_i, ϕ_i) que satisfaz as seguintes propriedades:

A1) $V = \bigcup_{i=1}^{s} U_i$

A2) $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ é um isomorfismo.

Definição 2.7. Uma variedade algébrica é um espaço topológico V munido de um atlas algébrico.

Exemplo 2.1.

a) Considere $\mathbb{A}^n$ com a topologia de Zariski. Um atlas sobre $\mathbb{A}^n$ é $(\mathbb{A}^n, Id)$, logo $\mathbb{A}^n$ é uma variedade algébrica.

b) Seja F um conjunto fechado afim, isto é,

$$F = V(P_1, \ldots, P_r) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n; P_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq r\},$$

onde $P_1, \ldots, P_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ são polinômios. Com a topologia de Zariski induzida de $\mathbb{A}^n$, F é um espaço topológico e um atlas algébrico sobre F é (F, Id), então F é uma variedade algébrica.

c) Se U é um conjunto aberto afim, isto é, $U \subseteq \mathbb{A}^n$ é o complementar de um fechado afim. Com a topologia de Zariski induzida de $\mathbb{A}^n$, U é um espaço topológico e uma atlas algébrico sobre U é (U, Id), então U é uma variedade algébrica.

d) Se $V \subseteq \mathbb{A}^n$ é um subconjunto localmente fechado, então $V = Z \cap U$ onde $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ é fechado e $U \subseteq \mathbb{A}^n$ é aberto, então V é espaço topológico com a topologia induzida de $\mathbb{A}^n$ e um atlas sobre V é dado por$(Z \cap A, Id)$, logo V e uma variedade algébrica.

e) Consideremos o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ com a topologia de Zariski. Então $U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n; x_i \neq 0\}$ é um conjunto aberto de $\mathbb{P}^n$. Além disso a função $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ dada por $\phi_i(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ é homeomorfismo. Assim (ϕ_i, U_i) para $i = \{0, 1, \ldots n\}$ é um atlas sobre $\mathbb{P}^n$ e portanto $\mathbb{P}^n$ é uma variedade algébrica.

f) Se V é um conjunto fechado projetivo, isto é,

$$V = V(F_1, \ldots, F_l) = \{a \in \mathbb{P}^n; F_i(a) = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq l\},$$

onde $F_1, \ldots F_l \in k[X_0, \ldots, X_n]$. Observe que V é um espaço topológico com a topologia de Zariski induzida de $\mathbb{P}^n$. Como $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, e $V = (\bigcup_{i=0}^{n} U_i) \cap V = \bigcup_{i=0}^{n} (U_i \cap V)$, um atlas sobre V é dado por $(U_i \cap V, \phi_i|_{U_i \cap V})$, onde ϕ_i são as funções definidas no exemplo (e). Logo V é uma variedade algébrica.

g) Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade quase projetiva, isto é, $V = F \cap A$, onde F é um fechado de $\mathbb{P}^n$ e A é um aberto de $\mathbb{P}^n$. V é um espaço topológico com a topologia de Zariski induzida de $\mathbb{P}^n$. Como $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, e

$$V = F \cap A \cap \bigcup_{i=0}^{n} U_i = \bigcup_{i=0}^{n} (U_i \cap F \cap A),$$

então um atlas sobre V é dado por $(\phi_i|_{U_i\cap U\cap F}, U_i\cap F\cap A)$, onde ϕ_i são as funções definidas no exemplo (e). Então V é uma variedade algébrica.

Definição 2.8. Um morfismo entre variedades algébricas V e W é uma função $\varphi : V \to W$ tal que se (V_i, ϕ_i) é um atlas em V e (W_j, ψ_j) é um atlas em W, então

$$\psi_j \circ \varphi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\varphi^{-1}(W_j)\cap V_i)) \to \psi_j(W_j)$$

é um morfismo entre conjuntos localmente fechados.

2.2 Fibrados vetoriais

Definição 2.9. Seja V uma variedade algébrica. Um fibrado vetorial E de posto n sobre V é uma variedade E, munida de um morfismo $p : E \to V$, satisfazendo as condições

FV1) Existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i\in I}$ de V;

FV2) Para cada $i \in I$, existe um isomorfismo $\psi_i : U_i \times \mathbb{A}^n \to p^{-1}(U_i)$, tal que $p(\psi_i(x, v)) = x$ para todos $v \in \mathbb{A}^n$ e $x \in U_i$;

FV3) Para todo par $(i, j) \in I\times I$, se $x \in U_i\cap U_j$, então $\psi_i(x, v) = \psi_j(x, A_{i,j}(x)v)$ para todo $v \in \mathbb{A}^n$, onde $A_{i,j}(x)$ é uma matriz $n \times n$.

Observação 2.2. Se E é um fibrado vetorial de posto n sobre X, então para todo $x \in V$, a função $\psi_i(x) : \mathbb{A}^n \to p^{-1}(x)$ definida por $\psi_i(x)(v) := \psi_i(x, v)$ é uma bijeção.
De fato, se $y \in p^{-1}(x)$ então $y = \psi_i(a, b)$ com $(a, b) \in U_i \times \mathbb{A}^n$. Como $p(y) = x$ e $p(\psi_i(a, b)) = a$, segue que $x = a$. Logo $\psi_i(x)$ é sobrejetiva.
A injetividade segue diretamente do fato de ψ_i ser injetiva. Denotaremos $y = \psi_i(x, b) = \psi_i(x)(b)$. Além disso, a função $\psi_i(x)$ define uma estrutura de espaço vetorial em $p^{-1}(x)$ sobre k. De fato, $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ então $y_1 = \psi_i(x)(z_1)$ e $y_2 = \psi_i(x)(z_2)$. Definimos

$$\begin{cases} y_1 + y_2 & := & \psi_i(x)(z_1 + z_2) \\ \lambda y_1 & := & \psi_i(x)(\lambda z_1), \qquad \text{onde } \lambda \in k. \end{cases}$$

Observação 2.3. Nas hipóteses da observação anterior, temos ainda que se $x \in U_i\cap U_j$, então $(\psi_j(x))^{-1} \circ (\psi_i(x))$ é uma transformação linear. De fato, para cada $z \in \mathbb{A}^n$, temos

$$(\psi_j(x))^{-1} \circ (\psi_i(x))(z) = (\psi_j(x))^{-1}(\psi_i(x, z)).$$

Como $\psi_i(x, z) \in p^{-1}(x) = \psi_j(x)(\mathbb{A}^n)$, segue que $\psi_i(x, z) = \psi_j(x, z_1)$ para algum $z_1 \in \mathbb{A}^n$ e portanto $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(x, z) = (x, z_1)$. Por outro lado $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(x, z) = (x, A_{ij}(x)z)$, ou seja, $A_{i,j}(x)z = z_1$. Além disso, como

$$(\psi_j(x))^{-1}\psi_i(x)(z) = (\psi_j(x))^{-1}(\psi_j(x)(z_1)) = z_1,$$

então $(\psi_j(x))^{-1}(\psi_i(x)(z)) = A_{i,j}(x)z$. Donde segue a afirmação.

Definição 2.10. Se $n = 1$, então E é dito fibrado em linha.

Exemplo 2.2. Fibrado vetorial trivial de posto n.

Sejam V variedade algébrica , $E = V \times \mathbb{A}^n$ e $p : E \to V$ projeção na primeira coordenada. Observe que E é uma variedade, pois o produto de variedades algébricas é uma variedade algébrica e $p : E \to V$ é um morfismo, pois a projeção é um morfismo. Seja (U_i, φ_i) o sistema de coordenadas de V satisfazendo as propriedades $(A1)$ e $(A2)$ da definição 2.6. Então

FV1) $V = \bigcup_i^l U_i$.

FV2) Observe que $p^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{A}^n$, e defina $\psi_i : U_i \times \mathbb{A}^n \to p^{-1}(U_i)$ por $\psi_i(x,a) = (x,a)$, ou seja, $\psi_i = Id$ e portanto ψ_i é um isomorfismo, e além disso $p \circ \psi_i(x,z) = p(x,z) = x$.

FV3) A função $\psi_j^{-1} \circ \psi_i : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^n$ é tal $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(x,z) = (x,z)$, isto é, $A_{i,j}(x) = Id$.

Exemplo 2.3. Sejam $\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ tal que $\pi(x_0, \ldots, x_n) = (x_0 : \ldots : x_n)$ e

$$E = \{(x,v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1}; v \in \pi^{-1}(x) \cup \{0\}\}.$$

Observe que, π é um morfismo. E é uma variedade algébrica, com a topologia induzida de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1}$. De fato, se $U_i = \{(x_0 : \ldots x_n) \in \mathbb{P}^n; x_i \neq 0\}$, então $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1} = \bigcup_{i=0}^n (U_i \times \mathbb{A}^{n+1})$. Considere a aplicação $\psi_i : U_i \times \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n+1}$ dada por $\psi_i(x,y) = (\phi_i(x), y)$, onde $\phi_i(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0, \ldots, \underbrace{\hat{1}}_{i}, \ldots, x_n)$. Portanto $(U_i \times \mathbb{A}^{n+1}, \psi_i)_{i=0,1,\ldots n}$ é um sistema de coordenadas em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1}$.

Como $E = \bigcup_{i=0}^n E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1})$ e cada $E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1})$ é aberto em E, para verificarmos que E é um fibrado vetorial sobre $\mathbb{P}^n$ devemos inicialmente mostrar que $(E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1}), \psi_i|_{E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1})})$ é um atlas em E.

A1) Observe que $\alpha_i = \psi_i|_{E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1})} : E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1}) \to \psi_i(E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1}))$ é homeomorfismo. Precisamos mostrar que $\psi_i(E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1})) \subseteq \mathbb{A}^{2n+1}$ é localmente fechado (aqui estamos identificando $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n+1}$ com $\mathbb{A}^{2n+1}$). Observe que

$$E \cap (U_i \times \mathbb{A}^{n+1}) = \{(x,y) \in U_i \times \mathbb{A}^{n+1}; y \in \pi^{-1}(x) \cup \{0\}\} =$$
$$= \{(x_0 : \ldots : 1 : \ldots : x_n), (\lambda x_0, \ldots, \lambda, \ldots, \lambda x_n) : \lambda \in k - \{0\}\}$$

e que $\psi_i(E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1}))=\{(x_0,\ldots,\hat{1},\ldots,x_n),(\lambda x_0,\ldots,\lambda,\ldots,\lambda x_n);\lambda\in k-\{0\}\}$. Se definimos para cada $i\in\{0,1,\ldots,n\}$ os polinômios

$$P_{ij}=(X_1,\ldots,X_n,Y_0,\ldots,Y_n)=Y_iX_j-Y_j,\ j=0,\ldots,n \text{ e } i\neq j,$$

então $\mathcal{Z}(P_0,\ldots P_n)=\psi_i(E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1})=:Z_i$. De fato,

$$P_j((x_0,\ldots,\hat{1},\ldots,x_n),(\lambda x_0,\ldots,\lambda,\ldots,x_n))=\lambda x_j-\lambda x_j=0.$$

Além disso, se $((x_0,\ldots,\hat{1},\ldots,x_n),(y_0,\ldots,y_n))\in Z_i$ como $y_ix_j=y_j$, segue que

$$((x_0,\ldots,\hat{1},\ldots,x_n),(y_0,\ldots,y_n))=((x_0,\ldots,\hat{1},\ldots,x_n),(y_ix_0,\ldots,y_i,\ldots,y_ix_n)).$$

Portanto segue a igualdade e $\psi_i(E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1}))\subseteq\mathbb{A}^{2n+1}$ é fechado.

A2) A função

$$\alpha_j\circ\alpha_i^{-1}:\alpha_i(E\cap(U_i\cap U_j)\times\mathbb{A}^{n+1})\to\alpha_j(E\cap(U_i\cap U_j)\times\mathbb{A}^{n+1})$$

é dada por

$$\alpha_j\circ\alpha_i^{-1}=\psi_j|_{E\cap(U_j\times\mathbb{A}^{n+1})}\circ\psi_i^{-1}|_{E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1})}=\psi_j\circ\psi_i^{-1}|_{E\cap((U_i\cap U_j)\times\mathbb{A}^{n+1})},$$

o qual é um isomorfismo.

Vamos mostrar que $(E,p:E\to\mathbb{P}^n)$ é um fibrado em linha, onde $p:E\to\mathbb{P}^n$ é a projeção na primeira coordenada. Observe que $p^{-1}(U_i)=E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1})$. Além disso, temos que

FV1) $\mathbb{P}^n=\bigcup_{i=0}^{n}U_i.$

FV2) Para cada $i\in\{0,1,\ldots n\}$ defina a função

$$\begin{aligned}\beta_i:U_i\times\mathbb{A}\ &\longrightarrow\ p^{-1}(U_i)=E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1})\\ ((x_0:\ldots:1:\ldots:x_n),\lambda)&\longmapsto((x_0:\ldots:x_n),(\lambda x_0,\ldots,\lambda,\ldots,\lambda x_n)).\end{aligned}$$

(a) β_i é injetiva.
De fato, se $\beta_i((x_0:\ldots:1:\ldots:x_n),\lambda)=\beta_i(y_0:\ldots:1:\ldots:x_n),\mu)$ então $(x_0:\ldots:1:\ldots:x_n)=(y_0:\ldots:1:\ldots y_n)$ e $(\lambda x_0,\ldots,\lambda,\ldots,\lambda x_n)=(\mu y_0,\ldots,\mu,\ldots,\mu y_n)$.
Logo $\lambda=\mu$ e $x_i=y_i,\ \forall\ i=1,\ldots n$.

(b) β_i é sobrejetiva.
Se $((x_0:\ldots:x_n),(y_0,\ldots,y_n))\in E\cap(U_i\times\mathbb{A}^{n+1})$, então $x_i\neq 0$ e $(y_0,\ldots,y_n)=(\lambda x_0,\ldots,\lambda x_n)$ para algum $\lambda\in k-\{0\}$. Logo $((x_0:\ldots:x_n),(y_0,\ldots,y_n))=\beta_i((x_0:\ldots:x_n),\lambda)$ com $((x_0:\ldots:x_n),\lambda)\in U_i\times\mathbb{A}$.

(c) Observe que β_i é morfismo e que $\beta_i^{-1} : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}$, dada por

$$\beta_i^{-1}((x_0 : \ldots : x_n), (y_0, \ldots, y_n)) = \left((x_0 : \ldots : x_n), \left(\frac{y_i}{x_i}\right)\right),$$

é também um morfismo.

FV3) $\beta_j^{-1} \circ \beta_i : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A} \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}$

$$\beta_j^{-1} \circ \beta_i \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), \lambda\right) =$$

$$= \beta_j^{-1}\left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), \left(\lambda\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \lambda, \ldots, \lambda\frac{x_j}{x_i}, \ldots, \lambda\frac{x_n}{x_i}\right)\right) =$$

$$= \beta_j^{-1}\left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \frac{x_i}{x_j} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right), \left(\lambda\frac{x_0 x_j}{x_i x_j}, \ldots, \lambda\frac{x_i x_j}{x_j x_i}, \ldots, \lambda\frac{x_i}{x_j}, \ldots, \lambda\frac{x_n x_j}{x_i x_j}\right)\right) =$$

$$= \beta_j^{-1}\left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \frac{x_i}{x_j} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right), \frac{\lambda x_j}{x_i}\left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_i}{x_j}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \frac{x_i}{x_j} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_j}, \lambda\frac{x_j}{x_i}\right) = \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_j}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots \frac{x_n}{x_i}\right), \lambda\frac{x_j}{x_i}\right)$$

Assim $\beta_j^{-1} \circ \beta_i(x, \lambda) = \left(x, \lambda\frac{x_j}{x_i}\right)$ e portanto $A_{i,j}(x) = \frac{x_j}{x_i}$

Portanto E é um fibrado de linha. Este fibrado é denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

Definição 2.11. Sejam $p_1 : E_1 \to X$ e $p_2 : E_2 \to X$ fibrados vetoriais. Um homomorfismo de E_1 para E_2 é um morfismo de variedades algébricas $h : E_1 \to E_2$ tal que:

a) $p_2 \circ h = p_1$;

b) para todo $x \in X$, $h|_{E_{1x}} : E_{1x} \to E_{2x}$ é uma aplicação linear.

Um isomorfismo de fibrados vetoriais é um homomorfismo de vibrados vetoriais tal que h é isomorfismo.

Definição 2.12. Uma seção s de um fibrado vetorial E é um morfismo $s : X \to E$ tal que $p \circ s = id_X$.

Proposição 2.1. *A coleção $\Gamma(X,E)$ de todas as seções de E é um espaço vetorial sobre k.*

Demonstração. Sejam U_i os abertos de X tais que $X = \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ e as ψ_i são as funções que satisfazem as propriedades $FV1)$ e $FV2)$ da Definição 2.9 . Se $s \in \Gamma(X,E)$, como $p(s) = id_X$, segue que $(p \circ s)|_{U_i} = id_{U_i}$. Se $x \in U_i$, então $p(s(x)) = x \in U_i$ e $s(x) \in p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(U_i)$. Tome $s_1,\ s_2 \in \Gamma(X,E)$ e suponha que $x \in X$. Como $s_1(x) \in p^{-1}(x)$, segue que $s_1(x) = \psi_i(a,b)$ para algum $(a,b) \in U_i \times \mathbb{A}^n$ e $x = p(s_1(x)) = p(\psi_i(a,b)) = a$. Da mesma forma, $s_2(x) \in p^{-1}(x)$

implica $s_2(x)=\psi_i(a',b')$ para algum $(a',b')\in U_i\times\mathbb{A}^n$ e portanto $x=a'$. Logo $a=a'$. Assim $s_1(x)=\psi_i(x,b)=\psi_i(x)(b)$ e $s_2(x)=\psi_i(x,b')=\psi_i(x)(b')$, como $\psi_i(x)(b)\in p^{-1}(x)$ e $\psi_i(x)(b')\in p^{-1}(x)$, temos que

$$s_1(x)+s_2(x)=\psi_i(x)(b)+\psi_i(x)(b')=\psi_i(x)(b+b')=\psi_i(x,b+b').$$

Portanto definimos a função $(s_1+s_2)|_{U_i}$ em U_i por

$$(s_1+s_2)|_{U_i}(x)=\psi_i(x,b+b'),$$

onde $\psi_i(x,b)=s_1(x)$ e $\psi(x,b')=s_2(x)$. De fato, seja $x\in U_i\cap U_j$ então

$$s_1(x)+s_2(x)=\psi_i(x,b+b')$$

onde $\psi_i(x,b)=s_1(x)$ e $\psi_i(x,b')=s_2(x)$, e $s_1(x)+s_2(x)=\psi_j(x,c+c')$, onde $\psi_j(x,c)=s_1(x)$ e $\psi_j(x,c')=s_2(x)$. Como $\psi_i(x,b)=\psi_j(x,c)$, temos que $\psi_j^{-1}\circ\psi_i(x,b)=(x,c)$, e portanto $(x,A_{i,j}(x)b)=(x,c)$. Logo $A_{i,j}(x)b=c$. De forma análoga mostra-se que $A_{i,j}(X)b'=c'$, assim

$$\psi_j^{-1}\circ\psi_i(x,b+b')=(x,A_{i,j}(x)(b+b'))=(x,A_{i,j}(x)b+A_{i,j}(x)b')=(x,c+c'),$$

ou seja, $\psi_i(x,b+b')=\psi_j(x,c+c')$. Portanto podemos definir $s_1+s_2:X\to E$ por

$$s_1(x)+s_2(x)=(s_1+s_2)|_{U_i}(x)\ se\ x\in U_i.$$

Afirmamos que s_1+s_2 é morfismo. De fato, sejam (E_i,α_i) o sistema de coordenadas de E e (V_i,ϕ_i) o sistema de coordenadas de X. Usando os sistemas de coordenadas acima obtemos que s_1+s_2 é dada por

$$\alpha_i\circ(s_1+s_2)|_{U_i}\circ\phi_i^{-1}(z)=\alpha_i\circ(s_1+s_2)|_{U_i}(x)=\alpha_i(\psi_i(x,b(x)+c(x)))=\alpha_i\circ\psi_i\circ(Id,b+c)(x),$$

para cada $z\in\phi_i(V_i\cap(s_1+s_2)^{-1}|_{U_i}(p^{-1}(U_i)\cap E_j))$. Como ϕ_i e α_i são isomorfismos, basta mostrarmos que as funções b e c são morfismos. Para isso observemos que a função

$$\alpha_i\circ s_1\circ\phi_i^{-1}:\phi_i(V_i\cap(s_1^{-1}(P^{-1}(U_i)\cap E_j))\to F_i$$

é morfismo e já que $\alpha_i\circ s_1\circ\phi_i^{-1}=\alpha_i\circ\psi_i\circ(Id,b)$, segue que (Id,b) é morfismo e portanto b é morfismo. De mesma forma mostra-se que c é morfismo. Observe ainda que $p\circ(s_1+s_2)=id_X$, ou seja, $s_1+s_2\in\Gamma(X,E)$.

Seja $s\in\Gamma(X,E)$ e $\lambda\in K$, defina $\lambda s|_{U_i}:U_i\to p^{-1}(U_i)$ por $(\lambda s)(x)=\psi_i(x,\lambda b)$ no qual b satisfaz $\psi_i(x)(b)=s(x)$. De modo análogo ao que foi feito para s_1+s_2, verifica-se que λs está bem definida e é um morfismo. Além disso, como $p\circ(\lambda s)(x)=p\circ\psi_i(x,\lambda b)=x$, temos que $\lambda s\in\Gamma(X,E)$. $\square$

Lema 2.2 (Colagem)**.** *Sejam $V_1,\ldots,V_n$ variedades algébricas. Para cada par (i,j), $1\leq i,j\leq n$,* *sejam $U_{ij} \subseteq V_i$, $U_{ii} = V_i$ abertos e $\phi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ um isomorfismo. Suponha que:*

C1) $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$ *e* $\phi_{ii} = id$.

C2) (condição do co-ciclo). Para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distintos vale que
(a) $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$.
(b) $\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk}|_{U_{ji} \cap U_{jk}} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$.

Então existe uma variedade V e morfismos $\psi_i : V_i \to V$ tais que:

(a) ψ_i *é um isomorfismo sobre um aberto de* V*;*

(b) $V = \cup_i \psi_i(V_i)$*;*

(c) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(V_i) \cap \psi_j(V_j)$*;*

(d) $\psi_i|_{U_{ij}} = \psi_j|_{U_{ji}} \circ \phi_{ij}$.

Demonstração. Seja W a união disjunta dos V_i's. Dados $a, b \in W$, com $a \in V_i$ e $b \in V_j$, dizemos que $a \backsim b$ em W se, e somente se, $a \in U_{ij}$, $b \in U_{ji}$ e $b = \phi_{ij}(a)$. Afirmamos que $\backsim$ é uma relação de equivalência. De fato, sejam $a, b, c \in W$:

1. Dado $a \in W$, existe um i tal que $a \in V_i$. Como $U_{ii} = V_i$ e $a = id(a) = \phi_{ii}(a)$, segue que $a \backsim a$.

2. Se $a \backsim b$, $a \in V_i$ e $b \in V_j$, então $a \in U_{ij}$, $b \in U_{ji}$ e $b = \phi_{ij}(a)$. Como $\phi_{ji}(b) = \phi_{ji}(\phi_{ij}(a)) = Id(a) = a$, então $b \backsim a$.

3. Se $a \backsim b$, $a \in V_i$ e $b \in V_j$, então $a \in U_{ij}$, $b \in U_{ji}$ e $b = \phi_{ij}(a)$. Além disso, se $b \backsim c$, $c \in V_l$, então $b \in U_{jl}$, $c \in U_{lj}$ e $c = \phi_{jl}(b)$. Logo $b \in U_{ji} \cap U_{jl}$ e $c = \phi_{jl}(\phi_{ij}(a)) = \phi_{il}(a)$ por $C2(b)$. Resta mostrarmos que $c \in U_{li}$ e $a \in U_{il}$. Como $c = \phi_{jl}(b)$ e $b \in U_{ji} \cap U_{jl}$, então, por $C2(a)$, $\phi_{jl}(U_{ji} \cap U_{jl}) = U_{lj} \cap U_{li}$ e $c \in U_{lj} \cap U_{li}$. Além disso, como $c = \phi_{il}(a)$ segue que $\phi_{li}(c) = a$, ou seja, $a \in \phi_{li}(U_{lj} \cap U_{li}) = U_{il} \cap U_{ij} \subseteq U_{il}$. Portanto $a \backsim c$.

Seja $V = W/\backsim$, defina $\psi : W \to V$ tal que $\psi(a) = \overline{a}$. Dizemos que $U \subseteq V$ é aberto, se e somente se, $\psi^{-1}(U)$ é aberto em W, isto é, $\phi^{-1}(U) \cap V_i$ é aberto em V_i para todo i. Assim V um espaço topológico. Para cada i considere o atlas algébrico $(W_{ij}, \alpha_{ij})_j$ de V_i, onde $\alpha_{ij} : W_{ij} \to F_{ij}$ é um homeomorfismo e F_{ij} é um conjunto localmente fechado. Seja $\overline{W_{ij}} = \{\overline{a}\ ;\ a \in W_{ij}\}$ e considere a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{ij}: & \overline{W_{ij}} & \to & F_{ij} \\ & \overline{a} & \mapsto & \alpha_{ij}(a). \end{array}$$

Observe que a função é bem definida, pois na classe de um elemento de W_{ij} existe um único elemento de W_{ij}. Afirmamos que φ_{ij} é um homeomorfismo. De fato, se $U \subset F_{ij}$ é um aberto, como $\psi^{-1}(\varphi_{ij}^{-1}(U)) = \alpha_{ij}^{-1}(U) \cap W_{ij}$,então $\varphi_{ij}^{-1}(U)$ é aberto. Além disso, como $V = \bigcup \overline{W_{ij}}$ e φ_{ij} são injetivas, então $\varphi_{ij} \circ \varphi_{il}^{-1} = \alpha_{ij} \circ \alpha_{il}^{-1}$ e portanto V é uma variedade algébrica. Defina $\psi_i = \psi|_{V_i} : V_i \to V$ Observe que $\varphi_{ij} \circ \psi_{|V_i} \circ \alpha_{ij}^{-1} = \alpha_{ij} \circ \alpha_{ij}^{-1} = id|_{W_{ij}}$, logo $\varphi_{ij} \circ \psi_{|V_i} \circ \alpha_{ij}^{-1}$ é um morfismo e $\psi_{|V_i}$ é um morfismo. Assim obtemos

(a) ψ_i é isomorfismo sobre um aberto de V;

(b) segue de (a)

(c) provemos que $\psi_i(V_i) \cap \psi_j(V_j) = \psi_i(U_{ij})$;

Se $y \in \psi_i(V_i) \cap \psi_j(V_j)$, então $y = \psi_i(a) = \overline{a}$ e $y = \psi_j(b) = \overline{b}$, onde $a \in V_i$ e $b \in V_j$. Da igualdade $\overline{a} = \overline{b}$, segue que $a \in U_{ij}$ e portanto $\psi_i(V_i) \cap \psi_j(V_j) \subset \psi_i(U_{ij})$. Por outro lado, seja $\overline{y} = \psi_i(x)$, $x \in U_{ij} \subset V_i$. Como $\phi_{ij}(x) \in U_{ji} \subset V_j$ e $\overline{y} = \psi_i(x) = \overline{x} = \overline{\phi_{ij}(x)} = \psi_j(\phi_{ij}(x))$, segue a desigualdade contrária.

(d) $\psi_i|_{U_{ji}} = \psi_j|_{U_{ij}} \circ \phi_{ij}$.

De fato, se $a \in U_{ij}$ então $\psi(a) = \overline{a}$, $\phi_{ij}(a) \in U_{ji}$, e $\psi(\phi_{ij}(a)) = \overline{\phi_{ij}(a)} = \overline{a} = \phi_i(a)$.

$\square$

Exemplo 2.4. Sejam $V_i = D(x_i) \times \mathbb{A}^1$ para $i = 0, \ldots, n$ e $U_{ij} = D(x_i x_j) \times \mathbb{A}^1$, onde $D(x_i) = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(x_i)$ e $D(x_i x_j) = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(x_i x_j)$. Como $V_0, \ldots, V_n$ são produtos de variedades algébricas, segue que eles são variedades algébricas. Para cada par $(i, j), 0 \leq i, j \leq n$, a função $\phi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ definida por

$$\phi_{ij}\left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), t\right) = \left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \underbrace{\frac{x_i}{x_j}}_{\text{posição } i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right), t\right).$$

é um isomorfismo.

Verifiquemos que as variedades algébricas $V_1, \ldots V_n$ e os morfismos ϕ_{ij} definidas satisfazem as condições do Lema da Colagem. Para ver a Condição $C1$ suponha que $i < j$. Então

$$\phi_{ji} \circ \phi_{ij} \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \underbrace{\frac{x_j}{x_i}}_{\text{posição } j} \ldots : \frac{x_n}{x_i} \right), \lambda \right) =$$

$$= \phi_{ji} \left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \underbrace{\frac{x_i}{x_j}}_{\text{posição } i} \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j} \right), \lambda \right) =$$

$$= \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \underbrace{\frac{x_j}{x_i}}_{\text{posição } j} \ldots : \frac{x_n}{x_i} \right), \lambda \right).$$

Logo $\phi_{ji} \circ \phi_{ij} = Id_{U_{ij}}$. Analogamente $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = Id_{U_{ji}}$ e portanto $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$.

Observe agora que,

$$\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = D(x_i x_j x_k) \times \mathbb{A}^1 = U_{ji} \cap U_{jk}.$$

Além disso, se $x \in U_{ij} \cap U_{ik}$ então

$$\phi_{jk}\big|_{U_{ji} \cap U_{jk}} \circ \phi_{ij}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}} \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i} \right), \lambda \right) =$$

$$= \phi_{jk}\big|_{U_{ji} \cap U_{jk}} \left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j} \right), \lambda \right) =$$

$$= \left(\left(\frac{x_0}{x_k} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } k} : \ldots : \frac{x_n}{x_k} \right), \lambda \right) =$$

$$= \phi_{ik}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}} \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i} \right), \lambda \right).$$

Portanto as condições (a) e (b) de $C2$ são satisfeitas.

Seja V a variedade algébrica dada pelo Lema da Colagem. Afirmamos que V é um fibrado em linha sobre $\mathbb{P}^n$. De fato, sejam ψ_i os morfismos dados pela colagem dos $V_i's$, isto é, ψ_i satisfazem as propriedades $i), ii), iii)$ e $iv)$ do Lema da Colagem. Para cada i considere a função $p_i : \psi_i(V_i) \to D(x_i)$ definida por $p_i(\psi_i(x,\lambda)) = x$. Se $y \in \psi_i(V_i) \cap \psi_j(V_j) = \psi_i(U_{ij})$, então

$y = \psi_i((\frac{x_0}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_i}), \lambda)$, e

$$p_i\left(\psi_i\left(\left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), \lambda\right)\right)\right) = \left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right) = p_j\left(\psi_j\left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right), \lambda\right)\right).$$

Portanto, $p_i(y) = p_j(y)$ e podemos definir uma função $p : V \to \mathbb{P}^n$ por $p|_{\psi_i(V_i)} := p_i$. Observemos agora que são validas as propriedades de fibrados vetoriais.

FV1) $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} D(x_i)$

FV2) $\psi_i : D(x_i) \times \mathbb{A} \to p_i^{-1}(D(x_i))$ é um isomorfismo tal que $p_i(\psi_i(x,t)) = x$.

FV3) $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(x, \lambda) = (x, A_{i,j}(x)\lambda)$.

Para a condição $FV3$, considere $((x_0 : \ldots : x_n), \lambda) \in U_{ij}$ então

$$\psi_j^{-1} \circ \psi_i((x_0 : \ldots : x_n), \lambda) = \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ \phi_{ij}\left(\left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), \lambda\right)\right) =$$
$$= \psi_j^{-1} \circ \psi_j\left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right), \lambda\right) = ((x_0 : \ldots : x_n), \lambda) \text{ e } A_{i,j}(x) = 1.$$

Exemplo 2.5. Os fibrados $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ de Serre.

Sejam $V_i = D(x_i) \times \mathbb{A}^1$ para $i = 0, \ldots, n$ e $U_{ij} = D(x_i x_j) \times \mathbb{A}^1$, onde
$D(x_i) = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(x_i)$ e $D(x_i x_j) = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(x_i x_j)$. Como $V_0, \ldots, V_n$ são produtos de variedades algébricas, segue que eles são variedades algébricas. Fixe $d > 0$. Para cada par $(i, j), 0 \leq i, j \leq n$, e considere o isomorfismo $\phi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ definido por

$$\phi_{ij}((x_0 : \ldots : x_n), t) = \left((x_0 : \ldots : x_n), \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d t\right)$$

um isomorfismo. Vamos ver que as ϕ_{ij}'s define um fibrado vetorial. Para ver a Condição $C1$ suponha que $i < j$. Então

$$\phi_{ij} \circ \phi_{ji}((a_0 : \ldots : a_n), t) = \phi_{ij}\left((a_0 : \ldots : a_n), \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^d t\right) =$$
$$= \left((a_0 : \ldots : a_n), \left(\frac{a_j}{a_i}\right)^d \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^d t\right) = ((a_0 : \ldots : a_n), t)$$

e assim $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = Id$. Analogamente, $\phi_{ji} \circ \phi_{ij} = Id$.

Observe agora que

$$\phi_{ij}(U_{ij}\cap U_{ik}) = D(x_ix_jx_k)\times \mathbb{A}^1 = U_{ji}\cap U_{jk}.$$

Além disso, se $x\in U_{ij}\cap U_{ik}$ então

$$\begin{aligned}
\phi_{jk}\big|_{U_{ji}\cap U_{jk}} \circ \phi_{ij}\big|_{U_{ij}\cap U_{ik}} \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), t\right) &= \\
= \phi_{jk}\big|_{U_{ji}\cap U_{jk}} \left(\left(\frac{x_0}{x_j} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } j} : \ldots : \frac{x_n}{x_j}\right), \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d .t\right) &= \\
= \left(\left(\frac{x_0}{x_k} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } k} : \ldots : \frac{x_n}{x_k}\right), \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^d \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d .t\right) &= \\
= \phi_{ik}\big|_{U_{ij}\cap U_{ik}} \left(\left(\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \underbrace{1}_{\text{posição } i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right), \lambda\right).
\end{aligned}$$

Portanto as condições (a) e (b) de $C2$ são satisfeitas. Pelo Lema da Colagem existe uma variedade $V := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ e $\psi_i : V_i \to V$ que são morfismos satisfazendo as condições $i)$, $ii)$, $iii)$ e $iv)$. Queremos mostrar que $(V, p : V \to \mathbb{P}^n)$ é um fibrado em linha. Para cada i defina $p_i : \psi_i(V_i) \to \mathbb{P}^n$ por $p_i(\psi_i((x_0 : \ldots : x_n), t) = (x_0 : \ldots : x_n)$. Como ψ_i são isomorfismos, então p_i está bem definida. Se $x \in \psi_i(V_i)\cap\psi_j(V_j) = \psi_i(U_{ij})$, então $x = \psi_i((x_0 : \ldots : x_n), t)$, onde $x_ix_j \neq 0$,

$$p_j(\psi_i(x)) = p_j(\psi_j\circ\phi_{ij}(x)) = p_j\left(\psi_j\left((x_0 : \ldots : x_n), \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d .t\right)\right) = (x_0 : \ldots : x_n) = p_j(\psi_j(x)).$$

Consideremos a função $p : V \to \mathbb{P}^n$ definido por $p|_{\psi_i(V_i)} := p_i$. Como p_i é morfismo para cada i, segue que p é um morfismo.

Observemos agora que são validas as propriedades de fibrados vetoriais.

(a) $\mathbb{P}^n = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} D(x_i)$, onde $D(x_i)$ são abertos afins;

(b) $\psi_i : D(x_i)\times\mathbb{A}^1 \to p^{-1}(D(x_i))$ é isomorfismo;

Para mostrar que ψ_i é um isomorfismo, basta verificarmos que $p^{-1}(D(x_i)) = \psi_i(V_i)$. Para isso se $x \in p^{-1}(D(x_i))$, então $p(x) \in D(x_i)$ e $x \in \psi_j(V_j)$ para algum j. Como

$$p(x) = p(\psi_j((a_0 : \ldots : a_n), t)) = (a_0 : \ldots : a_n) \in D(x_ix_j) = U_{ij},$$

temos que $((a_0 : \ldots : a_n), t)) \in D(x_ix_j)\times\mathbb{A}$, e da relação $\psi_j(U_{ij}) = \psi_i(V_i)\cap\psi_j(V_j)$, segue que $x \in \psi_i(V_i)$, ou seja, $p^{-1}(D(x_i)) \subseteq \psi_i(V_i)$. Já que $\psi_i(V_i) \subseteq p^{-1}(D(x_i))$, segue que

$p^{-1}(D(x_i)) = \psi_i(V_i))$.

(c) $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(x,\lambda) = (x, A_{i,j}(x)\lambda)$.

Se $((x_0 : \ldots : x_n), \lambda) \in U_{ij}$, então

$$\psi_i((x_0 : \ldots : x_n), t) = \psi_j \circ \phi_{ij}(x_0 : \ldots : x_n), t)$$
$$\psi_j^{-1} \circ \psi_i((x_0 : \ldots : x_n), t) = \phi_{ij}((x_0 : \ldots : x_n), t) = \left((x_0 : \ldots : x_n), \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d .t \right).$$

Logo, basta considerarmos $A_{ij}(x) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d$.

Proposição 2.3. *O conjunto dos polinômios homogêneos de grau d em $n+1$ variáveis é isomorfo ao conjunto $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ de todas as seções do fibrado vetorial $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.*

Demonstração. Nesta demonstração manteremos as notações do Exemplo 2.5. Para cada polinômio homogêneo F de grau d defina $s_F^i : D(x_i) \to \psi_i(V_i)$ por $s_F^i(x) = \psi_i(x, F(x)/x_i^d)$. Observemos que s_F^i está bem definida pois se $(x_0 : \ldots : x_n) = (y_0 : \ldots : y_n)$, então existe um $t \neq 0$ tal que $(y_0, \ldots, y_n) = t(x_0, \ldots, x_n)$ e

$$\frac{F(y_0, \ldots, y_n)}{y_i^d} = \frac{F(tx_0, \ldots, tx_n)}{(tx_i)^d} = \frac{t^d F(x_0, \ldots, x_n)}{t^d x_i^d} = \frac{F(x_0, \ldots, x_n)}{x_i^d}.$$

Já que para cada $x \in D(x_i x_j)$ vale a relação

$$s_F^i(x) = \psi_i\left(x, \frac{F(x)}{x_i^d}\right) = \psi_j \circ \phi_{ij}\left(x, \frac{F(x)}{x_i^d}\right) = \psi_j\left(x, \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d \frac{F(x)}{x_i^d}\right) = s_F^j(x),$$

podemos considerar a função $s_F : \mathbb{P}^n \to V$ definida por $s_F|_{D(x_i)} := s_F^i$. Ainda temos que, se $x \in D(x_i)$, então

$$p(s(x)) = p(s_F^i)(x) = p\left(\psi_i\left(x, \frac{F(x)}{x_i^d}\right)\right) = x,$$

ou seja, $s_F \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \{F \in k[X_0, \ldots, X_n]\ ;\ F \text{ é homogêneo de grau } d\ \} & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}^n, V) \\ & F & \longmapsto & s_F. \end{array}$$

São válidas as seguintes propriedades:

1. ϕ é injetiva.
   De fato, se $s_F^i(x) = s_G^i(x)\ \forall\ x \in D(x_i)$, então $\psi_i(x, F(x)/x_i^d) = \psi_i(x, G(x)/x_i^d)$. Como ψ_i é injetiva, segue que $F(x)/x_i^d = G(x)/x_i^d\ \forall\ x \in D(x_i)$ e $F(x) = G(x)\ \forall\ x \in D(x_i)$. Observemos que da irredutibilidade de $\mathbb{P}^n$ e da igualdade $\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n \setminus D(x_i)) \cup \mathcal{Z}(F-G)$, segue que $\mathcal{Z}(F-G) = \mathbb{P}^n$ e portanto $F = G$.

2. ϕ é linear.

   Sejam F e G polinômios homogêneos de grau d.

$$
\begin{aligned}
s^i_{F+G}(x_0:\ldots:x_n) = \psi_i\left((x_0:\ldots:x_n), \frac{(F+G)(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^d}\right) = \\
= \psi_i\left((x_0:\ldots:x_n), \frac{F(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^d} + \frac{G(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^d}\right) = \\
= \psi_i\left((x_0:\ldots:x_n), \frac{F(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^d}\right) + \psi_i\left((x_0:\ldots:x_n), \frac{G(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^d}\right) = \\
= (s^i_F + s^i_G)(x_0:\ldots:x_n).
\end{aligned}
$$

   Logo $s_{F+G} = s_F + s_G$, ou seja, $\phi(F+G) = \phi(F) + \phi(G)$. Além disso, $\phi(\lambda F) = \lambda\phi(F)$, pois

$$
s^i_{(\lambda F)}(x_0:\ldots:x_n) = \psi_i\left((x_0:\ldots:x_n), \frac{\lambda F(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^d}\right) = \lambda s^i_F(x_0:\ldots:x_n).
$$

3. ϕ é sobrejetiva.

   Se $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, então $h := \pi_2 \circ \psi_i^{-1} \circ s\big|_{D(x_i)}$ é morfismo. Logo $\overline{h} := h \circ \phi_i^{-1}$ é uma função regular em $\mathbb{A}^n$, onde

$$
\begin{array}{cccc}
\phi_i: & D(x_i) & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\
 & (x_0:\ldots:x_n) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right).
\end{array}
$$

   Para cada $p \in \mathbb{A}^n$ existem polinômios $f_p, g_p \in k\left[\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right]$ e uma vizinhança aberta $U_p \subseteq \mathbb{A}^n$ de p tais que $\overline{h}|_{U_p} : U_p \to \mathbb{A}^1$ é dada por $\overline{h}_p = f_p/g_p$. Pelo Teorema da Base de Hilbert ((KUNZ, 1985) capítulo 1, seção 2) o ideal $I := \langle g_p \,|\, p \in \mathbb{A}^n \rangle$ é finitamente gerado, ou seja, existem elementos $p_1,\ldots,p_s \in \mathbb{A}^n$ tais que $I = \langle g_{p_1},\ldots,g_{p_s}\rangle$. Além disso, como $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ segue do Teorema dos Zeros de Hilbert ((SHAFAREVICH, 1995), apêndice 6, proposição 1) que $1 \in I$, isto é, existem polinômios

$$
h_1,\ldots,h_s \in k\left[\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right]
$$

   tais que $1 = \sum_{i=1}^{s} g_{p_i}h_i$. Multiplicando a igualdade acima por $\overline{h}$ obtemos a relação $\overline{h} = \sum_{i=1}^{s} f_{p_i}h_i$. Portanto

$$h(x_0:\ldots:x_n)=h\left(\frac{x_0}{x_i}:\ldots:\frac{x_{i-1}}{x_i}:1:\frac{x_{i+1}}{x_i}:\ldots\frac{x_n}{x_i}\right)=$$
$$=h\left(\phi_i^{-1}\left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right)\right)=\overline{h}\left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{s} f_{p_i}\left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right)h_i\left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots\frac{x_n}{x_i}\right)=\frac{F_i(x_0,\ldots,x_n)}{x_i^l},$$

onde F_i é um polinômio homogêneo de grau l nas variáveis $x_0,x_1,\ldots,x_n$. Podemos supor que x_i não divide F_i. Consideremos que

$$\pi_2\circ\psi_i^{-1}\circ s|_{D(x_i)}=F_i/x_i^l,\ \text{com } x_i \text{ não dividindo } F_i,$$

$$\pi_2\circ\psi_j^{-1}\circ s|_{D(x_j)}=F_j/x_j^m,\ \text{com } x_j \text{ não dividindo } F_j.$$

Na interseção $D(x_i)\cap D(x_j)$ temos que

$$s(x)=\psi_i\left(x,\frac{F_i(x)}{x_i^l}\right)=\psi_j\left(x,\frac{F_j(x)}{x_j^m}\right),$$

ou seja,

$$\psi_j^{-1}\circ\psi_i\left(x,\frac{F_i(x)}{x_i^l}\right)=\left(x,\frac{F_j(x)}{x_j^m}\right).$$

Donde segue que

$$\left(x,\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^d\frac{F_i(x)}{x_i^l}\right)=\left(x,\frac{F_j(x)}{x_j^m}\right)$$

e

$$\frac{x_i^d}{x_j^d}.\frac{F_i(x)}{x_i^l}=\frac{F_j(x)}{x_j^m},\ \text{em } D(x_i)\cap D(x_j).$$

Logo $x_i^d x_j^m F_i=x_j^d x_i^l F_j$ em $D(x_i)\cap D(x_j)$. Como $\mathbb{P}^n$ é irredutível, obtemos a igualdade de polinômios $x_i^d x_j^m F_i=x_j^d x_i^l F_j$. Como x_i^l não divide $F_i x_j^m$, então x_i^l divide x_i^d. Da mesma forma mostra-se que x_j^m divide x_j^d. Logo $x_i^{d-l}F_i=x_j^{d-m}F_j:=F$. Agora basta observarmos que $s=s_F=\phi(F)$.

□

Definição 2.13. Sejam $\pi:Y\to X$ um morfismo e E um fibrado vetorial sobre X, definimos $\pi^*E=\{(y,v)\in Y\times E;\ \pi(y)=p(v)\}$.

Observação 2.4. Sejam $Z\subseteq\mathbb{A}^n$ fechado e $\triangle:Z\to Z\times Z\subseteq\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^n$dada por $\triangle(z)=(z,z)$. Então $\triangle(Z)$ é fechado em $\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^n$. De fato, como Z é fechado então $Z=\mathcal{Z}(F_1,\ldots,F_m)$, onde $F_1,\ldots,F_m\in K[X_0,\ldots X_n]$, então $\triangle(Z)=\mathcal{Z}(F_1,\ldots,F_m,X_0-Y_0,\ldots X_m-Y_m)$, assim $Z\times Z$ é fechado.

Observação 2.5. Sejam $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ um subconjunto fechado e $U \subseteq \mathbb{A}^n$ o aberto definido por $U = \mathbb{A}^n - \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)$, onde $F_1, \ldots, F_k$ são polinômios em n variáveis. Se $x \in Z \cap U$, então $x \notin \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)$ e portanto existe $l \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $F_l(x) \neq 0$. Portanto $x \in Z_{F_l} = Z \cap D(F_l)$. Donde segue que $Z \cap U$ tem uma cobertura formada por abertos principais. Observemos agora que abertos principais são variedades afins. De fato, sejam $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ um subconjunto fechado e Q um polinômio em n variáveis. Consideremos a função $\varphi : Z_Q \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ definida por $\varphi(x) = (x, Q(x)^{-1})$. Observando que $\varphi(Z_Q) = \{(x,t) \in \mathbb{A}^n \,|\, tQ(x) = 1\}$ e que φ é um isomorfismo sobre sua imagem, segue que Z_Q é uma variedade afim.

Se X é uma variedade algébrica e (U, ϕ) é um atlas algébrico de X, satisfazendo as propriedades $A1)$ e $A2)$ da Definição 2.6. Por definição $\phi(U)$ é um conjunto localmente fechado, logo ele pode ser coberto por abertos afins. A imagem inversa destes abertos afins, por ϕ, determinam uma cobertura de U por abertos afins. Segue portanto que X possui uma cobertura afim.

Proposição 2.4. *Se E é fibrado vetorial sobre X, então $\pi^*E = \{(y,x) \in Y \times E; \pi(y) = p(v)\}$ é um fibrado vetorial sobre Y.*

Demonstração.

$$\begin{tikzcd}
\pi^*E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "\pi"] & X
\end{tikzcd}$$

1) Primeiramente precisamos mostrar que $\pi^*E \subseteq Y \times E$ é uma variedade algébrica. Para isso provaremos que π^*E é localmente fechado. Seja X uma variedade algébrica qualquer e $\triangle : X \to X \times X$ dada por $\triangle(x) = (x,x)$. Afirmamos que $\triangle(X)$ é localmente fechado em $X \times X$. Se $X = \cup_i U_i$ é uma cobertura de X por abertos principais, então $\triangle(X) \subseteq \cup(U_i \times U_i)$ e $\triangle(X) = \cup \triangle(U_i)$ é fechado em $\cup(U_i \times U_i)$, pois $\triangle(X) \cap (U_i \times U_i) = \triangle(U_i)$. Assim temos que

$$\overline{\triangle(X)} \cap (\cup_i(U_i \times U_i)) = \cup_i(\overline{\triangle(X)} \cap (U_i \times U_i)) = \cup_i(\overline{\triangle(X) \cap (U_i \times U_i)}) =$$
$$= \cup_i \overline{\triangle(U_i)} = \cup_i \triangle(U_i) = \cup_i(\triangle(X) \cap (U_i \times U_i)) = \triangle(X) \cap (\cup_i(U_i \times U_i)) = \triangle(X).$$

Se $\phi : Y \times E \to X \times X$ é o morfismo definido por $\phi(y,v) = (\pi(y), p(v))$, $F = \overline{\triangle(X)}$ e $U = \cup(U_i \times U_i)$, então $\phi^{-1}(F \cap U) = \phi^{-1}(F) \cap \phi^{-1}(U) = \pi^*E$, ou seja, π^*E é localmente fechado. Portanto π^*E é uma variedade algébrica.

2) Considere o morfismo $p_1 : \pi^*E \to Y$ dado por $p_1(y,v) = y$. Sejam $\{U_i\}_{i \in I}$ a cobertura aberta de X satisfazendo a condição $FV1)$ da Definição 2.9 e ψ_i as funções que satisfazem as condições $FV2)$ e $FV3)$ para o fibrado E.

FV1) Observe que $Y = \bigcup \pi^{-1}(U_i)$ é uma cobertura aberta de Y. Queremos demonstrar que $p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) = (\pi^{-1}(U_i) \times p^{-1}(U_i)) \cap \pi^*E$. Se $(a,b) \in p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i))$, então

$p(b) = \pi(a) = \pi(p_1(a,b)) \in U_i$. Assim $(a,b) \in (\pi^{-1}(U_i) \times p^{-1}(U_i)) \cap \pi^*E$. Portanto $p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) \subseteq (\pi^{-1}(U_i) \times p^{-1}(U_i)) \cap \pi^*E$. Para a inclusão contrária, tome $(a,b) \in (\pi^{-1}(U_i) \times p^{-1}(U_i)) \cap \pi^*E$, então $p_1(a,b) = a \in \pi^{-1}(U_i)$, ou seja, $(a,b) \in p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i))$. Donde segue a igualdade.

FV2) Defina $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{A}^n \to p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i))$ por $\phi_i(y,v) = (y, \psi_i(\pi(y), v))$.

i) ϕ_i é injetiva.
Sejam $(y_1, v_1),\ (y_2, v_2) \in \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{A}^n$ tais que $\phi_i(y_1, v_1) = \phi_i(y_2, v_2)$. Da igualdade $(y_1, \psi_i(\pi(y_1), v_1)) = (y_2, \psi_i(\pi(y_2), v_2))$ e da injetividade de ψ, segue que $y_1 = y_2$ e $v_1 = v_2$.

ii) ϕ_i é sobrejetiva.
Se $(a,b) \in p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) = (\pi^{-1}(U_i) \times p^{-1}(U_i)) \cap \pi^*E$, então $p(b) \in U_i$ e exitem $x \in U_i$ e $v \in \mathbb{A}^n$ tais que $b = \psi_i(x,v)$ e $p(b) = p(\psi_i(x,v)) = x$. Como $(a,b) \in \pi^*E$, então $p(b) = \pi(a)$ e assim $x = \pi(a)$. Portanto $(a,b) = \phi_i(a,v)$.

iii) ϕ_i é um isomorfismo.
O fato de π ser um morfismo, implica que $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$ é um morfismo e como id é um morfismo, segue que $(\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} \circ (p_1, p_2), p_2)$ é um morfismo. Sendo ψ_i um morfismo, segue que $\psi_i \circ (\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}, id)$ é um morfismo e $\phi_i = (p_1, \psi_i \circ (\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}, id))$ é um morfismo. Observe ainda que $\phi_i^{-1} = (p_1, p_2 \circ \psi_i^{-1} \circ p_2)$ que por sua vez é um morfismo.

FV3) Observe que

$$\phi_j^{-1} \circ \phi_i(y,v) = \phi_j^{-1}(y, \psi_i(\pi(y), v)) = (y, p_2 \circ \psi_j^{-1}(\psi_i(\pi(y), v)) = (y, A_{i,j}(\pi(y))v),$$

tal que $A_{i,j}(\pi(y))$ é dada na relação $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(y,v) = (y, A_{i,j}(y)v)$.

$\square$

Observação: π^*E é um fibrado sobre Y do mesmo posto de E e é chamado de fibrado induzido.

Proposição 2.5. *Seja E um fibrado vetorial sobre X. Se s é uma seção de E então $\pi^*s : Y \to \pi^*E$ dada por $\pi^*s(y) = (y, s(\pi(y)))$ é uma seção de π^*E.*

Demonstração. Temos que $\pi^*s(y) = (y, s(\pi(y)))$, então $p(s(\pi(y))) = (p \circ s)(\pi(y)) = \pi(y)$, assim $\pi^*s(y) \in \pi^*E$. Já que, $\pi^*s = (id, s \circ \pi)$ e s, π e Id são morfismos, então $s \circ \pi$ é um morfismo e desse modo, π^*s é um morfismo.
Além disso, $p_1(\pi^*s)(y) = p_1(y, s \circ \pi(y)) = y$. $\square$

Definição 2.14. Se s é uma seção de fibrado vetorial E sobre X, então a seção π^*s de π^*E é chamada de seção induzida.

Proposição 2.6. *A aplicação* $\phi : \Gamma(X,E) \to \Gamma(Y,\pi^*E)$ *dada por* $\phi(s) = \pi^* s$ *é linear.*

Demonstração. Sejam $\{U_i\}_{i\in I}$ a cobertura aberta de X satisfazendo a condição $FV1)$ da Definição 2.9 e ψ_i as funções que satisfazem as condições $FV2)$ e $FV3)$ para o fibrado E. Sejam s_1 e s_2 duas seções do fibrado vetorial E. Tome $y \in \pi^{-1}(U_i)$. Como $p_1(\pi^* s_j(y)) = y$, segue que $\pi^* s_j(y) \in p_1^{-1}(y) \subseteq p_1^{-1}(\pi^{-1}(U_i))$, logo $\pi^* s_j(y) = \phi_i(y, v_j) = (y, \psi_i(\pi(y), v_j) = (y, s\circ\pi(y))$, onde $j = 1,2$ e ϕ_i foi definida na demonstração 2.4. Donde segue que, $\psi_i(\pi(y), v) = (s\circ\pi)(y)$.

$$(\pi^* s_1 + \pi^* s_2)(y) = \phi_i(y, v_1 + v_2) = (y, \psi_i(\pi(y), v_1 + v_2)).$$

Além disso,

$$\pi^*(s_1 + s_2)(y) = (y, (s_1 + s_2)(\pi(y)) = (y, \psi_i(\pi(y), v_1 + v_2)).$$

Portanto $\pi^*(s_1 + s_2) = \pi^* s_1 + \pi^* s_2$, isto é, $\phi(s_1 + s_2) = \phi(s_1) + \phi(s_2)$.

Observemos ainda que,

$$\lambda\pi^* s_1(y) = \phi_i(y, \lambda v_1) = (y, \psi_i(\pi(y), \lambda v_1)) = (y, (\lambda s_1)(\pi(y)) = \pi^*(\lambda s_1)(y),$$

ou seja, $\phi(\lambda s_1) = \lambda\phi(s_1)$. $\square$

Definição 2.15. Sejam X uma variedade algébrica e E um fibrado vetorial sobre X. Dada uma seção $s \in \Gamma(X,E)$. Seja $\mathcal{Z}(s) = \{x \in X; s(x) = 0\}$, então $\mathcal{Z}(s) \subseteq X$ é fechado e é chamado variedade de zeros de s.

Definição 2.16. Sejam X uma variedade algébrica e E um fibrado vetorial em linha sobre X. Dizemos que uma coleção $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \Gamma(X,E)$ gera E se $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_{s_k}$, ou seja, $\forall x \in X$ existe s_i tal que $s_i(x) \neq 0$, onde $X_{s_k} = X - \mathcal{Z}(s_k)$.

Proposição 2.7. *Uma coleção* $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \Gamma(X,E)$ *gera* E *se* $p^{-1}(x) =< s_1(x), \ldots, s_k(x) >$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $\{U_i\}_{i\in I}$ a cobertura aberta de X satisfazendo a condição $FV1)$ da Definição 2.9 e ψ_i as funções que satisfazem as condições $FV2)$ e $FV3)$ para o fibrado E. Suponha que $x \in U_i$ e $y \in< s_1(x), \ldots, s_k(x) >$, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i(x)$. Assim $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi_i(x, t_i) = \psi_i(x, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i)$, onde $\psi_j(x, v_i) = s_i(x)$. Segue que

$$p(y) = p(\psi_i(x, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i t_i)) = x,$$

ou seja, $y \in p^{-1}(x)$. Portanto $< s_1(x), \ldots, s_k(x) >\subseteq p^{-1}(x)$. Seja $y \in p^{-1}(x)$, então $y = \psi_i(x, \lambda)$

e existe j tal que $s_j(x) \neq 0$. Além disso existe $\beta \in k - \{0\}$ tal que $s_j(x) = \psi_i(x, \beta)$. Já que

$$\left(\frac{\lambda}{\beta} s_j\right)(x) = \psi_i\left(x, \frac{\lambda}{\beta}\beta\right) = y,$$

então $y \in < s_1(x), \ldots, s_k(x) >$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in X$ tal que $s_i(x) = 0$ para todo i, então $p^{-1}(x) = < 0 >$. Logo $p^{-1}(x) \simeq \{x\} \times 0$, o que é uma contradição, pois $p^{-1}(x) \simeq \{x\} \times \mathbb{A}^1$. Assim existe s_i tal que $s_i(x) \neq 0$, ou seja, $x \in X_{s_i}$. Assim $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} X_{s_i}$, como $X_{s_i} \subseteq X$ para todo i, então $X = \cup_{i=1}^{k} X_{s_i}$.Portanto $\{s_1, \ldots s_k\}$ gera E. $\square$

Definição 2.17. Se existe uma coleção $\{s_1, \ldots, s_t\} \subseteq \Gamma(X, E)$ de seções que geram E, dizemos que E é gerado por suas seções globais.

Exemplo 2.6. A coleção $\{s_{x_0^d}, \ldots, s_{x_n^d}\}$ de seções $\Gamma(X = \mathbb{P}^n, O_{\mathbb{P}^n}(d))$ gera $O_{\mathbb{P}^n}(d)$. Basta mostrarmos que $\mathbb{P}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X_{s_{x_i^d}}$. Seja $(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, então $a_i \neq 0$ para algum i. Portanto

$$s_{x_i^d}(a_0 : \ldots : a_n) = \psi_i\left((a_0 : \ldots : a_n), \frac{a_i^d}{a_i^d}\right) = \psi_i((a_0 : \ldots : a_n), 1) \neq 0.$$

Assim $(a_0 : \ldots : a_n) \in X_{s_{x_i^d}}$ e $\mathbb{P}^n \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} X_{sx_i^d}$.

Proposição 2.8. *Seja X uma variedade algébrica. Existe uma bijeção do conjunto dos morfismos $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ para a coleção de $(n+1)$ seções $\{s_0, \ldots, s_n\} \subseteq \Gamma(X, L)$ de um fibrado vetorial em linha L tal que $\{s_0, \ldots, s_n\}$ gera L.*

Demonstração. Sejam $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ um morfismo, $L = \varphi^* O_{\mathbb{P}^n}(1)$ um fibrado em linha sobre X e $\varphi^* s_{x_i}$ seções de X. Afirmamos que $\{\varphi^* s_{x_0}, \ldots, \varphi^* s_{x_n}\}$ gera L. Para verificarmos isso basta mostrarmos que $X \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} X_{\varphi^* s_{x_i}}$. Seja $x \in X$, então podemos supor que $\varphi(x) = (x_0 : \ldots : x_n)$ com $x_i \neq 0$ para algum i. Logo

$$\varphi^* s_{x_i}(x) = (x, s_{x_i}(\varphi(x))) = (x, s_{x_i}(x_0 : \ldots : x_n)) =$$
$$= \left(x, \psi_i\left((x_0 : \ldots : x_n), \frac{x_i}{x_i}\right)\right) = (x, \psi_i((x_0 : \ldots : x_n), 1)) \neq 0$$

e portanto $x \in X_{\varphi^* s_{x_i}}$. Então $X \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} X_{\varphi^* s_{x_i}}$.

Seja f a aplicação que leva os morfismos $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ na coleção de seções $\{s_0, \ldots, s_n\}$ como descrita acima.

1. Injetividade de f
   Queremos mostrar que se $f(\varphi)=f(\gamma)$, então $\varphi=\gamma$, onde φ e γ são dois morfismos. Suponha que $\varphi^* s_{x_i}=\gamma^* s_{x_j}$, então $\varphi^* s_{x_i}(x)=\gamma^* s_{x_j}(x)\ \forall x\in X$. Se $\varphi(x)\in D(x_k)$ e $\gamma(x)\in D(x_l)$, então
$$\varphi^* s_{x_i}(x)=\left(x,\psi_k\left(\varphi(x),\frac{(\varphi(x))_i}{(\varphi(x))_k}\right)\right)\ e\ \gamma^* s_{x_j}(x)=\left(x,\psi_l\left(\gamma(x),\frac{(\gamma(x))_j}{(\gamma(x))_l}\right)\right),$$
   e portanto $\psi_k\left(\varphi(x),\frac{(\varphi(x))_i}{(\varphi(x))_k}\right)=\psi_l\left(\gamma(x),\frac{(\gamma(x))_j}{(\gamma(x))_l}\right)$. Já que
$$\left(\varphi(x),A_{l,k}(\varphi(x))\frac{(\varphi(x))_j}{(\varphi(x))_k}\right)=\psi_l^{-1}\circ\psi_k\left(\varphi(x),\frac{(\varphi(x))_i}{(\varphi(x))_k}\right)=\left(\gamma(x),\frac{(\gamma(x))_j}{(\gamma(x))_l}\right)$$
   então $\varphi(x)=\gamma(x)$. Portanto $\varphi=\gamma$.

2. Sobrejetividade
   Sejam $\{s_0,\dots,s_n\}\subset\Gamma(X,L)$ seções que geram um fibrado em linha L sobre X, $\{U_i\}_{i\in I}$ a cobertura aberta de X satisfazendo a condição $FV1)$ da Definição 2.9 e ψ_i as funções que satisfazem as condições $FV2)$ e $FV3)$ para o fibrado E. Então $\bigcup_j(X_{s_i}\cap U_j)=X_{s_i}$
$$\begin{tikzcd} U_j\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[dr, "\pi"'] & p^{-1}(U_j) \arrow[d, "p"] \\ & U_j \end{tikzcd}$$
   Seja $x\in U_j\cap X_{s_i}$ para cada $k\in\{0,1,\dots n\}$ $s_k(x)\in p^{-1}(U_j)$ e existe $t_{ik}(x)\in\mathbb{A}^1$ e $x\in U_j$ tal que $\psi_j(x,t_{ik}(x))=s_k(x)$. Defina $\varphi_{ij}:X_{s_i}\cap U_j\to\mathbb{P}^n$ por
   $\varphi_{ij}(x)=(t_{0j}(x):t_{1j}(x):\dots:t_{nj}(x))$.

(a) Como $x\in X_{s_i}$, temos $s_i(x)\neq 0$ e portanto $t_{ij}(x)\neq 0$;

(b) seja $x\in(X_{s_i}\cap U_j)\cap(X_{s_l}\cap U_r)$ então $s_i(x)\neq 0$, $s_l(x)\neq 0$, $t_{ij}(x)\neq 0$, $t_{lr}(x)\neq 0$. Sabemos que $s_i(x)=\psi_j(x,t_{ij}(x))$ e $s_l(x)=\psi_r(x,t_{lr}(x))$, então $\psi_r^{-1}\circ\psi_r(x,t_{ij}(x))=(x,A_{rj}(x)t_{ij}(x))$. Assim podemos observar que $\psi_r(x,t_{0r})=s_0(x)$ e $\psi_j(x,t_{0j}(x))=s_0(x)$, então
$$\psi_r^{-1}\circ\psi_j(x,t_{0j}(x))=(x,t_{0r}(x))$$
donde segue que $(x,A_{rj}(x)t_{0j}(x))=(x,t_{0r}(x))$ e $A_{rj}(x)t_{0j}(x)=t_{0r}(x)$, seguindo o mesmo raciocínio para $s_1,\dots,s_n$ temos que
$$(t_{0r}(x):\dots:t_{nr}(x))=(A_{rj}(x)t_{0j}:\dots:A_{rj}(x)t_{nj}(x))=(t_{0j}(x):\dots:t_{nj}(x))$$
e portanto
$$\varphi_{ij}|_{X_{s_i}\cap U_j\cap U_r}=\varphi_{lr}|_{X_{s_l}\cap U_j\cap U_r}$$

Observe que para $x \in X_{s_i} \cap U_j$ temos $\psi_j(x, t_{ij}(x)) = s_i(x)$, então

$$\psi_j^{-1} \circ \psi_j(x, t_{ij}(x)) = \psi_j^{-1} \circ s_i(x) \text{ } e \text{ } \pi_2(x, t_{ij}(x)) = \pi_2 \circ \psi_j^{-1} \circ s_i(x)$$

assim $t_{ij} = \pi_2 \circ \psi_j^{-1} \circ s_i$ é um morfismo, pois s_i e π_2 são morfismo e ψ_j é um isomorfismo. Assim definindo $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ por $\varphi|_{X_{s_i} \cap U_j} = \varphi_{ij}$, segue que φ é um morfismo.

$\square$

3 Ações de grupos

3.1 Grupos algébricos

Definição 3.1. Um grupo algébrico é uma variedade algébrica G munida de uma estrutura de grupo tal que as funções:

1) $m : G \times G \to G$, onde $m(g_1, g_2) := g_1 g_2$,

2) $i : G \to G$, onde $i(g) = g^{-1}$

são morfismos.

Definição 3.2. Um morfismo de grupos algébricos G e H é uma aplicação regular de variedades algébricas $\varphi : G \to H$ satisfazendo:

1) $\varphi(a, b) = \varphi(a).\varphi(b)$ para todo $a, b \in G$.

2) $\varphi(e_G) = e_H$.

Dentre os grupos algébricos, os mais importantes em aplicações são os grupos ditos clássicos, obtidos como subconjunto do conjunto

$$M_n := \{ \text{ matrizes de tamanho } n \times n \text{ com entradas em } k \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$$

Veremos a seguir que o conjunto M_n tem uma estrutura de variedade algébrica afim.

Considere as entradas de uma matriz $A = (a_{ij})$ de tamanho $n \times n$ como coordenadas, em alguma ordem previamente escolhida, de um vetor $(\ldots : a_{ij} : \ldots) \in A^{n^2}$. Temos portanto uma bijeção entre M_n e $\mathbb{A}^{n^2}$ que define em M_n uma estrutura de variedade algébrica afim.

Exemplo 3.1. Considere $GL_n(k) := \{A \in M_n; det(A) \neq 0\}$. Usando a identificação anterior vemos que $GL_n(k) = \mathbb{A}^{n^2} - \mathcal{Z}(H)$, onde

$$H = det(\ldots, X_{ij}, \ldots) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon^{\sigma} X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \ldots X_{n\sigma(n)},$$

σ é uma permutação de n elementos, ε^{σ} é o sinal da permutação σ e X_{ij}, $\forall\ i = 1,\ldots,n$ e $\forall\ j = 1,\ldots,n$, são as coordenadas de $\mathbb{A}^{n^2}$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{cccc} m: & GL_n(k)\times GL_n(k) & \to & GL_n(k) \\ & ((a_{11}\ldots,a_{nn}),(b_{11},\ldots,b_{nn})) & \mapsto & (\ldots,\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}_{entrada\ (i,j)},\ldots) \end{array}$$

Tomando X_{ij} e Y_{kl} como coordenadas afins de $\mathbb{A}^{n^2}\times\mathbb{A}^{n^2}$, vemos que

$$F_{ij}(\ldots,X_{ij},\ldots) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}Y_{kj} \in k[X_{11},\ldots,X_{nn},Y_{11},\ldots,Y_{nn}]$$

$\forall\ i = 1,\ldots,n$, $\forall\ j = 1,\ldots n$ e $\forall\ k = 1,\ldots n$ e que

$$m((X_{11}\ldots,X_{nn}),(Y_{11},\ldots,Y_{nn})) = (\ldots,\underbrace{F_{ij}(\ldots,X_{ij},\ldots)}_{entrada\ (i,j)},\ldots).$$

Portanto m é uma multiplicação regular.

Segue da regra de Cramer, que o elemento (i,j) da matriz A^{-1} denotado por $(A^{-1})_{ij}$, é dado por

$$(A_{ij}^{-1}) = (-1)^{i+j}\frac{det(B_{ij})}{det(A)},$$

onde B_{ij} é a submatriz de A obtida eliminando-se a sua $j-$ésima linha e a i-ésima coluna. Como

$$(A_{ij}^{-1}) = (-1)^{i+j}\frac{det(B_{ij})}{det(A)} \in A(GL_n(k)) = k[\ldots,X_{ij},\ldots][\frac{1}{det(\ldots,X_{ij},\ldots)}],$$

temos que a aplicação

$$\begin{array}{cccc} i: & GL_n(k) & \to & GL_n(k) \\ & (\ldots,a_{ij},\ldots) & \mapsto & (\ldots,(A^{-1})_{ij},\ldots) \end{array}$$

é regular. Logo $GL_n9k)$ é um grupo algébrico.

Exemplo 3.2. Seja $SL_n = \{A \in M_n; det(A) = 1\}$. Por definição $SL_n(k)$ é um subconjunto fechado de $GL_n(k)$. Além disso, se $A,B \in SL_n(k)$ então $m(A,B) \in SL_n(k)$ e $i(A) \in SL_n(k)$. Logo $SL_n(k)$ é grupo algébrico.

Exemplo 3.3. Considere $PGL_n(k) := GL_n(k)/\sim$, onde $A \sim B$ em $GL_n(k)$, se e somente se, existe $\lambda \in k-0$, tal que $A = \lambda B$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{cccc} m\ : & PGL_n(k)\times PGL_n(k) & \longrightarrow & PGL_n(k) \\ & ((a_{11}:\ldots:a_{nn}),(b_{11}:\ldots:b_{nn})) & \mapsto & (\ldots:\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}_{entrada\ (i,j)}:\ldots) \end{array}$$

m está bem definida, pois dados $(a_{11}:\ldots:a_{nn})=A$ e $(b_{11}:\ldots:b_{nn})=B$ em $GL_n(k)$, então $0\neq det(A).det(B)=det(AB)$ e $AB=(\ldots:\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}}_{entrada\ (i,j)}:\ldots)$.

Além disso se $\lambda(a_{11}:\ldots:a_{nn})\in PGL_n(k)$ e $\nu(b_{11}:\ldots:b_{nn})\in PGL_n(k)$, então

$$m((\lambda a_{11}:\ldots:\lambda a_{nn}),(\nu b_{11}:\ldots:\nu b_{nn}))=(\ldots:\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\lambda\nu a_{ik}b_{kj}}_{entrada\ (i,j)}:\ldots)=(\ldots:\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}}_{entrada\ (i,j)}:\ldots).$$

em $PGL_n(k)$.

Se X_{ij} e Y_{ji} são coordenadas de $\mathbb{A}^{n^2}\times\mathbb{A}^{n^2}$. Então

$$F_{ij}=\sum_{k=1}^{n}X_{ik}Y_{kj}\in k[X_{11},\ldots,X_{nn},Y_{11},\ldots,Y_{nn}]$$

é polinômio homogêneo de grau 2, para todo $i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots n$ e $k=1,\ldots n$ e

$$m((\ldots:X_{ij}:\ldots),(\ldots:Y_{ij}:\ldots))=(\ldots:F_{ij}:\ldots).$$

Logo, m é aplicação regular.

A aplicação $i([A])=[A^{-1}]$ em $PGLn(k)$ coincide com a aplicação

$$\begin{array}{cccc} i: & PGL_n(k) & \longrightarrow & PGL_n(k) \\ & (\ldots:a_{kl}:\ldots) & \longmapsto & (\ldots:A_{ij}^{-1}(\ldots:a_{kl}:\ldots):\ldots) \end{array}$$

que também é regular pois

$$A_{ij}^{-1}(\ldots:X_{kl}:\ldots)=\sum_{\substack{\sigma\in S_n,\sigma(k)\neq j,\\ \forall k\in\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,n\}}}\varepsilon^{\sigma}X_{1\sigma(1)}\ldots\widehat{X_{i\sigma(i)}}\ldots X_{n\sigma(n)}\in k[X_{11},\ldots,X_{nn}]$$

é polinômio homogêneo.

3.2 Ações de grupo

Definição 3.3. Uma ação de um grupo algébrico G em uma variedade X é uma aplicação regular

$$\varphi:G\times X\to X$$

que satisfaz

1) $\varphi(e,x)=x,\ \forall\,x\in X$.

2) $\varphi(g,\varphi(h,x))=\varphi(gh,x),\ \forall\,x\in X\ \forall\,g,h\in G$.

Exemplo 3.4. O grupo $PGL_{n+1}(k)$ age em $\mathbb{P}^n$ da seguinte maneira

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & PGL_{n+1}\times\mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & ((a_{11}:\ldots:a_{(n+1)(n+1)}),(b_1:\ldots:b_{n+1})) & \longmapsto & (\ldots:\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}b_j:\ldots) \end{array}$$

É fácil ver ver que φ é regular, que $\varphi(e,x)=x$ e que $\varphi(g,\varphi(h,x))=\varphi(gh,x)$.

Definição 3.4. Dada uma ação de um grupo algébrico G sobre uma variedade X e um ponto $x\in X$, definimos o *estabilizador* de x como sendo a subvariedade fechada

$$G_x := \{g\in G;\varphi(g,x)=x\}\subseteq G;$$

e a *órbita* de x como sendo o conjunto

$$O(x) := \{\varphi(g,x);g\in G\}\subseteq X.$$

Definição 3.5. Dizemos que um subgrupo $Y\subseteq X$ é invariante pela ação de G, ou G-invariante, se $\varphi(g,Y)=Y$ para todo $g\in G$.

Observação 3.1. Toda órbita é G-invariante. De fato, sejam $x\in X$ e $Y=O(x)$. Dado $y\in Y$ temos que $y=\varphi(g,x)$ para algum $g\in G$. Para cada $g_1\in G$, temos que

$$\varphi(g_1,y)=\varphi(g_1,\varphi(g,x))=\varphi(gg_1,x)\in Y.$$

Portanto $\varphi(g_1,Y)\subseteq Y$. Reciprocamente, $\forall\ y\in Y$, temos $y=\varphi(g_1,g_1^{-1}y)\in\varphi(g,Y)$. Logo $\varphi(g,Y)=Y$, para todo $g_1\in G$.

Além disso, é verdade também que se $Y\subseteq X$ é invariante então $O(y)\subseteq Y$ para todo $y\in Y$.

Definição 3.6. Dizemos que G age transitivamente sobre um subconjunto G-invariante $Y\subseteq X$ se Y é uma órbita.

Suponha que G é um grupo algébrico agindo em uma variedade algébrica X. Para qualquer $f\in A(X)$ e $g\in G$, definimos a função $f^g:X\to k$ por:

$$f^g(x)=f(gx).$$

É fácil ver que $f^{gg'}=(f^g)^{g'}$ e $f^e=f$. Além disso, para qualquer $g\in G$ a aplicação $f\to f^g$ é um automorfismo de k-álgebras de $A(X)$. Dessa maneira temos que a aplicação definida a seguir é uma ação G em $A(X)$

$$\sigma: G\times A(X)\to A(X)$$
$$(g,f)\to f^g.$$

Denotaremos por $A(X)^G$ o seguinte conjunto

$$\{f \in A(X);\, f^g = f,\ \forall\, g \in G\}.$$

3.3 Quociente categórico

Definição 3.7. Seja G um grupo agindo em uma variedade algébrica X. Um quociente categórico de X por G é um par (Y,π), onde Y é uma variedade algébrica e π é um morfismo tal que:(HARRIS, 1995)

i) π é constante nas órbitas;

ii) (Propriedade Universal). Para toda variedade Z e qualquer morfismo $\rho : X \to Z$, constante nas órbitas, existe um único morfismo $f : Y \to Z$ tal que $f \circ \pi = \rho$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[dl, dotted, "!f"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Proposição 3.1. *O quociente categórico é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Suponhamos que existam (π,Y) e (π',Y') satisfazendo as condições da Definição (3.7). Então existe uma única f tal que $f \circ \pi' = \pi$ e uma única g tal que $g \circ \pi = \pi'$. Vamos mostrar que $f \circ g = Id_{Y'}$ e $g \circ f = Id_Y$. De fato, como $f \circ \pi' = \pi$ então

$$g \circ f \circ \pi' = g \circ \pi = \pi' = Id_Y \circ \pi' \Rightarrow g \circ f = Id_Y.$$

Analogamente, $g \circ \pi = \pi'$ implica $f \circ g \circ \pi = f \circ \pi' = \pi$ e $f \circ g = Id_{Y'}$. Portanto Y é isomorfo a Y'.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & Y \arrow[dl, shift left, "f"] \\ Y' \arrow[ur, shift left, "g"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ Y \arrow[ur, "!Id_Y"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi'"'] & Y' \\ Y' \arrow[ur, "!Id_{Y'}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Notação: Algumas vezes denotaremos Y por X/G, quando (Y,π) for o quociente categórico de X por G.

Definição 3.8. Se $\pi^{-1}(y)$ consiste de uma única órbita para todo $y \in Y$, chamamos (Y,π) de um espaço de órbitas.

Definição 3.9. Seja G um grupo agindo em duas variedades X e Y. Dizemos que um morfismo $\phi : X \to Y$ é um G-morfismo se $\phi(gx) = g\phi(x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$. Quando a ação de G em Y for trivial, isto é, quando $gy = y$, para todo $g \in G$ e para todo $y \in Y$, chamaremos um $G-$morfismo, de $G-$invariante.

Lema 3.2. *A definição de quociente categórico é local no seguinte sentido: se* $\pi : X \to Y$ *é um morfismo e* $\{U_i\}_{i \in I}$ *é uma cobertura aberta para* Y *com a propriedade que para cada* (U_i, π_i) *é um quociente categórico de* U_i *por* G*, onde* $\pi_i = \pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$*, então* (Y, π) *é o quociente categórico de* X *por* G*.*

Demonstração. Sejam $\pi : X \to Y$ um G-morfismo e $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de Y como no enunciado.Para mostramos que (Y, π) é o quociente categórico de X por G primeiro veremos que π é constante nas órbitas. Seja $x \in X = \cup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$. Então $x \in \pi^{-1}(U_i)$ para algum i e $\pi(x) = \pi_i(x) = \pi_i(gx) = \pi(gx)$, para todo $g \in G$, pois π_i é constante nas órbitas. Agora devemos mostrar que dado um morfismo $f : X \to Z$ constante nas órbitas, existe um único morfismo $\varphi : Y \to Z$ tal que $\varphi \circ \pi = f$. Para isso, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend left, "\pi_i"] \arrow[dr, "f|_{\pi^{-1}(U_i)}"'] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & Y & U_i \arrow[l, hook'] \arrow[dll, "\varphi_i"] \\
& Z & &
\end{tikzcd}$$

Como (U_i, π_i) é um quociente categórico de $\pi^{-1}(U_i)$ por G, existe um único morfismo $\varphi_i : U_i \to Z$ tal que $\varphi_i \circ \pi_i = f|_{\pi^{-1}(U_i)}$. Se mostrarmos que φ_i e φ_j coincidem em $U_i \cap U_j$ teremos que a aplicação $\varphi : Y \to Z$ definida por $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ é um morfismo e que $\varphi \circ \pi = f$. Mas dado $y \in U_i \cap U_j$ temos que $y = \pi(x)$ para algum $x \in \pi^{-1}(U_j) \cap \pi^{-1}(U_i)$, então

$$\varphi_i(y) = \varphi_i(\pi_i(x)) = f(x) \ \ e$$

$$\varphi_j(y) = \varphi_j(\pi_j(x)) = f(x).$$

Logo $\varphi_i(y) = \varphi_j(y)$, para todo $y \in U_i \cap U_j$. Observe que se $x' \in \pi^{-1}(U_j) \cap \pi^{-1}(U_i)$ é outro elemento tal que $y = \pi(x')$, então

$$\varphi_i(y) = \varphi_i(\pi_i(x')) = f(x') \text{ e}$$

$$\varphi_j(y) = \varphi_j(\pi_j(x')) = f(x').$$

A unicidade de φ segue da unicidade das φ_i's. $\square$

Observação 3.2. Quando o quociente categórico (Y, π) de X por G existe e Y é um espaço de órbitas, o homomorfismo $\pi^* : A(Y) \to A(X)$ é um isomorfismo sobre $A(X)^G$. De fato, Y espaço de órbitas implica que π é sobrejetiva e que π^* é um homomorfismo injetor. Devemos mostrar que $\pi^*(A(Y)) = A(X)^G$, seja $f \in A(Y)$. Então $(\pi^* f)(gx) = f(\pi(gx)) = f(\pi(x)) = (\pi^* f)(x)$. Logo, $\pi^*(A(Y)) \subseteq A(X)^G$. Para mostrarmos a inclusão contrária, seja $f \in A(X)^G$. Como (π, Y) é o quociente categórico e $f : X \to k$ é constante nas órbitas, existe uma única $f' : Y \to k$ tal que $f' \circ \pi = f$, ou seja, $f = \pi^*(f')$, com $f' \in A(Y)$.

3.4 Quociente de variedades afins por grupos finitos

Nesta seção mostraremos que se X for uma variedade algébrica afim e G um grupo finito agindo em X, então o espaço de órbitas de X por G existe e será uma variedade algébrica afim. Pela Observação 3.2 devemos mostrar inicialmente que $A(X)^G$ é uma álgebra finitamente gerada e, pelo que mostraremos a seguir, veremos que esta condição é necessária e suficiente.

De fato, se $A(X)^G$ for uma k-álgebra finitamente gerada, existem $a_1,\ldots,a_n \in A(X)^G$ tais que $A(X)^G = k[a_1,\ldots,a_n] = \{P(a_1,\ldots,a_n); P \in k[T_1,\ldots,T_n]$ é um polinômio $\}$. Assim, podemos definir o homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & k[T_1,\ldots,T_n] & \longrightarrow & A(X)^G = k[a_1,\ldots,a_n] \\ & P(T_1,\ldots,T_n) & \longmapsto & P(a_1,\ldots,a_n) \end{array}$$

tal que $k[T_1,\ldots,T_n]/(ker\ \varphi) \simeq A(X)^G$. Se $ker\ \varphi := I$ e $Y = \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, então pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, o ideal da variedade Y, denotado por $\mathcal{U}_Y$, e definido por

$$\mathcal{U}_Y = \{F \in k[z_0,\ldots,z_n]; F(a) = 0\ \forall\ a \in Y\},$$

é tal que $\mathcal{U}_Y = I$ e $A(Y) = k[T_1,\ldots,T_n]/\mathcal{U}_Y \simeq A(X)^G$.

Neste caso, Y será o candidato a quociente categórico.

Teorema 3.3. *Seja X uma variedade algébrica afim e G grupo finito agindo em X. Então $A(X)^G$ é uma k-álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U}_X$ o ideal da variedade X e $A(X) = k[X_1,\ldots,X_n]/\mathcal{U}_X$. Observe que podemos escrever $A(X) = K[Y_1,\ldots,Y_m]/\mathcal{U}_X$ com $m \geq n$, onde G age em X_i por permutação, ou seja, $\{Y_1,\ldots Y_m\} = \{X_i^g; g \in G\ e\ i = 1,\ldots,n\}$. Seja

$$\psi: k[Y_1,\ldots,Y_m]^G \longrightarrow \left(\frac{k[Y_1,\ldots,Y_m]}{\mathcal{U}_X}\right)^G$$

$$P \longmapsto \overline{P}$$

Onde $P \in k[Y_1,\ldots Y_m]^G$ é tal que $P^g(Y_1,\ldots,Y_n) := P(Y_1^g,\ldots,Y_m^g) = P(Y_1,\ldots,Y_m)$ para todo $g \in G$.

Afirmamos que ψ é sobrejetora.

De fato, dado $\overline{P} \in (k[Y_1,\ldots,Y_n]/\mathcal{U}_X)^G$, considere $Q = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} P^g \in k[Y_1,\ldots,Y_m]$. Se $g' \in G$ então

$$Q^{g'} = \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} P^g\right)^{g'} = \frac{1}{|G|}\sum_{(g'g)\in G} P^{gg'} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} P^g = Q,$$

ou seja, Q é G-invariante,

$$\overline{Q} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{P^g} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{P} = \frac{1}{|G|}|G|\overline{P} = \overline{P}$$

e $\overline{P} = \psi(Q)$.

Logo, é suficiente mostrarmos que $k[Y_1,\ldots,Y_m]^G$ é uma k-álgebra finitamente gerado, Mas este anel é tal que

$$k[Y_1,\ldots,Y_m]^{S_m} \subset k[Y_1,\ldots,Y_m]^G \subset k[Y_1,\ldots,Y_m]$$

onde S_m é o grupo de permutação de m letras, $k[Y_1,\ldots,Y_m]^{S_m} = \{P; P^\sigma = P\ \forall\ \sigma \in S_m\}$ e $P^\sigma(Y_1,\ldots Y_m) := P(Y_{\sigma(1)},\ldots,Y_{\sigma(n)})$. É conhecido que anel $k[Y_1,\ldots,Y_m]^{S_m}$ é exatamente o anel de polinômios $k[W_1,\ldots,W_m]$, onde

$$W_1 = Y_1+\ldots+Y_m,\ W_2 = Y_1.Y_2+\ldots+Y_{m-1}.Y_m,\ \ldots,\ W_m = Y_1.\ldots.Y_m.$$

são os polinômios simétricos elementares. ((GARCIA; LEQUAIN, 2008) capítulo 3, seção 4). Mostraremos agora que $k[Y_1,\ldots,Y_m]^G$ é uma k-álgebra finitamente gerada, mostrando que Y_i é inteiro sobre $k[W_1,\ldots,W_m]$ para todo i ((ATIYAH; MACDONALD, 1969) corolário 5.2). Considerando o polinômio

$$P(T) = (T-Y_1)(T-Y_2).\ldots.(T-Y_m) = T^m + W_1T^{m-1}+\ldots+W_m,$$

temos que $P(Y_i) = 0$ e, portanto, Y_i é inteiro sobre $k[W_1,\ldots,W_m]$. □

Teorema 3.4. *Se X é uma variedade algébrica afim e G um grupo finito agindo em X. Então existe o quociente categórico (Y,π) de X por G, Y é uma variedade algébrica afim e um espaço de órbitas.*

Demonstração. Seja Y a variedade afim tal que

$$k[z_1,\ldots,z_l] := A(Y) \simeq A(X)^G \subset A(X)$$

por um isomorfismo $\pi^* : A(Y) \to A(X)$ sobre $A(X)^G$.

Defina o morfismo

$$\begin{array}{rccl} \pi: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & (\pi^*(z_1)(x),\ldots,\pi^*(z_l)(x)) \end{array}$$

Vamos verificar que (Y,π) é o espaço de órbitas de X por G.

Afirmação 1: π é constante nas órbitas de G.

De fato, para todo $x \in X$ e para todo $g \in G$ temos que

$$\pi(x) = (\pi^*(z_1)(x), \ldots, \pi^*(z_l)(x)) = (\pi^*(z_1)(gx), \ldots, \pi^*(z_l)(gx) = \pi(gx),$$

pois $\pi^*(z_i) \in A(X)^G$, para todo $g \in G$.

Afirmação 2:

Todo morfismo $\rho : X \to Z$ constate nas órbitas se fatora por π, isto é, existe um único morfismo $\varphi : Y \to Z$ tal que $\varphi \circ \pi = \rho$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[dl, dotted, "!\varphi"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Para verificar a afirmação observe o diagrama

$$\begin{tikzcd} A(X) & A(Y) \arrow[l, "\pi^*"'] \\ A(Z) \arrow[u, "\rho^*"'] & \end{tikzcd}$$

e que ρ constante nas órbitas implica $\rho^*(A(Z)) \subset A(X)^G$. De fato, se $h \in A(Z)$ então

$$\rho^*(h)(gx) = h(\rho(gx)) = h(\rho(x)) = \rho^*(h)(x),$$

ou seja, $\rho^*(h) \in A(X)^G$. Como π^* é isomorfismo (sobre $A(X)^G$), $(\pi^*)^{-1} \circ \rho^*$ é um homomorfismo de $A(Z)$ para $A(Y)$, que denotaremos por φ^*. Seja $\varphi : Y \longrightarrow Z$ definido por φ^*. Então $\varphi \circ \pi = \rho$.

$$\begin{tikzcd} A(X)^G & A(Y) \arrow[l, "\pi^*"'] \\ A(Z) \arrow[u, "\rho^*"] \arrow[ur, dotted, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[dl, dotted, "!\varphi"] \\ Z & \end{tikzcd}.$$

A unicidade de φ segue do fato de que se $\rho = \varphi \circ \pi = \varphi' \circ \pi$, então $\rho^* = \pi^* \circ \varphi^* = \pi^* \circ \varphi'^*$ e $\varphi^* = \varphi'^*$, pois π^* é isomorfismo. Logo, $\varphi = \varphi'$.

Afirmação 3:

Y é um espaço de órbitas de X por G, isto é, Y está em bijeção com as órbitas de X.

Sejam $p, q \in X$ tais que p e q não estão na mesma órbita. Vamos mostrar que existe $f \in A(X)$ tal que $f(p) = 0$ e $f(gq) \neq 0$, para todo $g \in G$. Supondo $G = \{e = g_1, \ldots, g_s\}$, temos $p \notin V := \{q, g_2q, \ldots, g_sq\}$ e portanto $V \subsetneq \{p\} \cup V$. Assim, existe um $F \in \mathcal{U}_V$ tal que $F \notin \mathcal{U}_{\{P\} \cup V}$, ou seja, $F(g_iq) = 0$, para todo $i = 1, \ldots s$, e $F(p) \neq 0$. Tomando $F_1 = F - F(p)$ teremos $F_1(g_iq) = -F(p) \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots s$, e $F_1(p) = 0$. Logo, $f = \overline{F_1} \in A(X)$ é tal que

$f(p)=0$ e $f(gq)\neq 0$ para todo $g\in G$. Para ver que $\pi(q)\neq\pi(p)$ considere a função $h=\prod_{i=1}^{s} f_i^g$ que está em $A(X)^G$, pois

$$h^g=(f^{g_1}.f^{g_2}.\ldots.f^{g_s})^g=f^{gg_1}.f^{gg_2}.\ldots.f^{gg_s}=f^{g_1}.f^{g_2}.\ldots.f^{g_s}=h$$

Seja $h_1\in A(Y)$ tal que $h=\pi^*(h_1)$, então

$$h_1(\pi(p))=(\pi^*h_1)(p)=h(p)=\prod_{g\in G} f^g(p)=\prod_{g\in G} f(gp)=f(p).\ldots.f(g_sp)=0,\ pois\ f(p)=0$$
$$h_1(\pi(q))=(\pi^*h_1)(q)=h(q)=\prod_{g\in G} f^g(p)=\prod_{g\in G} f(gq)=f(q).\ldots.f(g_sq)\neq 0,$$
$$pois\ \ f(g_iq)\neq 0\ \ \forall\ i\ =\ 1,\ldots s.$$

Logo $\pi(p)\neq\pi(q)$.

Passemos a sobrejetividade de π.

Seja $m_y=(h_1,\ldots,h_k)$ o ideal maximal de y em $A(Y)$. Mostraremos que $\pi^*(m_y)\neq A(X)$. De fato, se $\pi^*m_y=A(X)$, então $1=a_1\pi^*h_1+\ldots+a_k\pi^*h_k$ com $a_i\in A(X)$

$$1=a_1^g\pi^*h_1^g+\ldots+a_k^g\pi^*h_k^g=a_1^g\pi^*h_1+\ldots+a_k^g\pi^*h_k\ \forall\ g\in G$$

e

$$|G|=(\sum a_1^g)\pi^*h_1+\ldots+(\sum a_k^g)\pi^*h_k\ \text{ então } 1=\frac{1}{|G|}\pi^*((\sum a_1')h_1+\ldots+(\sum a_k')h_k).$$

Logo

$$1=\frac{1}{|G|}(\sum a_1^g)\pi^*h_1+\ldots+(\sum a_k^g)\pi^*h_k\ =\pi^*(\frac{1}{|G|}(\sum a_1')h_1+\ldots+(\sum a_k')h_k),$$

ou seja,

$$1=\frac{1}{|G|}[(\sum a_1')h_1+\ldots+(\sum a_k')h_k]\in m_y$$

e $m_y=A(Y)$, o que é uma contradição. Assim, $\pi^*m_y\subseteq m_x$ para algum ideal maximal de $A(X)$. Então $\mathcal{Z}(m_x)\subseteq\mathcal{Z}(\pi^*(m_y))$ implica que $x\in\mathcal{Z}(\pi^*(m_y)$, isto é, $\pi^*(h)(x)=h(\pi(x))=0\ \forall\ h\in m_y$, ou seja, $\pi(x)=y$. $\square$

Outra propriedade importante sobre o quociente categórico de variedades algébricas afins por um grupo finito G é a seguinte proposição:

Proposição 3.5. *Nas mesmas hipóteses do Teorema 3.4, o quociente categórico de X por G é tal que $\pi: X\to Y$ é um morfismo finito. Em particular, π leva fechado em fechado.*

Demonstração. A existência do quociente categórico de X por G é dado no Teorema 3.4. Para mostrar que $\pi : X \to Y$ é finito, devemos mostrar que $A(X)$ é inteiro sobre $A(Y) \simeq A(X)^G$. Dado $f \in A(X)$,temos

$$\begin{aligned} P(T) &= (T - f^{g_1})(T - f^{g_2}) \ldots (T - f^{g_s}) = \\ &= T^s + (f^{g_1} + \ldots + f^{g_s})T^{s-1} + \ldots + f^{g_1} \cdot \ldots \cdot f^{g_s} = \\ &= T^s + W_1(f^{g_1}, \ldots, f^{g_s})T^{n-1} + \ldots + W_s(f^{g_1}, \ldots, f^{g_s}), \end{aligned}$$

onde $W_i's$ são os polinômios simétricos elementares nas variáveis $f^{g_1}, \ldots, f^{g_s}$ e $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$. Observando que $W_i(f^{g_1}, \ldots, f^{g_s}) \in A(X)^G$, temos $P(T) \in A(X)^G \simeq A(Y)$ e $P(f) = 0$. $\square$

A proposição a seguir será útil na construção do quociente categórico para a ação de um grupo finito em uma variedade quase projetiva X.

Proposição 3.6. *Seja $\pi : X \to Y$ o quociente categórico de X por G, onde X é uma variedade algébrica afim e G é um grupo finito. Então $(Y_h, \pi|_{\pi^{-1}(Y_h)})$ é o quociente categórico de $\pi^{-1}(Y_h)$ por G, onde $Y_h = Y - \mathcal{Z}(h)$.*

Demonstração. Primeiro devemos mostrar que $\pi^{-1}(Y_h) = X_f$, onde $f = \pi^*(h)$. De fato,

$$x \in \pi^{-1}(Y_h) \Leftrightarrow \pi(x) \in Y_h \Leftrightarrow h(\pi(x)) \neq 0 \Leftrightarrow (\pi^* h)(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in X_f.$$

Como $\pi^* : A(Y) \to A(X)$ é injetivo, o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \pi^* : & A(Y_h) = A(Y)_h & \to & A(X_f) = A(X)_f \\ & \dfrac{b}{h^s} & \mapsto & \dfrac{\pi^* b}{(\pi^* h)^s} \end{array}$$

também é injetivo. Segue da definição que $\pi^*(A(Y)_h) = (A(X)^G)_f$. Portanto, será suficiente mostrarmos que $(A(X)^G)_f = (A(X)_f)^G$. Mas,

$$\begin{aligned} &\frac{a}{f^s} \in (A(X)_f)^G \Leftrightarrow \frac{a^g}{f^s} = \frac{a}{f^s}\ \forall\, g \in G \Leftrightarrow f^t(a^g - a) = 0 \text{ em } A(X)_f \text{ para algum t } \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f^g)^t(a^g - a) = 0,\ \forall\, g \in G \Leftrightarrow (f^t a)^g - f^t a = 0,\ \forall\, g \in G \Leftrightarrow \frac{a}{f^s} \in (A(X)^G)_f. \end{aligned}$$

$\square$

3.5 Quociente de variedades quase projetivas por grupos finitos

Definição 3.10. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade algébrica quase projetiva. Seja $\sigma : G \times X \to X$ uma ação do grupo algébrico G sobre X. Dizemos que a ação de G sobre X é uma *ação linear*, ou que G age linearmente em X, se existe uma representação racional $\rho : G \to GL_{n+1}$ de G tal que a ação σ_ρ induzida sobre $\mathbb{P}^n$ seja uma extensão de σ, isto é, tal que o diagrama de morfismo

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"] & G\times \mathbb{P}^n \arrow[d, "\sigma_\rho"] \\ X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Observação 3.3. Temos que uma representação racional ρ de G induz uma ação de G em k^{n+1} e uma ação em $k[T_0,\dots,T_n]$ que preserva graus.

Teorema 3.7. *Seja X uma variedade algébrica quase projetiva e G um grupo finito agindo em X. Então existe o quociente categórico (Y,π) de X por G.(DOLGACHEV, 2003)*

Demonstração. Suponhamos $G=\{g_1,\dots,g_s\}$, $X=Z\cap U\subseteq\mathbb{P}^n$, onde Z é fechado e U é aberto e que X não é afim. Sejam $\overline{X}$ o fecho projetivo de X, $\mathcal{O}$ uma órbita de X e F um polinômio homogêneo tal que

$$\begin{aligned} F(x)=0 &\quad se \quad x\in\overline{X}-X;\\ F(x)\neq 0 &\quad se \quad x\in\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Vamos provar que o polinômio F existe. Como G é um grupo finito, segue que $\mathcal{O}$ é um conjunto finito de $\mathbb{P}^n$. Suponha que $\mathcal{O}=\{p_1,p_2,\dots,p_s\}$. Temos que $\mathcal{U}_{(\overline{X}-X)\cup\mathcal{O}}\subsetneq\mathcal{U}_{(\overline{X}-X)\cup\mathcal{O}_i}$, onde $\mathcal{O}_i=\mathcal{O}-\{p_i\}$, para todo $i=\{1,2,\dots s\}$. Logo, $\forall\ i=1,\dots,s$ existe $F_i\in U_{(\overline{X}-X)\cup\mathcal{O}_i}$, tal que $F_i(p_i)\neq 0$. Tome $F:=\ F_1+F_2+\dots+F_s$. Então

$$\begin{aligned} &F(p)=0 \text{ se } p\in\overline{X}-X \text{ e}\\ &F(p_i)\neq 0 \text{ se } p_i\in\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Seja $U=\overline{X}\setminus\mathcal{Z}(F)\subseteq\mathbb{P}^n$. Então $\mathcal{O}\subseteq U$ e afirmamos que U é um aberto afim. Vamos dividir a prova da última afirmação em 3 casos:

1º) $F=X_i$. Neste caso $\mathbb{P}^n\setminus\mathcal{Z}(X_i)=U_i\simeq\mathbb{A}^n$ onde $U_i=\{(x_0:\dots:x_n)\in\mathbb{P}^n/x_i\neq 0\}$.

Portanto U é um aberto afim.

2º) F é linear, isto é, $F=b_0x_0+b_1x_1+\dots+b_nx_n$ com $b_j\neq 0$ para algum j. Neste caso, existe uma aplicação $T:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$, tal que $T(\mathcal{Z}(F))=\mathcal{Z}(X_i)$. Basta considerar $T:\mathbb{P}^n\longrightarrow\mathbb{P}^n$ dada por

$$T(x_0:\dots:x_n)=(x_0:\dots:x_{i-1}:\sum_{i=0}^{n}b_ix_i:x_{i+1}\dots:x_{j-1}:x_i:x_{j+1}:\dots:x_n),$$

cuja inversa $T^{-1}:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ é dada por

$$T^{-1}(x_0:\dots:x_n)=(x_0:\dots:\underbrace{x_j}_{\text{posição } i}:\dots:x_{j-1}:-\sum_{k\neq j,i}\frac{b_k}{b_j}x_k+\frac{x_i}{b_j}:x_{j+1}:\dots:x_n)$$

Assim $T|_{\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(F)} : \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(F) \to \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(X_i)$ é um isomorfismo. Como $\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(X_i) \simeq \mathbb{A}^n$, temos $\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(F) \simeq \mathbb{A}^n$. Então, $U = \overline{X} \setminus \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(F)$ sendo fechado é afim.

3º) F não é linear. Suponha que o grau de F e d, isto é,

$$F = \sum_{i_0+\ldots+i_n=d} a_{i_0\ldots i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}.$$

Considere o mergulho de Veronese

$$\begin{array}{rccc} \nu_d : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N \\ & ((x_0 : \ldots : x_n)) & \longmapsto & (\nu_{d0\ldots 0} : \ldots : \nu_{0\ldots 0d} : \ldots : \nu_{i_0\ldots i_n} : \ldots) \end{array}$$

onde $\nu_{i_0\ldots i_n} = x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$, com $i_0 + i_1 + \ldots + i_n = d$, são as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^N$. Então $\nu_d(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(L)$, onde $L = \sum a_{i_0\ldots i_n} \nu_{i_0\ldots i_n}$ e

$$\nu_d|_{\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(F)} : \quad \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(F) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \nu_d(\mathbb{P}^n) \setminus \mathcal{Z}(L) \subseteq \mathbb{P}^N \setminus \mathcal{Z}(L)$$

Pelo 2º) caso, segue o resultado.

Observe que U é um aberto em $\overline{X}$, pois $U = \overline{X} \setminus \mathcal{Z}(F)$ e que $U \subseteq X$. De fato, $x \in U$ implica $x \in \overline{X}$ e $F(x) \neq 0$. Se $x \notin X$, então $x \in \overline{X} - X$. Mas $F(x) = 0$, $\forall x \in \overline{X} - X$, o que é uma contradição.

Além disso, $g_k U = \overline{X} \setminus \mathcal{Z}(L_k) := \overline{X}_{L_k}$, onde $L_k = F^{g_k^{-1}}$, $\forall\ k = 1, \ldots, s$, implica que $g_k U$ aberto afim e que

$$\bigcap_{k=1}^{s} g_k U = \bigcap_{k=1}^{s} \overline{X}_{L_k} = \overline{X}_L,$$

afim, onde $L = L_1 \ldots L_s$. Assim, definindo $U(O) := \bigcap_{k=1}^{s}(g_k U)$, teremos $O \subseteq U(O)$ e $U(O)$ aberto G-invariante afim. Para ver que $U(O)$ é G-invariante, observe que

$$\forall\ g \in G,\ gU(O) = \bigcap_{k=1}^{s} g g_k U = \bigcap_{k=1}^{s} g_k U = U(O).$$

Deixando O variar, obtemos uma cobertura $\{U_i\}_i$ de X, onde os $U_i's$ são abertos principais G-invariantes e afins. Uma vez que X é noetheriano, X pode ser escrito como uma união finita dos $U_i's$, isto é,

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{X}_{H_i}.$$

Sabemos pelo Teorema 3.4 que o quociente categórico $\pi_i : U_i \to \frac{U_i}{G} = V_i$ existe. Vamos usar o Lema da Colagem para obter o quociente categórico de X por G.

Para cada par (i, j) tal que $1 \leq i, j \leq m$, observe que a função $H_j/H_i \in A(U_i)$ é G-invariante, ou seja, $H_j/H_i \in A(U_i)^G$. Como $A(U_i)^G \simeq A(V_i)$, existe $\sigma_{i,j} \in A(V_i)$ tal que $\pi_i^*(\sigma_{i,j}) = H_j/H_i$. Denotemos por $V_{ij} = V_i - \{y \in V_i; \sigma_{ij}(y) = 0\}$. Então

$$\pi_i^{-1}(V_{ij}) = U_i \cap U_j = \pi_j^{-1}(V_{ji}).$$

Pela Proposição 3.6, $(V_{ij}, \pi_i|_{U_i\cap U_j})$ e $(V_{ji}, \pi_j|_{U_i\cap U_j})$ são quocientes categóricos de $U_i \cap U_i$ por G. Portanto existe um único isomorfismo $\psi_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& U_i \cap U_j \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\
V_{ij} \arrow[rr, "\psi_{ij}"] & & V_{ji}
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Observe que os isomorfismos ψ_{ij} satisfazem as seguintes condições:

1) $\psi_{ij} = \psi_{ji}^{-1}$ e $\psi_{ii} = id$.

   De fato, $\psi_{ji} \circ \pi_j = \pi_i$ implica $\pi_j = \psi_{ji}^{-1} \circ \pi_i$. Por outro lado, $\pi_j = \psi_{ij} \circ \pi_i$ e pela unicidade de ψ_{ij}, segue que $\psi_{ij} = \psi_{ji}^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
& U_i \cap U_j \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\
V_{ij} \arrow[rr, bend left, "\psi_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\psi_{ji}^{-1}"'] & & V_{ji} \arrow[ll, "\psi_{ji}"]
\end{tikzcd}$$

2) Para todo i, j, k distintos,

   (a) $\psi_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}$.

   De fato, Como $\psi_{ij}(V_{ij}) \subseteq V_{ji}$, devemos mostrar que $\psi_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) \subseteq V_{jk}$. Seja $y \in V_{ij} \cap V_{ik}$. Então $y = \pi_i(x)$ com $x \in U_i \cap U_j$ e $y = \pi(x_1)$ com $x_1 \in U_i \cap U_k$. Usando que (V_i, π_i) é um espaço de órbitas (quociente de uma variedade algébrica afim por um grupo finito) temos que $x_1 = gx$ para algum $g \in G$, então $x,\ x_1 \in U_i \cap U_k \cap U_j$. Logo $\psi_{ij}(\pi_i(x)) = \pi_j \in V_{jk}$, já que $x \in U_j \cap U_k$.

   (b) $\psi_{ik}|_{V_{ij}\cap V_{ik}} = \psi_{jk}|_{V_{ji}\cap V_{jk}} \circ \psi_{ij}|_{V_{ij}\cap V_{ik}}$.

   Como $\psi_{ij} \circ \pi_i = \pi_j$ e $\psi_{ik} \circ \pi_i = \pi_k$. Temos,$\psi_{jk} \circ (\psi_{ij} \circ \pi_i) = \psi_{jk} \circ \pi_i$, logo $\psi_{jk} \circ \psi_{ij} = \psi_{ik}$ em $\pi_i(U_j \cap U_k \cap U_i) = V_{ij} \cap V_{ik}$.

Então existe uma variedade Y e morfismos $\psi_i : V_i \to V$ satisfazendo $i)$, $ii)$, $iii)$ e $iv)$ do lema da colagem. Nosso próximo objetivo é mostrar que existe um morfismo $\pi : X \to Y$ tal que $\pi|_{U_i} = \pi_i$. Se mostrarmos que $\psi_i \circ \pi_i = \psi_j \circ \pi_j$ em $U_i \cap U_j$, então definiremos $\pi|_{U_i} = \psi_i \circ \pi_i$. Mas, em $U_i \cap U_j$,

$$\psi_i \circ \pi_i = \psi_i \circ (\psi_{ji} \circ \pi_j) = (\psi_i \circ \psi_{ji}) \circ \pi_j = \psi_j \circ \pi_j.$$

Usando o isomorfismo ψ_i podemos identificar V_i com $\psi_i(V_i) \subset V$ e $\pi|_{U_i}$ com π_i.

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[rr, bend right, "\pi|_{U_i}"'] & V_i \arrow[r, equal, "\psi_i"] & \psi_i(V_i) \end{tikzcd} .$$

Finalmente, segue do Lema 3.2 que (Y,π) é o quociente categórico de X por G. $\square$

Para terminarmos esta seção mostraremos que se X for uma variedade algébrica projetiva, G finito e a ação for linear, então X/G é uma variedade projetiva.

Proposição 3.8. *Seja X uma variedade algébrica projetiva e G um grupo finito agindo em X linearmente. Então o quociente categórico (Y,π) é uma variedade algébrica projetiva.*

Demonstração. Seja (Y,π) como na demonstração do Teorema 3.7. Então $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_{H_i}$ e $Y = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, onde $V_i = X_{H_i}/G$. Observando que os $H_i's$ podem ser tomados todos homogêneos de mesmo grau defina

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathbb{P}^{m-1} \\ & x & \mapsto & (H_1(x):\ldots:H_m(x)). \end{array}$$

É fácil ver que f está bem definida, já que $\{X_{H_i}\}_i$ é uma cobertura para X. O morfismo f é invariante nas órbitas, pois os $H_i's$ são G-invariantes. Logo pela Propriedade Universal do morfismo do quociente categórico, existe uma única $\varphi : Y \to \mathbb{P}^{m-1}$ tal que $\varphi \circ \pi = f$.

Devemos mostrar que φ é injetiva.

Suponhamos que existam $y,\ y_1 \in Y$ tais que $\varphi(y) = \varphi(y_1)$. Escreva $y = \pi_i(x),\ x \in U_i$ e $y_1 = \pi_j(x_1),\ x_1 \in U_j$. Então, $f(x) = \varphi(\pi_i(x)) = \varphi(\pi_j(x_1)) = f(x_1)$ implica que existe $\lambda \neq 0$ tal que $H_i(x) = \lambda H_i(x_1),\ \forall\ i = 1,\ldots,m$. Como $H_i(x) \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, então $H_i(x_1) \neq 0$ e $x_1 \in U_i \cap U_j$. Analogamente, $H_j(x_1) \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, implicam $H_j(x) \neq 0$ e $x \in U_i \cap U_j$. Logo $x, x_1 \in U_i \cap U_j$, e, para todo $k = 1,\ldots m$,

$$H_k(x) = \frac{H_i(x)}{H_i(x_1)} H_k(x_1) \Rightarrow \left(\frac{H_k}{H_i}\right)(x) = \left(\frac{H_k}{H_i}\right)(x_1) \Rightarrow \pi^*(\sigma_{ik})(x) = \pi_i^*(\sigma_{ik})(x_1),$$

isto é, $\sigma_{ik}(\pi_i(x)) = \sigma_{ik}(\pi_i(x_1))$ e $\sigma_{ik}(\pi_i(x)) = \sigma_{ik}(\psi_{ji} \circ \pi_j(x_1)),\ \forall k$. Mas,

$$V_i = \bigcup_{k=1}^{m} V_{ik} = \bigcup_{k=1}^{m} (V_i - \mathcal{Z}(\sigma_{ik})) = V_i - \bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{Z}(\sigma_{ik})$$

implica $\bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{Z}(\sigma_{ik}) = \emptyset$ e $<\{\sigma_{ik}; k = 1,\ldots,m\}>= 1$, ou seja, para todo

$$h \in A(V_i),\ h = a_1\sigma_{i1} + \ldots + a_m\sigma_{im} \text{ com } a_i \in A(V_i),$$

então $h(\pi_i(x)) = h(\psi_{ji}(\pi_j(x)),\ \ \forall\ h \in A(V_i)$. Se $\pi_i(x), \psi_{ji}(\pi_j(x)) \in V_i$ fossem distintos, como

V_i é afim, existiria $h \in A(V_i)$ tal que $h(\pi_i(x)) = 0$ e $h(\psi_{ji}(\pi_j(x)) \neq 0$. Absurdo. Logo, $\pi_i(x) = \psi_{ji}(\pi_j(x))$, então $y = \psi_{ji}(y_1)$ e $y = y_1$ em Y ($y \sim y_1$ no Lema da Colagem).

Finalmente, X projetiva e $f : X \to \mathbb{P}^{m-1}$ regular, implica $f(X) = \varphi(\pi(X)) = \varphi(Y) \subseteq \mathbb{P}^{m-1}$ fechado projetivo.

□

Proposição 3.9. *Seja G um grupo finito agindo linearmente em uma variedade quase projetiva X e em $\overline{X}$, seu fecho projetivo. Então, X/G é aberto em $\overline{X}/G$.*

Demonstração. A variedade $\overline{Y} = \overline{X}/G$ (resp. $Y = X/G$) foi construída cobrindo $\overline{X}$ (resp. X) por abertos afins $U_i\prime s$, G-invariantes, e então colando os quocientes categóricos $(V_i := U_i/G)\prime s$. Pelo Lema da Colagem, para todo i, existe $\psi_i : V_i \to \overline{Y}$ tal que $\psi_i(V_i)$ é aberto em $\overline{Y}$. Como os abertos $U_i\prime s$ da cobertura de X estão contidos em $\overline{X}$, por construção, temos que $\pi : \overline{X} \to \overline{Y}$ é tal que $\pi(X) \subset \overline{Y}$ é aberto.

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} U_i \subset \overline{X} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i \xrightarrow{\ \bigcup \pi_i\ } \bigcup_{i=1}^{s} (U_i/G) \xrightarrow{\ \bigcup \psi_i\ } \overline{Y}\ .$$

Para terminar a demonstração observe que se $\pi_1 : X \to Y$ for o quociente categórico de X por G então, existe uma única $\varphi : Y \to \overline{Y}$ tal que $\pi = \varphi \circ \pi_1$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \overline{X} \arrow[r, "\pi"] & \overline{Y} \\ & Y \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi(\pi_1(X)) = \varphi(Y) = \pi(X) \subset \overline{Y}$ é aberto.

□

Observação 3.4. A proposição anterior nos permite interpretar o quociente categórico $\overline{X}/G$ como a compactificação de X/G.

4 Teoria de Moduli

Espaços de Moduli estão em conexão com os problemas de classificação em geometria algébrica. Os ingredientes básicos de um problema de classificação são uma coleção de objetos $\mathcal{A}$ e uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{A}$. O problema é descrever o conjunto de classes de equivalências $\mathcal{A}/\sim$.

Quase sempre existe uma noção de "famílias contínuas"de objetos de $\mathcal{A}$, e gostaríamos de colocar em $\mathcal{A}/\sim$ uma estrutura algébrica e geométrica que reflita este fato. Este é o objetivo da teoria de moduli.

Os ingredientes básicos para o *problema de moduli* são uma coleção de objetos $\mathcal{A}$, uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{A}$ e o conceito de família em $\mathcal{A}/\sim$. O conceito de família varia com o tipo de problema, por isso exigimos que famílias satisfaçam algumas propriedades. Esta etapa consiste em passar de um problema de classificação para um problema de moduli, como definimos abaixo.

Definição 4.1. Um *problema de moduli* associado ao problema de classificação $(\mathcal{A},\sim)$ consiste em dar uma noção de família de objetos de $\mathcal{A}$, satisfazendo:

1) Uma família parametrizada pela variedade algébrica $\{pt\}$ é um único objeto de $\mathcal{A}$.

2) Existe uma noção de equivalência de famílias parametrizadas por qualquer variedade S, a qual se reduz a relação de equivalência dada em $\mathcal{A}$ quando $S = \{pt\}$.

3) Para qualquer morfismo $\phi : S' \to S$ e qualquer família parametrizada por S, existe uma família induzida $\phi^* X$ parametrizada por S'. Além disso esta operação satisfaz as propriedades funtoriais.

   a) $(\phi \circ \phi')^* = \phi'^* \circ \phi^*$;

   b) $1_S =$ identidade;

   e a noção de compatibilidade com $\sim$, isto é,

   c) $X \sim X' \Rightarrow \phi^* X \sim \phi^* X'$.

Dado $s \in S$, temos um morfismo $i : \{pt\} \to S$ tal que $i(pt) = s \in S$. Se $\mathcal{X}$ é uma família parametrizada pela variedade algébrica S, denotamos por $\mathcal{X}_s := i^* \mathcal{X}$. Vamos também denotar por $\mathcal{X}|_U$ a família induzida pela inclusão do aberto U em S.

4.1 Espaços de Moduli

Como descrito na seção anterior, dado um problema de moduli gostaríamos de dar ao conjunto $\mathcal{A}/\sim$ uma estrutura de variedade que se reflita na estrutura de famílias de objetos de $\mathcal{A}$. Veremos agora como tornar isto preciso.

Seja M uma variedade cujo conjunto subjacente é $\mathcal{A}/\sim$. Para qualquer família $\mathcal{X}$ parametrizada por uma variedade S temos uma aplicação $\nu_{\mathcal{X}} : S \to M$ definida por,

$$\nu_{\mathcal{X}}(s) = [\mathcal{X}_s],$$

onde $[\mathcal{X}_s]$ denota a classe de equivalência do objeto $\mathcal{X}_s$.

Seja $\mathcal{F}(S)$ o conjunto das classes de equivalência das famílias parametrizadas pela variedade S. Pela Definição 4.1 item (3), $\mathcal{F}$ é um funtor contravariante da categoria de variedades algébricas para a categoria de conjuntos. Denotemos por $Hom(-,M)$ o funtor que associa a cada variedade S o conjunto dos morfismos de S para M. Se para toda variedade S, $\nu_{\mathcal{X}} : S \to M$ for um morfismo, teremos uma aplicação

$$\phi(S) : \mathcal{F}(S) \to Hom(S,M)$$

dada por $\phi(S)([\mathcal{X}]) = \nu_{\mathcal{X}}$. Esta aplicação determina uma transformação natural

$$\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M).$$

Para simplificar a notação, escreveremos $\phi(S)(\mathcal{X})$ ao invés de $\phi(S)([\mathcal{X}])$.

O que parece natural perguntar agora é se ϕ é um isomorfismo de funtores, ou na linguagem de categorias, se $\mathcal{F}$ é representável pelo par (M,ϕ). Assim fazemos a seguinte definição.

Definição 4.2. Um *espaço de moduli fino*, para um dado problema de moduli, é um par (M,ϕ), onde M é uma variedade e ϕ é uma transformação natural que representa $\mathcal{F}$.

Observação 4.1. Note que na Definição 4.2 não pedimos $M = \mathcal{A}/\sim$, pois sendo $\mathcal{F}$ representável por (M,ϕ) temos a bijeção natural:

$$\phi(pt) : \mathcal{A}/\sim = \mathcal{F}(pt) \to Hom(pt,M) = M.$$

Além disso, para qualquer variedade S e qualquer $s \in S$, o morfismo $i : \{pt\} \to S$, induz o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(S) \arrow[r, "\phi(S)"] \arrow[d, "i^*"'] & Hom(S,M) \arrow[d, "Hom(i,M)"] \\ \mathcal{F}(pt) \arrow[r, "\phi(pt)"] & Hom(pt,M) = M \end{tikzcd} \tag{1}$$

Logo,

$$Hom(i,M)\circ\phi(S)(\mathcal{X}) = \phi(S)(\mathcal{X})\circ i = (\phi(S)(\mathcal{X})\circ i)(pt) = \phi(S)(\mathcal{X})(i(pt)) = \phi(S)(\mathcal{X})(s),$$

onde estamos identificando o morfismo $\phi(S)(\mathcal{X})\circ i$ com sua imagem. Por outro lado, temos $\phi(pt)\circ i^*(\mathcal{X}) = \phi(pt)(\mathcal{X}_s) = \phi(pt)\circ\nu_{\mathcal{X}}(s)$. Portanto $\phi(S)(\mathcal{X})(s) = \phi(pt)\circ\nu_{\mathcal{X}}(s)$, $\forall\ s\in S$, e

$$\phi(S)(\mathcal{X}) = \phi(pt)\circ\nu_{\mathcal{X}}$$

é um morfismo.

Em muitos lugares deste capítulo, identificaremos o morfismo $i:\{pt\}\hookrightarrow s\in S$ com sua imagem i(pt).

Temos ainda que o morfismo identidade 1_M determina uma família U, parametrizada por M, tal que para qualquer família $\mathcal{X}$ parametrizada por S, as famílias $\mathcal{X}$ e $\nu'^*_{\mathcal{X}}U$ correspondem ambas ao mesmo morfismo $\nu'_{\mathcal{X}}: S\to M$, ou seja, $\mathcal{X}\sim\nu'^*_{\mathcal{X}}U$.

De fato, se $\phi(S)(\mathcal{X}) = \nu'_{\mathcal{X}}$ e $\phi(M)(U) = 1_M$, segue do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\phi(M)"] \arrow[d, "\nu'^*_{\mathcal{X}}"'] & Hom(M,M) \arrow[d, "Hom(\nu'_{\mathcal{X}},M)"] \\ \mathcal{F}(S) \arrow[r, "\phi(S)"] & Hom(S,M) \end{tikzcd} \tag{2}$$

$$Hom(\nu'_{\mathcal{X}},M)\circ\phi(M)(U) = Hom(\nu'_{\mathcal{X}},M)(1_M) = \nu'_{\mathcal{X}} = \phi(S)(\nu'^*_{\mathcal{X}}U).$$

Então $\phi(S)(\mathcal{X}) = \phi(S)(\nu'^*_{\mathcal{X}}U)$ e $\mathcal{X}\sim\nu'^*_{\mathcal{X}}U$, pois ϕ é bijeção.

Com isso temos a seguinte definição alternativa.

Definição 4.3. Um *espaço de moduli fino* consiste de uma variedade algébrica M e uma família U parametrizada por M tal que, para qualquer família $\mathcal{X}$ parametrizada por uma variedade S, existe um único morfismo $\phi: S\to M$ tal que $\mathcal{X}\sim\phi^*U$.

A família U será chamada de família universal para o problema de moduli.

O problema é que em geral, não existe, para todos os problemas de moduli, um espaço de moduli fino. Por isso precisamos encontrar condições mais fracas que determinem uma estrutura de variedade em $\mathcal{A}/\sim$. Isto sugere a seguinte definição.

Definição 4.4. Um *espaço de moduli grosso* para um problema de moduli dado é uma variedade algébrica M, junto com uma transformação natural

$$\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M),$$

tal que

(MG1) $\phi(pt)$ é bijetiva.

(MG2) Para qualquer variedade N e qualquer transformação natural $\psi : \mathcal{F} \to Hom(-,N)$, existe uma única transformação natural

$$\Omega : Hom(-,M) \to Hom(-,N)$$

tal que $\Omega \circ \phi = \psi$.

Note que, como na definição do espaço de moduli fino,ϕ é tal que

$$\phi(S)(\mathcal{X}) = \phi(pt) \circ \nu_{\mathcal{X}},$$

e usando isso, faremos a seguinte definição alternativa para o espaço de moduli grosso.

Definição 4.5. Um *espaço de moduli grosso* consiste de uma variedade algébrica M e uma bijeção
$\alpha : \mathcal{A}/\sim \to M$ tal que

(MG1') Para qualquer família $\mathcal{X}$ parametrizada por uma variedade algébrica S, $\alpha \circ \nu_{\mathcal{X}}$ é um morfismo.

(MG2') Para qualquer variedade algébrica N e qualquer transformação natural $\psi : \mathcal{F} \to Hom(-,N)$, a aplicação

$$\mu = \psi(pt) \circ \alpha^{-1} : M \to N$$

é um morfismo.

Vamos mostrar que que as Definições 4.4 e 4.5 são equivalentes.

Sejam M e $\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M)$ como na Definição 4.4. Então,

$$\alpha = \phi(pt) : \mathcal{F}(pt) = \mathcal{A}/\sim \to Hom(\{pt\},M) = M$$

é uma bijeção e, como foi mostrado na Observação 4.1,

$$\phi(S)(\mathcal{X}) = \phi(pt) \circ \nu_{\mathcal{X}} = \alpha \circ \nu_{\mathcal{X}}$$

é um morfismo.

Devemos mostrar que, dados uma variedade algébrica N e uma transformação natural $\psi\ :\ \mathcal{F} \to Hom(-,M)$, a aplicação

$$\mu = \psi(pt)\circ\alpha^{-1} : M \to N$$

é um morfismo.

Para isto, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(M,M) \arrow[r, "Hom(i{,}M)"] \arrow[d, "\Omega(M)"] & Hom(pt,M) \arrow[d, "\Omega(pt)"] \\ Hom(M,N) \arrow[r, "Hom(i{,}N)"'] & Hom(pt,N) \end{tikzcd} ,$$

onde Ω é a transformação natural cuja existência está garantida pela Definição 4.4, e $i : \{pt\} \to M$ é o morfismo de inclusão definido por um $m \in M$. Então,

$$\begin{aligned} \Omega(M)(1_M)(m) = {} & \Omega(M)(1_M)(i(pt)) = \Omega(M)(1_M)\circ i = Hom(i,M)(\Omega(M)(1_M)) = \\ = {} & \Omega(pt)\circ Hom(i,M)(1_M) = \Omega(pt)(i) = \Omega(pt)(i(pt)) = \Omega(pt)(m), \end{aligned}$$

$\forall\, m \in M$, ou seja, $\Omega(M)(1_M) = \Omega(pt) : M \to N$ é um morfismo. Mas o diagrama,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(pt) \arrow[r, "\phi(pt)"] \arrow[d, "\psi(pt)"'] & Hom(pt,M) \arrow[dl, "\Omega(pt)"] \\ Hom(pt,M) & \end{tikzcd}$$

nos diz que $\Omega(pt)\circ\phi(pt) = \psi(pt)$, ou seja, que

$$\Omega(pt) = \psi(pt)\circ\phi(pt)^{-1} = \psi(pt)\circ\alpha^{-1}$$

é um morfismo.

Reciprocamente, supondo os dados da Definição 4.5, devemos construir uma transformação natural $\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M)$ tal que:

(MG1) $\phi(pt)$ é bijetiva.

(MG2) Para qualquer variedade N e qualquer transformação natural $\psi : \mathcal{F} \to Hom(-,N)$, existe uma única transformação natural

$$\Omega : Hom(-,M) \to Hom(-,N)$$

tal que $\Omega\circ\phi = \psi$.

Dada variedade algébrica S, seja $\phi(S) : \mathcal{F}(S) \to Hom(S,M)$ definida por $\phi(S)(\mathcal{X}) = \alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}$.

Afirmamos que para todo morfismo $\gamma : S' \to S$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(S) \arrow[r, "\phi(S)"] \arrow[d, "\gamma^*"'] & Hom(S,M) \arrow[d, "Hom(\gamma,M)"] \\ \mathcal{F}(S') \arrow[r, "\phi(S')"] & Hom(S',M) \end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato,

$$Hom(\gamma,M)\circ\phi(S)(\mathcal{X}) = Hom(\gamma,M)(\phi(S)(\mathcal{X})) = Hom(\gamma,M)(\alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}) = \alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}\circ\gamma.$$

Por outro lado,

$$\phi(S')\circ\gamma^*(\mathcal{X}) = \phi(S')(\gamma^*\mathcal{X}) := \alpha\circ\nu_{\gamma^*\mathcal{X}}.$$

Devemos mostrar que $(\alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}\circ\gamma)(s') = (\alpha\circ\nu_{\gamma^*\mathcal{X}})(s')$, $\forall\, s'\in S'$.

Mas, $\forall\, s'\in S'$, temos que

$$\begin{aligned} (\alpha\circ\nu_{\gamma^*\mathcal{X}})(s') = &\ \alpha((\gamma^*\mathcal{X})_{s'}) = \alpha(i^*(\gamma^*\mathcal{X}) = \alpha((\gamma\circ i)^*\mathcal{X}) \\ = &\ \alpha(\mathcal{X}_{\gamma(s')}) = \alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}(\gamma(s')) = (\alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}\circ\gamma)(s'). \end{aligned}$$

Uma vez construída a transformação natural ϕ, vamos verificar que ela satisfaz as propriedades (MG1) e (MG2).

i) Propriedade (MG1): $\phi(pt)$ é bijeção.

Por definição, $\phi(pt)(\mathcal{X}) = \alpha\circ\nu_{\mathcal{X}} = \alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}(pt)$, para toda $\mathcal{X}\in\mathcal{F}(pt)$, e $\nu_{\mathcal{X}}(pt) = \mathcal{X}_{pt} = \mathcal{X}$.

ii) Propriedade (MG2): Para toda variedade N e toda $\psi : \mathcal{F}\to Hom(-,N)$ transformação natural, existe uma única $\Omega : Hom(-,M)\to Hom(-,N)$, transformação natural, tal que $\Omega\circ\phi = \psi$.

Dada uma variedade algébrica S, defina $\Omega(S) : Hom(S,M)\to Hom(S,N)$ por $\Omega(S)(\gamma) = \mu\circ\gamma$, onde μ é dada em (MG2'). Seja $\delta : S'\to S$ um morfismo. Precisamos mostrar que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} Hom(S,M) \arrow[r, "\Omega(S)"] \arrow[d, "Hom(\delta,M)"'] & Hom(S,N) \arrow[d, "Hom(\delta,N)"] \\ Hom(S',M) \arrow[r, "\Omega(S')"] & Hom(S',N) \end{tikzcd}$$

Observe que, para toda $\gamma\in Hom(S,M)$,

$$\begin{aligned} Hom(\delta,N)\circ(\Omega(S)(\gamma)) = &\ Hom(\delta,N)\circ(\mu\circ\gamma) = (\mu\circ\gamma)\circ\delta = \mu\circ(\gamma\circ\delta) \\ = &\ \Omega(S')(\gamma\circ\delta) = \Omega(S')\circ(Hom(\delta,M)(\gamma)) \end{aligned}$$

o que implica $Hom(\delta,N)\circ\Omega(S)=\Omega(S')\circ Hom(\delta,M)$ e portanto o diagrama comuta.

Agora queremos verificar que $\Omega\circ\phi=\psi$. Dada uma variedade algébrica S, temos

$$\Omega(S)\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\Omega(S)(\alpha\circ\nu_{\mathcal{X}})=\mu\circ\alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}=\psi(pt)\circ\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\nu_{\mathcal{X}}=\psi(pt)\circ\nu_{\mathcal{X}}.$$

Além disso, $\forall s\in S$, o diagrama abaixo nos diz

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(S) \arrow[r, "\psi(S)"] \arrow[d, "i^*"'] & Hom(S,N) \arrow[d, "Hom(i,M)"] \\
\mathcal{F}(pt) \arrow[r, "\psi(pt)"] & Hom(pt,M)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}\psi(S)(\mathcal{X})(s)= &\ \psi(S)(\mathcal{X})(i(pt))=\psi(S)(\mathcal{X})\circ i=Hom(i,N)(\psi(S)(\mathcal{X}))\\ = &\ \psi(pt)\circ i^*(\mathcal{X})=\psi(pt)(\mathcal{X}_s)=\psi(pt)\circ\nu_{\mathcal{X}}(s).\end{aligned}$$

Então $\Omega(S)\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\psi(S)(\mathcal{X})$, para toda $\mathcal{X}\in\mathcal{F}(S)$ e para toda variedade S.

Para terminar devemos mostrar a unicidade de Ω.

Sejam Ω e Ω' tais que $\Omega(S)\circ\phi(S)=\psi(S)=\Omega'(S)\circ\phi(S)$, para toda S. Pela definição da Ω, temos

$$\Omega(S)(f)=\mu\circ f=\psi(pt)\circ\alpha^{-1}\circ f=\Omega'(pt)\circ\phi(pt)\circ\phi(pt)^{-1}\circ f=\Omega'(pt)(f).$$

Para toda $f\in Hom(S,M)$, para todo $s\in S$ e para a inclusão $i:\{pt\}\hookrightarrow S$, temos

$$\Omega'(pt)\circ Hom(i,M)(f)=\Omega'(pt)(f\circ i)=\Omega'(pt)(f(i(pt))=\Omega'(pt)(f)(s)=\Omega'(pt)(f)$$

e, pelo diagrama,

$$\begin{tikzcd}
Hom(S,M) \arrow[r, "\Omega'(S)"] \arrow[d, "Hom(i,M)"'] & Hom(S,N) \arrow[d, "Hom(i,N)"] \\
Hom(pt,M) \arrow[r, "\Omega'(pt)"] & Hom(pt,N)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}\Omega'(pt)\circ Hom(i,M)(f)= &\ Hom(i,N)(\Omega'(S)(f))=\Omega'(S)(f)\circ i\\ = &\ \Omega'(S)(f(i(pt)))=\Omega'(S)(f(s))=\Omega'(S)(f).\end{aligned}$$

Então $\Omega(S)(f)=\Omega'(pt)(f)=\Omega'(S)(f)$, para toda $f\in Hom(S,M)$ e para toda S. Portanto $\Omega'=\Omega$.

As Definições 4.4 e 4.5 são boas em termos de categorias, mas não são muito claras. Por isso, apresentaremos a seguir um resultado que associa espaços de moduli a quocientes categóricos. Antes precisaremos da seguinte definição:

Definição 4.6. Para qualquer problema de moduli, uma família $\mathcal{X}$ parametrizada por uma variedade S é dita ter propriedade universal local se a seguinte condição vale: para qualquer família

$\mathcal{X}'$ parametrizada por S' e qualquer $s \in S'$, existe uma vizinhança U de s tal que $\mathcal{X}'|_U$ é equivalente a família induzida de $\mathcal{X}$ por algum morfismo $U \to S$. Dizemos que S tem a propriedade universal local se existir uma família parametrizada por S com tal propriedade.

Teorema 4.1. *Suponha que, para um dado problema de moduli, exista uma família $\mathcal{X}$ parametrizada por S com a propriedade universal local. Suponhamos ainda, que um grupo G age em S de tal maneia que $\mathcal{X}_s \sim \mathcal{X}_t$, se e somente se, s e t estão sobre a mesma órbita da ação. Então:*

1) *Qualquer espaços de moduli grosso é um quociente categórico de S por G.*

2) *Um quociente categórico de S por G é um espaço de moduli grosso, se e somente se, é um espaço de órbitas.*

Antes da demonstração do teorema, provaremos alguns resultados importantes.

Proposição 4.2. *Para uma dada variedade algébrica M, existe uma bijeção $\Gamma : A \to B$, onde*

$$A = \{\varphi : S \to M \textit{ morfismo invariantes nas órbitas }\}$$

$$B = \{\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M) \textit{ transformação natural }\}.$$

Demonstração. Dada $\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M) \in B$, seja $\varphi := \phi(S)(\mathcal{X}) \in Hom(S,M)$. Devemos mostrar que φ é constante nas órbitas. Para isso considere $i : pt \to s \in S$ o morfismo de inclusão e $g \in G$. Então pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(S) \arrow[r, "\phi(S)"] \arrow[d, "i^*"'] & Hom(S,M) \arrow[d, "Hom(i,M)"] \\ \mathcal{F}(pt) \arrow[r, "\phi(pt)"] & Hom(pt,M) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) = &\ \phi(S)(\mathcal{X})(s) = \phi(S)(\mathcal{X})(i(pt)) = \phi(S)(\mathcal{X}) \circ i = \phi(pt)(i^*\mathcal{X}) \\ = &\ \phi(pt)(\mathcal{X}_s) = \phi(pt)(\mathcal{X}_{gs}) := \phi(S)(\mathcal{X})(gs) = \varphi(gs). \end{aligned}$$

Portanto φ é constante nas órbitas.

Definimos $\Gamma^{-1} : B \to A$ por $\Gamma^{-1}(\phi) = \phi(S)(\mathcal{X})$.

Agora seja $\varphi : S \to M$ um mofismo constante nas órbitas. Dada uma variedade S', escreva $S' = \bigcup_{s' \in S'} U_{s'}$, onde $U_{s'}$ é uma vizinhança de s' para a qual existe um morfismo $\varphi_{U_{s'}} : U_{s'} \to S$ tal que $\varphi^*_{U_{s'}}\mathcal{X} \sim \mathcal{X}'|_{U_{s'}}$. Defina $\phi(S')(\mathcal{X}')|_{U_{s'}} = \varphi \circ \varphi_{U_{s'}}$. Se mostrarmos que $\phi(S')(\mathcal{X}')$ está bem definida, teremos que ela é um morfismo.

Por hipótese, $\forall\ s\prime, t \in S'$, $\varphi^*_{U_{s'}}\mathcal{X} \sim \mathcal{X}'|_{U_{s'}}$ e $\varphi^*_{U_t}\mathcal{X} \sim \mathcal{X}'|_{U_t}$. Então, se $U_{s'} \cap U_t \neq \emptyset$, temos $\forall\ u \in U_{s'} \cap U_t$,

$$\left(\mathcal{X}'|_{U_t}\right)_u \sim \mathcal{X}'|_u \sim \left(\mathcal{X}'|_{U_{s'}}\right)_u,$$

$$(\varphi_{U_{s'}}^{*}\mathcal{X})_u \sim \mathcal{X}'|_u \sim (\varphi_{U_t}^{*}\mathcal{X})_u.$$

Como $(\varphi_{U_{s'}}^{*}\mathcal{X})_u \sim \mathcal{X}_{\varphi_{U_{s'}}(u)}$ e $(\varphi_{U_t}^{*}\mathcal{X})_u \sim \mathcal{X}_{\varphi_{U_t}(u)}$, segue que $\varphi_{U_{s'}}(u) = g\varphi_{U_t}(u)$ e que

$$\varphi(\varphi_{U_{s'}}(u)) = \varphi(g\varphi_{U_t}(u)) = \varphi(\varphi_{U_t}(u)),$$

pois φ é constante nas órbitas. Logo, $\varphi\circ\varphi_{U_{s'}} = \varphi\circ\varphi_{U_t}$ em $U_{s'}\cap U_t$.

Desse modo definimos $\Gamma(\varphi) = \phi$.

Agora vamos mostrar que $\Gamma\circ\Gamma^{-1} = id_B$ e $\Gamma^{-1}\circ\Gamma = id_A$.

Dada $\varphi\in A$, sejam $\varphi' = \Gamma^{-1}(\Gamma(\varphi))$ e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de S, onde U_i é tal que existe um morfismo $\varphi_{U_i} : U_i \to S$ e $\varphi_{U_i}^{*}\mathcal{X} \sim \mathcal{X}|_{U_i}$. Então $\mathcal{X}_{\varphi_{U_i}(s)} = (\varphi_{U_i}^{*}\mathcal{X})_s \sim (\mathcal{X})_s$ implica $\varphi_{U_i}(s) = gs$.

$$\begin{tikzcd}
\varphi_{U_i}^{*}\mathcal{X} \sim \mathcal{X}|_{U_i} & \mathcal{X} \\
s\in U_i \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_{U_i}"] & S \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$\varphi'(s) = \phi(S)(\mathcal{X})(s) = \varphi\circ\varphi_{U_i}(s) = \varphi(gs)) = \varphi(s),\ \forall s\in S.$$

Reciprocamente, suponhamos $\Gamma(\Gamma^{-1}(\phi)) = \phi'$. Pelo diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(S) \arrow[r, "\phi(S)"] \arrow[d, "\varphi_{U_i^*}"'] & Hom(S,M) \arrow[d, "Hom(\varphi_{U_i}{,}M)"] \\
\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\phi(U_i)"] & Hom(U,M) \\
\mathcal{F}(S') \arrow[u, "i^*"] \arrow[r, "\phi(S')"] & Hom(S',M) \arrow[u, "Hom(i{,}M)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\phi'(S')(\mathcal{X}')(s) = (\Gamma^{-1}(\phi)\circ\varphi_{U_i})(s) = \phi(S)(\mathcal{X})\circ\varphi_{U_i}(s) = \phi(U_i)\circ\varphi_{U_i}^{*}(\mathcal{X})(s) = \\
\phi(U_i)(\mathcal{X}'|_{U_i})(s) = \phi(U_i)(i^{*}\mathcal{X}') = \phi(S')(\mathcal{X}')\circ i = \phi(S')(\mathcal{X}')(s). \\
\forall\ s\in S', \forall\ S' \text{ e } \mathcal{X}'\in\mathcal{F}(S').
\end{aligned}$$

Logo $\phi = \phi'$. □

Proposição 4.3. *Um par (M,ϕ) é o quociente categórico de S por G , se e somente se, $(M,\phi = \Gamma(\varphi))$ satisfaz a seguinte propriedade:*

PF) Para qualquer variedade algébrica N e qualquer transformação natural

$$\psi : \mathcal{F} \to Hom(-,M),$$

existe uma única transformação natural $\Omega : Hom(-,M) \to Hom(-,N)$*, tal que*

$$\psi = \Omega \circ \phi.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam (M,φ) o quociente categórico de S por G e (M,ϕ) tal que $\Gamma(\varphi) = \phi$. Precisamos mostrar que dado uma variedade algébrica N qualquer e uma transformação natural $\psi : \mathcal{F} \to Hom(-,N)$ existe uma única transformação natural $\Omega : Hom(-,M) \to Hom(-,N)$ fazendo o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(S') \arrow[r, "\phi(S')"] \arrow[d, "\psi(S')"'] & Hom(S',M) \arrow[dl, dotted, "!\Omega"] \\ Hom(S',N) & \end{tikzcd}$$

Observe que $\psi(S)(\mathcal{X}) \in Hom(S,M)$ é um morfismo constante nas órbitas. De fato, para todo $s \in S$ e todo $g \in G$, temos

$$\psi(S)(\mathcal{X})(s) = \psi(\mathcal{X}_s) = \psi(\mathcal{X}_{gs}) = \psi(S)(\mathcal{X})(gs).$$

Dada a variedade S', definimos $\Omega(S') : Hom(S',M) \longrightarrow Hom(S',N)$ por $\Omega(S')(\alpha) = f \circ \alpha$, onde f é o único morfismo de M para N fazendo o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi(S)(\mathcal{X})"] \arrow[d, "\psi(S)(\mathcal{X})"'] & M \arrow[dl, dotted, "f"] \\ N & \end{tikzcd}$$

A existência da f segue do fato de que $\varphi = \phi(S)(\mathcal{X})$ é um quociente categórico. Vamos mostrar que Ω é uma transformação natural. Para isso, considere o morfismo $\beta : S'' \to S'$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(S',M) \arrow[r, "\Omega(S')"] \arrow[d, "Hom(\beta,M)"'] & Hom(S',N) \arrow[d, "Hom(\beta,N)"] \\ Hom(S'',M) \arrow[r, "\Omega(S'')"] & Hom(S'',N) \end{tikzcd}$$

Seja $\alpha \in Hom(S',M)$. Então

$$(Hom(\beta,N) \circ \Omega(S'))(\alpha) = Hom(\beta,N)(\Omega(S')(\alpha)) = Hom(\beta,N)(f \circ \alpha) = (f \circ \alpha) \circ \beta.$$

Por outro lado

$$(\Omega(S'') \circ Hom(\beta,M))(\alpha) = \Omega(S'')(Hom(\beta,M))(\alpha) = \Omega(S'')(\alpha \circ \beta) = f \circ \alpha \circ \beta.$$

Portanto Ω é uma transformação natural. Vamos agora mostrar que $\Omega \circ \phi = \psi$. Dados S' variedade algébrica, $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(S')$ e $s' \in S'$, sejam $U \subseteq S'$ e $\varphi_U : U \to S$, dados pela propriedade universal local de $\mathcal{X}$. Considerando os mapas de inclusão abaixo

$$\begin{tikzcd}
\{pt\} \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "i"] \arrow[rr, bend right, "k"'] & s' \arrow[r, hook] & U \arrow[r, hook, "j"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_U"'] & S' & S
\end{tikzcd}$$

temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(S) \arrow[r, "\phi(S)"] \arrow[d, "\varphi_U^*"'] & Hom(S,M) \arrow[d, "Hom(\varphi_U{,}M)"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi(U)"] \arrow[dd, bend right, "k^*"'] & Hom(U,M) \arrow[dd, bend left, "Hom(k{,}M)"] \\
\mathcal{F}(S') \arrow[r, "\phi(S')"] \arrow[u, "j^*"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(S',M) \arrow[u, "Hom(j{,}M)"'] \arrow[d, "Hom(i{,}M)"'] \\
\mathcal{F}(pt) \arrow[r, "\phi(pt)"] & Hom(pt,M)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\Omega(S')\circ\phi(S')(\mathcal{X})(s') = {} & \Omega(S')\circ\phi(S')(\mathcal{X}')\circ i(pt) = \Omega(S')\circ\phi(S')(\mathcal{X}')\circ i \\
= {} & \Omega(S')\circ\phi(pt)(i^*\mathcal{X}') = \Omega(S')\circ\phi(pt)(k^*\circ j^*\mathcal{X}') \\
= {} & \Omega(S')\circ\phi(U)(j^*(\mathcal{X}'))\circ k = \Omega(S')\circ\phi(U)(\mathcal{X}'|_U)\circ k \\
= {} & \Omega(S')\circ\phi(U)(\varphi_U^*)\mathcal{X}\circ k = \Omega(S')\circ\phi(S)\mathcal{X}\circ\varphi_U\circ k \\
= {} & \Omega(S')\circ\phi|_U\circ k = f\circ\phi|_U\circ k = \psi(S)(\mathcal{X})\circ\varphi_U(s')
\end{aligned} \tag{3}$$

Agora pelo diagrama abaixo temos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(S) \arrow[r, "\psi(S)"] \arrow[d, "\varphi_U^*"'] & Hom(S,N) \arrow[d, "Hom(\varphi_U{,}N)"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi(U)"] \arrow[dd, bend right, "k^*"'] & Hom(U,N) \arrow[dd, bend left, "Hom(k{,}N)"] \\
\mathcal{F}(S') \arrow[r, "\psi(S')"] \arrow[u, "j^*"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(S',N) \arrow[u, "Hom(j{,}N)"'] \arrow[d, "Hom(i{,}N)"'] \\
\mathcal{F}(pt) \arrow[r, "\psi(pt)"] & Hom(pt,N)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\psi(S')(\mathcal{X}')(s') = {} & \psi(S')\mathcal{X}'\circ i = \psi(pt)\circ i^*(\mathcal{X}') \\
= {} & \psi(pt)\circ k^*\circ j^*(\mathcal{X}') = \psi(pt)\circ k^*\mathcal{X}'|_U \\
= {} & \psi(pt)\circ k^*\varphi_U^*\mathcal{X} = \psi(pt)\circ k^*\circ\varphi_U^*\mathcal{X} \\
= {} & (\psi(S)\mathcal{X})\circ\varphi_U\circ k = \psi(S)(\mathcal{X})\circ\varphi_U(s')
\end{aligned} \tag{4}$$

Das equações 3 e 4 temos $\psi(S')(\mathcal{X}) = \psi(S)(\mathcal{X})\circ\phi_U$. E o resultado segue.

Finalmente vamos provar que Ω é única. Sejam Ω e Ω' tais que $\Omega\circ\phi=\psi=\Omega'\circ\phi$ e seja $\varphi: S\to M$ o quociente categórico de S por G. Do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\phi(M)"] \arrow[d, "\psi(M)"'] & Hom(M,M) \arrow[rr, "Hom(\varphi,M)"] \arrow[dl, "\Omega'(M)"'] & & Hom(S,M) \arrow[dl, "\Omega'(S)"'] \\
Hom(M,N) \arrow[rr, "Hom(\varphi,N)"] & & Hom(S,N) &
\end{tikzcd}$$

temos

$$\Omega'(M)(1_M)\circ\varphi=\Omega'(M)(1_M)\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\Omega'(S)\circ Hom(\varphi,M)(1_M)=$$
$$\Omega'(S)(1_M\circ\varphi)=\Omega'(S)(\varphi)=\Omega'(S)\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\psi(S)(\mathcal{X}).$$

Como f é o único morfismo tal que $f\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\psi(S)(\mathcal{X})$ segue que $\Omega'(M)(1_M)=f$. Dada $\alpha: S'\to M$, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\phi(M)"] \arrow[d, "\psi(M)"'] & Hom(M,M) \arrow[rr, "Hom(\alpha,M)"] \arrow[dl, "\Omega'(M)"'] & & Hom(S',M) \arrow[dl, "\Omega'(S')"'] \\
Hom(M,N) \arrow[rr, "Hom(\alpha,N)"] & & Hom(S',N) &
\end{tikzcd}$$

Então

$$\Omega'(S')(1_M)(\alpha)=\Omega'(S')(1_M\circ\alpha)=\Omega'(S')\circ Hom(\alpha,M)(1_M)=Hom(\alpha,N)\circ\Omega'(M)(1_M)=$$
$$Hom(\alpha,N)(f)=f\circ\alpha=\Omega(S')(\alpha).$$

$\Leftarrow$) Seja (M,φ) tal que $\varphi=\Gamma^{-1}(\phi)$, isto é, $\varphi=\phi(S)(\mathcal{X})$. Devemos mostrar que $\varphi: S\to M$ é o quociente categórico de S por G. Já vimos que φ é constante nas órbitas, então resta mostrar que dada $\psi: S\to N$ constante nas órbitas existe uma única $f: M\to N$ tal que $f\circ\varphi=\psi$. Seja $\Psi:\mathcal{F}\to Hom(-,N)$ tal que $\Psi=\Gamma(\psi)$. Então existe uma única transformação natural

$$\Omega: Hom(-,M)\to Hom(-,N)$$

tal que $\Omega\circ\phi=\psi$. Seja $f=\Omega(M)(1_M): M\to N$, vamos mostrar que $f\circ\varphi=\psi$. De fato,

$$f\circ\varphi=f\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\Omega(M)(1_M)\circ\phi(S)(\mathcal{X})=\Psi(S)(\mathcal{X})=\psi.$$

Para a unicidade unicidade de f, suponha que existam f e f' tais que $f'\circ\varphi=\psi=f\circ\varphi$. Então f' define uma transformação natural

$$\Omega'(S'): Hom(S',M)\to Hom(S',N)$$

com $\Omega'(S')(\alpha)=f'\circ\alpha\ \forall\ \alpha\in Hom(S',M)$. Por um mesmo argumento usado na construção de

Ω mostra-se que $\Omega'(S')\phi(S') = \psi(S')$, então $\Omega'(S') = \Omega(S')$. Logo

$$\Omega'(M) = \Omega(M)\ ,\ \ \Omega'(M)(1_M) = \Omega(M)(1_M)$$

e portanto $f' = f$. □

Proposição 4.4. *Um par (M,ϕ) satisfazendo a propriedade $PF)$ é tal que*

$$\phi(pt) : \mathcal{F}(pt) \to Hom(pt, M)$$

é uma bijeção, se e somente se, o quociente categórico $(M,\Gamma^{-1}(\phi))$ é um espaço de órbitas.

Demonstração. Seja um par (M,ϕ) satisfazendo a propriedade $PF)$ e tal que $\phi(pt)$ é bijeção.

Seja $\varphi = \phi(S)(\mathcal{X}) : S \to M$. Então, pela Proposição, 4.3 (M,φ) é o quociente categórico de S por G. Além disso, $\forall\ s,t\ \in S$ temos

$$\varphi(s) = \varphi(t) \Leftrightarrow \phi(S)(\mathcal{X})(s) = \phi(S)(\mathcal{X})(t) \Leftrightarrow \phi(pt)(\mathcal{X}_s) = \phi(pt)(\mathcal{X}_t).$$

Como $\phi(pt)$ é bijeção, $\mathcal{X}_s \sim \mathcal{X}_t$ e portanto $s = gt$, isto é, s e t estão na mesma órbitas.

Reciprocamente, se (M,φ) é um espaço de órbita, então $\phi(pt)$ é bijeção. De fato, se $\phi(pt)(\mathcal{X}_s) = \phi(pt)(\mathcal{X}_t)$, então

$$\varphi(s) = \phi(S)(\mathcal{X})(s) = \phi(pt)(\mathcal{X}_s) = \phi(pt)(\mathcal{X}_t) = \phi(S)(\mathcal{X})(t) = \varphi(t),$$

$s = gt$(φ é um espaço de órbitas) e $\mathcal{X}_s \sim \mathcal{X}_t$, ou seja, $\phi(pt)$ é injetiva. Para a sobrejetividade usamos o fato que (M,φ) é um espaço de órbitas, portanto sobrejetiva, e que se $m = \phi(s)$ então

$$\phi(pt)(\mathcal{X}_s) = \phi(pt) \circ i^*(\mathcal{X}) = Hom(i,M) \circ \phi(S)(X) = \phi(S)(X)(i(pt)) = \varphi(s) = m.$$

□

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 4.1

Demonstração. Demonstração do Teorema 4.1

Para a demonstração do item 1), observe que um espaço de moduli grosso para um problema de moduli dado é uma variedade algébrica M junto com uma transformação natural

$$\phi : \mathcal{F} \to Hom(-,M)$$

satisfazendo (MG1) e (MG2).(Então, (M,ϕ) satisfaz a propriedade $PF)$. Logo, $(M,\varphi = \Gamma^{-1}(\phi))$ é quociente categórico de S por G pela Proposição 4.3.

Para a demonstração do item 2) observe que se o par (M,φ) quociente categórico de S por G, é um espaço de moduli grosso, então $(M,\Gamma(\varphi))$ satisfaz a propriedade $PF)$ e $\phi(pt)$ é bijeção. Logo (M,φ) é um espaço de órbitas. (Proposição 4.4)

Reciprocamente, um espaço de órbitas (M,φ) é tal que

1) (M,φ) é um quociente categórico;

2) $(M,\phi=\Gamma(\varphi))$ satisfaz a propriedade $PF)$ (Proposição 4.3)

3) e M é um espaço de órbitas.

Então, pela Proposição 4.4, $\phi(pt)$ é bijeção e, portanto, (M,ϕ) é um espaço de moduli grosso.

$\square$

4.2 Moduli das hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$

O objetivo dessa seção é aplicar os resultados da seção anterior na construção do espaço de moduli das hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$.

Definição 4.7. Uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$ é um elemento do espaço projetivo associado ao espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau d nas variáveis $X_0,\dots,X_n$, isto é, uma hipersuperfície de grau d é dada por um polinômio

$$F(X_o,\dots,X_n)=\sum_{i_0+\ldots+i_n=d} c_{i_0,\ldots,i_n}X_0^{i_0}\ldots X_n^{i_n},$$

módulo multiplicação por um escalar não nulo.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$. Existem pelo menos duas relações de equivalência em $\mathcal{A}$:

(a) a igualdade (=);

(b) a relação $\sim$, dada pela ação natural de $PGL(n+1)$ em $\mathbb{P}^n$:

$$\mathcal{Z}(F_1)=H_1\sim H_2=\mathcal{Z}(F_2)\Leftrightarrow \exists\, A\in PGL(n+1);\ H_2=AH_1,$$

onde $AH_1:=\{A(x_0:\ldots:x_n)\in\mathbb{P}^n,\ \forall\ (x_0:\ldots:x_n)\in H_1\}$

Consideraremos simultaneamente essas duas relações.

Faremos agora a definição de família de hipersuperfícies parametrizadas por uma variedade S.

Definição 4.8. Seja S uma variedade algébrica. Uma família de hipersuperfícies de grau d parametrizadas por S é um fibrado vetorial de posto 1 sobre S e um conjunto indexado de seções de L,

$$c = \{c_{i_0 \dots i_n};\ i_j \ \text{é inteiro} \ \geq 0 \text{ e } \ i_0 + \ldots + i_n = d\}$$

tal que para todo $s \in S$ o polinômio

$$f_{c,s}(X_0, \ldots X_n) = \sum_{i_0 + \ldots + i_n = d} c^{i}_{i_0,\ldots,i_n}(s) X_0^{i_0} \ldots X_n^{i_n} \tag{5}$$

é não nulo. Denotaremos uma família por (L, c).

Observação 4.2. Na Definição 4.8, para um dado s o polinômio dado em 5 depende da trivialização local de L, mas ele é determinado a menos de um escalar não nulo.

Observação 4.3. Quando $S = \{pt\}$, uma família (L, c) é a hipersuperfície de grau d definida pelo polinômio $f_{c,pt}$.

As duas relações de equivalência em $\mathcal{A}$ podem ser estendidas para famílias. Para isso, note que, fixado um fibrado em linha L sobre S, existe uma ação natural de $GL(n+1)$ no conjunto $\mathcal{C}$ de todas as coleções de seções sobre L da forma

$$c = \{c_{i_0 \dots i_n};\ i_j \ \text{é inteiro} \ \geq 0 \text{ e } \ i_0 + \ldots + i_n = d\}.$$

De fato, dada uma família (L, c) parametrizada por S, a coleção c define um polinômio

$$f_c(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i_0 + \ldots + i_n = d} c^{i}_{i_0,\ldots,i_n} X_0^{i_0} \ldots X_n^{i_n},$$

cujos coeficientes são elementos de $\mathcal{C}$.

Dado $A \in GL(n+1)$, seja

$$A f_c(X_0, \ldots X_n) := f_c(A(X_0, \ldots, X_n)) = \sum_{i_0 + \ldots + i_n = d} b^{i}_{i_0,\ldots,i_n} X_0^{i_0} \ldots X_n^{i_n}.$$

Defina

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & GL(n+1) \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ & (A, c) & \mapsto & Ac := b \end{array} \tag{6}$$

onde a b é a coleção de coeficientes de $A f_c$. É fácil verificar que ϕ é uma ação.

Definição 4.9. Duas famílias (L, c), (L', c') parametrizadas por S são:

1) isomorfas se existe um isomorfismo de fibrados $h : L \to L'$ tal que $h(c_{i_0 \dots i_n}) = c'_{i_0 \dots i_n}$, onde $c = \{(c_{i_0 \dots i_n})\}$ e $c' = \{(c'_{i_0 \dots i_n})\}$

2) equivalentes se existe $A \in GL(n+1)$ tal que (L,c) é isomorfo a (L',Ac').

Para famílias parametrizada por $\{pt\}$, as relações 1) e 2) correspondem às relações de equivalência = e $\sim$ respectivamente.

De fato, dadas duas famílias (L,c) e (L',c') parametrizadas pelo $\{pt\}$ e isomorfas, a condição de $h(c_{i_0\dots i_n}) = c'_{i_0\dots i_n}$ implica $\lambda(s)c_{i_0\dots i_n}(pt) = c'_{i_0\dots i_n}(pt)$ com $\lambda(s) \neq 0$. Logo c e c' definem a mesma hipersuperfície em $\mathbb{P}^n$

Analogamente duas famílias (L,c) e (L',c') parametrizadas por $\{pt\}$ e equivalentes, a condição (L,c) isomorfa a (L',Ac') implica $\lambda c_{i_0\dots i_n}(pt) = A(c'_{i_0\dots i_n})(pt)$ com $\lambda(s) \neq 0$ e

$$Af_{c'}(X_0,\dots,X_n) := f_{c'}(X_0,\dots,X_n) = \lambda f_c(X_0,\dots X_n)$$

. Logo, as hipersuperfícies definidas por c e c' diferem por uma mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^n$, isto é, $f_c \sim f_{c'}$.

O próximo passo é definir família induzida.

Definição 4.10. Sejam (L,c) uma família parametrizada por S e $\varphi : S' \to S$ um morfismo de variedades algébricas. Definimos a família $\varphi^*(L,c)$, parametrizada por S', por:

$$\varphi^*(L,c) = (\varphi^*L, \varphi^*c)$$

onde $\varphi^*c = \{\varphi^*c_{i_0\dots i_n}\}$.

Observação 4.4. Por definição, φ^* satisfaz as propriedades funtoriais necessárias para a noção de famílias.

Vamos agora exibir uma variedade algébrica S que está em bijeção com $\mathcal{A}/\sim$ e uma família sobre S com a propriedade universal local, quando a relação de equivalência entre as hipersuperfícies de grau d for $\sim$.

Segue da definição de hipersuperfície que $\mathcal{A}/\sim$ está em bijeção com $\mathbb{P}^{N-1}$, onde $N = \binom{n+d}{d}$.

Considere sobre $S = \mathbb{P}^{N-1}$ a famíla $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1), X)$, onde

$$X = \{X_{i_0\dots i_n};\ i_j \text{ é inteiro } \geq 0 \text{ e } i_0 + \dots + i_n = d\}$$

e $X_{i_0\dots i_n}$ são as funções coordenadas de $\mathbb{P}^{N-1}$.

Mostraremos que $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1), X)$ tem a propriedade universal local para S.

Sejam S' uma variedade algébrica e (L',c') uma família parametrizada por S'. Dado $s \in S'$, seja $U \subset S'$ aberto trivializante de L' tal que $c'_{i_0\dots i_n}(s) \neq 0$, para algum conjunto de inteiros

$i_0, \ldots, i_n$ tais que $i_0 + \ldots + i_n = d$. Então, o morfismo

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_U: & U & \rightarrow & \mathbb{P}^{N-1} \\ & s & \mapsto & (c'_{d\ldots 0}(s) : \ldots : c'_{i_0 \ldots i_n}(s) : \ldots : c'_{0\ldots d}(s)) \end{array}$$

é tal que $\varphi_U^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1), X) \sim (L', c')$.

Além disso, a ação de $PGL(n+1)$ em $\mathbb{P}^n$ induz uma ação em $\mathbb{P}^{N-1}$ que nada mais é que a ação definida em 6. Logo, $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1), X)_s \sim (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1), X)_t$, para todo $s, t \in \mathbb{P}^{N-1}$, se e somente se, $t = As$ para algum $A \in PGL(n+1)$. Portanto, pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{P}^{N-1}/PGL(n+1)$ é um espaço de moduli grosso para $\mathcal{A}/\sim$.

Observação 4.5. Quando a relação de equivalência em $\mathcal{A}$ for a igualdade, a família $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1), X)$, terá a propriedade universal sobre $\mathbb{P}^{N-1}$ (os morfismos φ_U e $\varphi_{U'}$ coincidirão em $U \cap U'$) e $\mathbb{P}^{N-1}$ será um espaço de moduli fino para $\mathcal{A}/=$.

5 O espaço de Moduli das configurações de Desargues

O principal objetivo deste capítulo é encontrar os espaços de moduli das configurações de Desargues. E denotaremos por $\overline{PQ}$ a reta determinada pelos pontos P e Q e por $\overline{PQR}$ o plano determinado pelos pontos P, Q e R.

Definição 5.1. Dizemos que dois triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ estão em perspectiva se as retas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ são concorrentes. O ponto de interseção dessas retas é dito centro de perspectiva.

Teorema 5.1 (Desargues)**.** *Se dois triângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ estão em perspectiva a partir de um ponto X, então os três pares de lados correspondentes dos triângulos se intersectam em três pontos colineares. Reciprocamente, se os lados dos dois triângulos se intersectam em três pontos colineares, então os triângulos estão em perspectiva. (TODD, 1952).*

Observação 5.1. Sejam $A_i = (a_{i0} : a_{i1} : a_{i2})$, $i = 1,2,3$, três pontos distintos de $\mathbb{P}^2$. Consideremos os vetores $a_i = (a_{i0}, a_{i1}, a_{12})$ de $\mathbb{A}^3$. Como A_i e A_j são pontos distintos, $i \neq j$, segue que a_i e a_j são vetores linearmente independentes. Além disso, se A_1, A_2 e A_3 são pontos colineares, então a_1, a_2 e a_3 são vetores linearmente dependentes. Portanto, neste caso, existem constantes $\lambda_1,\ \lambda_2 \in k^*$, tais que $a_3 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Como os $a_i's$ são representantes dos pontos $A_i's$ podemos trocar estes representantes para obter a relação $a_3 = a_1 - a_2$.

Apresentaremos duas provas do teorema de Desargues, a primeira é mais algébrica e supõe os dois triângulos no plano projetivo, a segunda uma prova alternativa, puramente sintética e não requeremos que os triângulos estejam no plano.

Demonstração. Suponhamos que:

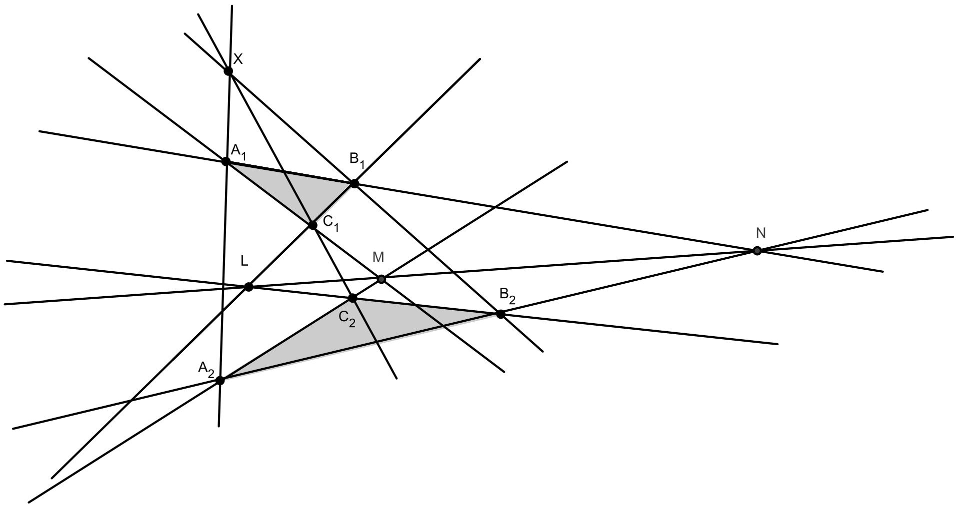
1) Os pontos $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, X$ são todos distintos;

2) Os triângulos são não degenerados e não possuem lados em comum;

3) As retas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ são todas distintas.

Uma vez que A_1, A_2 e X são três pontos colineares distintos, pela Observação 5.1, podemos escolher representantes a_1, a_2, e x respectivamente, tais que

Figura 1: Configuração de Desargues.



Fonte: Retirado de Avritzer e Lange (2002)

$$x = a_1 - a_2 \tag{7}$$

Da mesma maneira existem b_1, b_2, c_1 e c_2 que representam B_1, B_2, C_1 e C_2 tais que

$$x = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 \tag{8}$$

Destas equações definimos os vetores

$$\begin{aligned} b_1 - c_1 &= b_2 - c_2 =: l \\ c_1 - a_1 &= c_2 - a_2 =: m \\ a_1 - b_1 &= a_2 - b_2 =: n \end{aligned} \tag{9}$$

Como B_1 e C_1 são distintos, segue que o vetor l é não nulo e portanto determina um ponto $L \in \mathbb{P}^2$. Das relações 9, vemos que l, b_1 e c_1 são linearmente dependentes, portanto L, B_1 e C_1 são colineares. Da mesma forma, mostra-se que C_2, B_2, L são colineares. Similarmente os vetores m e n determinam, respectivamente, dois pontos M e N em $\mathbb{P}^2$ tais que M está sobre as retas $\overline{C_1A_1}$ e $\overline{C_2A_2}$ e N está sobre as retas $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$. Além disso, os pontos L, M, N são distintos. De fato, suponhamos por simplicidade que M e N são iguais, então os vetores $c_1 - a_1$, $a_1 - b_1$ serão linearmente dependentes e consequentemente A_1, B_1 e C_1 serão linearmente dependentes. O que implica que os pontos A_1, B_1 e C_1 serão colineares contrariando a hipótese. Somando-se os três termos da esquerda das relações 9 temos que:

$$l + m + n = 0. \tag{10}$$

Assim, os vetores l, m, n são linearmente dependentes, ou seja, os pontos L, M e N são colineares. A reta determinada por $L,\ M$ e N é chamada de *eixo de perspectiva* dos dois triângulos.

Reciprocamente, suponhamos que $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são dois triângulos tais que os pontos L, M e N são colineares, onde L é a interseção das retas $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{B_2C_2}$, M é a interseção das retas $\overline{C_1A_1}$ e $\overline{C_2A_2}$ e N é a interseção das retas $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$.

Provemos que os triângulos estão em perspectiva com as seguintes hipóteses:

(a) $A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2,L,M,N$ são todos distintos;

(b) Que os triângulos não são degenerados.

Sejam $l,\ m$ e n vetores representantes dos pontos $L,\ M$ e N. Uma vez que $L,\ M$ e N são colineares, os vetores $l,\ m$ e n são linearmente dependentes e portanto satisfazem a relação (10). Como $L,\ B_1$ e C_1, $M,\ C_1$ e A_1 e A_1,B_1 e N são três ternos de pontos colineares, pela Observação 5.1, podemos escolher representantes $a_1,\ b_1$ e c_1 dos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} l &= b_1 - a_1 \\ m &= a_1 - c_1 \\ n &= c_1 - b_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Similarmente, podemos escolher representantes a_2,b_2 e c_2 de A_2,B_2,C_2, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} l &= b_2 - a_2 \\ m &= a_2 - c_2 \\ n &= c_2 - b_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Das equações (11) e (12) segue que

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = x. \tag{13}$$

O vetor x é não nulo, uma vez que A_1 e A_2 são pontos distintos. Seja $X \in \mathbb{P}^2$ o ponto determinado por x. Das relações em (13), segue que X pertence as retas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$. Assim os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ estão em perspectiva a partir do ponto X. □

Demonstração sintética do Teorema de Desargues. Neste caso omitiremos o caso da reciproca do teorema.

Novamente suponhamos que:

1) Os pontos $A_1,\ B_1,\ C_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2$ e X são todos distintos;

2) Os triângulos são não degenerados e não possuem lados em comum;

3) As retas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ são todas distintas.

Sejam π_1 e π_2 os planos dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$. Vamos dividir em dois casos:

Caso 1) $\pi_1 \neq \pi_2$.

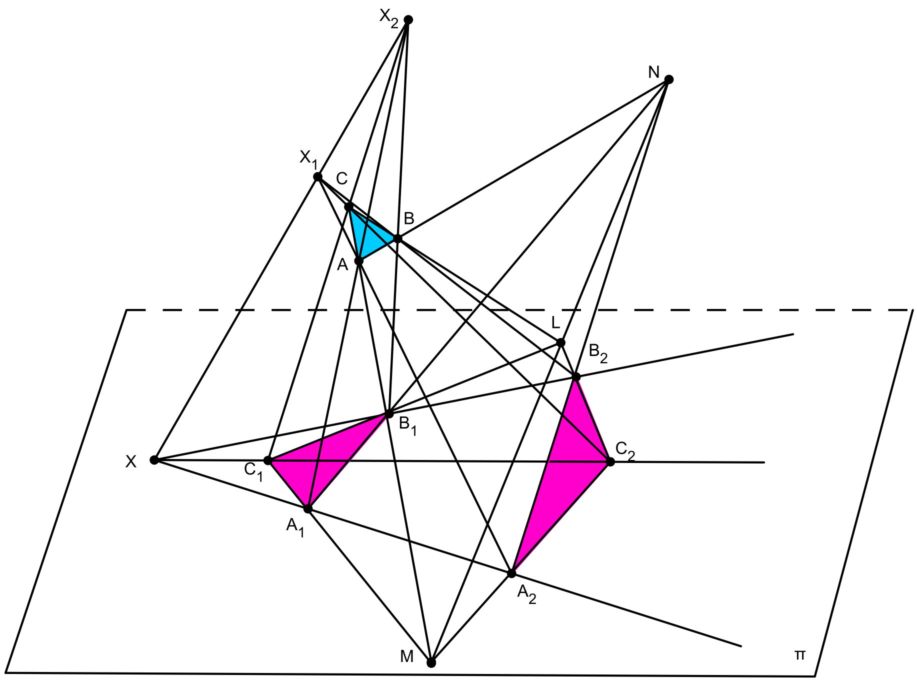
Seja l a reta de interseção de π_1 e π_2. As retas $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{B_2C_2}$ se interceptam, pois pertencem ao plano que contém as retas $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$. Denotemos por L tal ponto de interseção. Uma vez que $\overline{B_1C_1}$ está contida no plano π_1 e $\overline{B_2C_2}$ está contida no plano π_2, o ponto L pertence a π_1 e π_2 e assim pertence a reta l. De maneira análoga, os pares de retas dos lados correspondentes $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$ e $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2C_2}$ se interceptam. Denotaremos tais pontos interseções por M e N, respectivamente. Observemos ainda que $M,N \in l$. Assim $L,\ M,\ N$ estão em uma mesma reta l, ou seja, são colineares.

Caso 2) Suponhamos agora os planos $\pi_1 = \pi_2 =: \pi$.

Como os dois triângulos estão no plano π, então as retas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ também estão contidas em π e portanto o ponto X de interseção delas, que é o centro de perspectiva, também pertence a π. Escolhamos uma reta l passando por X mas que não está contida em π. Escolhamos dois pontos diferentes X_1 e X_2 em l, ambos diferentes de X. As retas $\overline{X_1A_2}$ e $\overline{X_2A_1}$ estão sobre o plano que contém as retas $\overline{X_1X_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e assim encontram em um ponto A. Analogamente, as retas $\overline{X_1B_2}$ e $\overline{X_2B_1}$ se interceptam em um ponto B e as retas $\overline{X_1C_2}$ e $\overline{X_2C_1}$ se interceptam em um ponto C. Já que A_1, A_2, X, X_1 e X_2 são pontos distintos e $X_1, X_2 \notin \pi$, segue que $A \notin \pi$ e é diferente de X_1 e X_2. De maneira análoga $B,\ C \notin \pi$ e são distintos de X_1 e X_2. Como os pontos A_1, B_1 e C_1 não são colineares e $X_2 \notin \pi$, os pontos $A,\ B$ e C são distintos e não são colineares, ou seja ABC é um triângulo não degenerado que está sobre um plano π' diferente de π. Observemos ainda que o triângulo ABC está em perspectiva com o triângulo $A_1B_1C_1$, tendo X_2 como centro de perspectiva e com o triângulo $A_2B_2C_2$, tendo X_1 como centro de perspectiva. O eixo de perspectiva de cada um desses pares de triângulos, pelo caso já demonstrado do teorema de Desargues, é a reta l' de interseção dos planos π e π'. Assim os pontos $\overline{BC} \cap \overline{B_1C_1}$ e $\overline{BC} \cap \overline{B_2C_2}$ estão sobre l'. Uma vez que B e C não estão em π, esses dois pontos coincidem com a interseção da reta $\overline{BC}$ e π. Assim o ponto $L = \overline{B_1C_1} \cap \overline{B_2C_2}$ está sobre l'. Similarmente $M = \overline{C_1A_1} \cap \overline{C_2A_2}$ e $N = \overline{A_1B_1} \cap \overline{A_2B_2}$ estão sobre l'. Portanto L, M, N são colineares.

$\square$

Figura 2: Configuração de Desargues no espaço.



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Definição 5.2. Sejam $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ dois triângulos no plano projetivo em perspectiva, A o centro de perspectiva e a o eixo de perspectiva dos dois triângulos. Denotemos por A_3, B_3 e C_3 os pontos de interseção dos correspondentes lados dos triângulos dados. A configuração consistindo dos 10 pontos A, A_i, B_i, C_i, $i = 1,2,3$, e das 10 retas $\overline{A_iB_i}$, $\overline{A_iC_i}$, $\overline{B_iC_i}$, $i = 1,2$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ e a é dita uma configuração de Desargues. Esta configuração é chamada 10_3, significando que cada uma das 10 retas contém exatamente 3 dos 10 pontos e por cada ponto passam exatamente 3 das 10 retas.

Definição 5.3. Duas configurações de Desargues D_1 e D_2 são ditas isomorfas se existe um automorfismo $\alpha \in PGL_2(\mathbb{C})$ tal que $\alpha(D_1) = D_2$, isto é, α é uma mudança de coordenadas de $\mathbb{P}^2$ tal que a imagem dos pontos (e das retas) de D_1 são pontos (e retas) de D_2. Além disso, se $P, Q \in D_1$ e $\overline{PQ} \in D_1$, então $\alpha(\overline{PQ}) = \overline{\alpha(P)\alpha(Q)}$.

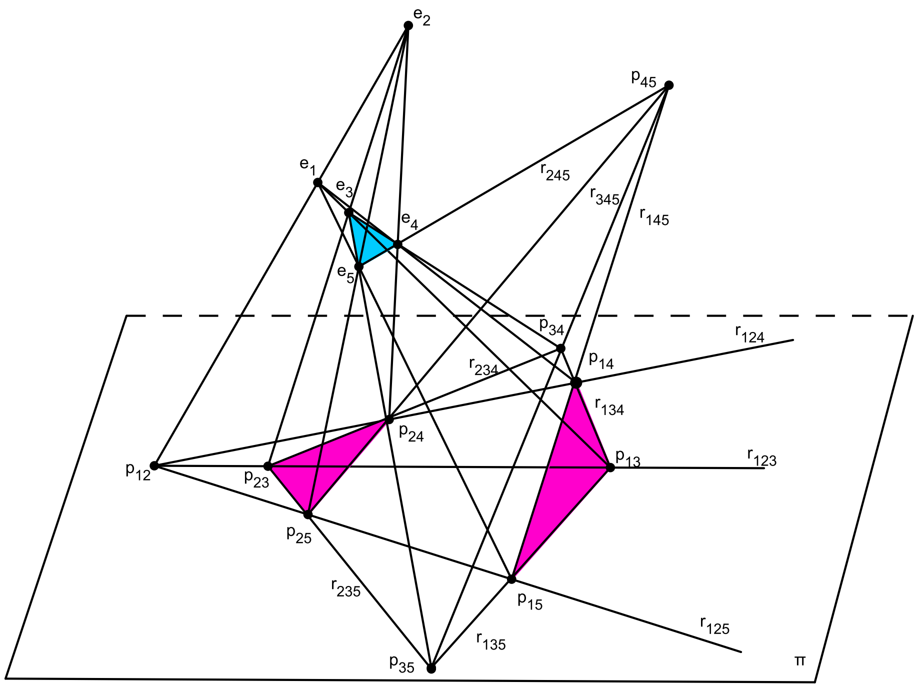
Veremos a seguir que 5 pontos em $\mathbb{P}^3$ em posição geral, determinam em um plano π não contendo nenhum destes pontos em configuração de Desargues.

Sejam e_1, e_2, e_3, e_4 e $e_5 \in \mathbb{P}^3$ pontos em posição geral, isto é, quaisquer 4 destes pontos tem representantes que são vetores linearmente independentes. Escolhendo um sistema de coordenadas conveniente podemos supor que

$$e_1 = (1:0:0:0),\ e_2 = (0:1:0:0),\ e_3 = (0:0:1:0),$$
$$e_4 = (0:0:0:1),\ e_5 = (1:1:1:1). \tag{14}$$

Seja π um plano que não contém os pontos e_i's. Suponhamos que π é dado pela equação $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i = 0$, então $\alpha_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, 4$ e $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \neq 0$. Denotamos por D_π a configuração determinada por π. Ela consiste dos 10 pontos $p_{ij} = \overline{e_i e_j} \cap \pi$ e das 10 retas, $r_{ijk} = \overline{e_i e_j e_k} \cap \pi$ para $i \leq i, j, k \leq 5$ $i \neq j \neq k \neq i$. Observemos que esta notação é simétrica, isto é, $p_{ij} = p_{ji}$, $r_{ijk} = r_{ikj}$ e etc. Pela Figura 3 concluímos que todo ponto da configuração de Desargues é centro de perspectiva de dois triângulos, por exemplo, o ponto p_{ij} é centro de perspectiva dos triângulos $p_{ik}p_{il}p_{im}$ e $p_{jk}p_{jl}p_{jm}$ onde $\{i, j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Em particular todo ponto da configuração admite um eixo de perspectiva, no caso do ponto p_{ij} a reta é r_{klm}.

Figura 3: Configuração de Desargues no espaço.



Fonte: Adaptado de Avritzer e Lange (2002)

Na Figura 3 mostramos as 10 retas e os 10 pontos determinados por 5 pontos e_1, e_2, e_3, e_4 e e_5 em posição geral em $\mathbb{P}^3$ e um plano π que não contem nenhum dos pontos e_i, formando uma Configuração de Desargues.

Reciprocamente, vimos na demonstração sintética do Teorema de Desargues caso 2), que toda configuração de Desargues é obtida desse modo. Mas precisamente e_1, e_2, e_3, e_4 e e_5 são os pontos $X_1,\ X_2,\ A,\ B$ e C, respectivamente, e $\pi = \pi_1$.

A partir de agora, pensaremos em uma configuração de Desargues dadas por 5 pontos em posição geral em $\mathbb{P}^3$ e um plano π não contendo os 5 pontos. Para definirmos configurações isomorfas precisaremos das seguintes definições.

Definição 5.4. Uma quadrângulo completo consiste de 4 pontos P, Q, R e S, três a três não colineares, e as 6 retas $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, $\overline{QS}$ e $\overline{RS}$.

Definição 5.5. Um quadrângulo completo de uma configuração de Desargues D é um conjunto de 4 pontos e 6 retas de D os quais formam pontos e retas de um quadrângulo completo.

Baseando-se na Figura 3 é fácil ver que uma configuração de Desargues D_π admite exatamente 5 quadrângulos completos. De fato, cada e_i determina um quadrângulo completo consistindo dos pontos $p_{ij},\ p_{ik},\ p_{il}$ e p_{im} e das retas $r_{ijk},\ r_{ijl},\ r_{ijm},\ r_{ikl},\ r_{ikm}$ e r_{ilm}.

Lema 5.2. *Sejam $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ duas coleções de pontos de $\mathbb{P}^3$ em posição geral. Então existe uma única mudança de coordenadas $T : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, tal que $T(v_i) = w_i$* $1 \leq i \leq 5$.

Demonstração. Sejam v_i' e w_i' vetores de $\mathbb{C}^4$ que representam os pontos v_i e w_i, $1 \leq i \leq 5$, respectivamente. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$\begin{aligned} v_5' &= \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2' + \alpha_3 v_3' + \alpha_4 v_4'; \\ w_5' &= \gamma_1 w_1' + \gamma_2 w_2' + \gamma_3 w_3' + \gamma_4 w_4', \end{aligned} \tag{15}$$

onde α_i's e γ_i's são todos constantes não nulas. Além disso, como $\mathcal{C} := \{v_1', v_2', v_3', v_4'\}$ é uma base de $\mathbb{C}^4$, podemos escolher escalares tais que

$$\begin{aligned} w_1' &= \lambda_{11} v_1' + \lambda_{21} v_2' + \lambda_{31} v_3' + \lambda_{41} v_4'; \\ w_2' &= \lambda_{12} v_1' + \lambda_{22} v_2' + \lambda_{32} v_3' + \lambda_{42} v_4'; \\ w_3' &= \lambda_{13} v_1' + \lambda_{23} v_2' + \lambda_{33} v_3' + \lambda_{43} v_4'; \\ w_4' &= \lambda_{14} v_1' + \lambda_{24} v_2' + \lambda_{34} v_3' + \lambda_{44} v_4'. \end{aligned} \tag{16}$$

Observemos inicialmente que a transformação linear $T' : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{C}$ é

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\lambda_{11} & \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\lambda_{12} & \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\lambda_{13} & \frac{\gamma_4}{\alpha_4}\lambda_{14} \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\lambda_{21} & \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\lambda_{22} & \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\lambda_{23} & \frac{\gamma_4}{\alpha_4}\lambda_{24} \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\lambda_{31} & \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\lambda_{32} & \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\lambda_{33} & \frac{\gamma_4}{\alpha_4}\lambda_{34} \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\lambda_{41} & \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\lambda_{42} & \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\lambda_{43} & \frac{\gamma_4}{\alpha_4}\lambda_{44} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

é tal que $T'(v_i') = (\gamma_i/\alpha_i)\, w_i'$, $1 \leq i \leq 4$ e $T'(v_5') = w_5'$. Observemos ainda que T' é um isomorfismo.

Considere $T : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, a aplicação induzida de T', ou seja, se v' é um representante de um ponto v de $\mathbb{P}^3$, então $T(v)$ é o ponto de $\mathbb{P}^3$ cujo representante é o vetor $T'(v')$. Observemos que $T(v_i) = w_i$ para cada $1 \leq i \leq 5$.

A unicidade de T é simples de ser verificada. $\square$

Lema 5.3. *Para planos π e $\pi' \subset \mathbb{P}^3$ não contendo um ponto e_i as seguintes condições são equivalentes:*

1) D_π é isomorfo a $D_{\pi'}$;

2) Existe $A \in PGL_4(\mathbb{C})$ tal que

a) $A\pi = \pi'$

b) A permuta os 5 pontos $e_1, \ldots, e_5$.

Demonstração. (1)$\Rightarrow$ (2)
Seja $\alpha : \pi \to \pi'$ um isomorfismo linear com $\alpha(D_\pi) = D_{\pi'}$, isto é, α leva as retas de uma configuração nas em reta da outra configuração e os pontos de uma configuração nos pontos da outra. Primeiramente vamos verificar que α também leva quadrângulos em quadrângulos. Sabemos que cada quadrângulo de uma configuração D_π é unicamente determinado por e_i, o mesmo vale para os quadrângulos da configuração $D_{\pi'}$. Assim considere o quadrângulo de D_π determinado por e_1, então seus pontos são $p_{12},\ p_{13},\ p_{14}$ e p_{15} e suas retas são $r_{123},\ r_{124},\ r_{125},\ r_{134},\ r_{135}$ e r_{145}. Suponhamos que $\alpha(p_{12}) = p'_{ij}$. Se $\alpha(p_{13}) = p'_{kl}$ com $\{k,l\} \neq \{i,j\}$, então como a reta r_{123} liga os pontos p_{12} e p_{13} deveria existir uma reta r' da configuração $D_{\pi'}$ ligando os pontos p'_{ij} e p'_{kl} o que, pela definição de $D_{\pi'}$, não acontece. Logo $\alpha(p_{13}) = p'_{kl}$ com $k \in \{i,j\}$ ou $l \in \{i,j\}$. Assim as possibilidades para o ponto $\alpha(p_{13})$ são $p'_{il},\ p'_{ik},\ p'_{im},\ p'_{jl},\ p'_{jk}$ e p'_{jm}. Suponhamos que $\alpha(p_{13}) = p'_{il}$, então a reta r'_{ijl} de $D_{\pi'}$ que liga os pontos p'_{ij} e p'_{il} é a imagem da reta r_{123} de D_π por α. Seguindo o mesmo raciocínio verificamos que $\alpha(p_{14}) = p'_{ik}$ e $\alpha(p_{15}) = p'_{im}$, ou vice-versa. Observemos ainda que as retas do quadrângulo de D_π determinado por e_1 são retas do quadrângulo de $D_{\pi'}$ determinado pelo ponto e_i. Portanto α leva quadrângulo em quadrângulo. Além disso, α induz uma permutação dos 5 pontos e_i que denotaremos por σ.

Consideremos $w_1 \in \pi'$ tal que $w_1 \neq p'_{\sigma(1)\sigma(2)}$. Escolhamos $v_1 \in \pi$ tal que $v_1 = \alpha^{-1}(w_1)$. Tomemos $w_2 \in \pi'$ não pertencente à reta $\overline{w_1 p'_{\sigma(1)\sigma(2)}}$. Escolhamos $v_2 \in \pi$ tal que $v_2 = \alpha^{-1}(w_2)$. Por último tomemos $w_3 \in \pi'$ tal que w_3 não pertence às retas $\overline{w_1 w_2}$, $\overline{w_i p'_{\sigma(1)\sigma(2)}}$, para $i = 1,2$. Escolhamos $v_3 \in \pi$ tal que $v_3 = \alpha^{-1}(w_3)$.

Afirmamos que os pontos $w_1,\, w_2,\, w_3,\, e_{\sigma(1)}$ e $e_{\sigma(2)}$ estão em posição geral em $\mathbb{P}^3$. De fato, w_1, w_2, w_3 são linearmente independentes em $\mathbb{P}^3$, pois $w_3 \notin \overline{w_1 w_2}$, e como $e_{\sigma(i)} \notin \pi'$ segue que $w_1, w_2, w_3, e_{\sigma(i)}$ são linearmente independentes para $i = 1,2$. Assim só precisamos verificar que $e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, w_i, w_j$ são linearmente independentes para $1 \leq i,j \leq 3$, e $i \neq j$. Para isso basta mostrarmos que $e_{\sigma(l)}$ não pertence ao plano $\overline{e_{\sigma(k)}w_iw_j}$ para $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$, e $l,k = 1,2$, $l \neq k$ e que $w_i \notin \overline{w_je_1e_2}$ para $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$. Se $e_{\sigma(l)} \in \overline{e_{\sigma(k)}w_iw_j}$, então

$$e_{\sigma(l)} \in \overline{e_{\sigma(k)}w_iw_j} \cap \overline{e_{\sigma(l)}w_iw_j} = \overline{w_iw_j} \subseteq \pi',$$

o que é uma contradição, pois $e_{\sigma(l)} \notin \pi'$. Se $w_i \in \overline{w_je_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)}}$, então

$$w_i \in \overline{w_je_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)}} \cap \overline{w_ie_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)}} = \overline{e_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)}},$$

o que é uma contradição, pois $w_i \neq p_{\sigma(1)\sigma(2)}$, isto vale para $i, j = 1,2$. Da mesma maneira verificamos que v_1, v_2, v_3, e_1, e_2 estão em posição geral em $\mathbb{P}^3$.

Pelo Lema 5.2, existe uma aplicação $T : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ representada por uma matriz $A \in PGL_4(\mathbb{C})$ tal que

$$A(e_1) = e_{\sigma(1)}, A(e_2) = e_{\sigma(2)}, A(v_1) = w_1, A(v_2) = w_2 \text{ e } A(v_3) = w_3.$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \pi$ é linearmente independente e $\alpha(v_i) = w_i = A(v_i)$, segue que $A|_\pi = \alpha$. Além disso, $A(e_k) = e_{\sigma(k)}$ para $k = 3$, 4 e 5. De fato, como $e_k = \overline{e_1p_{1k}} \cap \overline{e_2p_{2k}}$ para $3 \leq k \leq 5$ segue que

$$A(e_k) = A(\overline{e_1p_{1k}}) \cap A(\overline{e_2p_{2k}}) = \overline{e_{\sigma(1)}p_{\sigma(1)\sigma(k)}} \cap \overline{e_{\sigma(2)}p_{\sigma(2)\sigma(k)}} = e_{\sigma(k)}.$$

$(1) \Rightarrow (2)$ Sejam $A \in PGL_4(\mathbb{C})$ tal que $A(\pi) = \pi'$ e $A(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $\forall\, i = 1, \ldots, 5$. Então

$$p_{ij} = \overline{e_ie_j} \cap \pi \Rightarrow A(p_{ij}) = A(\overline{e_ie_j}) \cap A(\pi) = \overline{e_{\sigma(i)}e_{\sigma(j)\sigma(k)}} \cap \pi' = p'_{ij},$$

$$r_{ijk} = \overline{e_ie_je_k} \cap \pi \Rightarrow A(r_{ijk}) = A(\overline{e_ie_je_k}) \cap A(\pi) = \overline{e_{\sigma(i)}e_{\sigma(j)}e_{\sigma(k)}} \cap \pi' = r'_{ijk}.$$

Logo, $\alpha = A|_\pi : \pi \to \pi'$ é tal que $\alpha(D_\pi) = D_{\pi'}$.

$\square$

Sejam $e_1, \ldots, e_5$ cinco pontos de $\mathbb{P}^3$ em posição geral e σ uma permutação destes pontos. Pelo Lema 5.2, existe uma única aplicação $T : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que $T(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Observamos que $T = \lambda T$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e que T está associada à uma matriz A, veja (17). Portanto T determina um único elemento A_σ em $PGL_4(\mathbb{C})$, a saber, A_σ é classe de equivalência de A. Seja

$$\mathcal{S}_5 := \{A_\sigma \in PGL_4(\mathbb{C}); \sigma \in S_5\}.$$

Observe que $A_{\sigma_1}A_{\sigma_2} = A_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$ e $(A_{\sigma(1)})^{-1} = A_{\sigma(1)^{-1}}$ implicam que o conjunto $\mathcal{S}_5$ é um subgrupo de $PGL_4(\mathbb{C})$ finito com 5! elementos. Além disso, sendo $\mathcal{S}_5$ conjunto finito, ele é uma variedade algébrica.

O grupo $\mathcal{S}_5$ age em $\mathbb{P}^3$ via a aplicação,

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathcal{S}_5 \times \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & (A_\sigma, a) & \longmapsto & A_\sigma(a). \end{array}$$

De fato, φ é a restrição da ação $PGL_4(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$.

A ação de $\mathcal{S}_5$ em $\mathbb{P}^3$ induz uma ação em $\check{\mathbb{P}}^3$, onde $\check{\mathbb{P}}^3$ é o dual de $\mathbb{P}^3$, da seguinte maneira.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathcal{S}_5 \times \check{\mathbb{P}}_3 & \longrightarrow & \check{\mathbb{P}}_3 \\ & (A_\sigma, \pi) & \longmapsto & A_\sigma(\pi). \end{array}$$

onde $A_\sigma(\pi)$ é o ponto de $\check{\mathbb{P}}^3$ correspondente a imagem do plano π por A_σ.

Defina

$$U := \check{\mathbb{P}}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{5} P_{e_i},$$

onde P_{e_i} denota o plano de $\check{\mathbb{P}}^3$ parametrizando os planos π's com $e_i \in \pi$.

A ação de $\mathcal{S}_5$ em $\check{\mathbb{P}}^3$ se restringe a uma ação em U. De fato, considere $\varphi_U := \varphi|_U$ e seja $\pi \in U$ e $\sigma \in S_5$. Se $A_\sigma(\pi) \in P_{e_j}$ para algum j, isto implicará que $A_\sigma(\pi)$ é um ponto em $\check{\mathbb{P}}^3$ que corresponde a um plano de $\mathbb{P}^3$ contendo e_j. Então $\pi = A_{\sigma^{-1}}(A_\sigma(\pi))$ é um ponto em $\check{\mathbb{P}}^3$ contendo $A_{\sigma^{-1}}(e_j) = e_{\sigma^{-1}(e_j)}$, o que é uma contradição pois, $e_{\sigma^{-1}(e_j)} \notin \pi$. Assim $A_\sigma(\pi) \notin P_{e_j}$ para todo $j = 1, \ldots, 5$ e portanto $\varphi_U(\pi) \in U$.

Como P_{e_i} é um plano em $\check{\mathbb{P}}^3$, supondo $e_i = (x_0^i : x_1^i : x_2^i : x_3^i)$, então $P_{e_i} = \mathcal{Z}(H_i)$ onde

$$H_i := x_0^i A_0 + x_1^i A_1 + x_2^i A_2 + x_3^i A_3,$$

onde $A_0, \ldots, A_3$ são as coordenadas homogêneas de $\check{\mathbb{P}}^3$. Portanto P_{e_i} é fechado em $\check{\mathbb{P}}^3$ e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{5} P_{e_i}$ é fechado. Assim

$$U = \check{\mathbb{P}}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{5} P_{e_i}$$

é um aberto em $\check{\mathbb{P}}^3$, ou seja, é uma variedade quase projetiva.

No Teorema 3.7 mostramos que o quociente de uma variedade algébrica quase projetiva por um grupo finito é uma variedade algébrica. Portanto $U/\mathcal{S}_5$ é uma variedade algébrica.

Mostraremos a seguir que $U/\mathcal{S}_5$ é o espaço de Moduli para as configurações de Desargues. Para isso passaremos a descrever o Problema de Moduli da configurações de Desargues.

Fixados $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ e e_5 em posição geral em $\mathbb{P}^3$, seja

$$\mathcal{A} = \{D_\pi;\ \pi \text{ plano contido em } \mathbb{P}^3 \text{ e } e_i \notin \pi\ \forall\ i = 1, \ldots, 5\}$$

o conjunto das configurações de Desargues. Considere o isomorfismo de configurações de Desargues como sendo a relação de equivalência sobre $\mathcal{A}$, isto é,

$$D_\pi \sim D_{\pi'} \Leftrightarrow \exists \ A \in \mathcal{S}_5;\ A(\pi) = \pi' \text{ e } A(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Vamos agora definir a noção de família de objetos de $\mathcal{A}$ parametrizadas por uma variedade S.

Observação 5.2. Como Configurações de Desargues são dadas por planos em $\mathbb{P}^3$, isto é, hipersuperfície de grau 1 em $\mathbb{P}^3$, a noção de família e de família induzida são as mesmas dadas na Seção 4.2. No entanto faremos novamente as definições sem usar a linguagem de fibrados vetoriais.

Definição 5.6. Sejam S uma variedade e $p : S \times \mathbb{P}^3 \to S$ a projeção na primeira coordenada. Uma família de configurações de Desargues sobre S é uma subvariedade fechada $\mathcal{X} \subseteq S \times \mathbb{P}^3$ com a seguinte propriedade:

Existe uma cobertura aberta afim $S = S_1 \cup \ldots \cup S_m$, tal que para cada i existem funções $c_0^i, c_1^i, c_2^i, c_3^i$ regulares em S_i satisfazendo

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \cap p^{-1}(S_i) = \{(s,(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in S_i \times \mathbb{P}^3;\ & c_0^i(s)x_0 + c_1^i(s)x_1 + c_2^i(s)x_2 + c_3^i(s)x_3 = 0, \\ & c_k^i(s) \neq 0,\ \forall\, k,\ e\ c_0^i(s) + c_1^i(s) + c_2^i(s) + c_3^i(s) \neq 0,\ \forall\, s \in S_i\}.\end{aligned}$$

Observação 5.3. Supondo os e_i' como em 14, as condições

$$c_k^i(s) \neq 0,\ \forall\, k,\ e\ c_0^i(s) + c_1^i(s) + c_2^i(s) + c_3^i(s) \neq 0,\ \forall\, s \in S_i,$$

implicam que e_i não pertence ao plano $c_0^i(s)x_0 + c_1^i(s)x_1 + c_2^i(s)x_2 + c_3^i(s)x_3 = 0$, condição necessária para que sobre o ponto s o plano determine uma configuração de Desargues.

Definição 5.7. (Noção de família induzida). Dados um morfismo $\varphi : S' \to S$ e uma família $\mathcal{X} \subseteq S \times \mathbb{P}^3$, definimos a família induzida $\varphi^*\mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ por φ como

$$\varphi^*\mathcal{X} = (\varphi, Id)^{-1}(\mathcal{X}) = \{(s,(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in S' \times \mathbb{P}^3; (\varphi(s),(x_0 : x_1 : x_2 : x_2)) \in \mathcal{X}\}.$$

Finalmente vamos definir a noção de equivalência entre as famílias e esta noção será induzida da ação de $\mathcal{S}_5$ em $\check{\mathbb{P}}^3$.

Definição 5.8. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ duas famílias parametrizadas por S, então

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{X}' \Leftrightarrow \exists\, A_\sigma \in \mathcal{S}_5; \mathcal{X}' = A_\sigma(\mathcal{X}),$$

onde $A_\sigma(\mathcal{X})$ é definida da seguinte maneira: Se $S = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ e

$$\mathcal{X} \cap p^{-1}(S_i) = \{(s, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in S_i \times \mathbb{P}^3;\ c_0^i(s)x_0 + c_1^i(s)x_1 + c_2^i(s)x_2 + c_3^i(s)x_3 = 0,$$
$$c_k^i(s) \neq 0,\ \forall\, k,\ e\ c_0^i(s) + c_1^i(s) + c_2^i(s) + c_3^i(s) \neq 0,\ \forall\, s \in S_i\},$$

então

$$A_\sigma(\mathcal{X}) \cap p^{-1}(S_i) = \{(s, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in S_i \times \mathbb{P}^3;$$
$$(\sum_{j=0}^{3} c_j^i(s)a_{j0})x_0 + (\sum_{j=0}^{3} c_j^i(s)a_{j1})x_1 + (\sum_{j=0}^{3} c_j^i(s)a_{j2})x_2 + (\sum_{j=0}^{3} c_j^i(s)a_{j3})x_3 = 0\}$$

Teorema 5.4. *A variedade algébrica $M_D := U/\mathcal{S}_5$ é o espaço de Moduli para as configurações de Desargues.*

Demonstração. Usando o Teorema 4.1 precisamos apenas mostrar que existe uma família com a propriedade universal local sobre o aberto U de $\check{\mathbb{P}}^3$ que parametriza as configurações de Desargues. Sejam $(c_{1000} : c_{0100} : c_{0010} : c_{0001})$ as coordenadas de U e $\mathcal{U}$ a família parametrizada por U dada por:

$$\mathcal{U} = \{((c_{1000} : c_{0100} : c_{0010} : c_{0001}), (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in U \times \mathbb{P}^3;$$
$$c_{1000}x_0 + c_{0100}x_1 + c_{0010}x_2 + c_{0001}x_3 = 0\}$$

Mostraremos que $\mathcal{U}$ tem a propriedade universal local. Seja $\mathcal{X}$ uma família parametrizada por S. Então existe uma cobertura aberta afim de $S = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ tal que

$$\mathcal{X} \cap p^{-1}(S_i) = \{(s, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in S_i \times \mathbb{P}^3;\ c_0^i(s)x_0 + c_1^i(s)x_1 + c_2^i(s)x_2 + c_3^i(s)x_3 = 0,$$
$$c_k^i(s) \neq 0,\ \forall\, k,\ e\ c_0^i(s) + c_1^i(s) + c_2^i(s) + c_3^i(s) \neq 0,\ \forall\, s \in S_i\}.$$

Definimos $\varphi_i : S_i \to U$ por $\varphi_i(s) = (c_{1000}(s) : c_{0100}(s) : c_{0010}(s) : c_{0001}(s))$. Como $c_{i_0 \ldots i_3}(s)$ são funções regulares, então φ_i é um morfismo. Assim temos

$$\varphi_i^* \mathcal{U} = (\varphi_i, id)^{-1}(\mathcal{U}) = \{(s, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in S_i \times \mathbb{P}^3; (\varphi_i(s), (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \in \mathcal{U}\} =$$
$$\{(c_{1000}(s) : c_{0100}(s) : c_{0010}(s) : c_{0001}(s)), (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in U \times \mathbb{P}^3;$$
$$c_{1000}(s)x_0 + c_{0100}(s)x_1 + c_{0010}x_2 + c_{0001}(s)x_3 = 0\} = \mathcal{U}|_{S_i}$$

Segue das definições de relação de equivalência nas famílias e da ação de $\mathcal{S}_5$ em U que dados $s, t \in U$, $\mathcal{U}_s \sim \mathcal{U}_t$ se e somente se, $A_\sigma(s) = t$.

Logo $U/\mathcal{S}_5$ é o espaço de moduli grosso para as configurações de Desargues. □

Definição 5.9. Uma configuração de Desargues D_π é dita especial se D_π contém um ponto sobre um dos seus eixos.

Já que o eixo de um ponto p_{ij} é a reta r_{klm} com $\{i,j,k,l,m\} = \{1,2,3,4,5\}$, segue que a configuração de Desargues D_π é especial se e somente se $Q_{ij} := \overline{e_i e_j} \cap \overline{e_k e_l e_m} \in \pi$, para algum par (i,j).

Para cada par (l,k), seja $P_{lk} \subseteq U$ o hiperplano que parametriza os planos de $\mathbb{P}^3$ que não contém os pontos e_i, $i = 1,\ldots 5$, mas que contém o ponto Q_{lk}.

Seja q a projeção natural, ou seja, q é definida por

$$\begin{array}{rccc} q: & U & \longrightarrow & M_D \\ & D_\pi & \longmapsto & [D_\pi]. \end{array}$$

Proposição 5.5. *As configurações de Desargues especiais são parametrizadas pelo divisor irredutível $q(P_{12})$ em M_D.*

Demonstração. $q(P_{12})$ é fechado, pois o mapa q é finito (Proposição 3.5).

Além disso, temos que P_{12} é um hiperplano, portanto é irredutível. Se existirem fechados F_1 e F_2 de M_D tais que $q(P_{12}) = F_1 \cup F_2$, então $P_{12} \subseteq q^{-1}(F_1) \cup q^{-1}(F_2)$. Como $q^{-1}(F_1)$ e $q^{-1}(F_2)$ são fechados, pois q é contínua, e P_{12} é irredutível, concluímos que $P_{12} \subseteq q^{-1}(F_i)$ para algum $i \in \{1,2\}$. Portanto $F_i = q(P_{12})$. Donde concluímos que $q(P_{12})$ é irredutível. Sabemos que $\mathcal{S}_5$ é finito e que portanto dim $q^{-1}(y) = 0\ \forall\ y \in q(P_{12})$. Pelo Teorema da dimensão das fibras (SHAFAREVICH, 1995), existe um aberto $V \subseteq q(P_{12})$ tal que dim $q^{-1}(y) =$ dim $P_{12} -$ dim $q(P_{12})$ para todo $y \in V$. Portanto dim $q(P_{12}) =$ dim $P_{12} = 2$. Como dim $M_D =$ dim $U = 3$, então

$$\mathrm{codim}_{M_D} q(P_{12}) = \dim M_D - \dim q(P_{12}) = 1$$

e portanto $q(P_{12})$ é um divisor. Para ver que $q(P_{12})$ parametriza todas as configurações especiais, sejam $\sigma \in S_5$ tal que $\sigma(i) = 1, \sigma(j) = 2, \sigma(k) = 3, \sigma(l) = 4$ *e* $\sigma(m) = 5$ e $A_\sigma \in \mathcal{S}_5$, então

$$A_\sigma(Q_{ij}) = \overline{e_1 e_2} \cap \overline{e_3 e_4 e_5} = Q_{12},$$

donde segue que $Q_{ij} = A_{\sigma^{-1}}(Q_{12})$ para $\{i,j\} = \{1,2,3,4,5\}$ e portanto segue o resultado.

$\square$

O Teorema de Desargues falha se substituímos um dos dois triângulos por 3 retas passando pelo centro de perspectiva. Contudo, podemos considerar como um limite do Teorema de Desargues o seguinte teorema:

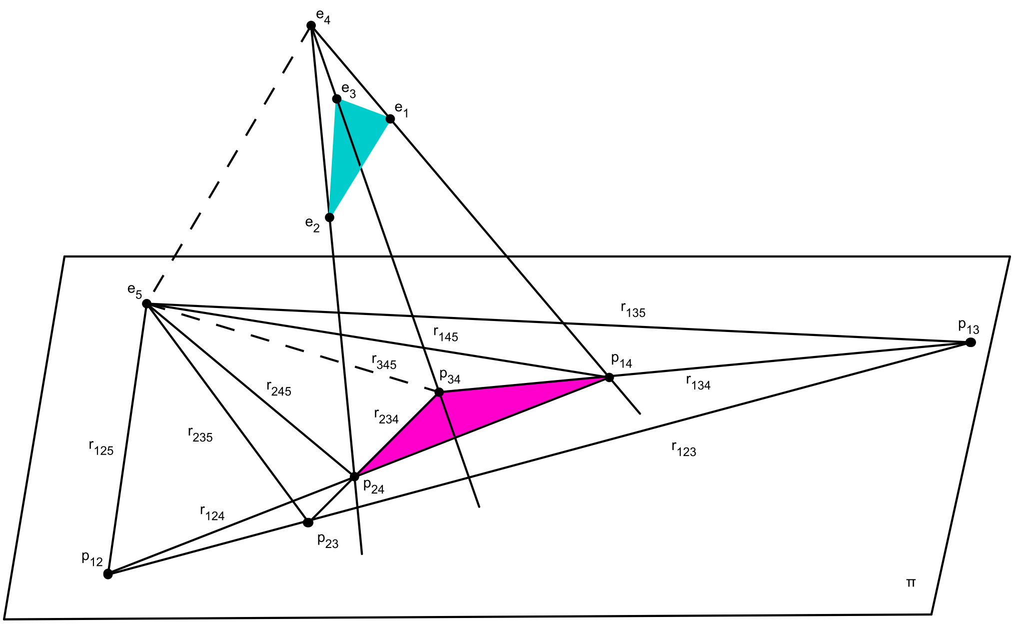
Teorema 5.6. *Sejam ABC um triângulo não degenerado em $\mathbb{P}^2$ e a,b,c retas, distintas dos lados do triângulo, passando por um ponto O, então os pontos $a \cap \overline{BC}$, $b \cap \overline{AC}$, $c \cap \overline{AB}$ são colineares, se e somente se, existe uma involução i em $\mathbb{P}^1$ tal que $i(a) = \overline{OA}, i(b) = \overline{OB}, i(c) = \overline{OC}$. (SEMPLE; KNEEBONE, 1963).*

Demonstração. A demonstração deste resultado é feita no Apêndice 2, Teorema B. 20. □

Dada uma configuração de 7 pontos e 10 retas em $\mathbb{P}^2$ satisfazendo as condições do Teorema 5.6, existem 5 pontos $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ e e_5 em posição geral e um plano $\pi \subseteq \mathbb{P}^3$, contendo pelo menos um deles, tal que as 10 retas e os 10 planos determinados por estes pontos intersectam π na configuração de 7 pontos e 10 retas dada. O plano π e os 5 pontos $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ e e_5 são obtidos da mesma maneira como na demonstração sintética do Teorema de Desargues, caso 2).

A Figura 4 mostra uma configuração de Desargues, onde $e_5 \in \pi$ e $p_{15} = p_{25} = p_{35} = p_{45} = e_5$.

Figura 4: Configuração de Desargues do 1º tipo.



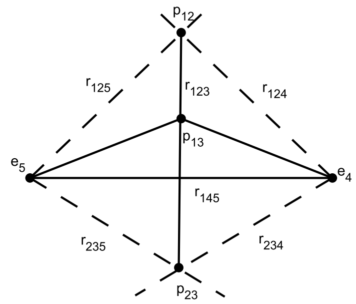
Fonte: Retirado de Avritzer e Lange (2002)

Observe que neste caso apenas 4 dos 5 quadrângulos da configuração de Desagues ainda sobrevivem, a saber:

$$\{p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}\},\ \{p_{21}, p_{23}, p_{24}, p_{25}\},\ \{p_{31}, p_{32}, p_{34}, p_{35}\} \text{ e } \{p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{45}\}.$$

Tratemos agora do caso em que os 2 triângulos de uma configuração de Desargues se colapsam, ou equivalentemente, o plano π contém exatamente 2 dos 5 pontos e_i's. Supondo que $e_4, e_5 \in \pi$, então $e_4 = p_{14} = p_{24} = p_{34}$ e $e_5 = p_{15} = p_{25} = p_{35}$. Portanto somente 3 quadrângulos completos sobrevivem, a saber: $\{p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}\}, \{p_{31}, p_{32}, p_{34}, p_{35}\}$ e $\{p_{21}p_{23}, p_{24}, p_{25}\}$. A Figura 5 mostra um exemplo deste caso.

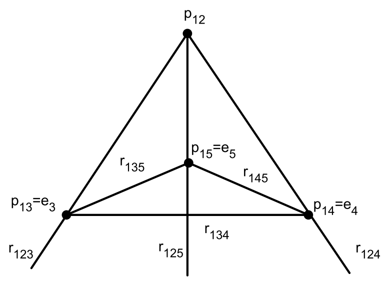
Figura 5: Configuração de Desargues do 2º tipo.



Fonte: Retirado de Avritzer e Lange (2002)

Como os 5 pontos estão em posição geral, o último caso que consideramos é quando 3 dos 5 pontos e_i's pertencem a π. Supondo que $e_3, e_4, e_5 \in \pi$, teremos $e_3 = p_{13} = p_{23}$, $e_4 = p_{14} = p_{24}$ e $e_5 = p_{15} = p_{25}$. Neste caso somente 1 quadrângulo completo sobrevive, isto é, a configuração de Desargues é um quadrângulo completo. A Figura 6 mostra uma configuração deste tipo.

Figura 6: Configuração de Desargues do 3º tipo.



Fonte: Retirado de Avritzer e Lange (2002)

Em todos os 3 casos analisados o Lema 5.3 se aplica e a sua demonstração é exatamente a mesma já apresentada. Com base nestas observações fazemos as definições seguintes.

Definição 5.10. Sejam $e_1, \ldots, e_5 \in \mathbb{P}^3$ pontos em posição geral e $\pi \subset \mathbb{P}^3$ um plano. As 10 retas $\overline{e_ie_j}$ e os 10 planos $\overline{e_ie_je_k}$ determinam em π uma configuração de Desargues D_π de pontos e retas. Tal configuração D_π é dita uma configuração de Desargues generalizada.

Definição 5.11. Uma configuração de Desargues generalizada D_π é dita degenerada se π contém algum dos pontos e_i's. Além disso, D_π é dita ser do k-ésimo tipo se π contém exatamente k pontos e_i para $k = 1, 2, 3$.

Teorema 5.7. *A variedade algébrica* $\overline{M}_D := \check{\mathbb{P}}^3/\mathcal{S}_5$ *é um espaço de moduli para as configurações de Desargues generalizadas.*

Demonstração. $\check{\mathbb{P}}^3$ é o espaço de parâmetros da configurações de Desargues generalizadas. A noção de família de configurações de Desargues generalizadas parametrizadas por uma variedade S é a mesma Definição 5.6 com a seguinte adaptação:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \cap p^{-1}(S_i) = \{(s,(x_0:x_1:x_2:x_3)) \in S_i \times \mathbb{P}^3;\ & c_0^i(s)x_0 + c_1^i(s)x_1 + c_2^i(s)x_2 + c_3^i(s)x_3 = 0, \\ & c_0^i(s), c_1^i(s), c_2^i(s), c_3^i(s) \text{ Não todos nulos },\ \forall\, s \in S_i\}.\end{aligned}$$

As noções de relação de equivalência nas famílias e família induzida também são as mesmas. A família

$$\begin{aligned}\mathcal{U} = \{((c_{1000}:c_{0100}:c_{0010}:c_{0001}),(x_0:x_1:x_2:x_3)) \in \check{\mathbb{P}}^3 \times \mathbb{P}^3; \\ c_{1000}x_0 + c_{0100}x_1 + c_{0010}x_2 + c_{0001}x_3 = 0\}\end{aligned}$$

parametrizada por $\check{\mathbb{P}}^3$, tem a propriedade universal local e portanto $\check{\mathbb{P}}^3/\mathcal{S}_5$ é o espaço de moduli (grosso) das configurações de Desargues generalizadas. Observe ainda que $\overline{U} = \check{\mathbb{P}}^3$, onde U é o espaço de parâmetro das configurações de Desargues não degeneradas. Portanto, pela Proposição 3.9 $M_D = U/\mathcal{S}_5 \subset \check{\mathbb{P}}^3/\mathcal{S}_5$ é aberto, ou seja, $\overline{M_D} = \check{\mathbb{P}}^3/\mathcal{S}_5$. $\square$

No Teorema 5.7 construímos o espaço de moduli das configurações de Desargues não degeneradas e vimos que este é um aberto projetivo. Em seguida, vimos que o Teorema de Desargues ainda vale se considerarmos configurações de Desargues generalizadas e que o espaços de moduli de tais configurações é uma variedade projetiva. Ou seja, vimos que o espaço de moduli das Configurações de Desargues generalizadas é a compactificação do espaço de moduli das Configurações de Desargues não degeneradas.

Referências

ATIYAH, M.; MACDONALD, I. *Introduction to Commutative Algebra*. London: Addison-Wesley Publishing company, Inc., 1969.

AVRITZER, D.; LANGE, H. Curves of genus 2 and desargues configurations. *Advanceds in Geometry*, v. 2, p. 259–280, 2002.

AYRES, J. F. *Theory and Problems of Projective Geometry*. New York: Schaum Publishing co., 1967.

DOLGACHEV, I. *Lectures on Invariant Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

ESTEVES, E. Construção de espaços de moduli. In: *Colóquio Brasileiro de Matemática, 21, 1997, Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro: Impa, 1997.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008.

HARRIS, J. *Algebraic Geometry: A First Course*. USA: Springer, 1995.

KUNZ, E. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1985.

MUMFORD, D.; FOGARTY, J.; KIRWAN, F. *Geometric Invariant Theory*. 3rd. ed. USA: Springer, 1994.

NEWSTEAD, P. E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces*. [S.l.]: Tata Institute Institute Lecture Notes, Springer-Verlag, 1978.

SEMPLE, J. .; KNEEBONE, G. T. *Algebraic projective geometry*. London: Oxford University Press, 1963.

SHAFAREVICH, I. R. *Basic Algebraic Geometry, Volume I: Varieties in Projective Space*. 2. ed. Moscow: Springer-Verlag Telos, 1995.

TODD, J. A. *Projective and Analytical Geometry*. [S.l.]: Oxford University Press, 1952.

VIANA, P. Topologia Étale. In: IMPA (Ed.). *Escola de Álgebra, XIV , 1996, Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro: Impa, 1996.

Apêndice A - Categorias

Os resultados deste apêndice pode ser encontrado no seguinte livro (VIANA, 1996).

Uma categoria C é uma classe de objetos tal que:

1) Para qualquer par ordenado (X,Y) de objetos é especificado um conjunto de *morfismo* denotado por $Hom_C(X,Y)$.

2) Para cada objeto X é destacado um elemento id_X em $Hom_C(X,X)$.

3) Para cada terno ordenado (X,Y,Z) de objetos é especificada uma função

$$\begin{array}{rccc} \circ\ : & Hom_C(X,Y)\times Hom_C(Y,Z) & \longrightarrow & Hom_C(X,Z) \\ & (f,g) & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

Estes dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

(a) Para $f\in Hom_C(X,Y)$, $g\in Hom_C(Y,Z)$ e $h\in Hom_C(Z,W)$ temos

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f).$$

(b) Para $f\in Hom_C(X,Y)$ temos

$$id_Y\circ f = f = f\circ id_X.$$

Um *funtor* $\mathcal{F}$ entre duas categorias C e D, denotado por $\mathcal{F}: C\to D$, é a especificação, para cada objeto X de C, de um objeto $\mathcal{F}$ de D e, para cada par de objetos (X,Y) de C, de uma aplicação de $Hom_C(X,Y)$ em $Hom_D(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$, denotada por $f\mapsto\mathcal{F}(f)$. Estes dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

1) Para cada objeto X de C temos $\mathcal{F}(id_X)=id_{\mathcal{F}(X)}$.

2) Para cada pas $(f,g)\in Hom_C(X,Y)\times Hom_C(Y,Z)$ temos $\mathcal{F}(g\circ f)=\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(f)$.

Um funtor como definido acima é as vezes chamado de *covariante*,para distinguir da definição afim de funtor *contravariante* entre duas categorias C e D, que é a especificação, para cada objeto X de C, de um objeto $\mathcal{F}(X)$ de D e, para cada par (X,Y) de objetos de C, de uma aplicação de $Hom_C(X,Y)$ em $Hom_D(\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(X))$, denotada por $f\mapsto\mathcal{F}(f)$. Estes dados estão sujeitos aos axiomas (iii) e

1) para cada para $(f,g)\in Hom_C(X,Y)\times Hom_C(Y,Z)$ temos $\mathcal{F}(g\circ f)=\mathcal{F}(f)\circ\mathcal{F}(g)$.

Dados dois funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ entre as categorias C e D uma *transformação natural* T entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, denotada $T{:}\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é a especificação, para cada objeto X de C, de um elemento $T_X \in Hom_D(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$. Este dado é sujeito ao seguinte axioma

1) Para cada elemento $f \in Hom_C(X,Y)$ temos $\mathcal{G}(f) \circ T_X = T_Y \circ \mathcal{F}(g)$.

Este axioma é representado graficamente pela comutatividade do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "T_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "T_Y"] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

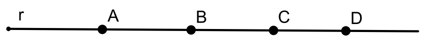
Um Funtor $\mathcal{F} : C \to Conj$ é representável se existir um objeto X em C e transformações naturais $\psi : Hom_C(X,-) \to \mathcal{F}$ e $\varphi : \mathcal{F} \to Hom_C(X,-)$ tais que para cada objeto Y em C as composições $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$ e $\varphi \circ \psi = id_{Hom_C(X,-)}$. Dois funtores para os quais existe este par de transformações naturais são ditos naturalmente isomorfos.

Apêndice B - Projetividade e Involução

Os resultados obtidos neste apêndice pode ser encontrado nos seguintes livros (AYRES, 1967) e (SEMPLE; KNEEBONE, 1963). Usaremos as letras maiúsculas $A, B, C, D, \ldots$ para indicar pontos e as letras minúsculas $a, b, c, d, \ldots$ para indicar retas.

Definição B .1. O conjunto de todos os pontos de uma reta r é chamado de feixes de pontos e será denotado por $r(A, B, C, D, \ldots)$, onde A, B, C,... são pontos da reta r.

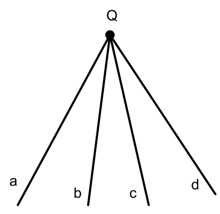
Figura 7: Feixes de pontos



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Definição B .2. O conjunto de todas as retas $a, b, c, d, \ldots$ que passam por um ponto Q é chamado um feixe de retas e será denotado por $Q(a, b, c, d, \ldots)$.

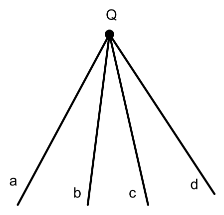
Figura 8: Feixes de reta



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Dizemos que existe uma correspondência 1-1 entre dois feixes se existe uma regra que associa a cada elemento do primeiro feixe um único elemento do segundo e, reciprocamente, associa a cada elemento de segundo feixe um único elemento do primeiro.

Figura 9: Correspondência



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

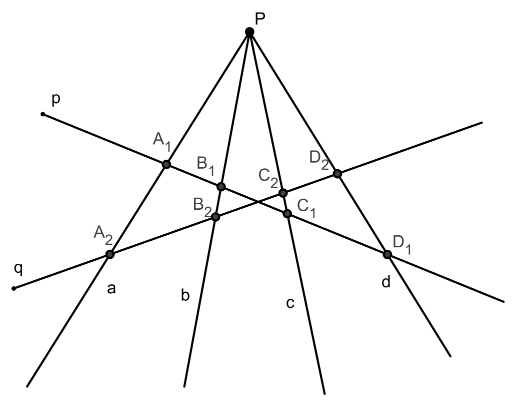
Consideremos o feixe de retas $P(a,b,c,d,\ldots)$ e uma reta p que não contém o ponto P, veja a Figura 9. Observe que cada reta s do feixe de retas determina um único ponto, $S := s \cap p$, na reta p e cada ponto Q da reta p determina uma única reta passando por P, $q := \overline{PQ}$. Tal correspondência é chamada uma *perspectividade* e é indicada por

$$P(a,b,c,d,\ldots) \overline{\overline{\wedge}}\, p(A,B,C,D,\ldots).$$

Definição B .3. Dizemos que dois feixes de pontos $p(A,B,C,D,\ldots)$ e $q(A,B,C,D,\ldots)$, onde as retas p e q são distintas, estão em perspectiva a partir de um ponto P se existe uma correspondência 1-1 entre os pontos dos dois feixes e as retas unindo os pontos correspondentes contém o ponto P. Denotamos tal relação por

$$p(A_1,B_1,C_1,D_1,\ldots) \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}\, q(A_2,B_2,C_2,D_2,\ldots).$$

Figura 10: Feixes de pontos em perspectiva

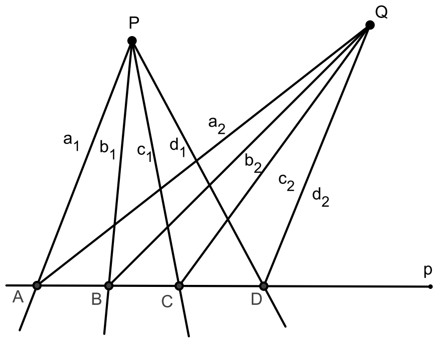


Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Definição B .4. Dizemos que dois feixes de retas $P(a_1,b_1,c_1,d_1,\ldots)$ e $Q(a_2,b_2,c_2,d_2,\ldots)$, onde P e Q são pontos distintos, estão em perspectiva a partir de uma reta p se existe uma correspondência 1-1 entre os pontos dos dois feixes e a interseção de retas correspondentes é um ponto de p. Denotamos esta relação por

$$P(a_1,b_1,c_1,d_1,\ldots) \overset{p}{\overline{\wedge}} Q(a_2,b_2,c_2,d_2,\ldots).$$

Figura 11: Feixes de retas em perspectiva



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Dadas duas perspectividades

$$p_1(A_1,B_1,C_1,D_1,\ldots) \overset{P_1}{\overline{\overline{\wedge}}} p_2(A_2,B_2,C_2,D_2,\ldots)$$
$$p_2(A_2,B_2,C_2,D_2,\ldots) \overset{P_2}{\overline{\overline{\wedge}}} p_3(A_3,B_3,C_3,D_3,\ldots),$$

temos uma maneira de relacionar os pontos dos feixes $p_1(A_1,B_1,C_1,D_1,\ldots)$ e $p_3(A_3,B_3,C_3,D_3,\ldots)$.

Definição B .5. Uma correspondência 1-1 entre dois feixes de pontos (ou de retas) é dita uma projetividade se ela for obtida de um número finito de perspectividades. Denotamos projetividades por

$$p_1(A_1,B_1,C_1,D_1,\ldots) \overline{\wedge} p_n(A_n,B_n,C_n,D_n,\ldots)$$

e

$$P_1(a_1,b_1,c_1,d_1,\ldots) \overline{\wedge} P_n(a_n,b_n,c_n,d_n,\ldots).$$

Exemplo B .6. Dados quatros pontos distintos A_1,B_1,C_1,D_1 em uma reta p, existe uma projetividade tal que $p(A_1,B_1,C_1,D_1) \overline{\wedge} p(C_1,D_1,A_1,B_1)$.

Como estamos interessados essencialmente no que ocorre com os quatro primeiros pontos dos feixes analisaremos as perspectividades que aparecerão apenas nestes pontos. Os passos seguintes podem ser vistos na Figura 12.

(a) escolha um ponto P que não está em p. A partir dele obtemos o feixe de retas $P(a,b,c,d,\ldots)$, onde $a = \overline{A_1P}$, $b = \overline{B_1P}$, $c = \overline{C_1P}$, $d = \overline{D_1P}$, etc;

(b) escolha uma reta q tal que $B_1 \in q$ e $q \neq \overline{PB_1}$ para obtermos a relação

$$p(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots) \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} q(A_2, B_1, C_2, D_2, \ldots),$$

onde $A_2 := a \cap q$, $B_2 := b \cap q = B_1$, $C_2 := c \cap q$, $D_2 := d \cap q$, etc;

(c) considere a reta $r := \overline{PD_1}$ para obtermos a relação

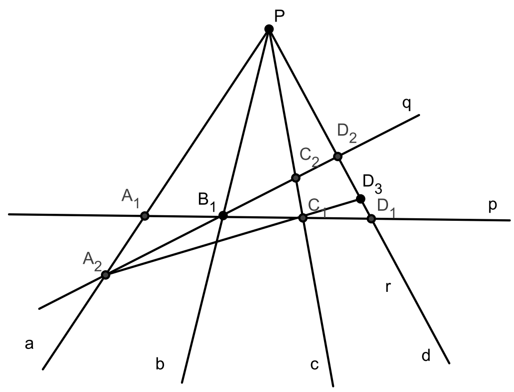
$$q(A_2, B_1, C_2, D_2, \ldots) \overset{C_1}{\overline{\overline{\wedge}}} r(D_3, D_1, P, D_2, \ldots),$$

onde $D_3 := \overline{A_2C_1} \cap r$, $D_1 = \overline{B_1C_1} \cap r$, $P = \overline{C_2C_1} \cap r$, $D_2 := \overline{D_2C_1} \cap r$, etc;

(d) finalmente considerando-se o ponto A_2 e a reta p, temos

$$r(D_3, D_1, P, D_2, \ldots) \overset{A_2}{\overline{\overline{\wedge}}} p(C_1, D_1, A_1, B_1, \ldots).$$

Figura 12: Projetividade entre pontos



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Assim seguindo os passo descritos abaixo obtemos

$$p(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots) \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} q(A_2, B_1, C_2, D_2, \ldots) \overset{C_1}{\overline{\overline{\wedge}}} r(D_3, D_1, P, D_2, \ldots) \overset{A_2}{\overline{\overline{\wedge}}} p(C_1, D_1, A_1, B_1, \ldots).$$

Portanto segue o resultado.

Exemplo B .7. Dados quatro retas distintas a_1, b_1, c_1, d_1 passando por P, existe uma projetividade tal que $P(a_1, b_1, c_1, d_1) \overline{\wedge} P(b_1, a_1, d_1, c_1)$.

Os passos a seguir podem ser acompanhados na Figura 13.

(a) escolha a reta p, com $P \notin p$, então teremos o feixe de pontos $p(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots)$, onde $A_1 = p \cap a_1$, $B_1 = p \cap b_1$, $C_1 = p \cap c_1$, $D_1 = p \cap d_1$;

(b) tome $Q \in a_1$, com $Q \neq P$, para obtermos a perspectividade

$$P(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots) \overset{p}{\overline{\overline{\wedge}}} Q(a_1, b_2, c_2, d_2, \ldots),$$

onde $b_2 = \overline{B_1Q}$, $c_2 = \overline{C_1Q}$ e $d_2 = \overline{D_1Q}$;

(c) observemos que

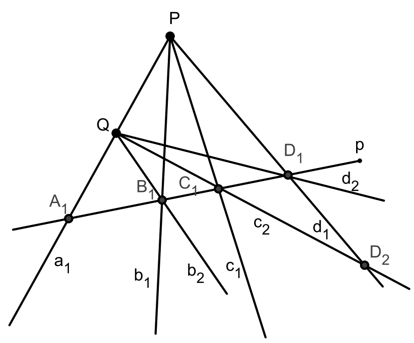
$$Q(a_1, b_2, c_2, d_2, \ldots) \overset{d_1}{\overline{\overline{\wedge}}} B_1(b_1, b_2, c_3, p, \ldots),$$

onde $c_3 = \overline{B_1D_2}$;

(d) por último vemos que

$$B_1(b_1, b_2, c_3, p, \ldots) \overset{c_2}{\overline{\overline{\wedge}}} P(b_1, a_1, d_1, c_1).$$

Figura 13: Projetividade entre retas



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Logo obtemos

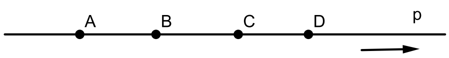
$$P(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots) \overset{p}{\overline{\overline{\wedge}}} Q(a_1, b_2, c_2, d_2, \ldots) \overset{d_1}{\overline{\overline{\wedge}}} B_1(b_1, b_2, \overline{B_1D_2}, p, \ldots) \overset{c_2}{\overline{\overline{\wedge}}} P(b_1, a_1, d_1, c_1, \ldots).$$

Definição B .8. Uma involução é uma projetividade $O(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots) \overline{\wedge} O(a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots)$ tal que para, todo $x_1 \in O(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots)$, se x_1 corresponde a x_2 então x_2 corresponde a x_1.

Razão Cruzada no Plano Afim

Consideremos uma reta p no plano afim na qual fixamos uma orientação, indicada por uma seta. Uma reta p com uma orientação é chamada reta orientada. Dados dois pontos A e B na reta p, o segmento AB tem comprimento e sentido e é chamado segmento de reta direcionado. Observamos que BA tem o mesmo comprimento de AB, mas tem sentidos opostos, isto é, $BA = -AB$.

Figura 14: reta p



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Definição B .9. Sejam A, B, C e D, pontos distintos em uma reta p, no plano afim, direcionada. A razão cruzada de A, B com respeito a C, D, denotada por $(A,B;C,D)$, é definida por

$$(A,B;C,D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} \tag{18}$$

Uma vez que a razão acima é independente da escolha da orientação de p, a razão cruzada também é.

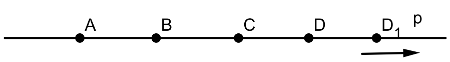
Proposição B .10. Sejam A, B, C e D quatro pontos em uma reta p. Se $(A,B;C,D) = (A,B;C,D_1)$, então $D = D_1$.

*Demonstração.*Como $(A,B;C,D) = (A,B;C,D_1)$, então

$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD_1}{BD_1}.$$

Portanto $AD/BD = AD_1/BD_1$.

Figura 15: reta p



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Consideremos a reta p dada acima com a orientação indicada pela seta e os pontos como na figura. Então $AD_1 = AD + DD_1$, $BD_1 = BD + DD_1$ e

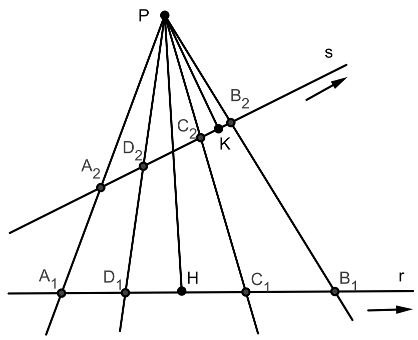
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD + DD_1}{BD + DD_1}.$$

Isso implica que $DD_1(AD + DB) = 0$. Se $AD + DB = 0$, então $AD = BD$, ou seja, $A = B$, o que é uma contradição. Portanto $DD_1 = 0$ e $D = D_1$. De maneira análoga verificamos os outros casos, quando mudamos os pontos de posição. □

Teorema B .11. *A razão cruzada de quatro pontos em uma reta, no plano afim, é invariante por projeções.*

*Demonstração.*Considere a figura abaixo

Figura 16: Razão cruzada



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Sejam A_1, B_1, C_1, D_1, pontos distintos em uma reta r e P um ponto fora da reta r. Projetando esse pontos em uma reta s que não contém P, obtemos os pontos A_2, B_2, C_2, D_2. Seja s a reta que passa por P e é perpendicular a r. Denotemos por H a interseção de s e r. Desconsiderando os sinais temos

$$(A_1,B_1;C_1,D_1) = \frac{\frac{A_1C_1}{B_1C_1}}{\frac{A_1D_1}{B_1D_1}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}HP.A_1C_1}{\frac{1}{2}HP.B_1C_1}}{\frac{\frac{1}{2}HP.A_1D_1}{\frac{1}{2}HP.B_1D_1}} = \frac{\frac{area\ \triangle A_1PC_1}{area\ \triangle B_1PC_1}}{\frac{area\ \triangle A_1PD_1}{area\ \triangle B_1PD_1}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}A_1P.C_1P\ sen\angle A_1PC_1}{\frac{1}{2}B_1P.C_1P\ sen\angle B_1PC_1}}{\frac{\frac{1}{2}A_1P.D_1P\ sen\angle A_1PD_1}{\frac{1}{2}B_1P.D_1P\ sen\angle B_1PD_1}} = \frac{\frac{sen\angle A_1PC_1}{sen\angle B_1PC_1}}{\frac{sen\angle A_1PD_1}{sen\angle B_1PD_1}}.$$

Portanto provamos que

$$(A_1,B_1;C_1,D_1) = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.\frac{B_1D_1}{A_1D_1} = \pm\frac{sen\angle A_1PC_1}{sen\angle B_1PC_1}.\frac{sen\angle B_1PD_1}{sen\angle A_1PD_1} \tag{19}$$

Agora seja K um ponto de s tal que a reta determinada por P e K é perpendicular a s. Desconsiderando os sinais e usando o raciocino das contas acima obtemos a igualdade

$$(A_2,B_2;C_2,D_2) = \frac{A_2C_2}{B_2C_2}.\frac{B_2D_2}{A_2D_2} = \pm\frac{sen\angle A_1PC_1}{sen\angle B_1PC_1}.\frac{sen\angle B_1PD_1}{sen\angle A_1PD_1} \tag{20}$$

Assim o que precisamos fazer é mostrar que o sinal de (19) e (20) coincidem. Para isso fixemos a orientação sobre P da seguinte forma: o ângulo A_1PC_1, obtido girando a reta PA_1 no sentido anti-horário sobre P até a reta PC_1 é positivo. Então o ângulo A_1PD_1 é positivo e os ângulos B_1PC_1 e B_1PD_1 são negativos. Como consequência, vemos que as razões

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} \text{ e } \frac{sen\angle A_1PC_1}{sen\angle B_1PC_1}$$

tem o mesmo sinal. O mesmo vale também para as razões

$$\frac{B_1D_1}{A_1D_1} \text{ e } \frac{sen\angle B_1PD_1}{sen\angle A_1PD_1}.$$

A paridade do sinal entre as razões é independente de ambas as orientações escolhidas em p e a orientação dos ângulos sobre P . Assim o sinal em ambos os membros de (19) e (20) são iguais e então

$$(A_1,B_1;C_1,D_1) = (A_2,B_2;C_2,D_2).$$

□

Dadas quatro retas distintas a, b, c, d no plano afim passando por um ponto P. Dadas duas retas r e s tais que $P \notin r$ e $P \notin s$, obtemos o conjunto de pontos A_1,B_1,C_1,D_1 e A_2,B_2,C_2,D_2, respectivamente, onde $A_1 = a \cap r$, $A_2 = s \cap a, \ldots$. Pelo Teorema B.11. temos que

$$(A_1,B_1;C_1,D_1) = (A_2,B_2;C_2,D_2).$$

Definição B .12. Sejam a,b,c,d quatro retas no plano afim que passam por um ponto P. A razão cruzada destas retas em qualquer ordem é a razão cruzada, na mesma ordem, dos quatro pontos A, B, C, D que estas retas determinam em qualquer reta que não contém P, isto é,

$$(a,b;c,d) = (A,B;C,D).$$

Razão Cruzada no Plano Projetivo

Consideraremos o plano projetivo decomposto na forma $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup r_\infty$. Chamaremos os pontos de $\mathbb{P}^2$ que estão em $\mathbb{A}^2$ de pontos ordinários.

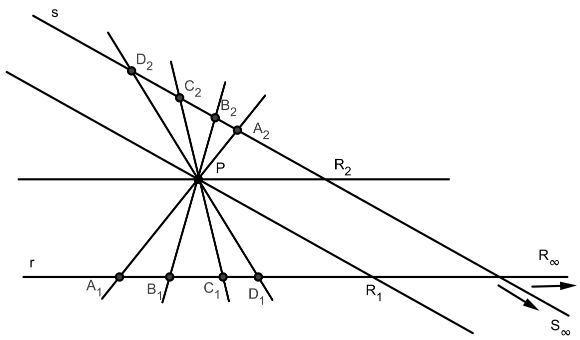
Sejam A_1,B_1,C_1,D_1 quatro pontos ordinários no plano projetivo sobre uma reta projetiva r. Sejam s outra reta projetiva e P um ponto ordinário tal que $P \notin r$ e $P \notin s$. Se $A_2,B_2,C_2,D_2 \in s$ são dados por

$$A_2 := \overline{A_1P} \cap s,\ B_2 := \overline{B_1P} \cap s,\ C_2 := \overline{C_1P} \cap s,\ D_2 := \overline{D_1P} \cap s$$

pelo Teorema B .11, temos que a razão cruzada afim destes pontos são tais que

$$(A_1, B_1; C_1, D_1) = (A_2, B_2; C_2, D_2).$$

Figura 17: Razão cruzada afim

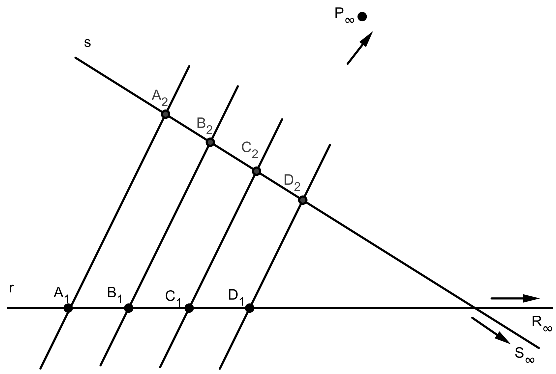


Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Consideremos agora que o ponto de projeção é $P_\infty \in r_\infty$. As retas $\overline{P_\infty A_1}$, $\overline{P_\infty B_1}$, $\overline{P_\infty C_1}$ e $\overline{P_\infty D_1}$ são paralelas e neste caso é fácil ver que a razão cruzada afim destes pontos são tais que

$$(A_1, B_1; C_1, D_1) = (A_2, B_2; C_2, D_2).$$

Figura 18: Razão cruzada projetiva



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Definição B .13. A razão cruzada de quatro pontos ordinários no plano projetivo é definida como sendo a razão cruzada dos mesmos como pontos do plano afim.

Observando-se a Figura 17, podemos considerar A_1, B_1, C_1 sendo três pontos ordinários e o quarto ponto como sendo o ponto no infinito da reta r, denotado por R_∞. Ainda considerando-se que P é um ponto ordinário, estes pontos determinam na reta s os pontos A_2, B_2, C_2, R_2 que são pontos ordinários. Neste caso a razão cruzada afim $(R_2,A_2;B_2,C_2)$ está definida e isso justifica a próxima definição.

Definição B .14. A razão cruzada de quatro pontos colineares no plano projetivo sendo que três deles são pontos ordinários e um ponto está no infinito, é a razão cruzada (na mesma ordem) dos seus correspondentes através de qualquer projeção em outra reta, com a condição de que os pontos correspondentes sejam todos pontos ordinários.

Um último caso que devemos analisar é quando os pontos estão na reta r_∞. Consideremos os pontos projetivos distintos $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ de r_∞. Então escolhendo um ponto $P \notin r_\infty$ e s uma reta distinta de r_∞ e $P \notin s$, os pontos correspondentes A,B,C,D serão pontos ordinários. Assim a razão cruzada afim $(A_1,B_1;C_1,D_1)$ estará definida. Portanto podemos estender a Definição B.14 para o caso em questão.

Lema B .15. *Para qualquer perspectiva entre os pontos de duas retas projetivas de um plano projetivo, a razão cruzada de quaisquer quatro pontos em uma das retas é igual a razão cruzada, na mesma ordem dos seus correspondentes em outra reta.*

*Demonstração.*Segue do Teorema B. 11 e da definição de razão cruzada no plano projetivo. □

Como a razão cruzada é invariante por perspectividades e uma projetividade é uma sequência de perspectividades segue o próximo resultado.

Proposição B .16. *Para qualquer projetividade entre os pontos de duas retas projetivas de um plano projetivo, a razão cruzada de quaisquer quatro pontos em uma reta é igual a razão cruzada, na mesma ordem, dos seus pontos correspondentes em outra reta.*

Definição B .17. A razão cruzada de quatro pontos projetivos distintos é a razão cruzada de quaisquer quatro pontos ordinários colineares em que eles podem ser projetados.

Como consequência temos

Teorema B .18. *Se A,B,C,D são quatro pontos colineares distintos e se A',B',C',D' são outros quatro pontos colineares distintos, em uma mesma reta ou em uma reta distinta, então*

$$(A,B,C,D) \barwedge (A',B',C',D') \ implica \ (A,B;C,D) = (A',B';C',D')$$

e inversamente

$$(A,B;C,D) = (A',B';C',D') \ implica \ (A,B,C,D) \barwedge (A',B',C',D').$$

Teorema B .19. *Se uma projetividade entre dois feixes de retas por um mesmo ponto, uma reta a_1 e sua correspondência a_2 ($a_1 \neq a_2$) se correspondem reciprocamente , então qualquer outra reta x_1 e sua correspondente x_2 se correspondem reciprocamente.*

*Demonstração.*Por hipótese existe uma projetividade tal que

$$O(a_1,a_2,x_1,x_2)\,\overline{\wedge}\,O(a_2,a_1,x_2,y). \tag{21}$$

(a) Escolha uma reta r tal que $O \notin r$. Considere os pontos

$$A_2 = a_2 \cap r, X_1 = x_1 \cap r, X_2 = x_2 \cap r;$$

(b) escolha um ponto A tal que $A \in a_1 - O$ e $A \neq r \cap a_1$. Considere as retas

$$a_3 := \overline{AA_2}, x_3 := \overline{AX_1}, x_4 := \overline{AX_2}.$$

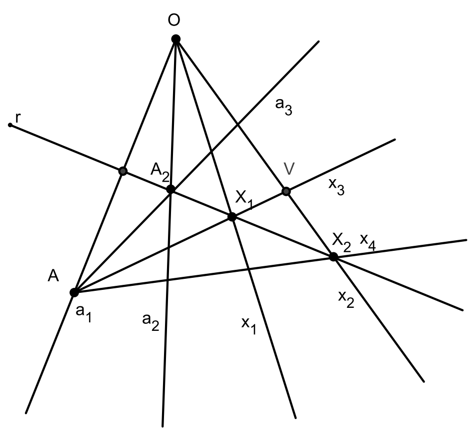
Temos com estas escolhas a seguinte projetividade:

$$A(a_1,a_3,x_3,x_4,\ldots) \overset{r}{\overline{\overline{\wedge}}} O(a_1,a_2,x_1,x_2,\ldots);$$

(c) sendo $V := x_3 \cap x_2$ obtemos as seguintes projetividades:

$$O(a_1,a_2,x_1,x_2,\ldots) \overset{r}{\overline{\overline{\wedge}}} A(a_1,a_3,x_3,x_4,\ldots) \overset{x_2}{\overline{\overline{\wedge}}} A_2(a_2,a_3,\overline{A_2V},r,\ldots) \overset{x_1}{\overline{\overline{\wedge}}} O(a_2,a_1,x_2,x_1,\ldots). \tag{22}$$

Figura 19: Correspondência entre retas



Fonte: Retirado de Ayres (1967)

Então das relações (21) e (22) segue que

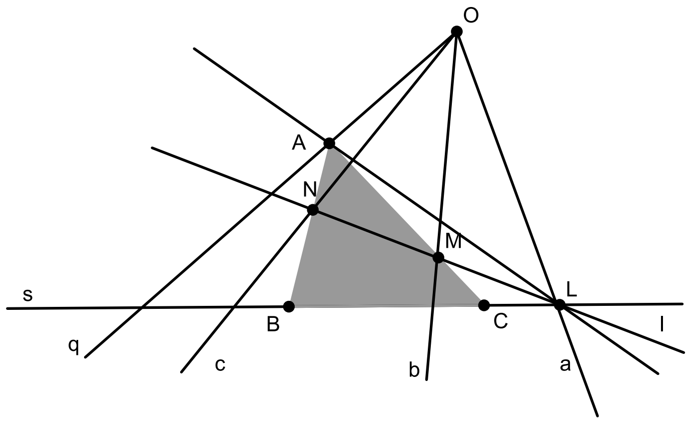
$$O(a_2,a_1,x_2,x_1,\ldots)\,\overline{\wedge}\,O(a_2,a_1,x_2,y,\ldots).$$

Como $O(a_2,a_1,x_2,y)\,\overline{\wedge}\,O(a_2,a_1,x_2,x_1)$, e a razão cruzada é preservada por perspectivas, segue que $(a_2,a_1;x_2,y) = (a_2,a_1;x_2,x_1)$ e portanto $y = x_1$. $\square$

Teorema B .20. *(Limitante do teorema de Desargues) Se ABC é um triangulo próprio e a, b, c são três retas passando por um ponto O (que não estão sobre os lados do triângulo), então $L := a \cap \overline{BC}$, $M := b \cap \overline{AC}$ e $N := c \cap \overline{AB}$ são colineares, se e somente se, existe uma involução i em $\mathbb{P}^1$, de retas centradas em O, tal que $i(a) = \overline{OA}$, $i(b) = \overline{AC}$ e $i(c) = \overline{OC}$.*

*Demonstração.*Podemos supor sem perda de generalidade que $a \neq \overline{OA}$. Denotemos por s a reta determinada pelos pontos B e C. Sejam l a reta que contém os pontos L, M, $q := \overline{OA}$.

Figura 20: Limitante do Teorema de Desargues 1



Fonte: Elaboração do próprio autor

Suponhamos que L, M e N são colineares, isto é, $N \in l$. Temos então as seguintes perspectividades:

$$O(a,b,c,q) \overset{l}{\overline{\wedge}} A(\overline{AL}, \overline{AM}, \overline{AN}, q).$$

Por hipótese

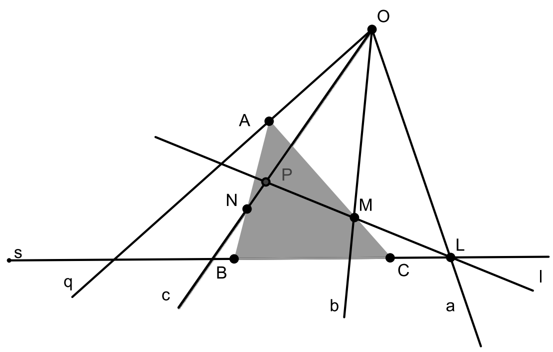
$$A(\overline{AL}, \overline{AM}, \overline{AN}, q) \overset{s}{\overline{\wedge}} O(\overline{OL}, \overline{OC}, \overline{OB}, q).$$

Donde obtemos

$$O(a,b,c,q) \,\overline{\wedge}\, O(\overline{OL}, \overline{OC}, \overline{OB}, q). \tag{23}$$

Suponhamos agora que a relação (23) é válida. Consideremos $P := c \cap l$.

Figura 21: Limitante do Teorema de Desargues 2



Fonte: Elaboração do próprio autor

Temos que

$$O(a,b,c,q) \overset{l}{\overline{\overline{\wedge}}} A(\overline{AL},\overline{AM},\overline{AP},q) \tag{24}$$

Usando as relações (23) e (24), obtemos

$$A(\overline{AL},\overline{AM},\overline{AP},q) \overline{\wedge} A(\overline{AL},\overline{AM},\overline{AN},q).$$

A relação anterior implica que $\overline{AP} = \overline{AN}$. Então $P \in \overline{AB} \cap c = N$ e portanto L,M,N são colineares.

Provamos portanto que L, M e N são colineares se e somente se vale a relação (23).

Observemos agora que pelo Exemplo B.7 existe uma projetividade tal que

$$O(q,\overline{OB},\overline{OC},\overline{OL}) \overline{\wedge} O(\overline{OB},q,\overline{OL},\overline{OC})$$

e pelo Exemplo B.6 existe uma perspectividade tal que

$$O(\overline{OB},q,\overline{OC},\overline{OL}) \overline{\wedge} O(\overline{OL},\overline{OC},\overline{OB},q).$$

Portanto concluímos que L, M e N são colineares se e somente se

$$O(a,b,c,q) \overline{\wedge} O(q,\overline{OB},\overline{OC},\overline{OL}).$$

Pelo Teorema B.19 segue que a projetividade é uma involução.

$\square$