

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

VICTOR BICALHO CIVINELLI DE ALMEIDA

**UMA FORMULAÇÃO DE MARCHA NO TEMPO ADAPTATIVA
ASSOCIADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA
PROBLEMAS ACOPLADOS ACÚSTICO-ELASTODINÂMICOS**

JUIZ DE FORA
2016

VICTOR BICALHO CIVINELLI DE ALMEIDA

**UMA FORMULAÇÃO DE MARCHA NO TEMPO ADAPTATIVA
ASSOCIADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA
PROBLEMAS ACOPLADOS ACÚSTICO-ELASTODINÂMICOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Faculdade de Engenharia da Universidade Federal
de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção
do título de graduado em Engenharia Mecânica.

Orientador: Dr. Delfim Soares Jr.

Coorientador: MSc. Vitor Mainenti Leal Lopes

JUIZ DE FORA

2016

VICTOR BICALHO CIVINELLI DE ALMEIDA

**UMA FORMULAÇÃO DE MARCHA NO TEMPO ADAPTATIVA
ASSOCIADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA
PROBLEMAS ACOPLADOS ACÚSTICO-ELASTODINÂMICOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Faculdade de Engenharia da Universidade Federal
de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção
do título de graduado em Engenharia Mecânica.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

Dr. Delfim Soares Jr.
Universidade Federal de Juiz de Fora

MSc. Vitor Mainenti Leal Lopes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. George Oliveira Ainsworth Jr.
Universidade Federal de Juiz de Fora

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Almeida, Victor Bicalho Civinelli.

Uma formulação de marcha no tempo adaptativa associada ao método dos elementos finitos para problemas acoplados acústico elastodinâmicos / Victor Bicalho Civinelli Almeida. -- 2016.

71 p.

Orientador: Delfim Soares Jr

Coorientador: Vitor Mainenti Leal Lopes

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia, 2016.

1. Análise transiente acoplada. 2. Método dos elementos finitos. 3. Fluido acústico. 4. Sólido elastodinâmico. I. Soares Jr, Delfim, orient. II. Lopes, Vitor Mainenti Leal, coorient. III. Título.

"As pessoas não são más,
elas só estão perdidas,
ainda há tempo"

Criolo

Agradecimentos

À família, a amigos e amigas, por sempre estarem presentes.

À Universidade Federal de Juiz de Fora, e à Brown University, pelo acolhimento.

Ao orientador Delfim Soares Jr., pela paciência e ensinamentos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Resumo

Esse trabalho apresenta uma nova formulação numérica para a análise de problemas de domínios acoplados, especificamente acústico-elastodinâmicos. A interação física entre os meios é modelada em uma abordagem direta, como em um modelo desacoplado, através do cálculo de forças de interface. É utilizada na discretização espacial o método dos elementos finitos e na discretização temporal uma marcha no tempo adaptativa com amortecimento numérico seletivo. Parâmetros de integração temporal são computados para cada elemento finito e passo de tempo, buscando-se eliminar oscilações espúrias na solução numérica. Modos implícito-explicito e explícito-explicito são considerados, a fim de se associar estabilidade incondicional com eficiência computacional na análise acoplada.

A metodologia numérica proposta apresenta grande acurácia e eficiência, além de flexibilidade e facilidade de implementação. Para se ilustrar as vantagens dessa técnica, é feita uma comparação com um método clássico conhecido na literatura. As aplicações numéricas aqui descritas mostram os ganhos em precisão e eficiência obtidos com a nova metodologia, demonstrando sua eficácia na solução de uma classe genérica de problemas de grande complexidade. Além da fácil implementação, o algoritmo proposto não exige custosos processos iterativos e é autoinicializável, adequado para usuários não-experientes e para códigos comerciais.

Palavras-chave: Análise transiente acoplada, Método dos elementos finitos, Fluido acústico, Sólido elastodinâmico.

Abstract

This work introduces a new numerical formulation for coupled domains analysis, more specifically acoustic-elastodynamic coupling. The physical interaction between the media is modeled in a direct approach, as in an uncoupled model, by computing interface forces. The finite element method is employed in the spatial discretization and an adaptive time scheme with selective numerical damping is used in the temporal discretization. Time integrators are computed for each finite element and time step, aiming at eliminating spurious oscillations in the numerical solution. Implicit-explicit and explicit-explicit modes are considered, matching unconditional stability with computational efficiency in the coupled analysis.

The proposed numerical methodology is very accurate and efficient, being flexible and easy to implement. In order to illustrate the advantages of this technique, a comparison with a classic method found in the literature is presented. The numerical applications described here highlight the accuracy and efficiency gains obtained with the new methodology, showing its effectiveness when solving a broad class of highly complex problems. In addition to the easiness of implementation, the proposed algorithm does not require costly iterative procedures and is truly self-starting, suitable for non-expert users and commercial codes.

Keywords: Transient coupled analysis, Finite element method, Acoustic fluid, Elastodynamic solid.

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Resumo | iii |
| Abstract | iv |
| Sumário | v |
| Lista de Figuras | vi |
| Lista de Tabelas | vii |
| Lista de Algoritmos | viii |
| Nomeclatura | ix |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Contextualização | 1 |
| 1.2 Classificação de problemas acoplados | 2 |
| 1.3 Motivação | 5 |
| 1.4 Objetivos e limitações | 5 |
| 1.5 Organização do trabalho | 6 |
| 2 Formulação do Problema | 8 |
| 2.1 Domínio fluido | 8 |
| 2.1.1 Equações governantes | 8 |
| 2.1.2 Condições iniciais | 11 |
| 2.1.3 Condições de contorno | 12 |
| 2.2 Domínio sólido | 12 |
| 2.2.1 Equações governantes | 12 |
| 2.2.2 Condições iniciais | 14 |
| 2.2.3 Condições de contorno | 14 |
| 2.3 Acoplamento de domínios fluido e sólido | 15 |
| 2.3.1 Equações governantes | 15 |
| 3 Formulação Numérica | 16 |
| 3.1 Discretização espacial | 16 |
| 3.1.1 Método dos elementos finitos | 16 |
| 3.1.2 Equações para domínio fluido | 17 |
| 3.1.3 Equações para domínio sólido | 19 |
| 3.2 Discretização temporal | 21 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2.1 | Método de diferenças centrais | 22 |
| 3.2.2 | Método adaptativo | 25 |
| 3.3 | Acoplamento numérico de domínios fluido e sólido | 33 |
| 3.3.1 | Acoplamento pelo método de diferenças centrais | 34 |
| 3.3.2 | Acoplamento pelo método adaptativo | 35 |
| 4 | Aplicações Numéricas | 39 |
| 4.1 | Barra fluido-sólido | 39 |
| 4.1.1 | Malhas triangulares regulares | 41 |
| 4.1.2 | Malhas retangulares regulares | 46 |
| 4.1.3 | Malhas triangulares irregulares | 49 |
| 4.2 | Cristais sônicos | 52 |
| 5 | Conclusões | 66 |
| | Referências | 68 |

Lista de Figuras

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Geometria do problema barra fluido-sólido. | 40 |
| 2 | Malhas triangulares regulares para problema barra fluido-sólido. | 41 |
| 3 | Soluções para ponto B do domínio fluido da malha T3. | 42 |
| 4 | Soluções para ponto C do domínio fluido da malha T3. | 43 |
| 5 | Soluções para ponto A do domínio sólido da malha T3. | 43 |
| 6 | Soluções para ponto B do domínio sólido da malha T3. | 44 |
| 7 | Erro L_2 nas malhas triangulares regulares para domínio fluido. | 44 |
| 8 | Erro L_2 nas malhas triangulares regulares para domínio sólido. | 45 |
| 9 | Erro L_2 nas malhas triangulares comparando oscilações do parâmetro ϕ_e^n , para acoplamento adaptativo implícito-explicito. | 46 |
| 10 | Malhas retangulares regulares para problema barra fluido-sólido. | 47 |
| 11 | Erro L_2 nas malhas retangulares para domínio fluido. | 48 |
| 12 | Erro L_2 nas malhas retangulares para domínio sólido. | 49 |
| 13 | Malhas triangulares irregulares para problema barra fluido-sólido. | 50 |
| 14 | Erro L_2 nas malhas triangulares irregulares para domínio fluido, ponto B. | 51 |
| 15 | Erro L_2 nas malhas triangulares irregulares para domínio sólido, ponto B. | 51 |
| 16 | Tipos de cristais sônicos. | 52 |
| 17 | Pulso de Ricker. | 54 |
| 18 | Geometria do problema de cristais sônicos com fonte pontual. | 55 |
| 19 | Malhas para problema de cristais sônicos com fonte pontual. | 56 |
| 20 | Pressão e parâmetro α_e para domínio fluido com fonte pontual de Ricker. | 59 |
| 21 | Tensão de von Mises para domínio sólido com fonte pontual de Ricker. | 60 |
| 22 | Soluções para ponto A da malha CSFPf, para $f_1 = 9164 Hz$ | 61 |
| 23 | Soluções para ponto A da malha CSFPf, para $f_2 = 18328 Hz$ | 61 |
| 24 | Soluções para ponto A da malha CSFPf, para $f_3 = 27492 Hz$ | 62 |
| 25 | Soluções para pontos A e B da malha CSFPf, para $f_1 = 9164 Hz$ | 63 |
| 26 | Histogramas do parâmetro α_e para malha CSFPf antes e após correção de frequências naturais. | 64 |

Lista de Tabelas

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Características das malhas triangulares para problema barra fluido-sólido. . . . | 42 |
| 2 | Características das malhas retangulares para problema barra fluido-sólido. . . . | 48 |
| 3 | Características das malhas para problema de cristais sônicos com fonte pontual. | 57 |
| 4 | Erro L^2 para ponto A da malha CSFPf, para dois tipos de acoplamento. | 62 |
| 5 | Tempo de execução de sub-rotinas selecionadas, em s (% total). | 65 |

Lista de Algoritmos

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Método de diferenças centrais | 25 |
| 2 | Método adaptativo explícito | 30 |
| 3 | Método adaptativo implícito | 31 |
| 4 | Acoplamento de domínios pelo método de diferenças centrais | 35 |
| 5 | Acoplamento de domínios pelo método adaptativo, modo implícito-explícito . . | 37 |
| 6 | Acoplamento de domínios pelo método adaptativo, modo explícito-explícito . . | 37 |

Nomeclatura

Símbolos latinos

| | |
|--------------|--|
| E | módulo de elasticidade (Young) |
| K | módulo volumétrico |
| c | velocidade de propagação de onda genérica |
| c_d | velocidade de propagação de onda de dilatação (longitudinal) |
| c_s | velocidade de propagação de onda de cisalhamento (transversal) |
| p | pressão |
| s | entropia |
| t | tempo |
| \mathbf{b} | (b_i) vetor forças de domínio |
| \mathbf{u} | (u_i) vetor deslocamento |
| \mathbf{v} | (v_i) vetor velocidade |
| \mathbf{x} | (x_i) vetor posição |

Símbolos gregos

| | |
|-----------|---|
| Γ | espaço vetorial do contorno |
| Ω | espaço vetorial do domínio |
| ϕ | fator de oscilação |
| λ | parâmetro de Lamé |
| μ | viscosidade dinâmica, parâmetro de Lamé |
| μ_ν | viscosidade volumétrica |
| ν | coeficiente de Poisson |
| ω | frequência angular |

| | |
|---------------|---|
| ψ | campo genérico |
| ρ | densidade |
| ξ | coeficiente de amortecimento viscoso |
| δ | (δ_{ij}) tensor delta de Kronecker |
| ε | (ε_{ij}) tensor de deformações |
| σ | (σ_{ij}) tensor de tensões de Cauchy |
| τ | (τ_{ij}) tensor de tensões genérico |

Notações

| | |
|------------|---|
| f_f | variável relativa a domínio fluido |
| f_s | variável relativa a domínio sólido |
| f_e | variável em termos de elemento |
| \dot{f} | derivada parcial de primeira ordem da variável f em relação à variável tempo |
| \ddot{f} | derivada parcial de segunda ordem da variável f em relação à variável tempo |
| \bar{f} | valor prescrito da variável f |
| f_i | direção i de um vetor \mathbf{f} ($i = 1, 2$ em 2D e $i = 1, 2, 3$ em 3D) |
| f_{ij} | direções i, j de um tensor \mathbf{f} ($i, j = 1, 2$ em 2D e $i, j = 1, 2, 3$ em 3D) |
| f_0 | condição inicial, valor de referência da variável f |
| f' | flutuação da variável f em relação ao valor de referência |
| Δf | variação da variável f |
| f^n | variável f no passo de tempo n |
| f_{ii} | traço de um tensor \mathbf{f} ($f_{ii} = f_{11} + f_{22}$ em 2D e $f_{ii} = f_{11} + f_{22} + f_{33}$ em 3D) |
| $f_i g_i$ | notação de soma ($f_i g_i = f_1 g_1 + f_2 g_2$ em 2D e $f_i g_i = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$ em 3D) |

| | |
|---------------------------------|---|
| $\frac{\partial f}{\partial t}$ | derivada parcial de f em relação à variável t |
| $\frac{Df}{Dt}$ | derivada material (total) de f em relação à variável t $\left(\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ |
| $\mathcal{F}\{f\}$ | transformada de Fourier da função f |
| f | negrito para vetor, tensor ou array |
| f^T | transposta de um vetor, tensor ou array f |
| f⁻¹ | inversa de uma matriz f |

Siglas

| | |
|-----|--|
| CFD | <i>computational fluid dynamics</i> |
| CSM | <i>computational solid mechanics</i> |
| EDO | equação diferencial ordinária |
| EDP | equação diferencial parcial |
| FSI | <i>fluid-structure interaction</i> |
| MDC | método de diferenças centrais |
| MDF | método das diferenças finitas |
| MEC | método dos elementos de contorno |
| MEF | método dos elementos finitos |
| MVF | método dos volumes finitos |
| SPH | <i>smoothed-particle hydrodynamics</i> |

1 Introdução

1.1 Contextualização

Fenômenos físicos envolvendo domínios contínuos distintos são frequentemente encontrados em várias áreas da engenharia, e sempre que o comportamento de um interfere significativamente no comportamento de outro, trata-se de um problema de domínios acoplados. Tais problemas são por natureza interdisciplinares, e fazem uso de diferentes teorias e modelos matemáticos, associados a áreas como mecânica dos sólidos, dinâmica dos fluidos, termodinâmica, mecânica dos solos, eletromagnetismo, ótica e cinética química.

As interações entre os domínios analisados devem ser adequadamente descritas e equacionadas para se obter uma solução consistente. Por vezes, conectar os domínios não é um procedimento trivial, dependendo das modelagens matemática e numérica de cada um dos meios, do seu grau de interação, da precisão desejada e do custo computacional.

Na maior parte das aplicações práticas, além das modelagens física e matemática, faz-se necessário o uso de métodos numéricos, uma vez que são raros os casos para os quais é conhecida uma solução analítica para as equações diferenciais parciais (EDPs) que modelam o problema. Algumas técnicas numéricas largamente empregadas na atualidade na solução dessas EDPs são construídas pela discretização do domínio. Exemplos de procedimentos de domínio clássicos são o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF), os quais eficientemente resolvem grande parte de problemas envolvendo sólidos elásticos ou plásticos, escoamentos em variados regimes, transferência de calor e massa, propagação de ondas em diversos meios, entre outros [1--5].

Além dessas técnicas, nas últimas décadas houve o surgimento e amadurecimento de outros métodos numéricos. Um deles é o método dos elementos de contorno (MEC), o qual discretiza apenas as fronteiras do domínio analisado, apresentando grande vantagem na modelagem de meios (semi-) infinitos [6]. Métodos sem malha (*meshfree* ou *meshless*), como o *smoothed-particle hydrodynamics* (SPH), dentre muitos outros, vêm sendo amplamente desenvolvidos, por vezes para compensar as desvantagens de métodos clássicos; para citar um exemplo, métodos sem malha modelam sem grandes dificuldades descontinuidades no domínio (*e.g.* fraturas), as quais em geral não são contempladas na construção clássica de métodos de domínio [7--9]. Métodos espectrais também vêm recebendo relevantes contribuições nos últimos anos [10, 11].

Cada um dos métodos indicados apresenta vantagens e desvantagens, relacionadas a custo computacional, complexidade de implementação, adequação a determinados tipos de problemas, e mesmo popularidade no meio científico. O acoplamento de domínios frequentemente faz uso

de mais de um método numérico, a fim de explorar os benefícios específicos que cada técnica guarda, visto que a princípio não existe um procedimento que resolva todo tipo de problema de maneira eficiente e precisa, especialmente em análises de grande complexidade.

1.2 Classificação de problemas acoplados

Problemas de domínios acoplados podem ser classificados de diferentes maneiras:

i. existência de interação recíproca:

- acoplamento forte

- acoplamento fraco

ii. tipo de interface de acoplamento:

- acoplamento de contorno

- acoplamento de domínio

iii. grau de acoplamento:

- acoplamento explícito (sistemas de equações desacopladas no tempo)

- acoplamento implícito (sistemas de equações acopladas no tempo)

iv. modelagem de cada domínio.

Quanto à existência de interação recíproca entre domínios (i), pode-se denominar como acoplamento *forte* aquele em que o comportamento de cada domínio interfere de maneira significativa nos outros. Caso o efeito de algum dos domínios no comportamento de outro possa ser desprezado, trata-se de um acoplamento *fraco*. Uma situação que permite a modelagem por acoplamento forte ou fraco é o deslocamento de uma estrutura sólida submetida a uma excitação periódica (como um alto-falante), e imersa em um fluido: caso a amplitude das pressões no domínio fluido seja pequena, ou as deformações na estrutura sejam pequenas quando comparadas com o seu deslocamento, pode-se ignorar o efeito na estrutura sólida das variações de pressão vindas do fluido (acoplamento fraco, ou unidirecional); caso contrário, faz-se necessário considerar as interações recíprocas entre ambos os domínios (acoplamento forte, ou bidirecional). A escolha de um acoplamento forte ou fraco depende da natureza do problema e na precisão desejada para a solução, podendo ser de grande importância na redução de custos computacionais.

Já a classificação pelo tipo de interface de acoplamento (ii) diz respeito à parcela de cada domínio que efetivamente se relaciona com outro. Quando há interação direta somente entre os contornos de cada domínio, trata-se de um acoplamento de interface. Como exemplo, pode-se citar interações entre sólidos não-porosos e fluidos como líquidos ou gases. Quando, porém, há uma interseção espacial entre os domínios (ou parte deles), trata-se de um acoplamento de domínio. Exemplos incluem líquidos imersos em solos porosos, sólidos ou fluidos com comportamento eletromagnético pronunciado e extrusão metálica em altas temperaturas [12].

O grau de acoplamento (iii) para problemas transientes, no contexto específico de soluções numéricas desse trabalho, relaciona-se com a possibilidade de se resolver um domínio independentemente do outro, particularmente no que diz respeito à montagem dos sistemas de equações. Caso a discretização temporal permita que, a cada passo de tempo, seja montado um sistema de equações algébricas dependente apenas de informações calculadas em passos de tempo anteriores, trata-se de um problema *desacoplado*, que pode ser resolvido *explicitamente* para cada domínio. Caso porém, para cada passo de tempo, seja montado um sistema de equações algébricas que necessite de informações do passo de tempo a ser calculado, trata-se de um problema *acoplado*, o qual só pode ser resolvido *implicitamente*. A denominação ‘acoplado’ (relativa a sistemas de equações acopladas no tempo) introduzida nesse parágrafo difere do acoplamento (interação) de domínios, termo utilizado no texto até então, sendo que pelo contexto será possível distingui-los.

Atendo-se ainda à classificação do tipo (iii), problemas cujo acoplamento pode ser resolvido de maneira explícita (sistemas de equações algébricas desacopladas para cada domínio) apresentam uma evidente vantagem quanto ao custo computacional. Isso ocorre pois é possível resolver cada domínio de maneira independente e consecutiva, havendo necessidade apenas de transmitir dados de interação entre os domínios a cada passo de tempo. De maneira geral, contudo, não se garante estabilidade numérica incondicional ao se utilizarem marchas de tempo explícitas. Para contornar essa dificuldade, é possível utilizar marchas no tempo implícitas para ambos os domínios, mas agora o acoplamento também se torna implícito (sistemas de equações algébricas acopladas), ou seja, a solução referente a um dos domínios para um passo de tempo depende da solução referente ao outro domínio no mesmo passo de tempo, ainda não calculada. Faz-se necessário, portanto, um procedimento iterativo, de custo computacional obviamente mais elevado [13].

Finalmente, o tipo de modelagem de cada domínio (iv) também permite classificar problemas acoplados. Uma vez que esse trabalho tem como foco apenas domínios fluido e sólido, não será tratada a modelagem de outros meios, como solos, materiais com propriedades eletromagnéticas ou escoamentos reativos. Ressalta-se ainda que também são considerados como problemas acoplados aqueles que possuem somente um meio dividido em domínios com características bastante diferentes (como propriedades físicas ou refinamento de malha), ou

quando são resolvidos por diferentes métodos numéricos.

Para o domínio fluido, a dinâmica dos fluidos computacional - comumente conhecida na literatura por *computational fluid dynamics* (CFD) - abrange vários aspectos da modelagem de fluidos (entre os quais: viscido/invíscido, compressível/incompressível, monofásico/multifásico, reativo/não-reativo, turbulento/não-turbulento, newtoniano/não-newtoniano). Um importante modelo adequado a muitos problemas é o fluido acústico, cuja caracterização será detalhada na subseção 2.1. É evidente que são extremamente abrangentes as possibilidades de se modelar um fluido genérico, e não é objetivo desse trabalho discuti-las extensivamente, sendo indicadas as referências [14--16].

Já o domínio sólido também permite diferentes modelagens. Uma das mais comumente utilizadas é o sólido elastodinâmico, cuja caracterização será detalhada na subseção 2.2. Existem, entretanto, muitos outros modelos contínuos tratados na mecânica dos sólidos, incluindo, além da teoria elástica, considerações como plasticidade, viscoelasticidade, entre muitas outras. Mais informações sobre tais modelos podem ser encontradas em [17--20]. O estudo de sólidos aliado à técnicas computacionais é comumente denominado na literatura por *computational solid mechanics* (CSM).

As denominações mais comuns para os problemas aqui estudados são interação fluido-estrutura - comumente conhecida na literatura por *fluid-structure interaction* (FSI) - e aeroelasticidade [21]. Esse último termo, em geral, leva em consideração aspectos aerodinâmicos, como *flutter* em asas de aeronaves, *surge* em rotores de turbomáquinas e vibrações de pontes submetidas a excitação de vórtices criados pelo escoamento de ar [22--24]. Uma vez que essas aplicações não são o foco desse estudo, será utilizado aqui o primeiro termo, com caráter mais genérico. Outras aplicações de FSI incluem barragens, estruturas *offshore*, interação de lubrificantes com máquinas rotativas, vasos de pressão, tubulações, sonares submarinos, ultrassom no meio médico, acústica de alto-falantes, eventos sísmicos, exploração geológica, o sistema de fonação *etc.* [25--31].

Após essa breve porém abrangente discussão acerca dos diversos agrupamentos e possibilidades de modelagem de problemas acoplados, faz-se necessário indicar quais tópicos serão tratados nesse trabalho, de acordo com a classificação descrita. (i): serão considerados domínios fluido e sólido, com acoplamento do tipo bidirecional, ou forte. (ii): a interface de acoplamento, devido à natureza da interação entre esses domínios, é do tipo contorno. (iii): o grau de acoplamento é explícito, ou seja, não são necessários procedimentos iterativos para obtenção da solução numérica. (iv): a modelagem dos meios é de fluido acústico (pequenas variações de velocidade, pressão e densidade), e sólido elastodinâmico (obedecendo à lei de Hooke generalizada). Portanto, são estudados problemas do tipo acústico-elastodinâmico.

1.3 Motivação

Uma vez que tornam-se cada vez mais frequentes análises de domínios acoplados na engenharia, há necessidade do desenvolvimento de métodos numéricos confiáveis (que produzam resultados precisos e consistentes), e de custo computacional não-proibitivo. Esse trabalho apresenta uma técnica de acoplamento que busca atingir soluções precisas, ao mesmo tempo sem introduzir procedimentos iterativos dispendiosos.

No que toca a precisão da solução numérica, é de grande importância na análise dinâmica a preservação da representação de modos vibracionais que são associados ao comportamento físico efetivo do problema. Entretanto, a discretização espacial introduz modos de vibração que podem não representar a solução real esperada. Quando isso acontece, tais oscilações de alta frequência são denominadas espúrias (no passado parasitas), ou oscilações não-físicas [32, 33]. Introduzir amortecimento numérico pela marcha do tempo é uma maneira de atenuar a excitação dessas oscilações espúrias, e uma ampla revisão sobre o tópico pode ser encontrada em [34].

Portanto, a fim de se obter uma solução precisa, é necessário que a marcha no tempo amortea adequadamente as oscilações espúrias, sem prejudicar as baixas frequências, que efetivamente representam a resposta física do problema. A marcha no tempo aqui utilizada, denominada de agora em diante por *método adaptativo*, apresenta excelentes propriedades dissipativas, sendo que essa dissipação numérica somente é ativada em locais e instantes automaticamente selecionados, a fim de amortecer somente oscilações não-físicas, e manter a qualidade da resposta no resto do domínio e da análise temporal.

Quanto ao custo computacional, a técnica aqui proposta permite a solução do problema de FSI resolvendo-se cada um dos domínios de maneira independente. Portanto, a solução torna-se desacoplada ao longo do tempo - referindo-se à classificação (iii). Essa abordagem apresenta, portanto, grande eficiência computacional, quando comparada a abordagens iterativas, particularmente para problemas de grandes dimensões, que exijam passos de tempo reduzidos ou longas análises [13].

1.4 Objetivos e limitações

Esse trabalho apresenta uma técnica numérica inédita de acoplamento de domínios fluido e sólido, especificamente acústico-elastodinâmico. Essa técnica faz uso de uma marcha no tempo previamente proposta por [35] (com pequenas modificações), a qual foi especialmente desenvolvida para ser utilizada junto ao MEF. Essa marcha foi construída de maneira a conectar a discretização espacial pelo MEF com a discretização temporal pelo MDF, com excelentes resultados de precisão e eficiência.

O método numérico de acoplamento a ser apresentado, denominado a partir de agora por *acoplamento pelo método adaptativo*, é ainda comparado com o acoplamento pelo método de diferenças centrais (MDC), uma vez que essa marcha no tempo é amplamente conhecida na literatura [36]. Essa comparação é feita por duas aplicações numéricas representativas, e ilustra a potencialidade de se utilizar a técnica numérica de acoplamento explícito proposta com ótimos resultados.

Em resumo, esse trabalho apresenta a modelagem teórica dos domínios fluido e sólido, do acoplamento acústico-elastodinâmico, a descrição teórica do MEF e das marchas no tempo utilizadas, a nova técnica numérica de acoplamento proposta e finalmente aplicações numéricas de grande valor representativo.

Não são estudados nesse trabalho meios outros que sólido elastodinâmico ou fluido acústico, apesar de o desenvolvimento teórico da seção 2 permitir alguma flexibilização de modelagem. Ambos os meios são descritos no referencial lagrangiano, particularmente adequado para a formulação do MEF utilizada. Outros modelos de sólido ou fluido também têm grande importância em diversas áreas da engenharia. Como exemplo, escoamentos turbulentos com grandes números de Reynolds podem gerar o desprendimento de vórtices, os quais por sua vez podem excitar uma estrutura sólida nas redondezas; nessa situação, o número adimensional de Strouhal é de grande representatividade, e pode também ser interessante calcular as forças de arrasto (*drag*) e sustentação (*lift*) na estrutura. Outro aspecto não tratado aqui são sólidos com comportamento plástico, quando submetidos a grandes deformações. Essas modelagens fogem ao escopo desse trabalho, e particularmente das técnicas numéricas propostas, uma vez que, dependendo da construção do modelo, pode ser mais adequado o uso de um referencial euleriano, ou de marchas no tempo substancialmente diferentes.

O método de discretização espacial utilizado é o MEF, de ampla aplicação em simulações numéricas diversas. É também comum o uso de outras técnicas para problemas acústico-elastodinâmicos, como o MEC [13, 37--40], o qual não é estudado nesse trabalho. Por fim, é apresentada aqui uma análise no domínio do tempo, apesar de uma das aplicações numéricas utilizar conceitos relativos ao domínio da frequência.

1.5 Organização do trabalho

A organização do texto é dada pela seguinte estrutura. Após as considerações iniciais discutidas na seção 1, é apresentada a derivação das equações que modelam os domínios fluido e sólido na seção 2, respectivamente nas subseções 2.1 e 2.2, bem como as respectivas condições iniciais e de contorno. As equações de compatibilidade nos contornos entre os domínios são mostradas na subseção 2.3.

Em seguida, a seção 3 apresenta a discretização espacial utilizada (MEF) na subseção 3.1 e a discretização temporal na subseção 3.2. Esta última subseção descreve as marchas no tempo empregadas, a saber, o MDC na subseção 3.2.1 e o método adaptativo na subseção 3.2.2. É apresentado então o procedimento de acoplamento numérico entre os domínios na subseção 3.3, para ambas as marchas no tempo, incluindo a técnica inédita proposta nesse trabalho. O nível de detalhe adotado é suficiente para a completa implementação dessas técnicas em futuros trabalhos.

Parte-se então para as aplicações numéricas, na seção 4. Primeiro é analisado o problema da barra fluido-sólido, na subseção 4.1, e em seguida o problema de cristais sônicos, na subseção 4.2. Nessa seção é possível comparar a precisão e eficiência da técnica proposta com um procedimento clássico de acoplamento. Finalmente, considerações conclusivas são feitas na seção 5, anexas a sugestões para trabalhos futuros.

2 Formulação do Problema

Serão abordadas nessa seção as descrições teóricas dos domínios fluido e sólido estudados, assim como o seu acoplamento para o problema global. Alguns detalhes algébricos relativos a demonstrações serão omitidos por não serem o objetivo primário desse trabalho, mas referências bibliográficas adequadas serão indicadas.

Os sistemas de equações governantes de ambos os domínios e o acoplamento serão agora desenvolvidos, com as respectivas condições iniciais e de contorno. Em seguida serão feitas as devidas hipóteses simplificadoras, para posterior discretização e análise numérica na seção 3.

2.1 Domínio fluido

2.1.1 Equações governantes

A descrição utilizada nesse trabalho para o domínio fluido é a formulação acústica para um meio compressível. Informações mais detalhadas sobre o tópico podem ser encontradas em [14--16, 18, 41, 42], e somente as principais equações serão descritas aqui. Para se obter as equações governantes do meio, são utilizadas as seguintes hipóteses simplificadoras para o fluido:

- i. newtoniano;
- ii. isotrópico;
- iii. monofásico;
- iv. invíscido;
- v. pequenas variações de velocidade, pressão e densidade;
- vi. isentrópico;
- vii. irrotacional.

Nessa seção, as variáveis relacionadas ao meio fluido, no referencial lagrangiano e sem considerações energéticas, são a velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, a densidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ e a pressão $p = p(\mathbf{x}, t)$ para uma partícula na posição $\mathbf{x} \in \Omega$ e instante $t \in [0, \infty)$. A notação em negrito indica grandezas vetoriais ou tensoriais. Além disso, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e seus contornos pertencem ao conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, sendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, em que Γ_1 corresponde ao subconjunto

com condições de contorno de Dirichlet (primeiro tipo, ou essencial), e Γ_2 corresponde ao subconjunto com condições de Neumann (segundo tipo, ou natural), e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Inicialmente, parte-se da equação de continuidade, ou de conservação da massa, dada na forma diferencial por:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

onde foi utilizada a notação indicial para grandezas vetoriais ($i = 1, 2$ para 2D e $i = 1, 2, 3$ para 3D) e a notação tradicional para a derivada material (ou total):

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

onde ψ representa um campo qualquer (escalar, vetorial ou tensorial).

Em seguida, recorre-se à equação de Cauchy para conservação do momento linear:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho b_i + \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

onde b_i são forças de domínio por unidade de massa na partícula e τ_{ij} é o tensor de tensões.

É importante lembrar que a Eq.(2.3) é válida para qualquer meio contínuo, e descreve o transporte de momento linear não-relativístico. Utilizando-se as hipóteses (i), (ii) e (iii), obtêm-se as equações para o tensor de tensões no fluido em estudo:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\mu_\nu - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, μ_ν a viscosidade volumétrica, e δ_{ij} o tensor delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$). O tensor de tensões dado pela Eq.(2.4) define as relações constitutivas entre tensões e taxas de deformação no fluido. Inserindo-se a Eq.(2.4) na Eq.(2.3), obtêm-se as equações de momento linear de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\mu_\nu - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right] \quad (2.5)$$

Pela hipótese (iv), obtêm-se as equações de Euler, que correspondem às equações de momento linear de Navier-Stokes para fluidos de viscosidade desprezível:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i \quad (2.6)$$

Em seguida, utiliza-se a hipótese (v) para se linearizar as equações da continuidade e de Euler ao redor de valores de referência, em torno dos quais ocorrem apenas pequenas flutuações das propriedades do fluido. Para tanto, inserem-se nas Eq.(2.6) e (2.1) as seguintes expressões:

$$v_i = V_i + v_i' \quad (2.7a)$$

$$p = p_0 + p' \quad (2.7b)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.7c)$$

onde V_i , p_0 e ρ_0 correspondem aos valores de referência de velocidade, pressão e densidade, e v_i' , p' e ρ' às respectivas flutuações das grandezas. A hipótese (vi) permite expandir a pressão em uma série de Taylor em função da densidade, uma vez que fluxos isentrópicos também são barotrópicos (densidade é função somente da pressão). Utilizando os primeiros termos dessa expansão e a relação entre velocidade de propagação de onda c , pressão acústica e densidade (para entropia constante), tem-se:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.8)$$

Obtém-se, então, com a hipótese (vii), após se cancelarem produtos de flutuações, e desconsiderar forças de corpo, a equação da onda de segunda ordem para um fluido acústico:

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i \partial x_i} - \left(\frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Essa equação representa a propagação de ondas de dilatação com velocidade c em fluidos. Calculando-se o rotacional da equação da onda na forma vetorial, demonstra-se que ondas cisalhantes não se propagam em fluidos invíscidos, portanto, essas ondas só podem ser de dilatação. Mais detalhes sobre ondas de dilatação e cisalhantes serão dados na subseção 2.2.1. A notação relativa a flutuações será omitida, por conveniência, sabendo-se que a pressão a ser resolvida corresponde, por construção, a pequenas variações em torno do valor de referência.

Deve-se ainda definir uma propriedade importante de um fluido acústico, o seu módulo volumétrico (*bulk modulus*) isentrópico, dado por:

$$K \equiv \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.10)$$

Utilizando-se a Eq.(2.8) juntamente à Eq.(2.10), obtém-se a velocidade de propagação da onda no fluido isentrópico (equação de Newton-Laplace):

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (2.11)$$

Pode-se ainda generalizar a Eq.(2.9) ao se adicionar uma função fonte-sumidouro $f = f(\mathbf{x}, t)$ e amortecimento viscoso (proporcional à variação de pressão no tempo, $\frac{\partial p}{\partial t}$) à Eq.(2.9):

$$\frac{\partial p}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\xi}{K} \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + f = 0 \quad (2.12)$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento viscoso para o fluido. Essa formulação, dada pela Eq.(2.12), será a utilizada nesse trabalho, para descrever o fluido acústico.

É possível escrever a equação da onda Eq.(2.9) em termos da flutuação de densidade ρ' ou também da velocidade v_i' . Para o último caso, tem-se a equação da onda na forma vetorial:

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_j \partial x_j} - \left(\frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 v_i'}{\partial t^2} = 0 \quad (2.13)$$

Escrevendo-se a flutuação da velocidade como gradiente de um campo potencial ψ (pela hipótese (vii)), tem-se:

$$v_i' = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

e portanto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j \partial x_j} - \left(\frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

2.1.2 Condições iniciais

As condições iniciais a serem utilizadas juntamente à Eq.(2.12) são, para $t = 0$ e $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$:

$$p(\mathbf{x}, 0) = \bar{p}_0(\mathbf{x}) \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\bar{p}}_0(\mathbf{x}) \quad (2.16b)$$

onde a barra superior indica valores prescritos conhecidos, o subscrito nulo indica o tempo inicial, e o ponto sobrescrito indica a derivada parcial no tempo. Essas condições descrevem a distribuição de pressão e sua derivada no tempo no instante inicial.

2.1.3 Condições de contorno

As condições de contorno a serem utilizadas juntamente à Eq.(2.12) são, para $t > 0$ e $\mathbf{x} \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.17a)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t)n_i(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}, t) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.17b)$$

onde q representa o fluxo de pressão na superfície cujo vetor normal é n_j .

2.2 Domínio sólido

2.2.1 Equações governantes

A descrição utilizada nesse trabalho para o domínio sólido é a formulação elastodinâmica. Novamente, serão enunciadas somente as equações principais do modelo, enquanto mais informações podem ser encontradas nas referências [18--21].

Assumem-se então as seguintes hipóteses para o sólido elastodinâmico:

- i. isotrópico;
- ii. obedece à lei de Hooke generalizada;
- iii. pequenos gradientes de deformação.

Nessa seção, as variáveis relacionadas ao meio sólido, no referencial lagrangiano, são o deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, as tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ e as deformações $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, para uma partícula na posição $\mathbf{x} \in \Omega$ e instante $t \in [0, \infty)$. Novamente, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e seus contornos pertencem ao conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, sendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, em que Γ_1 corresponde ao subconjunto com condições de contorno de Dirichlet (primeiro tipo, ou essencial), e Γ_2 corresponde ao subconjunto com condições de Neumann (segundo tipo, ou natural), e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Utiliza-se também para o domínio sólido a equação de Cauchy para conservação do momento linear. Diferentemente da Eq.(2.3), em que se utiliza a velocidade \mathbf{v} do fluido, utiliza-se agora o deslocamento \mathbf{u} :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho b_i + \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} \quad (2.18)$$

onde ρ é a densidade, b_i são forças de domínio por unidade de massa e σ_{ij} é o tensor de tensões

de Cauchy. As hipóteses (i) e (ii) permitem definir o tensor de tensões na seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.19)$$

onde λ e μ são os parâmetros de Lamé (dependentes do material), relacionados ao módulo de elasticidade E e ao coeficiente de Poisson ν da seguinte maneira:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.20a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.20b)$$

Define-se ainda a relação entre deformações e deslocamentos, pela hipótese (iii):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

Substituindo-se a Eq.(2.21) na Eq.(2.19), e em seguida inserindo-se o resultado na Eq.(2.18), obtêm-se as equações de Navier-Cauchy:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho b_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (2.22)$$

Outra forma de se escrever as equações de Navier-Cauchy é:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = b_i + (c_d^2 - c_s^2) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + c_s^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (2.23)$$

onde as velocidades de onda de dilatação c_d e cisalhante c_s são dadas por:

$$c_d^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} = \frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.24a)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{E}{2\rho(1 + \nu)} \quad (2.24b)$$

sendo que nas últimas igualdades foram utilizadas as definições dos parâmetros de Lamé (Eq.(2.20)).

As ondas de dilatação, cuja velocidade é dada pela Eq.(2.24a), representam perturbações nas partículas na mesma direção de propagação da onda (sendo chamadas também de ondas longitudinais). Já as ondas cisalhantes, cuja velocidade é dada pela Eq.(2.24b), indicam duas direções linearmente independentes, uma sendo a direção de propagação da onda global, outra a

direção das perturbações propriamente ditas (sendo chamadas também de ondas transversais). É possível se demonstrar sem muita dificuldade que ondas de dilatação e cisalhantes se propagam de maneira independente em um sólido, mas essa derivação foge do escopo desse trabalho.

Finalmente, para completude, define-se o módulo volumétrico (*bulk modulus*) para um sólido:

$$K \equiv \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.25)$$

2.2.2 Condições iniciais

As condições iniciais a serem utilizadas juntamente à Eq.(2.23) são, para $t = 0$ e $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$:

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{u}_{i0}(\mathbf{x}) \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\bar{u}}_{i0}(\mathbf{x}) \quad (2.26b)$$

que correspondem a deslocamentos e velocidades no instante inicial.

2.2.3 Condições de contorno

As condições de contorno a serem utilizadas juntamente à Eq.(2.23) são, para $t > 0$ e $\mathbf{x} \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.27a)$$

$$\tau_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j(\mathbf{x}) = \bar{\tau}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.27b)$$

onde τ_i representa as forças de superfície no contorno cujo vetor normal é n_j .

2.3 Acoplamento de domínios fluido e sólido

2.3.1 Equações governantes

A interação entre os domínios ocorre em parte das respectivas fronteiras. Para o problema de interação analisado nesse trabalho, necessita-se de duas igualdades [12, 43]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = q \quad (2.28a)$$

$$\tau_n = -p \quad (2.28b)$$

sendo a primeira igualdade a relação do termo de fronteira $\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$ no domínio sólido com o fluxo q no domínio fluido; e a segunda igualdade a relação das tensões normais τ_n no domínio sólido com a pressão p no domínio fluido. Nessas equações o subscrito n indica direção normal (e não índice vetorial).

3 Formulação Numérica

Essa seção abordará as técnicas numéricas de solução do problema de FSI, descrito de maneira teórica na seção 2. O objetivo da discretização numérica é transformar EDPs descritas em um contínuo em equações referentes a um sistema finito discreto. Será apresentada inicialmente a discretização espacial dos domínios físicos na subseção 3.1, seguida pela discretização temporal na subseção 3.2.

De maneira geral, essas discretizações do espaço e do tempo são feitas de maneira independente. O método inovador utilizado nesse trabalho, porém, cria uma relação entre essas duas discretizações, a fim de obter resultados mais precisos e de baixo custo computacional. Finalmente, discutir-se-á o algoritmo de acoplamento de domínios inédito proposto nesse trabalho na subseção 3.3.

3.1 Discretização espacial

Como discutido anteriormente, a maior parte dos problemas físicos e de engenharia a serem resolvidos atualmente envolve domínios de geometrias complexas, e possíveis não-linearidades, sendo poucos os casos em que é possível encontrar uma solução analítica (se ela existir). Fazem-se, portanto, muito convenientes os métodos numéricos que lidam com praticamente qualquer geometria e comportamento não-linear.

Nesse trabalho, a técnica utilizada na discretização espacial é o método dos elementos finitos (MEF), o qual será brevemente descrito na subseção 3.1.1, sendo seguido pela adequação do problema teórico previamente detalhado à formulação numérica computacional para o domínio fluido na subseção 3.1.2 e para o domínio sólido na subseção 3.1.3.

3.1.1 Método dos elementos finitos

O MEF se originou no século XX, e desde então adquiriu extensa fundamentação teórica e vasta aplicabilidade em diversos tipos de problemas, como mecânica dos sólidos, dinâmica de fluidos ou eletromagnetismo. Dentre as suas vantagens em relação a outros métodos numéricos para solução de EDPs, destacam-se: a capacidade de lidar com geometrias complexas ou dependentes do tempo de maneira simples; tratamento de domínios não-homogêneos de maneira direta; obtenção de precisões de resultado diferentes para regiões específicas do domínio; flexibilidade para modelar não-linearidades. Entre suas desvantagens estão a dificuldade de modelar domínios infinitos ou semi-infinitos, a complexidade relativa de implementação e a

dependência de qualidade da malha para análise adequada. Informações mais detalhadas sobre o método, sua teoria e aplicações, podem ser encontradas nas referências [3, 12, 32, 44].

A formulação do MEF é classificada como um método variacional, uma vez que busca minimizar um funcional de erro, com auxílio de uma função de ponderação. Esse procedimento será sucintamente descrito nas subseções seguintes, uma vez que demonstrações detalhadas podem ser facilmente encontradas na literatura específica indicada.

3.1.2 Equações para domínio fluido

Reescreve-se abaixo a equação da onda (Eq.(2.12)) multiplicada pelo módulo volumétrico K :

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial p}{\partial t} - K \frac{\partial p}{\partial x_i \partial x_i} - K f = 0 \quad (3.1)$$

Multiplica-se a equação por uma função de ponderação $w = w(\mathbf{x})$, e em seguida integra-se o resíduo de erro (procedimento normalmente chamado de resíduos ponderados) [12]. Utilizando-se a primeira identidade de Green, obtém-se a forma fraca para a Eq.(3.1):

$$\int_{\Omega} \left(K \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial p}{\partial t} - K f \right) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (K \bar{q}) w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (K q) w d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p - \bar{p}) \frac{\partial w_i}{\partial n_i} d\Omega \quad (3.2)$$

Uma vez que o MEF é um método de domínio, ignora-se a contribuição de parte dos resíduos nos contornos. Para tanto, nas últimas integrais da Eq.(3.2), faz-se $p = \bar{p}$ e $w = 0$ para Γ_1 , obtendo-se, então:

$$\int_{\Omega} \left(K \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial p}{\partial t} - K f \right) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (K \bar{q}) w d\Gamma \quad (3.3)$$

Adota-se aqui a formulação de Galerkin, onde as funções de ponderação w utilizadas são descritas pelas funções de interpolação (funções de forma), as quais formarão a base do espaço de funções que aproxima o campo solução, para cada elemento finito. Aproximam-se, então, os valores de pressão para cada um dos nós dos elementos finitos pela expressão:

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^J N_j(\mathbf{x}) p_j(t) = \mathbf{N}^T \mathbf{P} \quad (3.4)$$

onde J é o número de nós do elemento finito, \mathbf{N} ou $N_j(\mathbf{x})$ são as funções de interpolação no

espaço, e \mathbf{P} ou $p_j(\mathbf{x})$ o vetor que representa a combinação linear das funções $N_j(\mathbf{x})$ que resulta no valor da variável $p(\mathbf{x}, t)$.

Inserindo a aproximação dada pela Eq.(3.4) na formulação fraca dada pela Eq.(3.3) e reorganizando-se os termos, obtém-se a expressão geral matricial para o problema:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{K}_f \mathbf{P}^n = \mathbf{F}_f^n \quad (3.5)$$

onde os pontos sobrescritos indicam derivadas em relação ao tempo, e o sobrescrito n se refere à variável no tempo t^n . O subscrito f se refere a variáveis para o domínio fluido. Símbolos em negrito indicam arrays (vetores ou matrizes). Assim, \mathbf{P}^n é o vetor pressão no tempo t^n , \mathbf{F}_f^n é o vetor de cargas que atuam nos nós, \mathbf{M}_f é a matriz de massa, \mathbf{C}_f a matriz de amortecimento e \mathbf{K}_f a matriz de compressibilidade, cujas definições são:

$$\mathbf{M}_f = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_f \rho_f \mathbf{N}_f^T d\Omega \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{C}_f = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_f \xi_f \mathbf{N}_f^T d\Omega \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{K}_f = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_f \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f^T d\Omega \quad (3.6c)$$

$$\mathbf{F}_f^n = \bigcup_e \left[\int_{\Gamma_e} K \bar{q} \mathbf{N}_f d\Gamma + \int_{\Omega_e} K f \mathbf{N}_f d\Omega \right] \quad (3.6d)$$

onde \mathbf{N}_f é a matriz de funções de interpolação (relacionada à Eq.(3.4)), \mathbf{B}_f é a matriz gradiente e \mathbf{D}_f é a matriz constitutiva. O símbolo \bigcup_e representa o procedimento de *assembly*, em que matrizes em termos de elemento são combinadas em matrizes a nível global. As matrizes dadas pelas Eq.(3.6) são simétricas nessa formulação, o que facilita operações numéricas de implementação e solução. Tais integrais são calculadas, como de costume em implementações do MEF, pela integração numérica por quadratura de Gauss, em que o resultado é aproximado por uma soma ponderada de valores do integrando em pontos específicos do domínio de integração [45].

Essa discretização espacial, portanto, transforma uma EDP em um sistema de EDO, dado pela Eq.(3.5), o qual pode ser resolvido numericamente com técnicas de discretização temporal, que serão detalhadas na subseção 3.2.

As funções de interpolação resumidas na matriz \mathbf{N}_f são dadas por:

$$\mathbf{N}_f^T = \left[N_1 \cdots N_J \right] \quad (3.7)$$

onde J é o número de nós do elemento finito, e as funções $N_j, j = 1, \dots, J$ são linearmente independentes, a fim de se obter todo o espaço solução possível. Utiliza-se nesse trabalho a formulação isoparamétrica, a qual permite maior flexibilidade geométrica na geração de malha, e funções de forma bilineares. As funções de interpolação podem ser lineares, quadráticas e assim por diante; não é descrita aqui a construção dessas funções de interpolação, por ser um procedimento clássico relacionado ao MEF, enquanto mais informações podem ser obtidas em [3].

Já a matriz gradiente \mathbf{B}_f para um elemento fluido (mostrada aqui para o caso 2D por simplificação) é dada por:

$$\mathbf{B}_f^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_J \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A matriz constitutiva \mathbf{D}_f para o elemento fluido isotrópico é dada por:

$$\mathbf{D}_f = K \mathbf{I} \quad (3.9)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

A implementação da discretização espacial nesse trabalho, para ambos os domínios, faz uso de uma estrutura de dados específica para matrizes esparsas (nas quais grande parte dos coeficientes tem valor nulo), típicas no MEF. Utiliza-se aqui o formato *skyline*, para redução da memória necessária para armazenamento das matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Esse tipo de armazenamento não altera a solução numérica em relação ao armazenamento tradicional, apenas reduz a utilização de memória. Mais informações sobre esse tipo de armazenamento matricial são dadas por [3, 46].

3.1.3 Equações para domínio sólido

Para se obter a formulação em elementos finitos para o domínio sólido, procede-se de maneira semelhante à subseção 3.1.2. Parte-se da Eq.(2.18) com o acréscimo de um termo para incluir amortecimento viscoso (proporcional à variação do deslocamento no tempo, $\frac{\partial u_i}{\partial t}$):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial u_i}{\partial t} - \rho b_i = \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento viscoso do material.

Um procedimento análogo ao aplicado à Eq.(3.1) é feito para o domínio sólido, obtendo-se a forma fraca com resíduos ponderados para a Eq.(3.10):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} W_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial u_i}{\partial t} - \rho b_i \right) w_i d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{\tau}_i w_i d\Gamma \quad (3.11)$$

de onde as integrais de superfície no contorno Γ_1 já foram removidas e W_{ij} representa o tensor obtido por aproximação da derivação espacial de w_i , de maneira análoga à obtenção do tensor ε_{ij} pela derivação espacial de u_i (Eq.(2.21)). Essa equação é análoga à Eq.(3.3).

Em seguida utilizam-se novamente as aproximações de Galerkin, na formulação isoparamétrica, para obter a versão análoga à Eq.(3.5) para o domínio sólido, dada por:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{K}_s \mathbf{U}^n = \mathbf{F}_s^n \quad (3.12)$$

onde o subscrito s se refere a variáveis para o domínio sólido. Agora, \mathbf{U}^n é o vetor deslocamento no tempo t^n , \mathbf{F}_s^n é o vetor de forças que atuam nos nós, \mathbf{M}_s é a matriz de massa, \mathbf{C}_s a matriz de amortecimento e \mathbf{K}_s a matriz de rigidez, cujas definições são:

$$\mathbf{M}_s = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_s \rho_s \mathbf{N}_s^T d\Omega \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{C}_s = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_s \xi_s \mathbf{N}_s^T d\Omega \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{K}_s = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_s \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s^T d\Omega \quad (3.13c)$$

$$\mathbf{F}_s^n = \bigcup_e \left[\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_s \bar{\tau}_n d\Gamma + \int_{\Omega_e} \rho_s \mathbf{N}_s \mathbf{b} d\Omega \right] \quad (3.13d)$$

onde \mathbf{N}_s é a matriz de funções de interpolação, \mathbf{B}_s é a matriz de deformação e \mathbf{D}_s é a matriz constitutiva. O símbolo \bigcup_e representa o procedimento de *assembly*, em que matrizes em termos de elemento são combinadas em matrizes a nível global. Mais uma vez, pode-se buscar mais informações sobre a dedução dessas equações nas referências indicadas. As funções de interpolação resumidas na matriz \mathbf{N}_s são dadas, para o caso 2D, por:

$$\mathbf{N}_s^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_J & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_J \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde J é o número de nós do elemento finito, e as funções N_j , $j = 1, \dots, J$ são linearmente independentes, a fim de se obter todo o espaço solução possível.

Já a matriz de deformação \mathbf{B}_s para um elemento sólido é dada por:

$$\mathbf{B}_s^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_J & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_J \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Assumiui-se um meio homogêneo ao se derivar as equações governantes do domínio sólido na subseção 2.2.1, mas tal derivação aplica-se a cada elemento finito, de maneira que pode-se utilizar elementos com propriedades diferentes uns dos outros, para o caso de um domínio heterogêneo. Essa consideração vale tanto para o domínio sólido quanto para o domínio fluido. Consideram-se aqui duas configurações possíveis para a matriz constitutiva \mathbf{D}_s para o elemento sólido:

i. Estado plano de tensão:

$$\mathbf{D}_s = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ii. Estado plano de deformação:

$$\mathbf{D}_s = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Para os problemas de acoplamento aqui considerados será utilizada a formulação de estado plano de deformação.

3.2 Discretização temporal

Uma vez que nesse trabalho resolvem-se numericamente problemas dinâmicos, é necessário se discutir a discretização temporal utilizada. Caso efeitos transientes não fossem importantes

na análise, o problema seria classificado como de estática, e os termos relacionados às derivadas temporais nas Eq.(3.5) e (3.12) poderiam ser ignorados, restando então somente um sistema de equações algébricas a ser resolvido, através de técnicas de álgebra linear computacional.

O problema a ser resolvido na dinâmica, porém, é um sistema de EDOs, sendo o número total de equações igual ao número total de graus de liberdade não-prescritos do domínio. Portanto, para um meio modelado por uma grandeza escalar (como é o caso do domínio fluido, descrito pela variável pressão), o número de graus de liberdade para cada nó é 1; para um meio modelado por uma grandeza vetorial (como é o caso do domínio sólido, descrito pela variável deslocamento), o número de graus de liberdade por nó é igual ao de dimensões espaciais analisadas, ou seja, 1 para 1D, 2 para 2D e 3 para 3D.

O método numérico empregado na discretização temporal é o das diferenças finitas (MDF), o qual aproxima as equações diferenciais por equações de diferenças, dividindo-se o domínio temporal em quantos intervalos for necessário para devida estabilidade e acurácia. Uma abordagem teórica sobre o MDF é dada por [1, 47], enquanto [3], entre outras referências, dá um tratamento ao tópico mais orientado à implementação numérica.

Dentre os numerosos métodos de discretização temporal para EDOs disponíveis na literatura, dois serão utilizados nesse trabalho. O primeiro deles, diferenças centrais, é um método clássico e bem conhecido [36], sendo portanto um bom comparativo em relação a outras técnicas; esse método será descrito na subseção 3.2.1. O segundo método, denominado aqui por adaptativo, é um procedimento especialmente desenvolvido para resolver problemas de dinâmica juntamente ao MEF. Foi desenvolvido por Soares Jr. [35], apresentando excelentes resultados na atenuação de oscilações espúrias em problemas hiperbólicos; esse método será descrito na subseção 3.2.2. Serão apresentadas, para ambos os métodos, sua formulação e principais propriedades.

3.2.1 Método de diferenças centrais

O método de diferenças centrais (MDC), aproxima os operadores de derivada segunda e primeira com as seguintes expressões:

$$\ddot{\mathbf{X}}^n \approx \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{X}^{n-1} - 2\mathbf{X}^n + \mathbf{X}^{n+1}) \quad (3.18a)$$

$$\dot{\mathbf{X}}^n \approx \frac{1}{2\Delta t} (-\mathbf{X}^{n-1} + \mathbf{X}^{n+1}) \quad (3.18b)$$

onde $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ é o passo de tempo adotado, ou seja, a diferença entre dois instantes de tempo consecutivos quaisquer. Portanto, assumindo-se uma discretização temporal uniforme, calcula-se

a solução numérica apenas para os instantes no tempo: 0 ($n = 0$), Δt ($n = 1$), $2\Delta t$ ($n = 2$), \dots . Uma vez que não se consideram comportamentos não-lineares nesse trabalho, não se faz necessário o uso de discretização temporal não uniforme, ou seja, passos de tempo que variam ao longo da análise. Essas aproximações dadas pelas Eq.(3.18) geram erros da ordem $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, ou seja, o erro na solução numérica varia com o quadrado do passo de tempo Δt .

Repetem-se aqui as Eq.(3.5) e (3.12), omitindo-se o subscrito relativo a matrizes de domínio fluido ou sólido, e utilizando-se uma variável genérica \mathbf{X} para representar respectivamente a pressão ou o deslocamento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^n + \mathbf{K}\mathbf{X}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.19)$$

Substituindo-se então as aproximações dadas pelas Eq.(3.18) na Eq.(3.19), obtém-se a forma recursiva para o MDC:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{F}^n - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{X}^n - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{X}^{n-1} \quad (3.20)$$

Observa-se que, uma vez que se tenha a Eq.(3.20), pode-se calcular a variável \mathbf{X}^{n+1} apenas com informação de passos de tempo anteriores, no caso, \mathbf{X}^n e \mathbf{X}^{n-1} . É importante lembrar que esse método requer que a aceleração inicial $\ddot{\mathbf{X}}^0$ seja calculada (caso não disponível) para se inicializar a marcha no tempo, o que acresce certa complexidade de implementação. Para tanto, utiliza-se a seguinte expressão:

$$\ddot{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{F}^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^0 - \mathbf{K}\mathbf{X}^0 \right) \quad (3.21)$$

seguida de:

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^0 - \Delta t \dot{\mathbf{X}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}^0 \quad (3.22)$$

para então se calcular a solução para o passo de tempo $n = 1$.

O termo entre parêntesis no lado esquerdo da Eq.(3.20) é denominado *matriz de massa efetiva*, aqui representada por $\hat{\mathbf{M}}$; já a soma de todos os termos do lado direito da Eq.(3.20) é denominado *vetor de carga efetiva*, aqui representado por $\hat{\mathbf{F}}$. É recorrente que se façam as matrizes de massa \mathbf{M} e amortecimento \mathbf{C} diagonais (em geral sem prejuízo à solução numérica), de maneira a tornar a matriz de massa efetiva também diagonal. Essa diagonalização é feita, por exemplo, concentrando-se todos os elementos das respectivas linhas e colunas em cada um dos elementos da diagonal. Denominam-se matrizes ‘cheias’ de *consistentes* e matrizes diagonalizadas de *inconsistentes* (ou *lumped*). Assim, a diagonalização reduz a Eq.(3.20) a um sistema de equações algébricas, que pode ser revolido de maneira direta, sem necessidade de

triangularização de matrizes, o que reduz notavelmente os custos computacionais.

Outra importante consideração sobre o MDC diz respeito à estabilidade. Trata-se de um método condicionalmente estável, ou seja, é preciso manter o passo de tempo Δt inferior a um determinado valor para garantir que erros intrínsecos às computações não sejam possivelmente amplificados, invalidando a solução numérica. Para esse método, o valor crítico de Δt para garantir estabilidade é dado por [1]:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3.23)$$

onde ω_{max} é a máxima frequência natural do modelo, a qual é obtida pela solução do problema de autovalor generalizado:

$$\mathbf{KX} = \omega^2 \mathbf{MX} \quad (3.24)$$

sendo ω_{max} a maior raiz quadrada dos autovalores ω^2 . Uma vez que nesse cálculo são utilizadas as matrizes de rigidez e massa globais, incorre um elevado custo computacional, especialmente para problemas com muitos graus de liberdade (malhas refinadas). Existem, todavia, métodos dedicados ao cálculo de autovalores de maneira eficiente, obtendo-se somente valores máximos necessários à essa análise. Uma revisão abrangente do problema de autovalor generalizado é dada por [48]. Nesse trabalho utilizam-se rotinas do pacote LAPACK para cálculo de autovalores e autovetores de matrizes simétricas e positivas definidas [49].

O Algoritmo (1) descreve a implementação do MDC. Nota-se que as constantes de integração são calculadas somente uma vez em toda a análise (para Δt constante), na linha (2). Observa-se que, caso a matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}}$ seja feita diagonal como descrito anteriormente, a sua inversa é calculada de maneira trivial, como mostrado na linha (9). Caso, porém, a matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}}$ não seja diagonal, aplica-se em geral um processo de triangularização para redução de custo computacional, como indicado nas linhas (12) e (15). Nesse trabalho, quando há necessidade de inverter matrizes consistentes, utiliza-se uma rotina específica de triangularização e solver para matrizes no formato *skyline*.

Algoritmo 1: Método de diferenças centrais

Entrada: $\mathbf{X}^0, \dot{\mathbf{X}}^0$ **Saída:** $\mathbf{X}^{1, \dots, N}$ 1 Construa as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} pelas Eq.(3.6) e (3.13)2 Escolha $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$ e calcule as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t} \quad a_2 = 2a_0 \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

3 Calcule $\ddot{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^0 - \mathbf{K}\mathbf{X}^0)$ 4 Calcule $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 - \Delta t \dot{\mathbf{X}}^0 + a_3 \ddot{\mathbf{X}}^0$ 5 Construa a matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$ 6 Se $\hat{\mathbf{M}}$ é diagonal então7 **Para** $n = 0, \dots, (N - 1)$ **faça**8 $\left| \begin{array}{l} \text{Calcule a carga efetiva } \hat{\mathbf{F}}^n = \mathbf{F}^n - (\mathbf{K} - a_2 \mathbf{M}) \mathbf{X}^n - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) \mathbf{X}^{n-1} \end{array} \right.$ 9 $\left| \begin{array}{l} \text{Calcule } X_i^{n+1} = \frac{\hat{F}_i^n}{\hat{M}_{ii}} \end{array} \right.$ 10 **Fim**11 **Senão**12 $\left| \begin{array}{l} \text{Triangularize } \hat{\mathbf{M}}: \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{LDL}^T \end{array} \right.$ 13 **Para** $n = 0, \dots, (N - 1)$ **faça**14 $\left| \begin{array}{l} \text{Calcule a carga efetiva } \hat{\mathbf{F}}^n = \mathbf{F}^n - (\mathbf{K} - a_2 \mathbf{M}) \mathbf{X}^n - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) \mathbf{X}^{n-1} \end{array} \right.$ 15 $\left| \begin{array}{l} \text{Calcule } \mathbf{X}^{n+1} \text{ por } \mathbf{LDL}^T \mathbf{X}^{n+1} = \hat{\mathbf{F}}^n \end{array} \right.$ 16 **Fim**17 **Fim**

3.2.2 Método adaptativo

Esse método de discretização temporal parte da Eq.(3.19) integrada num intervalo correspondente a Δt :

$$\mathbf{M}_e \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \ddot{\mathbf{X}}_e d\tau + \mathbf{C}_e \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{\mathbf{X}}_e d\tau + \mathbf{K}_e \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{X}_e d\tau = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{F}_e d\tau \quad (3.25)$$

onde o subscrito e indica que as variáveis são escritas para cada elemento finito, e τ é uma variável de integração temporal independente. São feitas então as seguintes aproximações para as integrais:

$$\mathfrak{J}_{\ddot{\mathbf{X}}_e}^{n+\frac{1}{2}} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \ddot{\mathbf{X}}_e d\tau \approx \dot{\mathbf{X}}_e^{n+1} - \dot{\mathbf{X}}_e^n \quad (3.26a)$$

$$\mathfrak{J}_{\dot{\mathbf{X}}_e}^{n+\frac{1}{2}} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{\mathbf{X}}_e d\tau \approx \mathbf{X}_e^{n+1} - \mathbf{X}_e^n \quad (3.26b)$$

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{X}_e}^{n+\frac{1}{2}} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{X}_e d\tau \approx \Delta t \mathbf{X}_e^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\gamma_e^n \dot{\mathbf{X}}_e^{n+1} + \alpha_e^n \dot{\mathbf{X}}_e^n \right) \quad (3.26c)$$

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{F}_e}^{n+\frac{1}{2}} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{F}_e d\tau \approx \frac{1}{2} \Delta t \left(\mathbf{F}_e^{n+1} + \mathbf{F}_e^n \right) \quad (3.26d)$$

onde γ_e^n e α_e^n são parâmetros do método adaptativo, e serão detalhados mais a frente. $\mathfrak{J}_{\mathbf{F}_e}^{n+\frac{1}{2}}$ representa a aproximação da integral do vetor carga no lado direito da Eq.(3.25), a qual pode ser calculada por várias técnicas numéricas, sem grande prejuízo à estabilidade ou à acurácia do método. Nesse trabalho utiliza-se a aproximação trapezoidal.

Calcula-se a pressão ou deslocamento pela seguinte expressão:

$$\mathbf{X}_e^{n+1} \approx \mathbf{X}_e^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(\dot{\mathbf{X}}_e^n + \dot{\mathbf{X}}_e^{n+1} \right) \quad (3.27)$$

Substituindo-se então as Eq.(3.26) e (3.27) na Eq.(3.25), e organizando os termos, encontra-se a forma recursiva para o método adaptativo:

$$\left(\mathbf{M}_e + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e + \frac{1}{2} \gamma_e^n \Delta t^2 \mathbf{K}_e \right) \dot{\mathbf{X}}_e^{n+1} = \frac{1}{2} \Delta t \left(\mathbf{F}_e^{n+1} + \mathbf{F}_e^n \right) + \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{X}}_e^n - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{X}}_e^n - \mathbf{K}_e \left(\Delta t \mathbf{X}_e^n + \frac{1}{2} \alpha_e^n \Delta t^2 \dot{\mathbf{X}}_e^n \right) \quad (3.28)$$

Portanto, calculam-se as derivadas temporais das pressões ou as velocidades pela Eq.(3.28), e em seguida as pressões ou deslocamentos pela Eq.(3.27), não havendo nenhuma necessidade de cálculo de grandezas relativas a derivadas segundas no tempo (como acelerações). Trata-se, então, de um método autoinicializável, que dispensa a computação de termos de derivadas segundas iniciais (o que em geral requer mais um sistema de equações) e de procedimentos multipasso para valores iniciais (descritos para o MDC pelas Eq.(3.21) e (3.22)).

O parâmetro γ_e^n determinará se o método será explícito ou implícito, uma vez que

acompanha a matriz de rigidez \mathbf{K}_e no lado esquerdo da Eq.(3.28). Já a escolha do parâmetro α_e^n , o qual é responsável pela introdução de amortecimento numérico na análise, depende de um fator de oscilação ϕ_e^n , que varia para cada elemento e cada passo de tempo, e é dado por:

$$\phi_e^n = \sum_{j=1}^J \left| |X_j^n - X_j^{n-2}| - |X_j^n - X_j^{n-1}| - |X_j^{n-1} - X_j^{n-2}| \right| \quad (3.29)$$

onde J é o número de nós do elemento finito. Para meios escalares, cada componente de X_j é o próprio valor do campo (para o domínio fluido, a pressão). Para meios vetoriais, cada componente de X_j é o módulo do vetor resultante no nó (para o domínio sólido, é o módulo do vetor deslocamento); ou seja, se o nó j de um elemento finito tem componentes u_x , u_y e u_z de deslocamento nas respectivas direções x , y e z , tem-se: $X_j = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

O fator ϕ_e^n busca representar oscilações da solução. Isso se dá da seguinte maneira: caso a variação do valor de X_j entre dois passos de tempo consecutivos ($|X_j^n - X_j^{n-2}|$) seja exatamente a soma das variações em cada um dos passos ($|X_j^n - X_j^{n-1}| + |X_j^{n-1} - X_j^{n-2}|$), ϕ_e^n deve ser nulo; caso ϕ_e^n não seja nulo, houve oscilação. Naturalmente, a implementação numérica considera para nulidade um valor inferior a uma tolerância extremamente pequena (nesse trabalho, da ordem de 10^{-14}). Uma característica do comportamento do fator ϕ_e^n é que, quando um nó qualquer seja responsável por ativar o amortecimento numérico (ou seja, fazer $\phi_e^n > 0$ na Eq.(3.29)), todos os elementos finitos conectados por esse nó serão amortecidos; portanto, a ativação da dissipação por esse método nunca ativa apenas um elemento, variando de acordo com a localização do nó (fronteira ou domínio). Esse comportamento será observado nas aplicações numéricas na seção 4.

Pode-se ainda utilizar para o cálculo do fator de oscilação ϕ_e^n não somente uma, mas duas oscilações seguidas. Essa escolha busca reduzir um eventual amortecimento numérico excessivo, uma vez que restringe ainda mais a ativação do amortecimento quando comparada ao uso de apenas uma oscilação. A comparação entre essas duas possibilidades no cálculo de ϕ_e^n será ilustrada na subseção 4.1.3.

Uma vez calculado o fator de oscilação ϕ_e^n para o elemento e como descrito pela Eq.(3.29), determina-se então o parâmetro α_e^n , de acordo com o regime adotado na simulação (explícito ou implícito), segundo as expressões:

i. Configuração explícita:

$$\gamma_e^n = 0 \quad (3.30)$$

seguido de:

$$\begin{cases} \alpha_e^n = 1 & \text{caso } \phi_e^n = 0 \\ \alpha_e^n = \frac{4}{\omega_{e,max} \Delta t} - 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.31)$$

ii. Configuração implícita:

$$\gamma_e^n = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{1}{4} \omega_{e,max} \Delta t \right) \quad (3.32)$$

seguido de:

$$\begin{cases} \alpha_e^n = 1 - \gamma_e^n & \text{caso } \phi_e^n = 0 \\ \alpha_e^n = 2 \sqrt{2 \gamma_e^n + \left(\frac{2}{\omega_{e,max} \Delta t} \right)^2} - (1 + \gamma_e^n) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $\omega_{e,max}$ é a maior frequência natural do elemento finito. Para se encontrar as frequências naturais, deve-se resolver o problema de autovalor generalizado em nível local:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{X}_e = \omega_e^2 \mathbf{M}_e \mathbf{X}_e \quad (3.34)$$

sendo que agora resolve-se o problema com as matrizes locais do elemento finito (e não as matrizes globais, como na Eq.(3.24)), e apenas uma vez (antes da marcha no tempo), sendo portanto de baixíssimo custo computacional.

Nota-se que a configuração explícita descrita pelas Eq.(3.30) e (3.31) é obtida fazendo-se $\gamma_e^n = 0$ nas Eq.(3.32) e (3.33).

Finalmente, esse trabalho adiciona uma correção simples às frequências naturais locais, correção que busca manter o amortecimento numérico proposto pelo método adaptativo ainda eficaz para malhas cujos elementos apresentam maior variabilidade espacial, e por conseguinte, maior variabilidade de $\omega_{e,max}$. Na verdade, trata-se de uma limitação ao valor de α_e , através da modificação do valor de $\omega_{e,max}$ para alguns elementos, uma vez que esses dois parâmetros se relacionam pelas Eq.(3.31) e (3.33).

Essa correção se dá pelo seguinte procedimento, em termos de elemento: calcula-se a máxima frequência natural local $\omega_{e,max}$, como descrito pela Eq.(3.34); caso o valor de $(\omega_{e,max} \Delta t)$ seja menor que o valor que produz amortecimento máximo para esse elemento – aqui denominado por $(\omega_{e,max} \Delta t)^*$ –, faz-se $(\omega_{e,max} \Delta t) = (\omega_{e,max} \Delta t)^*$; caso contrário, mantém-se o valor encontrado inicialmente. No método adaptativo, o valor que produz amortecimento máximo para um elemento e é dado por:

$$(\omega_{e,max} \Delta t)^* = \frac{2}{\sqrt{4 - 2\gamma_e}} \quad (3.35)$$

e o procedimento de verificação descrito acima é expresso por:

$$\begin{cases} \omega_{e,max} = \frac{(\omega_{e,max} \Delta t)^*}{\Delta t} & \text{caso } (\omega_{e,max} \Delta t) < (\omega_{e,max} \Delta t)^* \\ \omega_{e,max} = \omega_{e,max} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.36)$$

Após essa correção de $\omega_{e,max}$, atualiza-se o parâmetro α_e pelas Eq.(3.31) e (3.33). Não se altera, entretanto, o valor de γ_e^n calculado anteriormente nessa correção.

Apresenta-se no Algoritmo (2) a implementação do método adaptativo descrito para a configuração explícita ($\gamma_e^n = 0$). Constrói-se sempre para a configuração explícita a matriz de massa efetiva na forma diagonal, como de costume para marchas explícitas. Ainda é possível manter a matriz de massa efetiva cheia, porém os resultados de maneira geral ficam piores, e o custo computacional significavelmente maior [3].

Algoritmo 2: Método adaptativo explícito

Entrada: $\mathbf{X}^0, \dot{\mathbf{X}}^0$ **Saída:** $\mathbf{X}^{1, \dots, N}, \dot{\mathbf{X}}^{1, \dots, N}$

1 Construa as matrizes locais \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e e \mathbf{K}_e para cada elemento e pelas Eq.(3.6) e (3.13)

2 Calcule $\omega_{e,max}$ para cada elemento e pelas Eq.(3.34) e (3.36)

3 Escolha $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \min_e \left(\frac{2}{\omega_{e,max}} \right)$ e calcule as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{2} \Delta t \quad a_1 = a_0 \Delta t$$

4 Construa a matriz de massa efetiva diagonal local $\hat{\mathbf{M}}_e = (\mathbf{M}_e + a_0 \mathbf{C}_e)$ e faça seu *assembly*

5 Para $n = 0, \dots, (N - 1)$ faça

6 Calcule o fator de oscilação ϕ_e^n pela Eq.(3.29) para cada elemento

7 Utilize o valor de α_e^n (função de ϕ_e^n) pelas Eq.(3.31)

8 Calcule a carga efetiva local

$$\hat{\mathbf{F}}_e^n = a_0 (\mathbf{F}_e^{n+1} + \mathbf{F}_e^n) + \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{X}}_e^n - a_0 \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{X}}_e^n - \mathbf{K}_e (\Delta t \mathbf{X}_e^n + a_1 \alpha_e^n \dot{\mathbf{X}}_e^n) \text{ e faça seu } assembly$$

9 Calcule $\dot{X}_i^{n+1} = \frac{\hat{F}_i^n}{\hat{M}_{ii}}$

10 Calcule $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + a_0 (\dot{\mathbf{X}}^n + \dot{\mathbf{X}}^{n+1})$

11 **Fim**

Em seguida, apresenta-se no Algoritmo (3) a implementação do método adaptativo para a configuração implícita ($\gamma_e^n \neq 0$). Assume-se aqui que não há alterações das propriedades de massa e rigidez dos elementos ao longo do tempo, de maneira que $\gamma_e^n = \gamma_e$, ou seja, esse parâmetro varia somente para cada elemento, mas é constante no tempo. Assim, a matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}}$ é construída apenas uma vez na análise, na linha (3). Se esse não fosse o caso, dever-se-ia calcular γ_e^n e triangularizar $\hat{\mathbf{M}}$ dentro do laço de tempo.

Algoritmo 3: Método adaptativo implícito

Entrada: $\mathbf{X}^0, \dot{\mathbf{X}}^0$ **Saída:** $\mathbf{X}^{1, \dots, N}, \dot{\mathbf{X}}^{1, \dots, N}$

- 1 Construa as matrizes locais \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e e \mathbf{K}_e para cada elemento e pelas Eq.(3.6) e (3.13)
- 2 Calcule $\omega_{e,max}$ para cada elemento e pela Eq.(3.34)
- 3 Calcule γ_e para cada elemento e pela Eq.(3.32)
- 4 Corrija os valores de $\omega_{e,max}$ para cada elemento e pela Eq.(3.36)
- 5 Calcule as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{2} \Delta t \quad a_1 = a_0 \Delta t$$

- 6 Construa a matriz de massa efetiva local $\hat{\mathbf{M}}_e = (\mathbf{M}_e + a_0 \mathbf{C}_e + a_1 \gamma_e \mathbf{K}_e)$ e faça seu *assembly*
 - 7 Triangularize $\hat{\mathbf{M}}$: $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{LDL}^T$
 - 8 **Para** $n = 0, \dots, (N - 1)$ **faça**
 - 9 Calcule o fator de oscilação ϕ_e^n pela Eq.(3.29) para cada elemento
 - 10 Utilize o valor de α_e^n (função de ϕ_e^n) pelas Eq.(3.33)
 - 11 Calcule a carga efetiva local
 $\hat{\mathbf{F}}_e^n = a_0(\mathbf{F}_e^{n+1} + \mathbf{F}_e^n) + \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{X}}_e^n - a_0 \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{X}}_e^n - \mathbf{K}_e(\Delta t \mathbf{X}_e^n + a_1 \alpha_e^n \dot{\mathbf{X}}_e^n)$ e faça seu *assembly*
 - 12 Calcule $\dot{\mathbf{X}}^{n+1}$ por $\mathbf{LDL}^T \dot{\mathbf{X}}^{n+1} = \hat{\mathbf{F}}^n$
 - 13 Calcule $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + a_0(\dot{\mathbf{X}}^n + \dot{\mathbf{X}}^{n+1})$
 - 14 **Fim**
-

O cálculo do fator de oscilação ϕ_e^n de acordo com a Eq.(3.29) utiliza informações do campo em passos de tempo anteriores ao corrente. Caso se utilize apenas uma oscilação, é necessário se conhecer \mathbf{X}^{n-1} e \mathbf{X}^{n-2} . Observa-se na linha (6) do Algoritmo (2) e na linha (9) do Algoritmo (3) que, para o primeiro passo de tempo do laço ($n = 0$), seria necessário conhecer os valores do potencial \mathbf{X}^{-1} e \mathbf{X}^{-2} . Entretanto, não é necessário calcular esses vetores através de procedimentos matriciais trabalhosos. Pode-se apenas assumir $\mathbf{X}^{-2} = \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^0$ (portanto, $\phi_e^n = 0$), uma vez que posteriores oscilações não-físicas serão adequadamente amortecidas ao longo da análise. O mesmo raciocínio é válido para o caso de duas oscilações subsequentes.

É necessária uma discussão acerca dos parâmetros γ_e^n e α_e^n introduzidos por esse método adaptativo. O objetivo principal é utilizar tais parâmetros para induzir uma adaptação temporal e espacial adequada para alta acurácia, estabilidade e redução de erros da solução numérica.

O parâmetro γ_e^n é configurado para aumentar a acurácia e garantir estabilidade na análise, reduzindo erros de alongamento de período. Como apresentado pelas Eq.(3.30) e (3.32), γ_e^n é função da maior frequência de vibração do elemento finito, e portanto, função de sua geometria e propriedades físicas; caso essas não se alterem durante a análise (caso linear clássico, por exemplo), o parâmetro não varia com o tempo ($\gamma_e^n = \gamma_e$). Assim, a matriz de massa efetiva não varia com o tempo, sendo montada apenas uma vez, sem necessidade de se computá-la a cada passo de tempo.

Já o parâmetro α_e^n ativa amortecimento numérico seletivamente, a fim de reduzir oscilações espúrias (não-físicas), que eventualmente ocorrem devido à excitação de modos não-físicos introduzidos pela discretização espacial [32]. Entretanto, o emprego dessa dissipação numérica deve ser feito com cautela, uma vez que introdução de amortecimento nos modos de baixa frequência prejudica a qualidade da solução. Para esse método, não existe amortecimento numérico se $\alpha_e^n = 1 - \gamma_e^n$, mas somente se $\alpha_e^n > 1 - \gamma_e^n$. Por essa razão, calcula-se α_e^n nas Eq.(3.31) e (3.33) sem dissipação caso $\phi_e^n = 0$, uma vez que, se não houver oscilações espúrias, não é necessário amortecer a solução naquele elemento. Caso, porém, existam oscilações, tornando $\phi_e^n > 0$, calcula-se α_e^n de maneira a se ter o máximo amortecimento na maior frequência de vibração local do elemento finito. Portanto, o fator de oscilação ϕ_e^n essencialmente determina se deve ou não haver amortecimento numérico local na solução, e uma vez que é calculado para cada passo de tempo, e cada elemento, confere a característica adaptativa ao método.

Quanto à estabilidade e à acurácia do método, sua análise é descrita com detalhes em [35], porém alguns aspectos serão citados aqui. Primeiramente, de acordo com a escolha dos parâmetros γ_e^n e α_e^n dada nesse trabalho, o método torna-se incondicionalmente estável ou condicionalmente estável; para a configuração explícita, tem-se $\Delta t_{cr} = 2/\omega_{max}$ (mesmo limite do MDC), enquanto que para a configuração implícita aqui descrita obtém-se estabilidade independente do valor de Δt . Mais considerações sobre estabilidade serão dadas quando se considera acoplamento de domínios, na subseção 3.3.

Em segundo lugar, o método é de segunda ordem ($\mathcal{O}(\Delta t^2)$) para $\alpha_e^n = 1 - \gamma_e^n$, e de ordem reduzida caso $\alpha_e^n > 1 - \gamma_e^n$. Essa perda de acurácia na presença de amortecimento numérico, porém, é facilmente compensada pela capacidade do método de dissipar oscilações espúrias, o que será demonstrado nas aplicações numéricas posteriormente. Além disso, caso não seja necessário o amortecimento numérico, o método automaticamente torna-se uma técnica de segunda ordem.

Em resumo, esse método de discretização temporal representa uma técnica robusta e ao mesmo tempo flexível no cálculo de problemas de dinâmica em MEF. É um método de relativamente simples implementação, incondicionalmente estável (na configuração implícita), não necessita de nenhum procedimento iterativo, é autoinicializável, dissipa com precisão

oscilações espúrias e finalmente provê adaptação automática, sem necessidade de escolha de parâmetros por parte do usuário (o que é potencialmente inconveniente para usuários não-experientes).

3.3 Acoplamento numérico de domínios fluido e sólido

Até então, discutiram-se os métodos de discretização temporal para um domínio genérico (fluido ou sólido). Descreve-se agora o acoplamento numérico dos domínios, seguindo as considerações teóricas, descritas na subseção 2.3, particularmente pelas Eq.(2.28).

De maneira geral, pode-se descrever o acoplamento de domínios numa abordagem explícita (sendo o sentido de *explícita* nesse contexto distinto do sentido utilizado quando se refere a marchas no tempo) da seguinte maneira: resolve-se cada domínio separadamente, como se fosse apenas um problema independente, de acordo com as técnicas descritas nas subseções 3.1 e 3.2. Em seguida, calculam-se as forças ou cargas de acoplamento no contorno comum entre os domínios. Finalmente, transfere-se essa carga para o outro domínio, particularmente para os nós compartilhados pelos dois domínios, localizados no contorno comum. Portanto, para cada domínio, dois procedimentos devem ser implementados: a solução independente e o cálculo das forças de fronteira.

Para se calcular as cargas que são transmitidas de um domínio para o outro, utilizam-se as Eq.(2.28). As forças de acoplamento atuando sobre o domínio fluido, devido ao domínio sólido, são obtidas da Eq.(2.28a) e descritas em termos de elemento pela expressão [12]:

$$\mathbf{F}_{e,f-s}^n = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_f K_f q^n d\Gamma = -K_f \rho_f \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_f \mathbf{n}_f^T \mathbf{N}_s^T d\Gamma \ddot{\mathbf{U}}_e^n = -K_f \rho_f \mathbf{Q}_e \ddot{\mathbf{U}}_e^n \quad (3.37)$$

onde \mathbf{n}_f é o versor normal que aponta para fora do elemento fluido e $\ddot{\mathbf{U}}_e$ é o vetor contendo as acelerações dos nós que se localizam na fronteira, para o elemento sólido em questão. A forma de se tratar esse vetor aceleração será discutida nas próximas subseções. A matriz de acoplamento \mathbf{Q} é definida em termos de elemento pela expressão:

$$\mathbf{Q}_e \equiv \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_f \mathbf{n}_f^T \mathbf{N}_s^T d\Gamma \quad (3.38)$$

De maneira análoga, as forças de acoplamento atuando sobre o domínio sólido, devido ao domínio fluido, são obtidas da Eq.(2.28b) e descritas de maneira numérica pela expressão:

$$\mathbf{F}_{e,s-f}^n = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_s \boldsymbol{\tau}^n d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_s \mathbf{n}_f \mathbf{N}_f^T d\Gamma \mathbf{P}_e^n = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{P}_e^n \quad (3.39)$$

onde \mathbf{P}_e é o vetor contendo as pressões dos nós que se localizam na fronteira, para o elemento fluido em questão.

Portanto, as duas forças de acoplamento descritas pelas Eq.(3.37) e (3.39) são adicionadas à equação dinâmica global para cada domínio, obtendo-se:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{K}_f \mathbf{P}^n = \mathbf{F}_f^n + \mathbf{F}_{f-s}^n \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{K}_s \mathbf{U}^n = \mathbf{F}_s^n + \mathbf{F}_{s-f}^n \quad (3.40b)$$

Ressalta-se que, na ausência de alterações da geometria da fronteira ou das suas propriedades ao longo da análise, a matriz de acoplamento \mathbf{Q} dada em termos de elemento pela Eq.(3.38) só é calculada uma vez durante todo o procedimento, não representando, portanto, custo computacional significativo.

3.3.1 Acoplamento pelo método de diferenças centrais

Como anteriormente descrito, o acoplamento pelo método de diferenças centrais é implementado principalmente como critério comparativo, uma vez que o MDC é bastante popular no estudo de dinâmica, e pode ser comparado com a nova técnica de acoplamento com o método adaptativo proposta.

O cálculo da aceleração $\ddot{\mathbf{U}}^n$ a ser utilizada na Eq.(3.37) faz uso novamente da aproximação de diferenças centrais dada pela Eq.(3.18a), repetida aqui para o deslocamento:

$$\ddot{\mathbf{U}}^n \approx \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{U}^{n-1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n+1}) \quad (3.41)$$

Descreve-se no Algoritmo (4) o procedimento implementado para o acoplamento de domínios pelo método de diferenças centrais, para passos de tempo no intervalo $n = 1, \dots, N$. Esse algoritmo foca somente no acoplamento de domínios, uma vez que as técnicas de discretização espacial e temporal para um domínio independente já foram discutidas anteriormente. As grandezas iniciais $\ddot{\mathbf{P}}^0$ e $\ddot{\mathbf{U}}^0$ são necessárias ao MDC, como solicita a Eq.(3.21).

Observa-se ainda que nas linhas (3) e (6) calculam-se as forças de interação entre domínios para o passo de tempo n , e não $n + 1$. Esse cálculo está de acordo com o desenvolvimento do MDC, uma vez que pela Eq.(3.20), as forças devem ser calculadas num passo de tempo anterior ao corrente. Logo, na linha (3), utiliza-se no cálculo de \mathbf{F}_{s-f}^n a pressão \mathbf{P}^n , a qual já foi computada no passo de tempo anterior. Já na linha (6), utilizam-se no cálculo de \mathbf{F}_{f-s}^n os deslocamentos \mathbf{U}^{n-1} , \mathbf{U}^n e \mathbf{U}^{n+1} (de acordo com a Eq.(3.41)), os quais também já foram

computados. Conclui-se, como esperado, que se trata de um procedimento de acoplamento explícito, uma vez que para se calcular o campo de um domínio, utiliza-se apenas informação já calculada em passos de tempo anteriores, sem nenhuma necessidade de processos iterativos.

Algoritmo 4: Acoplamento de domínios pelo método de diferenças centrais

Entrada: $\mathbf{P}^0, \dot{\mathbf{P}}^0, \ddot{\mathbf{P}}^0, \mathbf{U}^0, \dot{\mathbf{U}}^0, \ddot{\mathbf{U}}^0$

Saída: $\mathbf{P}^{1, \dots, N}, \mathbf{U}^{1, \dots, N}$

- 1 Calcule a matriz de acoplamento local \mathbf{Q}_e pela Eq.(3.38)
 - 2 **Para** $n = 0, \dots, (N - 1)$ **faça**
 - 3 Calcule as forças $\mathbf{F}_{e,s-f}^n$ pela Eq.(3.39)
 - 4 Some $\mathbf{F}_{e,s-f}^n$ à carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_s^n$, para cada elemento e
 - 5 Resolva domínio sólido para \mathbf{U}^{n+1} pelo MDC como no Algoritmo (1)
 - 6 Calcule as forças $\mathbf{F}_{e,f-s}^n$ pela Eq.(3.37)
 - 7 Some $\mathbf{F}_{e,f-s}^n$ à carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_f^n$ para cada elemento e
 - 8 Resolva domínio fluido para \mathbf{P}^{n+1} pelo MDC como no Algoritmo (1)
 - 9 **Fim**
-

3.3.2 Acoplamento pelo método adaptativo

Será descrito agora o acoplamento de domínios pelo método adaptativo. Essa técnica é um procedimento inédito para problemas de interação de domínios, e funciona em conjunto com o método adaptativo apresentado na subseção 3.2.2. Serão descritos dois modos de acoplamento pelo método adaptativo (implícito-explícito e explícito-explícito) com seus respectivos algoritmos, para em seguida serem analisadas as aplicações numéricas na seção 4.

Como foi descrito na subseção 3.2.2, o método adaptativo parte de uma formulação integral da equação da dinâmica (Eq.(3.25)). Portanto, pela forma modificada da equação da dinâmica para domínios acoplados (Eq.(3.40)), as forças de fronteira \mathbf{F}_{s-f}^n e \mathbf{F}_{f-s}^n também devem

ser integradas no tempo, o que é mostrado em termos de elemento por:

$$\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{F}_{e,s-f} d\tau = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_s \mathbf{n}_f \mathbf{N}_f^T \mathbf{P}_e d\Gamma d\tau = \mathbf{Q}_e^T \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{P}_e d\tau \quad (3.42a)$$

$$\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{F}_{e,f-s} d\tau = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_{\Gamma_e} -K_f \rho_f \mathbf{N}_f \mathbf{n}_f^T \mathbf{N}_s^T \ddot{\mathbf{U}}_e d\Gamma d\tau = -K_f \rho_f \mathbf{Q}_e \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \ddot{\mathbf{U}}_e d\tau \quad (3.42b)$$

Para se aproximar as últimas integrais dadas pelas Eq.(3.42) *somente na fronteira entre domínios*, utilizam-se as seguintes expressões (em termos de elemento de fronteira):

$$\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{P}_e d\tau \approx \Delta t \mathbf{P}_e^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \dot{\mathbf{P}}_e^n \quad (3.43a)$$

$$\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \ddot{\mathbf{U}}_e d\tau \approx \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_e^n \quad (3.43b)$$

Nota-se que na fronteira entre domínios são utilizadas as mesmas aproximações integrais de domínio do método adaptativo, dadas anteriormente pelas Eq.(3.26) para $\alpha_e^n = 1$ (sem amortecimento numérico na fronteira entre domínios) e $\gamma_e^n = 0$, mantendo a consistência das definições. Para integrar a pressão no domínio fluido, utiliza-se $\gamma_e^n = 0$, de maneira a manter todos os termos na Eq.(3.43a) referentes a informações do passo de tempo n (já disponíveis). Caso se fizesse $\gamma_e^n \neq 0$, seria necessário conhecer a solução no passo de tempo $n + 1$, e portanto, o acoplamento tornar-se-ia implícito. Isso não é feito nesse trabalho, já que o objetivo é a construção de um acoplamento explícito que torne a solução de cada domínio independente.

Descreve-se nos Algoritmos (5) e (6) o procedimento implementado para o acoplamento de domínios pelos modos implícito-explícito e explícito-explícito, respectivamente, para passos de tempo no intervalo $n = 1, \dots, N$. Mais uma vez, esses algoritmos focam somente no acoplamento de domínios, uma vez que os algoritmos de marcha no tempo já foram descritos anteriormente.

Algoritmo 5: Acoplamento de domínios pelo método adaptativo, modo implícito-explícito

Entrada: $\mathbf{P}^0, \dot{\mathbf{P}}^0, \mathbf{U}^0, \dot{\mathbf{U}}^0$

Saída: $\mathbf{P}^{1, \dots, N}, \mathbf{U}^{1, \dots, N}$

- 1 Calcule a matriz de acoplamento \mathbf{Q}_e pela Eq.(3.38)
 - 2 **Para** $n = 0, \dots, (N - 1)$ **faça**
 - 3 Calcule a integral das forças $\mathbf{F}_{e,s-f}^n$ pelas Eq.(3.42a) e (3.43a)
 - 4 Some a integral das forças $\mathbf{F}_{e,s-f}^n$ à carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_s^n$ para cada elemento e
 - 5 Resolva domínio sólido para \mathbf{U}^{n+1} pelo método adaptativo implícito pelo Algoritmo (3)
 - 6 Calcule a integral das forças $\mathbf{F}_{e,f-s}^n$ pelas Eq.(3.42b) e (3.43b)
 - 7 Some a integral das forças $\mathbf{F}_{e,f-s}^n$ à carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_f^n$ para cada elemento e
 - 8 Resolva domínio fluido para \mathbf{P}^{n+1} pelo método adaptativo explícito pelo Algoritmo (2)
 - 9 **Fim**
-

Algoritmo 6: Acoplamento de domínios pelo método adaptativo, modo explícito-explícito

Entrada: $\mathbf{P}^0, \dot{\mathbf{P}}^0, \mathbf{U}^0, \dot{\mathbf{U}}^0$

Saída: $\mathbf{P}^{1, \dots, N}, \mathbf{U}^{1, \dots, N}$

- 1 Calcule a matriz de acoplamento \mathbf{Q}_e pela Eq.(3.38)
 - 2 **Para** $n = 0, \dots, (N - 1)$ **faça**
 - 3 Calcule a integral das forças $\mathbf{F}_{e,s-f}^n$ pelas Eq.(3.42a) e (3.43a)
 - 4 Some a integral das forças $\mathbf{F}_{e,s-f}^n$ à carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_s^n$ para cada elemento e
 - 5 Resolva domínio sólido para \mathbf{U}^{n+1} pelo método adaptativo explícito pelo Algoritmo (2)
 - 6 Calcule a integral das forças $\mathbf{F}_{e,f-s}^n$ pelas Eq.(3.42b) e (3.43b)
 - 7 Some a integral das forças $\mathbf{F}_{e,f-s}^n$ à carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_f^n$ para cada elemento e
 - 8 Resolva domínio fluido para \mathbf{P}^{n+1} pelo método adaptativo explícito pelo Algoritmo (2)
 - 9 **Fim**
-

Observa-se no Algoritmo (5) que o domínio sólido é calculado implicitamente, enquanto o fluido é calculado explicitamente. A razão dessa escolha é que, em geral, a velocidade de onda em materiais sólidos é superior a fluidos (líquidos e gases), devido a sua estrutura microscópica,

de maneira que passos de tempo menores devem ser usados na análise. Esse comportamento é relacionado ao número adimensional de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), o qual estabelece que uma condição de convergência necessária (mas não suficiente) para esquemas explícitos de diferenças finitas em EDPs do tipo hiperbólicas é que uma partícula de fluido não viaje um distância superior a uma unidade de discretização espacial em uma unidade de discretização temporal [4, 50, 51]. O número de CFL no caso unidimensional é dado por:

$$CFL = \frac{c \Delta t}{\Delta x_{min}} \quad (3.44)$$

onde c é a velocidade da onda no meio e Δx_{min} é o menor comprimento de lado global (para todos os elementos da malha).

Portanto, é mais interessante utilizar uma marcha implícita para o domínio cuja velocidade de onda é maior, de maneira a se evitar a necessidade de reduzidos passos de tempo para garantir estabilidade, o que seria necessários em uma análise explícita. Resolve-se, então, o domínio sólido de maneira implícita e o domínio fluido, cuja velocidade de onda é em geral menor, de maneira explícita, mantendo o passo de tempo global inferior ao Δt_{cr} do domínio fluido. Em resumo, o acoplamento resolvido pelo modo implícito-explícito deve atender à condição de passo de tempo crítica para o domínio fluido, mas garante a estabilidade também para o domínio sólido.

Não seria possível nessa formulação se utilizar um modo implícito-implícito na tentativa de obter uma técnica incondicionalmente estável. Isso ocorre pois caso se some o termo proporcional a γ_e^n à aproximação dada pela Eq.(3.43a) (tornando-a, então, equivalente à Eq.(3.26c)), seria necessário utilizar informação da pressão no passo $n + 1$ (\mathbf{P}^{n+1}), a qual ainda não está disponível. Ainda buscando-se estabilidade incondicional, poder-se-ia tentar calcular o fluido antes do sólido, mas a aproximação da integral (3.43b) faz uso da velocidade no passo de tempo $n + 1$ ($\dot{\mathbf{U}}^{n+1}$), a qual também não está disponível. Portanto, o método desenvolvido não pode ser incondicionalmente estável seguindo as mesmas aproximações das integrais da marcha no tempo.

A diferença entre os dois algoritmos descritos para o método adaptativo está na escolha da marcha de tempo utilizada para cada um dos domínios. O domínio fluido é sempre calculado de maneira explícita, enquanto o domínio sólido pode assumir as configurações implícita ou explícita. A vantagem de se utilizar cada formulação será quantitativamente ilustrada nas aplicações numéricas na seção 4.

4 Aplicações Numéricas

Após a descrição teórica do problema de interação de fluido acústico com sólido elastodinâmico dada na seção 2, seguida da formalização das técnicas numéricas utilizadas nesse trabalho (incluindo um procedimento inédito de acoplamento) na seção 3, procede-se para aplicações numéricas envolvendo acoplamento de domínios, a fim de se validar os métodos apresentados, e ilustrar sua aplicabilidade em diferentes problemas.

A primeira aplicação numérica é a barra fluido-sólido. Esse *benchmark* consiste em um problema simples para validação do método, uma vez que a solução analítica é conhecida na literatura, e erros numéricos podem ser calculados e comparados. É também ilustrado o comportamento das técnicas de acoplamento com malhas 2D com elementos retangulares e triangulares, de construção regular ou irregular, e com diferentes discretizações. Essa coleção de análises é dada na subseção 4.1.

Já a segunda aplicação trata de cristais sônicos, os quais consistem em estruturas periódicas inseridas em um fluido objetivando principalmente isolamento acústico. Esse problema tem ordem de número de elementos (e portanto custo computacional) bem maior que o exemplo anterior, e ilustra a potencialidade do método desenvolvido. Essa aplicação será tratada na subseção 4.2.

A métrica de cálculo de erro da solução numérica em relação à analítica utilizada é a norma L_2 discreta, dada pela expressão:

$$Error_{L_2} \equiv \left[\frac{\sum_{n=1}^N (\psi^n - \psi_a(t^n))^2}{\sum_{n=1}^N (\psi_a(t^n))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

onde ψ^n é a solução numérica no passo de tempo n e $\psi_a(t^n)$ é a solução analítica para o tempo t^n correspondente ao passo de tempo n . N é o número total de passos de tempo calculados.

4.1 Barra fluido-sólido

Descreve-se nessa subseção o problema de propagação de uma onda plana numa barra fluido-sólido de geometria simples. Esse problema tem solução analítica conhecida na literatura, de maneira que a comparação de técnicas numéricas permite obter ricas informações sobre as potencialidades de determinado método. Além disso, ilustra comportamentos clássicos da teoria de propagação de onda tanto em domínios fluidos quanto sólidos, conferindo um caráter introdutório ao tópico.

A geometria simulada consiste em uma barra sólida ligada a uma coluna de fluido (representadas aqui na horizontal), e é mostrada na Fig.(1) de maneira esquemática.

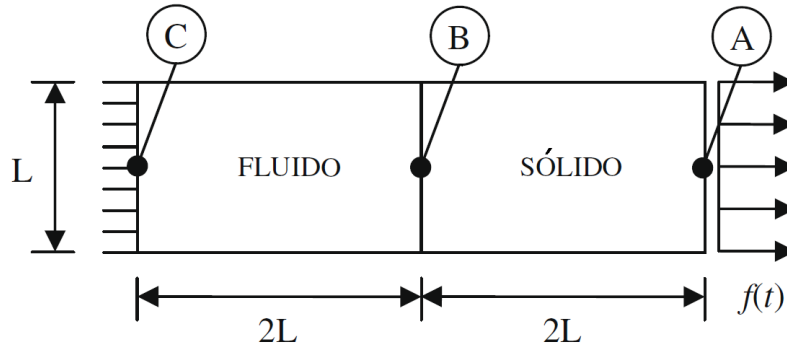


Figura 1: Geometria do problema barra fluido-sólido.

A dimensão aqui adotada para a altura é $L = 1 m$. O contorno sólido à direita é do tipo natural, sendo prescrita uma força por unidade de comprimento do tipo Heaviside no tempo inicial de análise: $f(t) = H(0)$ (ou seja, $f(t) = 0$ para $t < 0$ e $f(t) = 1 N/m$ para $t > 0$). O contorno fluido à esquerda não tem nós prescritos, ou seja, está livre para assumir quaisquer valores de pressão, e tem fluxo nulo. Já a interação fluido-sólido é dada na interface mediana, na qual tanto a pressão quanto o deslocamento podem variar, sendo as forças de fronteira calculadas pela teoria descrita previamente. Os contornos inferior e superior de ambos os domínios também são do tipo natural, com carga nula prescrita.

Utiliza-se somente um material para cada meio. Para o fluido, o módulo volumétrico é $K = 100 Pa$, a densidade é $\rho_f = 1 kg/m^3$ e o coeficiente de amortecimento viscoso é nulo, $\xi_f = 0$; pela Eq.(2.11), tem-se que a velocidade de propagação da onda de dilatação no fluido é $c_f = 10 m/s$. Para o sólido, o módulo de elasticidade é $E = 100 Pa$, a densidade é $\rho_s = 1 kg/m^3$, o coeficiente de Poisson é $\nu = 0$ e o coeficiente de amortecimento viscoso é nulo, $\xi_s = 0$; pela Eq.(2.24a), tem-se que a velocidade de propagação da onda de dilatação no sólido também é $c_s = 10 m/s$. Essa coincidência de velocidade de onda é proposital, para se comparar os resultados com a solução analítica [34, 38, 43]. O intervalo de análise é $t_{total} = 4,8 s$.

Serão feitas a seguir algumas análises para esse problema, envolvendo o comportamento transiente do sistema e o cálculo de erros. Primeiramente, é feita uma avaliação clássica de convergência, com malhas triangulares e retangulares regulares. Será comparado o comportamento do erro quando se utiliza uma ou duas oscilações para o fator ϕ_e^n . Depois, é estudado o comportamento da solução para malhas irregulares. Pela simplicidade geométrica do problema tratado nessa subseção, em cada análise utiliza-se a mesma malha para ambos os domínios.

4.1.1 Malhas triangulares regulares

Foram geradas 4 malhas triangulares regulares com refinamento progressivo, denominadas aqui por T1, T2, T3 e T4, e mostradas na Fig.(2). Os números de nós, elementos, e comprimento de lado Δx de elemento para cada malha podem ser vistos na Tab.(1).

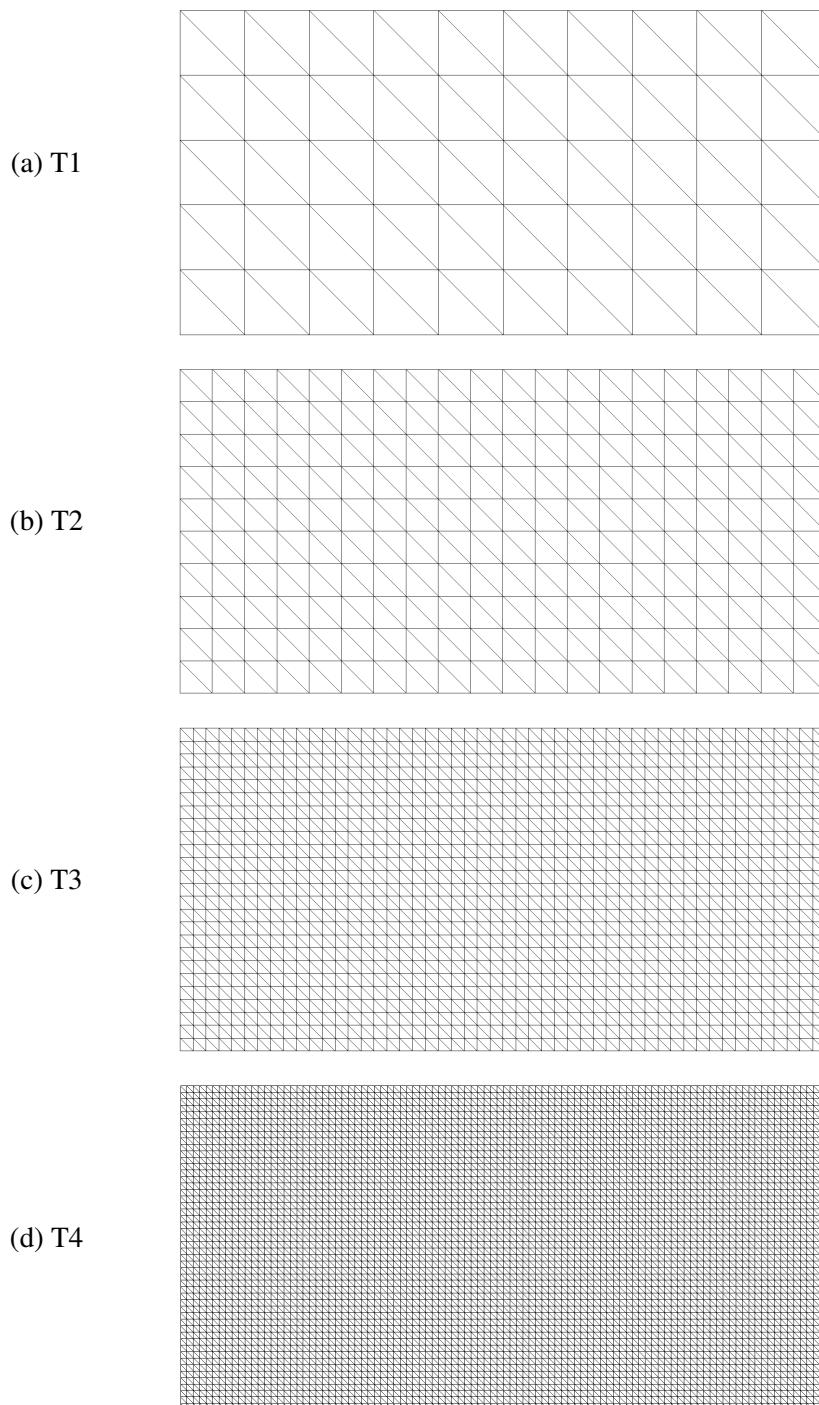


Figura 2: Malhas triangulares regulares para problema barra fluido-sólido.

Tabela 1: Características das malhas triangulares para problema barra fluido-sólido.

| Malha | Nós | Elementos | Δx (m) |
|-------|------|-----------|----------------|
| T1 | 66 | 100 | 0,200 |
| T2 | 231 | 400 | 0,100 |
| T3 | 1326 | 2500 | 0,040 |
| T4 | 5151 | 10000 | 0,020 |

Inicialmente, para se apreciar a essência do problema, mostram-se nas Fig.(3) à (6) as soluções analítica e numéricas (para o acoplamento por diferenças centrais e adaptativo implícito-explícito) para os ponto A, B e C indicados previamente na Fig.(1), para a malha T3 (o comportamento geral da solução é semelhante para as outras malhas). O passo de tempo utilizado foi $\Delta t = 0,0016$ s, obtendo-se $CFL = 0,4$. Em primeiro lugar, notam-se claras oscilações de elevada amplitude e frequência no deslocamento e particularmente na pressão quando se usa o acoplamento por diferenças centrais; por outro lado, a solução pelo método adaptativo se mostra muito mais próxima à analítica, uma vez que amortece adequadamente oscilações espúrias.

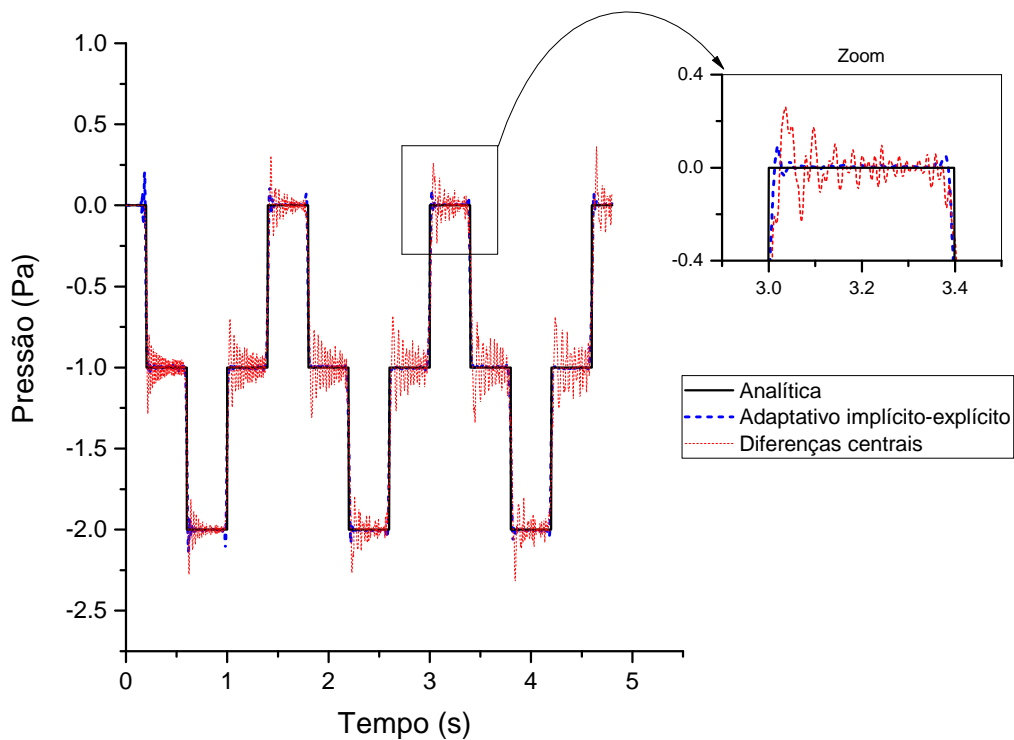


Figura 3: Soluções para ponto B do domínio fluido da malha T3.

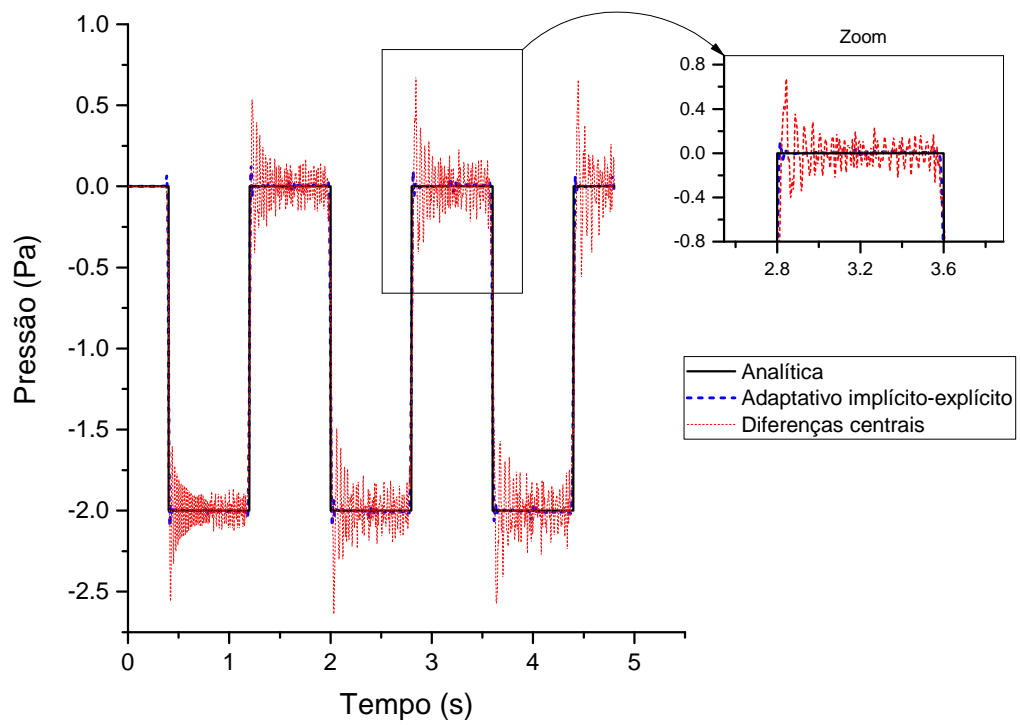


Figura 4: Soluções para ponto C do domínio fluido da malha T3.

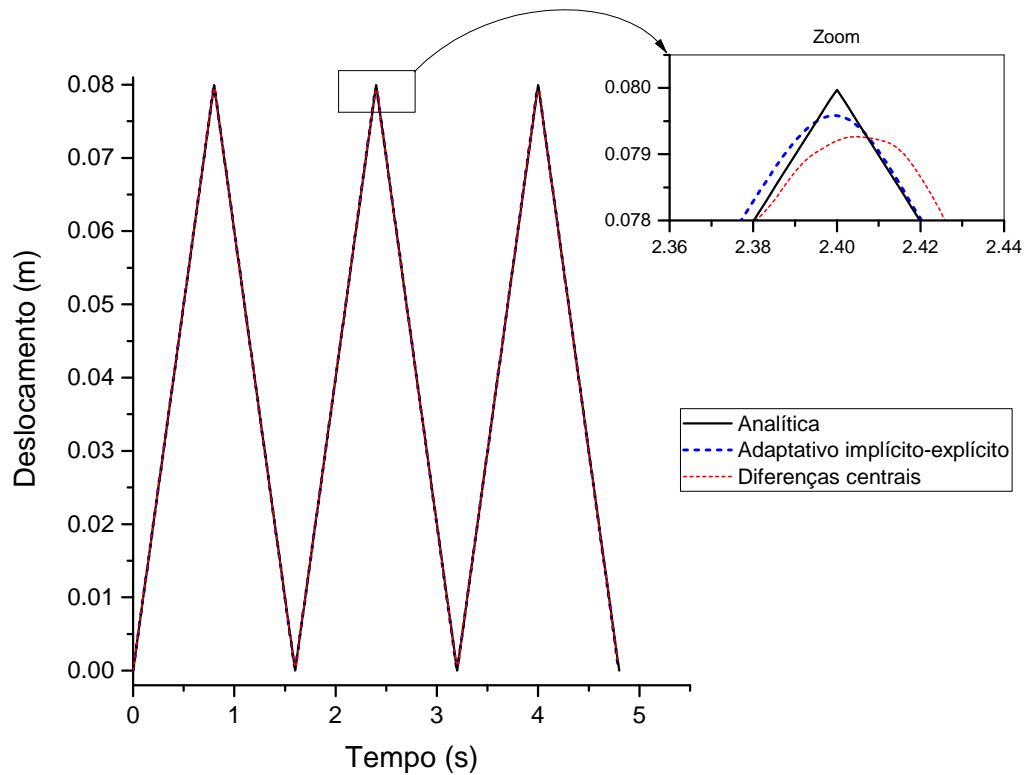


Figura 5: Soluções para ponto A do domínio sólido da malha T3.

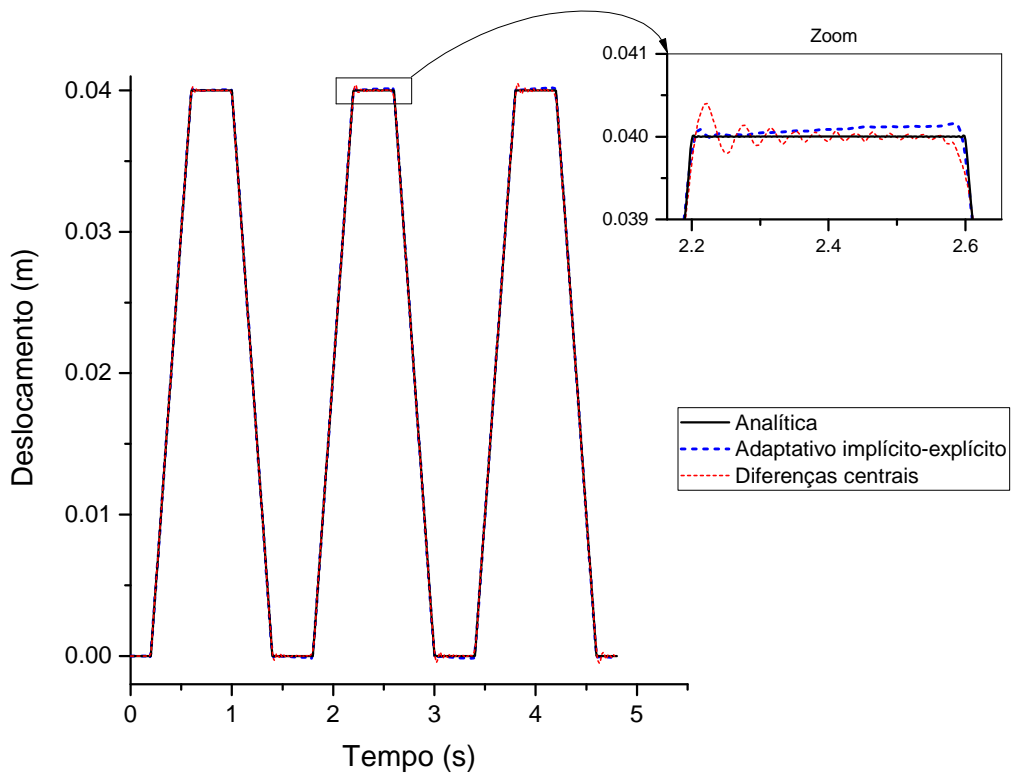
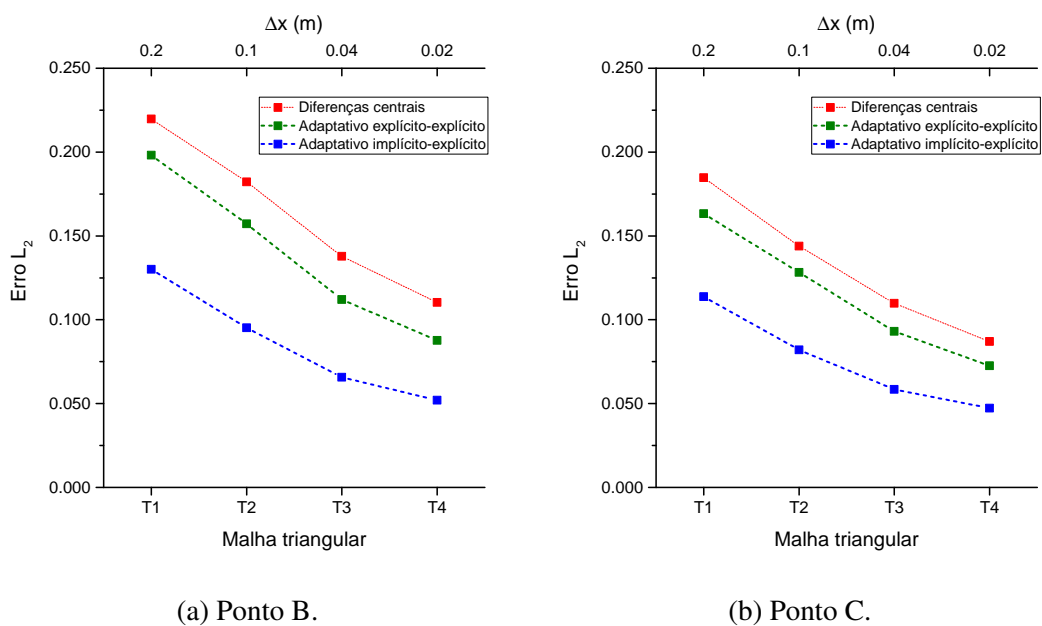


Figura 6: Soluções para ponto B do domínio sólido da malha T3.

Os erros calculados pela Eq.(4.1) para os pontos B e C do domínio fluido nas malhas triangulares são mostrados na Fig.(7). Já a Fig.(8) mostra os erros para os pontos A e B do domínio sólido. Para ambos os domínios, utilizou-se $CFL = 0,4$.



(a) Ponto B.

(b) Ponto C.

Figura 7: Erro L_2 nas malhas triangulares regulares para domínio fluido.

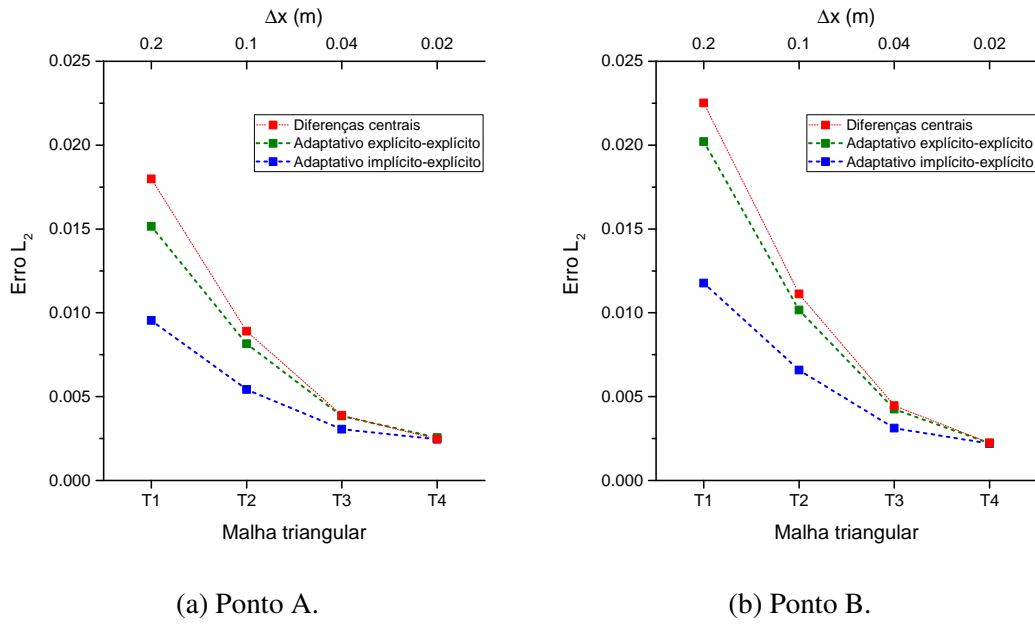
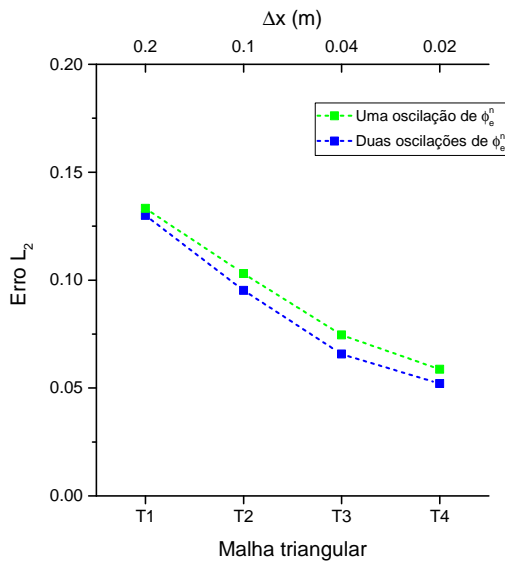


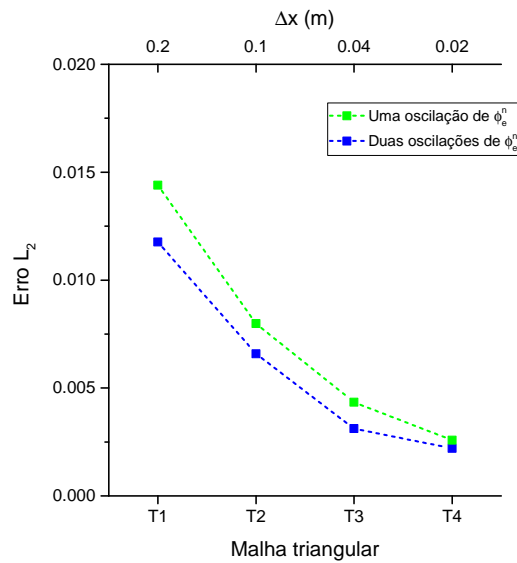
Figura 8: Erro L_2 nas malhas triangulares regulares para domínio sólido.

Observa-se inicialmente que os erros calculados para o domínio fluido são cerca de 10 vezes superiores aos erros do domínio sólido, o que está de acordo com o comportamento transiente mostrado nas Fig.(3) à (6); essas relevantes oscilações numéricas do comportamento fluido ilustram a utilidade desse problema de *benchmark* para validação de métodos numéricos de acoplamento, como já foi salientado anteriormente. Em segundo lugar, nota-se um decrescimento do erro com o refinamento da discretização, como é de se esperar para um método que busca convergência numérica. Finalmente, fica claro que o acoplamento pelo método adaptativo (particularmente no modo implícito-explícito) mostra-se evidentemente mais preciso que o acoplamento pelo método de diferenças centrais.

Analisa-se agora o comportamento do erro quando se utiliza uma ou duas oscilações subsequentes no cálculo do fator ϕ_e^n , como descrito na subseção 3.2.2. A Fig.(9) mostra os erros para as malhas triangulares no esquema adaptativo implícito-explícito, calculando-se o fator ϕ_e^n por uma ou duas oscilações subsequentes. Utiliza-se ainda $CFL = 0,4$.



(a) Ponto B, domínio fluido.



(b) Ponto B, domínio sólido.

Figura 9: Erro L_2 nas malhas triangulares comparando oscilações do parâmetro ϕ_e^n , para acoplamento adaptativo implícito-explicito.

Observa-se que o erro é menor quando se usam duas oscilações subsequentes no cálculo de ϕ_e^n . Essa configuração é, portanto, utilizada ao longo desse trabalho.

4.1.2 Malhas retangulares regulares

De maneira similar, foram geradas 4 malhas retangulares regulares com refinamento progressivo, denominadas aqui por R1, R2, R3 e R4, e mostradas na Fig.(10). Essas malhas na verdade foram construídas unindo-se cada par adjacente de elementos das malhas triangulares anteriormente utilizadas. Os números de nós, elementos, e comprimento de lado Δx do elemento para cada malha podem ser vistos na Tab.(2).

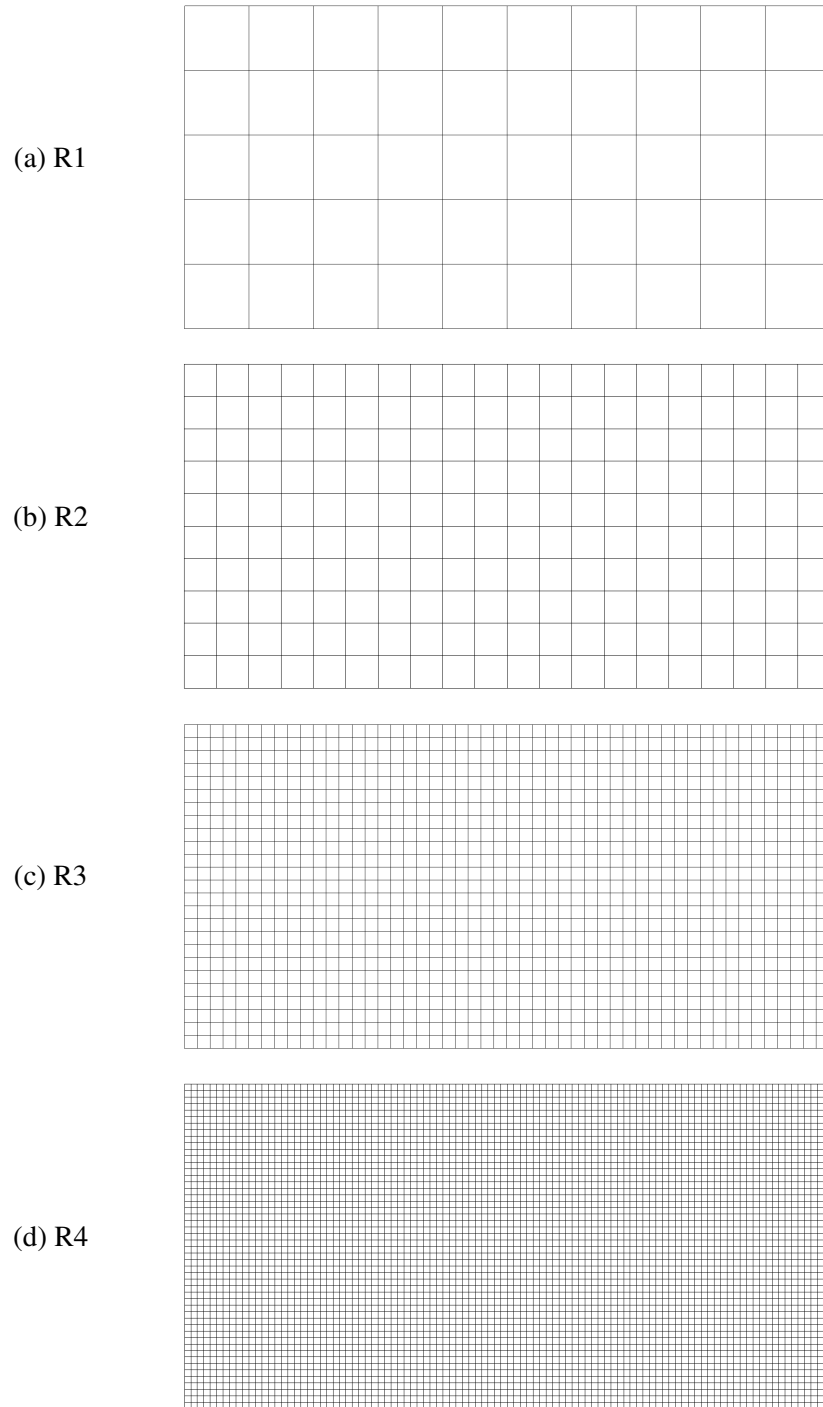
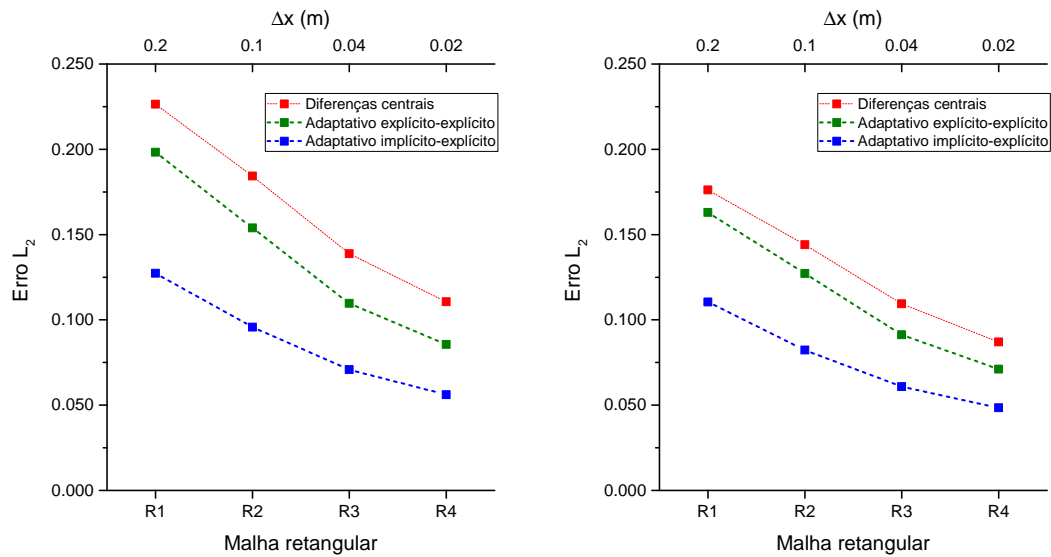


Figura 10: Malhas retangulares regulares para problema barra fluido-sólido.

Tabela 2: Características das malhas retangulares para problema barra fluido-sólido.

| Malha | Nós | Elementos | Δx (m) |
|-------|------|-----------|----------------|
| R1 | 66 | 50 | 0,200 |
| R2 | 231 | 200 | 0,100 |
| R3 | 1326 | 1250 | 0,040 |
| R4 | 5151 | 5000 | 0,020 |

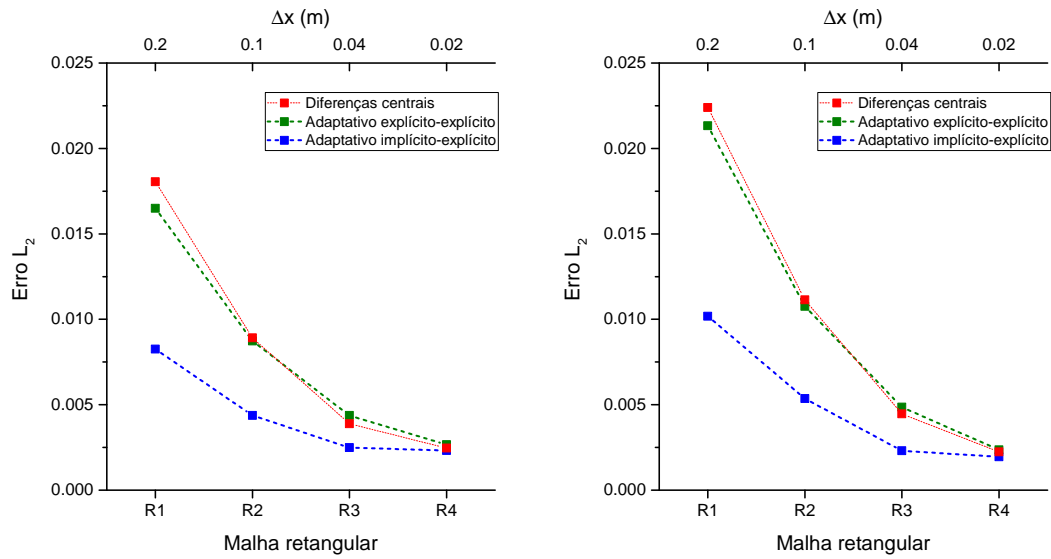
Os erros para os pontos B e C do domínio fluido nas malhas retangulares são mostrados na Fig.(11). Já a Fig.(12) mostra os erros para os pontos A e B do domínio sólido. Para ambos os domínios, utilizou-se $CFL = 0,4$.



(a) Ponto B.

(b) Ponto C.

Figura 11: Erro L_2 nas malhas retangulares para domínio fluido.



(a) Ponto A.

(b) Ponto B.

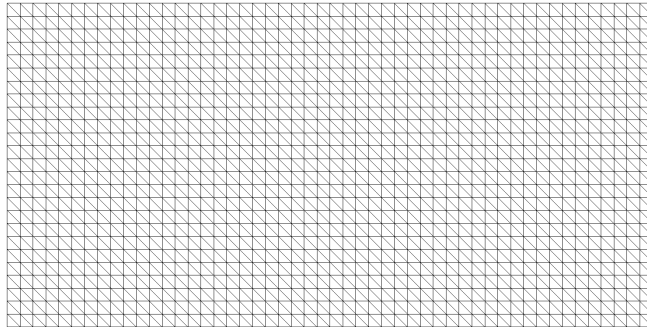
Figura 12: Erro L_2 nas malhas retangulares para domínio sólido.

O comportamento dos erros para as malhas retangulares é similar ao descrito para as malhas triangulares. Novamente, observa-se que o acoplamento pelo método adaptativo implícito-explícito mostra os melhores resultados.

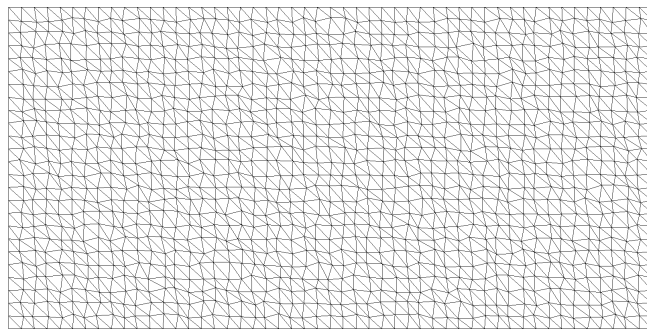
4.1.3 Malhas triangulares irregulares

Estuda-se então o comportamento da solução para malhas triangulares irregulares, as quais na verdade são mais comuns que malhas regulares para geometrias complexas. Foram geradas 2 malhas triangulares irregulares a partir da malha T3 (mostrada anteriormente na Fig.(2)), com irregularidade crescente, denominadas aqui por T3b e T3c, e mostradas na Fig.(13), juntamente à malha original, denominada agora por T3a. Os números de nós e elementos são os mesmos da malha T3, mostrados na Tab.(1).

(a) T3a



(b) T3b



(c) T3c

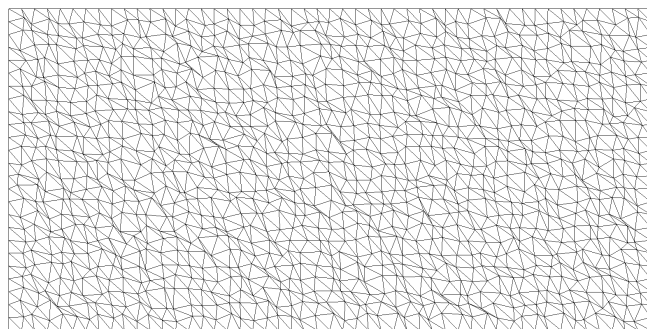


Figura 13: Malhas triangulares irregulares para problema barra fluido-sólido.

Os erros para o ponto B dos domínios fluido e sólido nas malhas triangulares irregulares são mostrados nas Fig.(14) e (15), respectivamente. Não se mostram os erros para os pontos A e C uma vez que têm comportamento similar ao ponto B, e já foram ilustrados anteriormente para outras malhas. Mostra-se o erro para o acoplamento por diferenças centrais e pelo método adaptativo no modo implícito-explicito (o qual se mostra maior acurácia que o modo explícito-explicito).

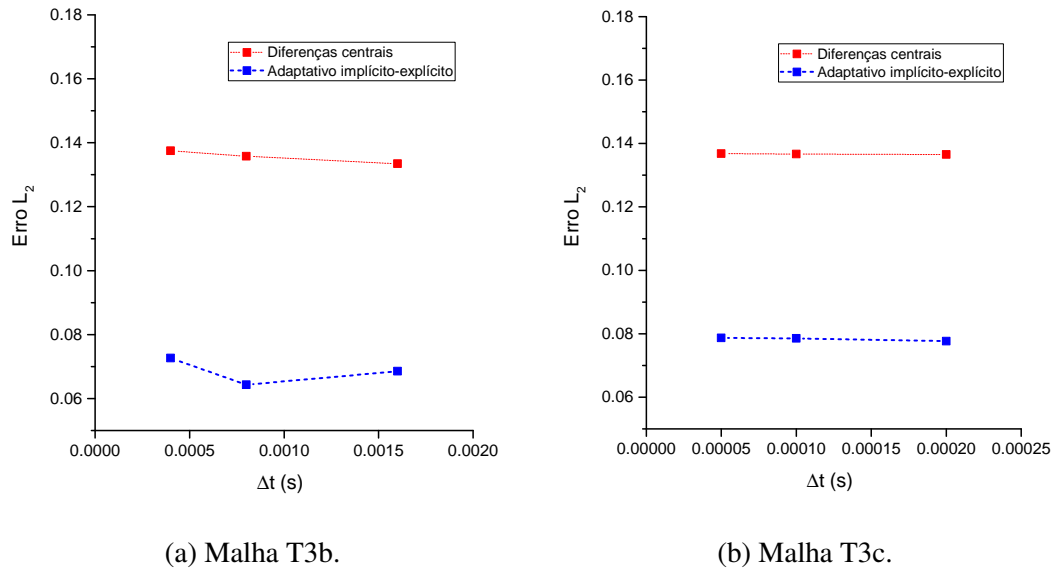


Figura 14: Erro L_2 nas malhas triangulares irregulares para domínio fluido, ponto B.

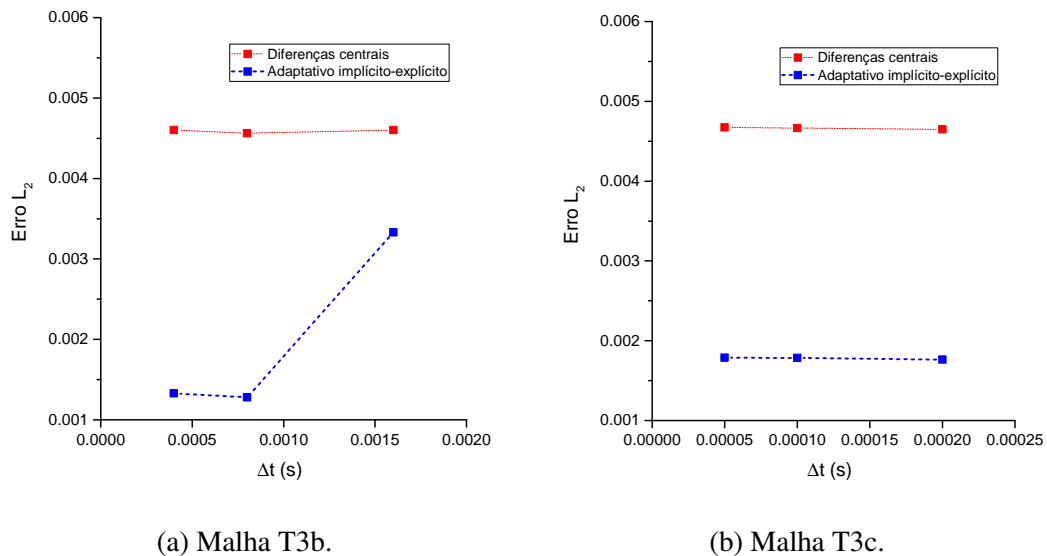


Figura 15: Erro L_2 nas malhas triangulares irregulares para domínio sólido, ponto B.

Observa-se que, à medida que se aumenta o passo de tempo Δt , o erro tende a crescer para o acoplamento pelo método adaptativo, em ambas as figuras. Esse comportamento é esperado de maneira geral para métodos numéricos que buscam convergência, a qual não é

sempre obtida quando discretizações espacial e temporal atuam concomitantemente, uma vez que erros introduzidos por uma podem compensar erros introduzidos pela outra. Percebe-se, logo, que a metodologia proposta faz uma conexão entre as discretizações espacial e temporal, tornando a discretização do tempo função da discretização do espaço. Essa característica do método permite a simulação de malhas bastante heterogêneas com excelentes resultados, como mostrado na Fig.(15). De fato, o método adaptativo é construído para lidar com malhas cujos elementos apresentam grande disparidade espacial e ainda sim manter a precisão da solução.

Nota-se um ligeiro decréscimo do erro para o acoplamento por diferenças centrais quando se aumenta o passo de tempo. Essa situação ocorre particularmente para a marcha de diferenças centrais, em que a solução de maior precisão é por vezes obtida no limite de estabilidade, havendo menor acurácia se um passo de tempo inferior a esse limite é empregado [3].

4.2 Cristais sônicos

O estudo de cristais sônicos se intensificou nas últimas décadas do século XX, quando percebeu-se a similaridade entre cristais fotônicos, relativos a ondas eletromagnéticas, e arranjos geométricos similares, denominados então como cristais sônicos, relativos a ondas acústicas. Desde então, estuda-se sua aplicação em isolamento, atenuação, reflexão e direcionamento acústicos. Uma vez que esse trabalho tem como foco o método de acoplamento numérico previamente desenvolvido, não se discutirá em detalhes o problema teórico de cristais sônicos, mas apenas algumas aplicações com interessante valor numérico. Mais detalhes relativos ao assunto podem ser encontrados em [52--56].

Um cristal sônico é geralmente descrito por uma sequência de estruturas sólidas artificiais em disposição periódica inseridas em um fluido acústico homogêneo, sendo nesse caso também denominado cristal fonônico. A Fig.(16) mostra esquematicamente cristais sônicos em 1D, 2D e 3D.

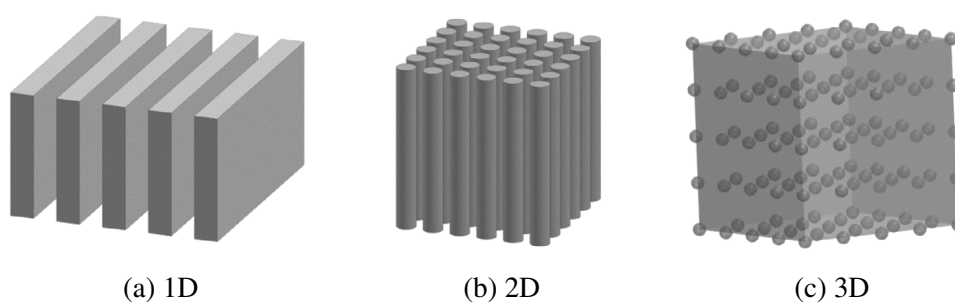


Figura 16: Tipos de cristais sônicos [53].

O objetivo da inserção de materiais sólidos no fluido é alterar o comportamento das ondas

viajantes, e portanto obter um campo de pressão modificado a jusante dos cristais, em geral fazendo uso de interferência destrutiva das ondas refletidas na estrutura (podendo esta ser elástica ou rígida). Para o caso de isolamento e atenuação acústicos, a frequência (ou comprimento) da onda incidente a ser atenuada está intrinsecamente ligada às características geométricas do arranjo, particularmente a sua periodicidade, descrita pelo parâmetro de entrelaçamento (*lattice*), denominado aqui por a . Pela teoria clássica de Bragg, a frequência de excitação para a qual se espera atenuação máxima, f_B , é relacionada à velocidade de onda c e ao parâmetro de entrelaçamento a pela seguinte expressão:

$$f_B = \frac{c}{2a} \quad (4.2)$$

a qual relaciona o comprimento da onda incidente com a geometria do cristal sônico. Na realidade, a relação (4.2) define o comprimento de onda para máxima atenuação como sendo o dobro do parâmetro geométrico de entrelaçamento.

Serão simulados nesse trabalho cristais sônicos em 2D, representados esquematicamente na Fig.(16b). Será analisado o comportamento de uma fonte pontual do tipo pulso de Ricker em um domínio circular.

A solução analítica para a pressão devida à propagação de uma onda gerada por uma fonte pontual $f(t)$ (relativa à Eq.(3.1)) em um meio homogêneo acústico em 2D, sem amortecimento viscoso, é conhecida [39], e dada pela seguinte convolução:

$$p(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{c_f}{K \sqrt{c_f^2(t-t')^2 - r^2}} H[c_f(t-t') - r] f(t') dt' \quad (4.3)$$

onde r é a distância da fonte ao ponto de medida, H o operador de Heaviside e t' a variável de integração. Mantendo a notação prévia, c_f é a velocidade de onda e K é a compressibilidade do fluido.

A fim de se observar o comportamento dos domínios fluido e sólido para uma configuração de cristais sônicos, utiliza-se para a fonte pontual $f(t)$ o pulso de Ricker, também denominado *sombrero wavelet*. Esse sinal excita uma ampla gama de frequências, e é amplamente utilizado em análises acústicas e sísmicas. O pulso de Ricker com amplitude A é dado, no domínio do tempo, por [57]:

$$f(\tau) = A \frac{d^2}{d\tau^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-\tau^2} \right) = A (1 - 2\tau^2) e^{-\tau^2} \quad (4.4)$$

onde o tempo corrigido $\tau = \tau(t)$ é dado por:

$$\tau = \frac{t - t_s}{t_0} \quad (4.5)$$

onde t_s corresponde ao tempo t em que o valor máximo ocorre, e t_0 normaliza o pulso, sendo discutido em detalhe adiante. Através de uma transformada de Fourier da Eq.(4.4), obtém-se o sinal no domínio da frequência angular ω :

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{f(\tau)\} = \frac{A}{2\sqrt{2}} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4.6)$$

Ambas as funções são ilustradas na Fig.(17) (no caso da frequência, somente para $\omega > 0$).

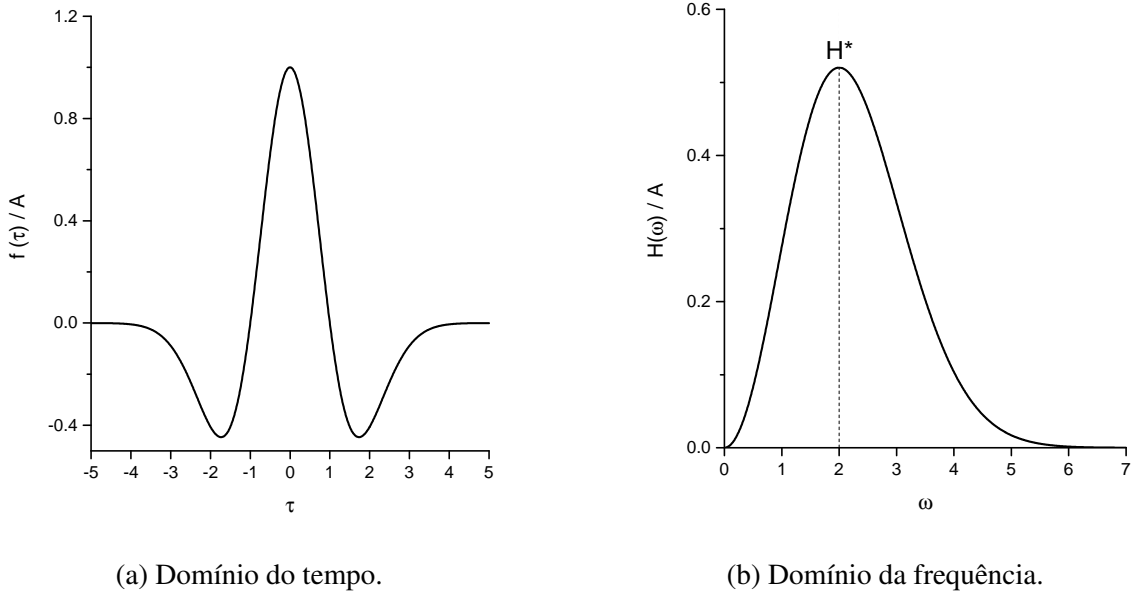


Figura 17: Pulso de Ricker.

Observa-se na Fig.(17b) que a frequência cuja transformada de Fourier $H^*(\omega^*)$ é máxima é $\omega^* = 2$. Pela Eq.(4.5), o valor de t_0^* correspondente a ω^* , quando $t_s = 0$, será:

$$t_0^* = \frac{2}{\omega^*} = \frac{1}{\pi f^*} \quad (4.7)$$

sendo que na última igualdade utilizou-se a relação $\omega = 2\pi f$. A frequência f^* corresponde à frequência angular ω^* predominante. Uma vez que o pulso de Ricker é representado por uma gama de frequências, como mostrado na Fig.(17b), deve-se escolher um valor para t_0 que defina a excitação $f(t)$. Utilizam-se aqui valores da mesma ordem de grandeza de t_0^* , ou de maneira equivalente, frequências da ordem de grandeza de f^* , a fim de se obter $f^* = f_B$.

A geometria simulada para a excitação de Ricker é mostrada na Fig.(18), em que 61

tubos de aço, dispostos em três colunas em um arranjo cristalográfico denominado ΓM (ou [110]), são rodeados por água, e a fonte pontual encontra-se na posição central O . As propriedades do aço selecionado são $E = 200 \text{ GPa}$, $\rho_s = 7845 \text{ kg/m}^3$ e $\nu = 0,30$, sendo portanto a velocidade de onda longitudinal no sólido dada por $c_s = 5858 \text{ m/s}$. Já as propriedades da água são $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $c_f = 1466 \text{ m/s}$. Nota-se que a velocidade de onda no sólido é cerca de 4 vezes superior à velocidade de onda no fluido. Para ambos os domínios o amortecimento viscoso é considerado nulo. As dimensões utilizadas foram $D = 3,2 \text{ m}$, $d = 0,04 \text{ m}$, $r = 1,0 \text{ m}$ e $a = 0,08 \text{ m}$. O intervalo de análise é o suficiente para que a onda atinja a extremidade do domínio, sendo nesse caso $t_{total} = 0,0011 \text{ s}$.

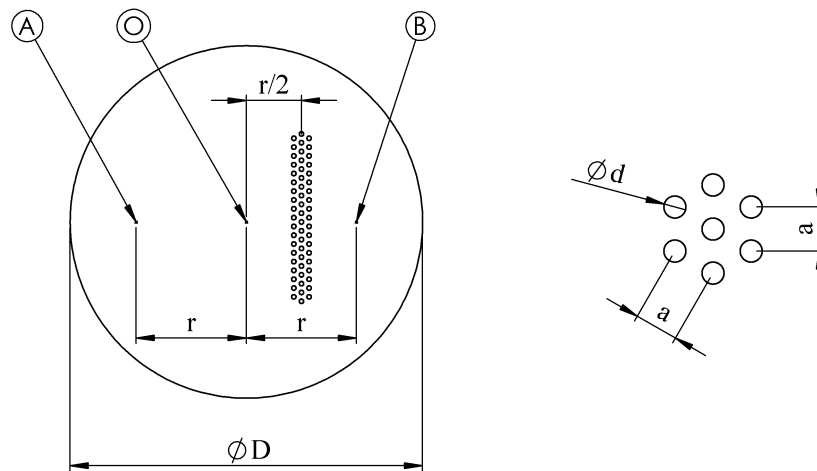
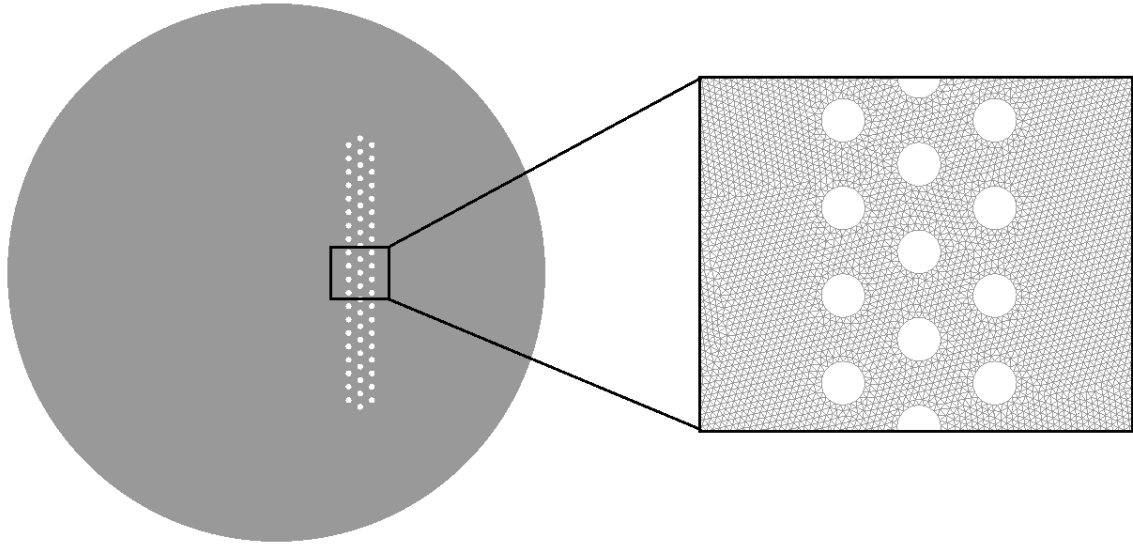
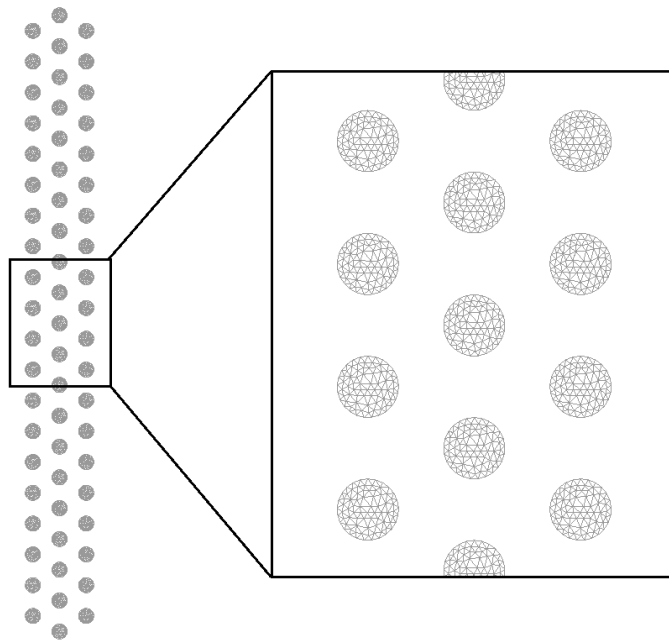


Figura 18: Geometria do problema de cristais sônicos com fonte pontual.

As malhas utilizadas para ambos os domínios, denominadas aqui por CSFPf e CSFPs, são mostradas na Fig.(19). Já o número de nós e elementos para as malhas é mostrado na Tab.(3). Nota-se que o número de elementos e nós no domínio fluido é muito superior ao do domínio sólido, de maneira que o uso de uma marcha explícita para o fluido se mostra uma grande vantagem quanto à redução de custo computacional. O número de elementos 1D nos contornos comuns às malhas é 1525, de maneira que cada um dos 61 tubos tem 25 elementos na fronteira.



(a) Malha CSFPf para domínio fluido.



(b) Malha CSFPs para domínio sólido.

Figura 19: Malhas para problema de cristais sônicos com fonte pontual.

Tabela 3: Características das malhas para problema de cristais sônicos com fonte pontual.

| Malha | Nós | Elementos | $\Delta x_{min} (m)$ |
|-------|--------|-----------|----------------------|
| CSFPf | 246499 | 489793 | 0,0042 |
| CSFPs | 4819 | 7991 | 0,0033 |

A escolha do passo de tempo para a simulação é naturalmente feita de maneira a manter a solução numérica em ambos os domínios estável. Para o acoplamento pelo método de diferenças centrais, deve-se obedecer à condição dada pela Eq.(3.23), tanto para o domínio fluido quanto para o domínio sólido. Contudo, calcular a frequência natural (correspondendo ao cálculo de autovalores) máxima da malha tem um custo computacional alto, e muitas vezes o usuário prefere estimar um valor para o passo de tempo que seja inferior (por vezes excessivamente) a Δt_{cr} . Em geral, os materiais usuais sólidos requerem passos de tempo cerca de 5 vezes inferiores a fluidos como água, e mais de 15 vezes inferiores a fluidos como ar, a fim de se manter o número de CFL na mesma proporção. Portanto, o domínio sólido determina o passo de tempo crítico no acoplamento por diferenças centrais, o qual acaba sendo reduzido em relação ao valor crítico para o domínio fluido, aumentando o custo computacional, especialmente para problemas cuja malha do fluido tem tamanho muito superior à malha do sólido.

Já para o acoplamento pelo método adaptativo, deve-se manter o passo de tempo inferior ao valor crítico para o domínio fluido, uma vez que esse é o domínio calculado de maneira explícita. Como descrito anteriormente, é suficiente considerar como frequência crítica para esse cálculo a frequência local $\omega_{e,max}$ máxima dos elementos da malha. Quanto ao domínio sólido, na configuração implícita, não há limite superior obrigatório para o passo de tempo, uma vez que existe estabilidade incondicional, como descrito na subseção 3.2.2; deve-se, mesmo assim, manter o passo de tempo em valores razoáveis para se garantir precisão numérica.

Portanto, nessa seção foi escolhido para o acoplamento pelo método de diferenças centrais um passo de tempo necessariamente inferior ao passo de tempo crítico para o domínio sólido, estimado por $\Delta t_{MDC} \approx 1/2 \min_e(2/\omega_{e,max,s}) \leq \Delta t_{cr,s}$, onde a função \min_e refere-se ao mínimo de todos os elementos da malha em questão. Já para o acoplamento pelo método adaptativo, escolheu-se o passo de tempo necessariamente inferior ao passo de tempo crítico para o domínio fluido, ou seja, $\Delta t_{ADAP} = \min_e(2/\omega_{e,max,f}) \leq \Delta t_{cr,f}$.

Cumprir lembrar que faz parte do método adaptativo o cálculo de frequências naturais locais dos elementos, cujo custo computacional é extremamente inferior ao cálculo das frequências naturais da malha (já que o número de operações necessário ao cálculo de autovalores no algoritmo utilizado é aproximadamente de ordem $\mathcal{O}(n^3)$, para matrizes $n \times n$). Portanto, calcular um valor razoavelmente próximo ao limite de estabilidade a ser utilizado no método adaptativo

não implica em nenhum custo computacional adicional. Para esse trabalho, o valor de Δt_{MDC} utilizado foi extraído dos cálculos do método adaptativo, mas isso foi feito apenas para efeito de comparação, uma vez que, na prática, o usuário que opta por não calcular as frequências naturais da malha não pode garantir *a priori* que haverá estabilidade na marcha de tempo por diferenças centrais.

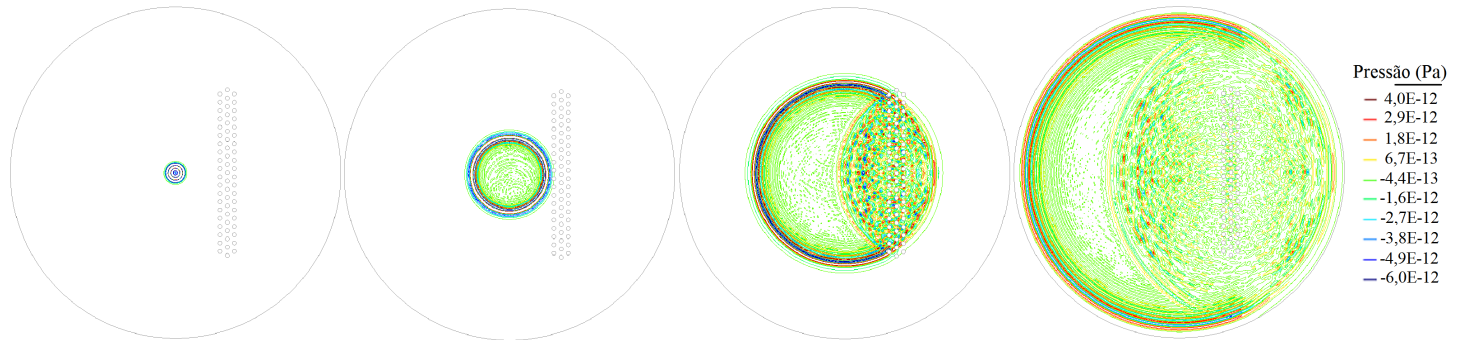
A fim de se ilustrar o comportamento transiente da solução e comparar os métodos de acoplamento, foram analisadas três frequências diferentes para o pulso de Ricker, a saber: $f_1 = 1f^* = 9164 \text{ Hz}$, $f_2 = 2f^* = 18328 \text{ Hz}$ e $f_3 = 3f^* = 27492 \text{ Hz}$. A amplitude da fonte é $A = 1$. Uma vez que a relação entre a amplitude da onda e a pressão é linear, a ordem de grandeza desse valor não é de grande importância nessa análise numérica, podendo ser reescalada para outras análises.

As Fig.(20) e (21) comparam os resultados dos dois tipos de acoplamento, para a frequência f_3 . Para o domínio fluido, a Fig.(20) mostra isolinhas de pressão e os valores do parâmetro de amortecimento α_e (específico do método adaptativo), para quatro passos de tempo especificados.

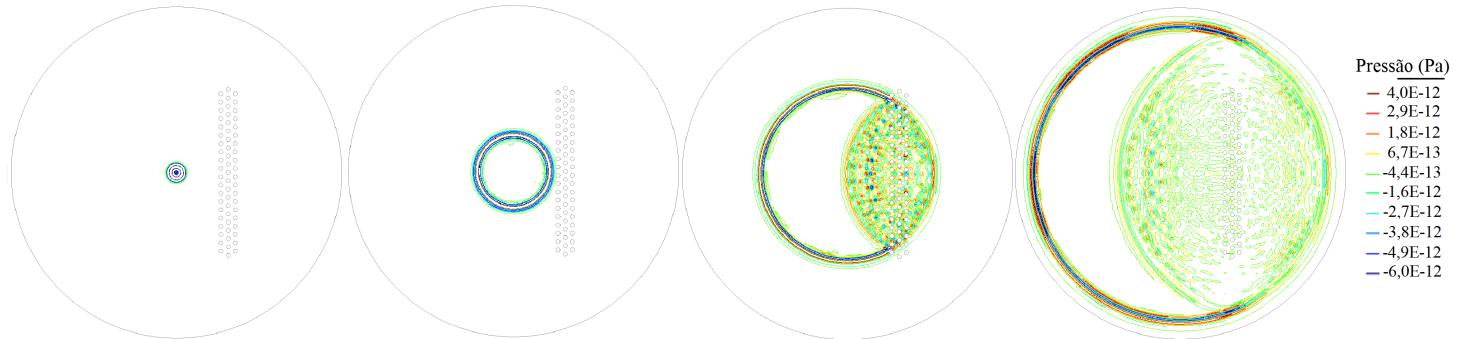
Comparando-se as duas metodologias, observam-se evidentes oscilações numéricas não-físicas para o acoplamento pelo MDC, particularmente a montante da frente de propagação de onda; o acoplamento pelo método adaptativo não apresenta esse comportamento, amortecendo de maneira eficiente as oscilações espúrias do problema, sem prejudicar as frequências de excitação relacionadas à fonte pontual. Os contornos de pressão que surgem após o contato da frente de onda com os tubos, gerando múltiplas reflexões, são característicos do problema, e não são oscilações numéricas artificiais a serem amortecidas; de maneira geral, o método adaptativo consegue atingir esse objetivo.

Observa-se também que o parâmetro de amortecimento assume valores entre $\alpha_e = 1$ (sem amortecimento numérico, no modo explícito), e $\alpha_e = 3$ (máximo amortecimento numérico, no modo explícito com a correção de $\omega_{e,max}$); esse comportamento dinâmico de ativação local do amortecimento ilustra o funcionamento do método adaptativo utilizado.

(a) Pressão para MDC.
 $\Delta t_{MDC} = 0,185E-6 s.$



(b) Pressão para adaptativo
 implícito-explícito.
 $\Delta t_{ADAP} = 2,03E-6 s.$



(c) α_e para adaptativo
 implícito-explícito.
 $\Delta t_{ADAP} = 2,03E-6 s.$

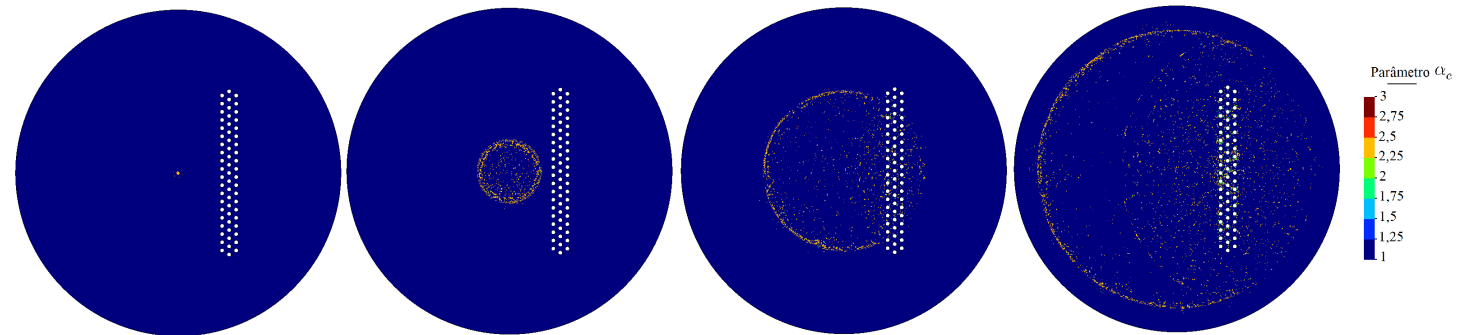


Figura 20: Pressões e parâmetro α_e para domínio fluido com fonte pontual de Ricker, para $f_3 = 27492 Hz$. Tempos em s , da esquerda para a direita: $7,1E-5$; $2,8E-4$; $6,2E-4$; $1,0E-3$.

Já a Fig.(21) mostra as tensões de von Mises para o domínio sólido para a mesma frequência f_3 , logo após o instante em que a frente de onda entra em contato com os tubos. Nesse caso, a diferença entre as soluções numéricas pelo acoplamento por diferenças centrais e adaptativo não é tão expressiva quanto para o domínio fluido. Não se mostram os valores de α_e pois não houve oscilação numérica detectável pelo algoritmo para o domínio sólido, nesse problema.

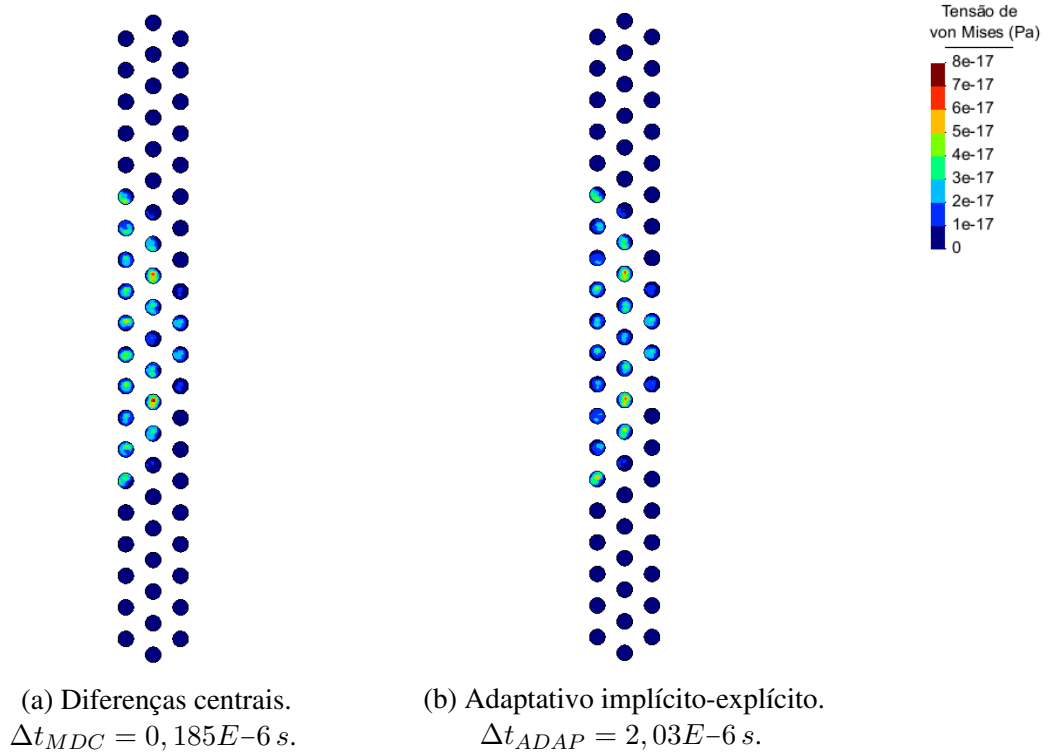


Figura 21: Tensão de von Mises para domínio sólido com fonte pontual de Ricker, para $f_3 = 27492 Hz$ e $t = 4,3E-4 s.$

Em seguida são mostrados gráficos da pressão em função do tempo para o ponto A (relativo à Fig.(18)), para os dois tipos de acoplamento e a resposta analítica. A solução para esse ponto não é afetada pela presença dos tubos. As Fig.(22), (23) e (24) mostram respectivamente as respostas para as frequências f_1 , f_2 e f_3 .

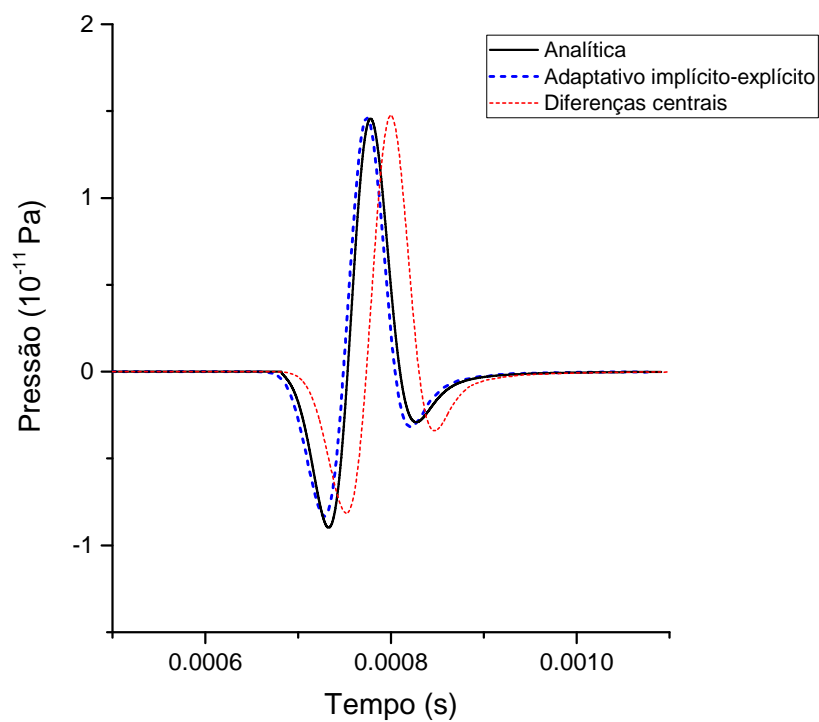


Figura 22: Soluções para ponto A da malha CSFPf, para $f_1 = 9164 \text{ Hz}$.

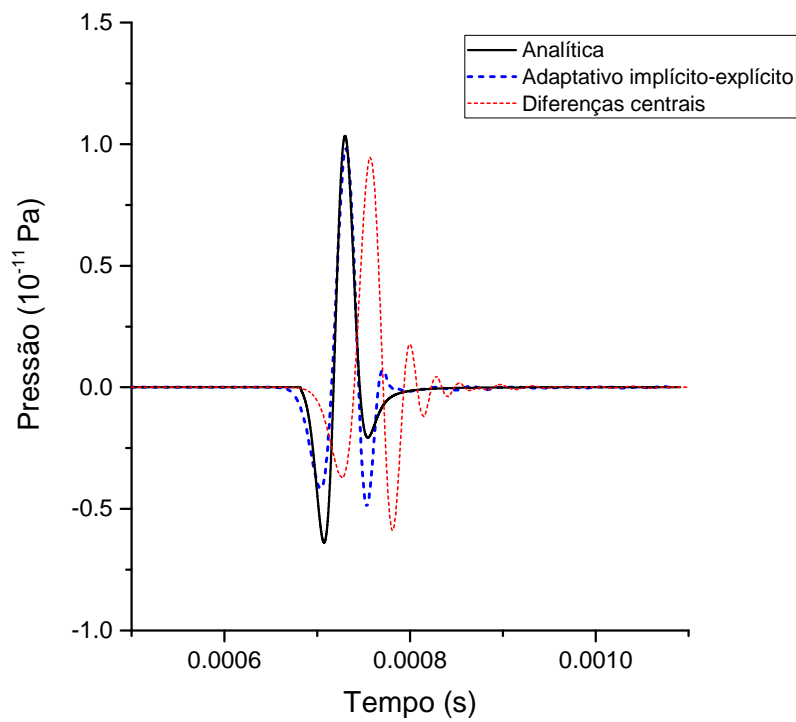


Figura 23: Soluções para ponto A da malha CSFPf, para $f_2 = 18328 \text{ Hz}$.

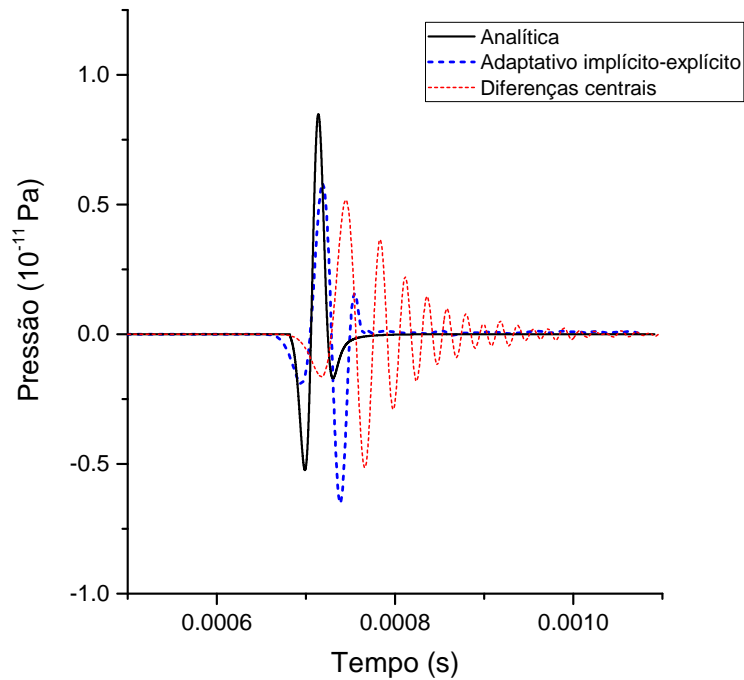


Figura 24: Soluções para ponto A da malha CSFPf, para $f_3 = 27492 \text{ Hz}$.

Tabela 4: Erro L^2 para ponto A da malha CSFPf, para dois tipos de acoplamento.

| Frequência (Hz) | Diferenças centrais | Adaptativo implícito-explicito |
|-----------------|---------------------|--------------------------------|
| $f_1 = 9164$ | 1,066 | 0,240 |
| $f_2 = 18328$ | 1,629 | 0,323 |
| $f_3 = 27492$ | 1,570 | 0,832 |

Nota-se uma maior precisão do acoplamento adaptativo, quando comparado com o acoplamento pelo MDC, o qual apresenta grande encurtamento de período e evidentes oscilações não-físicas. Para ambos os acoplamentos, ocorre uma deterioração das solução numéricas para as duas últimas frequências principalmente devida à redução do número de elementos que abrange o comprimento de onda de excitação, o qual é inversamente proporcional à frequência de excitação. Contudo, os resultados para o acoplamento adaptativo ainda se mostram visivelmente e numericamente mais precisos que o acoplamento pelo MDC.

Só é possível comparar a solução numérica com a analítica para o ponto A nesse problema, uma vez que o ponto B sofre influência das barreiras sólidas presentes no domínio, o que não é contemplado na solução dada pela Eq.(4.3). Apesar de não ser o foco desse trabalho a análise detalhada da eficácia de cristais sônicos, mostram-se na Fig.(25) as soluções numéricas para os pontos A, sem a presença dos tubos sólidos, e B, com a presença dos tubos, para a frequência $f_1 = 9164 \text{ Hz}$.

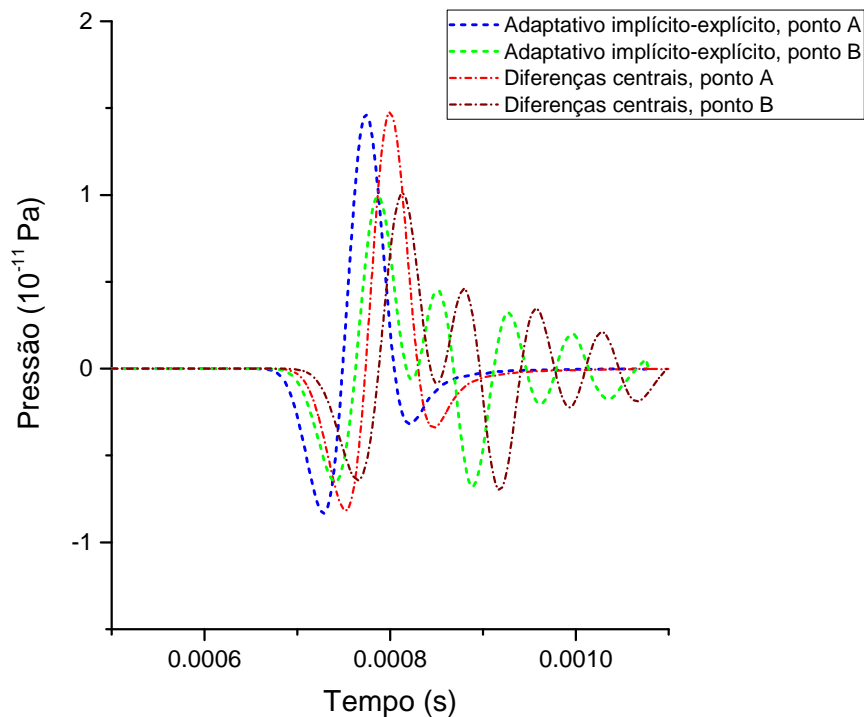


Figura 25: Soluções para pontos A e B da malha CSFPf, para $f_1 = 9164 \text{ Hz}$.

O comportamento oscilatório para o ponto B é devido majoritariamente à presença dos tubos sólidos, e não à excitação de oscilações espúrias. Novamente, nota-se o encurtamento de período para acoplamento pelo MDC. É importante lembrar, finalmente, que o efeito de atenuação da fonte pontual não é tão pronunciado quando comparado à atenuação de ondas planas, que é amplamente discutida nos trabalho sobre cristais sônicos indicados nas referências.

Ilustra-se a seguir a correção dos valores de $\omega_{e,max}$ proposta na Eq.(3.36), para a malha CSFPf. Como descrito anteriormente, essa correção na prática impõe um limite ao valor máximo de α_e para alguns elementos, particularmente aqueles com reduzidas frequências naturais, a fim de reduzir um possível amortecimento numérico excessivo nesses elementos. A Fig.(26) mostra histogramas que relacionam o número de elementos da malha CSFPf (no eixo das ordenadas) com os respectivos parâmetros de amortecimento α_e (no eixo das abscissas); o histograma inferior mostra o número de elementos em escala logarítmica, para melhor visualização relativa dessa distribuição.

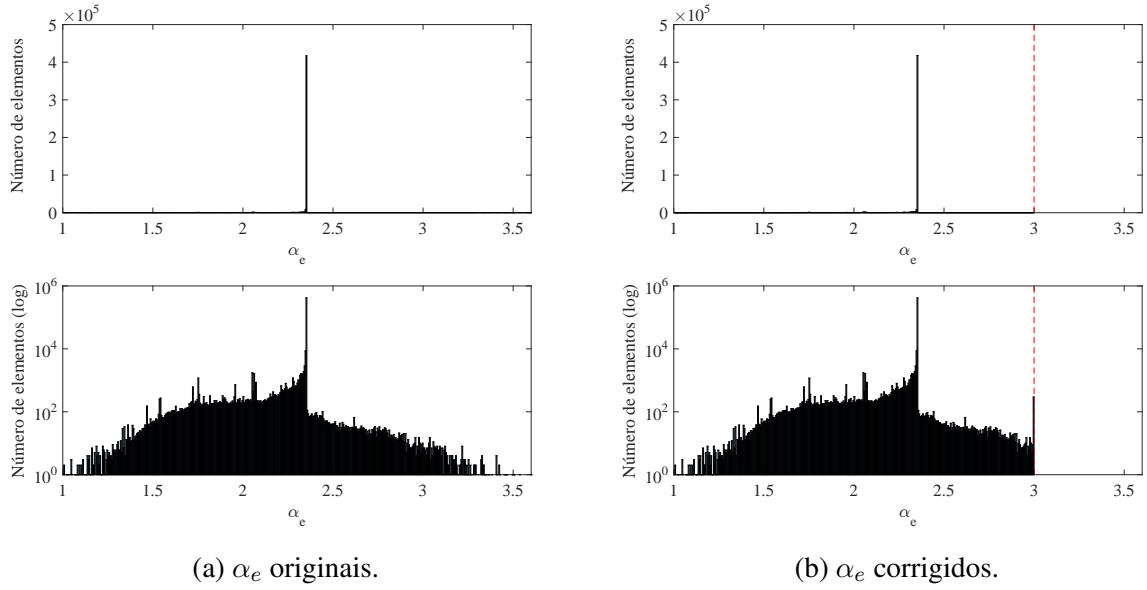


Figura 26: Histogramas do parâmetro α_e para malha CSFPf antes e após correção de frequências naturais.

Comparando-se os dois histogramas, observa-se que todos os elementos para os quais $\alpha_e > 3$ (à direita na figura Fig.(26a)) tiveram suas frequências naturais $\omega_{e,max}$ alteradas para se obter $\alpha_e = 3$ (aumentando o número de incidências desse valor na Fig.(26b)), como ilustrado pela linha pontilhada. O valor $\alpha_e = 3$ é obtido pelas Eq.(3.35) e (3.31), para $\gamma_e = 0$ (uma vez que o fluido é calculado de maneira explícita).

Quanto ao custo computacional, há uma redução no tempo de cálculo com o uso do acoplamento adaptativo. A fim de se comparar os dois tipos de acoplamento, a Tab.(5) mostra o tempo de CPU empregado em algumas sub-rotinas selecionadas referente ao problema de cristais sônicos simulado, em s e em porcentagem do tempo total.

Tabela 5: Tempo de execução de sub-rotinas selecionadas, em s (% total).

| Tipo de acoplamento | Diferenças centrais | | Adaptativo implícito-explicito | |
|--|---------------------|-----------------|--------------------------------|-----------------|
| | FLUIDO | SÓLIDO | FLUIDO | SÓLIDO |
| Domínio | | | | |
| Cálculo de frequências ω_e para elementos | 0 (0%) | 0 (0%) | 1,62 (1,01%) | 0,09 (0,06%) |
| Cálculo de matrizes M, C e K | 0,63 (0,06%) | 0,08 (0,01%) | 0,65 (0,40%) | 0,11 (0,07%) |
| Montagem de matriz de acoplamento Q | 0,03 (< 0,01%) | | 0,03 (0,02%) | |
| Marcha no tempo | 1020,67 (99,93%) | | 157,27 (98,44%) | |
| Total | 1021,41 (100%) | | 159,77 (100%) | |

Nota-se o reduzido custo computacional relativo da montagem da matriz de acoplamento \mathbf{Q} , menor que 0,03%, uma clara vantagem de se utilizar o acoplamento explícito (sem procedimentos iterativos). Quanto à sub-rotina específica do método adaptativo, ou seja, o cálculo de frequências ω_e para elementos, dedica-se cerca de 1% do tempo computacional total, confirmando o baixo custo desse procedimento. A leitura e escrita de dados na memória não é realizada nesse caso, uma vez que o objetivo é comparar o desempenho dos métodos.

O acoplamento pelo MDC toma mais de 6 vezes o tempo total de cálculo necessário ao acoplamento adaptativo, além de produzir resultados com mais oscilações não-físicas, como mostrado nas figuras anteriores. Ressalta-se que para o problema analisado, a onda se propaga apenas uma vez ao longo do domínio, portanto, calculando-se relativamente poucos passos de tempo. Para problemas que requerem um número de passos de tempo proporcionalmente maior, a diferença no tempo de computação torna-se ainda mais evidente. Portanto, o acoplamento adaptativo proposto consiste em um procedimento preciso e de baixo custo computacional quando comparado ao acoplamento clássico por diferenças centrais.

5 Conclusões

É proposto nesse trabalho um novo algoritmo para problemas de domínios acoplados, especificamente acústico-elastodinâmico. Essa técnica permite que cada domínio seja resolvido separada e consecutivamente, não havendo necessidade de se lidar com grandes sistemas de equações acopladas. Portanto, trata-se de uma metodologia altamente eficiente.

A técnica proposta faz uso de uma marcha no tempo adaptativa especialmente desenvolvida para ser utilizada com o MEF, para a qual excelentes resultados já haviam sido obtidos na literatura. Essa marcha no tempo pode ser do tipo explícita ou implícita, sendo as duas formas combinadas no algoritmo de acoplamento proposto, a fim de se utilizar a eficiência computacional associada ao procedimento explícito com a estabilidade incondicional associada ao procedimento implícito. Em ambas as formas, essa marcha no tempo apresenta um amortecimento numérico seletivo, o qual é ativado somente para elementos que apresentem oscilações, e apenas em determinados instantes de tempo. Além disso, é amortecida especialmente a maior frequência natural local do elemento finito, de maneira a não prejudicar a qualidade da solução advinda das baixas frequências naturais. Assim, amortecimento excessivo é evitado, e oscilações espúrias são eficientemente eliminadas da análise. Os resultados obtidos nesse trabalho confirmam essas propriedades.

Já para o acoplamento de domínios, tanto a configuração explícita-explícita (ambos os domínios calculados de maneira explícita), e particularmente a configuração implícita-explícita (domínio fluido calculado de maneira explícita, e sólido de maneira implícita), mostram-se bem mais vantajosas que a técnica tradicionalmente conhecida na literatura, apresentada para fins comparativos. Essa comparação foi feita nesse trabalho levando-se em consideração tanto aspectos de precisão quanto eficiência. Os resultados apresentados para o problema da barra fluido-sólido ilustram a notável precisão numérica obtida. Essa aplicação, apesar da simples geometria, é de grande valor representativo, especialmente pelo fato de a onda sofrer várias reflexões que evidenciam potenciais instabilidades numéricas, amortecimento excessivo e amplificação de erros quando se utilizam métodos numéricos. Em todos os casos aqui exibidos, a técnica proposta se mostrou extremamente adequada para lidar com esses obstáculos. O problema de cristais sônicos também apresentou resultados de maior acurácia (para a parte do domínio cuja solução analítica é conhecida), e particularmente ilustrou o imenso ganho de eficiência quando comparado ao acoplamento pelo MDC, o qual tomou mais de 6 vezes o tempo necessário à nova técnica, além de produzir resultados de pior qualidade.

Desse modo, a metodologia proposta apresenta alta precisão e eficiência computacional, quando comparada a abordagens clássicas. Ela pode ser resumida nas Eq.(3.27) à (3.33), para a marcha no tempo, e nas Eq.(3.42) e (3.43), para o acoplamento de domínios. Salienta-se mais

uma vez que é uma metodologia de simples implementação, autoinicializável e automatizada, não sendo necessário ao usuário inexperiente nenhum parâmetro de entrada. É uma metodologia adequada, portanto, tanto para análises genéricas complexas como inclusive para uso em códigos comerciais.

Como sugestões para trabalhos futuros pode-se indicar a comparação do erro produzido pela técnica proposta com outras marchas no tempo que não o MDC. O cálculo do fator de oscilação ϕ_e também pode ser modificado, por exemplo, incluindo-se mais passos de tempo para a ativação do amortecimento. Para além dos aspectos relativos ao método em si, pode-se aplicar o algoritmo desenvolvido em muitos outros problemas acústico-elastodinâmicos. É possível alterar a formulação do fluido ou do sólido para se incluírem, por exemplo, efeitos não-lineares. Finalmente, outras técnicas numéricas, como o MEC, o MVF ou formulações *meshfree* podem ser conjugadas com a solução pelo MEF, aliando simultaneamente vantagens inerentes a cada um dos métodos.

Referências

- [1] Gustafsson, B., Kreiss, H.-O., and Oliger, J. *Time-Dependent Problems and Difference Methods*. Wiley, 2nd edition, 2013.
- [2] Smith, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Clarendon Press, 1986.
- [3] Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*. Englewood Cliffs, 2nd edition, 1996.
- [4] LeVeque, R. J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2002.
- [5] Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. Hemisphere, New York, London, 1984.
- [6] Wrobel, L. C. *The boundary element method*. Wiley, Brunel University, UK, 2002.
- [7] Liu, G. R. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, 2002.
- [8] Liu, G.-R. and Liu, M. B. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. World Scientific, 2003.
- [9] Liu, G. R. and Gu, Y. T. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.
- [10] Shen, J., Tang, T., and Wang, L.-L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2011.
- [11] Costa, B. Spectral methods for partial differential equations. *Cubo - Revista de Matemática*, 6:1--32, 2004.
- [12] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 7th edition, 2013.
- [13] Soares Jr., D. Coupled numerical methods to analyze interacting acoustic-dynamic models by multidomain decomposition techniques. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011:1-28, 2011.
- [14] Kundu, P. K., Cohen, I. M., and Dowling, D. R. *Fluid Mechanics*. Academic Press, Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2012.
- [15] Batchelor, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. First Cambridge Mathematical Library, 2000.
- [16] Schobeiri, M. T. *Fluid Mechanics for Engineers*. Springer, 2010.

- [17] C. Truesdell, S. A., Walter Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, 3rd edition, 2004.
- [18] Malvern, L. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, 1977.
- [19] Marsden, J. and Hughes, T. *The Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, 1994.
- [20] Batra, R. C. *Elements of Continuum Mechanics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [21] Dowell, E. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Springer International Publishing, 5th edition, 2015.
- [22] Simiu, E. and Scanlan, R. H. *Wind effects on structures : fundamentals and applications to design*. Wiley interscience publication. J. Wiley and sons, New York, Chichester, Brisbane, 1996.
- [23] Hall, K., Kielb, R., and Thomas, J. *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*. Springer Netherlands, 2006.
- [24] Saravanamuttoo, H. I. H., Rogers, G. F. C., Cohen, H., and Straznicky, P. V. *Gas Turbine Theory*. Pearson Prentice Hall, Harlow, England, 6th edition, 2009.
- [25] Link, G. *A finite element scheme for fluid–solid–acoustics interactions and its application to human phonation*. Phd thesis, Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, 2008.
- [26] Mönkölä, S. *Numerical simulation of fluid-structure interaction between acoustic and elastic waves*. Jyväskylä studies in computing 133. University of Jyväskylä, 2011.
- [27] Sousa Jr., L. C. *Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura*. Mestrado, Universidade de Brasília, 2006.
- [28] Abbes, M. S., Bouaziz, S., Chaari, F., Maatar, M., and Haddar, M. An acousticstructural interaction modelling for the evaluation of a gearbox-radiated noise. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50:569--577, 2008.
- [29] Desmet, W., Pluymers, B., and Sas, P. Vibro-acoustic analysis procedures for the evaluation of the sound insulation characteristics of agricultural machinery cabins. *Journal of Sound and Vibration*, 266:407--441, 2003.
- [30] Akköse, M., Adanur, S., Bayraktar, A., and Dumanoglu, A. A. Elasto-plastic earthquake response of arch dams including fluid-structure interaction by the lagrangian approach. *Applied Mathematical Modelling*, 32:2396--2412, 2008.

- [31] Malinen, M. *Computational methods for optimal control in ultrasound therapy*. University of Kuopio, 2004.
- [32] Hughes, T. J. R. *The Finite Element Method*. Dover Publications, 2000.
- [33] Sun, D., Manges, J., Yuan, X., and Cendes, Z. Spurious modes in finite-element methods. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 37:12--24, 1955.
- [34] Soares Jr., D. An implicit family of time marching procedures with adaptive dissipation control. *Applied Mathematical Modelling*, 40:3325--3341, 2016.
- [35] Soares Jr., D. A simple and effective single-step time marching technique based on adaptive time integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press, 2016.
- [36] Soares Jr., D., Mansur, W. J., and Lima, D. L. An explicit multi-level time-step algorithm to model the propagation of interacting acoustic-elastic waves using finite element/finite difference coupled procedures. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 17:19--34, 2007.
- [37] Soares Jr., D. and Godinho, L. An overview of recent advances in the iterative analysis of coupled models for wave propagation. *Journal of Applied Mathematics*, 2014:21, 2014.
- [38] Soares Jr., D. and Mansur, W. J. An efficient stabilized boundary element formulation for 2d time-domain acoustics and elastodynamics. *Computational Mechanics*, 40:355--365, 2007.
- [39] Soares Jr., D. *Análise dinâmica de sistemas não lineares com acoplamento do tipo solo-fluido-estrutura por intermédio do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno*. Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
- [40] Estorff, O. V. and Antes, H. On fem-bem coupling for fluid-structure interaction analyses in the time domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(6):1151-1168, 1991.
- [41] Shapiro, A. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Ronald Press Co., 1953.
- [42] Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V. *Fundamentals of Acoustics*. Wiley, 4th edition, 2000.
- [43] Soares Jr., D., Rodrigues, G. G., and Gonçalves, K. A. An efficient multi-time-step implicit-explicit method to analyze solid-fluid coupled systems discretized by unconditionally stable time-domain finite element procedures. *Computers and Structures*, 88:387--394, 2010.

- [44] Fish, J. and Belytschko, T. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons, 2007.
- [45] Stoer, J. and Bulirsch, R. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, 3rd edition, 2002.
- [46] Barrett, R., Berry, M., Chan, T., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkout, V., Pozo, R., Romine, C., and van der Vorst, H. *Templates for the Solution of Linear Systems*. SIAM, 1994.
- [47] Strikwerda, J. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd edition, 2007.
- [48] Ainsworth Jr., G. O. *Implementação em paralelo do método de Arnoldi/Lanczos com reinício implícito*. Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- [49] Anderson, E. *Lapack Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [50] Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100:32--74, 1928.
- [51] Fletcher, C. A. and Srinivas, K. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1991.
- [52] Godinho, L., Soares Jr., D., and Santos, P. Efficient analysis of sound propagation in sonic crystals using an aca-mfs approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 69:72--85, 2016.
- [53] Gupta, A. A review on sonic crystal, its applications and numerical analysis techniques. *Acoustical Physics*, 60(2):223--234, 2014.
- [54] Miyashita, T. Sonic crystals and sonic wave-guides. *Measurement Science and Technology*, 16:R47--R63, 2005.
- [55] Miyashita, T. and Inoue, C. Numerical investigations of transmission and waveguide properties of sonic crystals by finite-difference time-domain method. *Japanese Journal of Applied Physics*, 40:3488--3492, 2001.
- [56] Yablonovitch, E. Photonic band-gap structures. *Journal of the Optical Society of America B*, 10(2):283--295, Feb 1993.
- [57] Poularikas, A. *The Transforms and Applications: Handbook*. The Electrical Engineering Handbook Series. Boca Raton: CRC Press, 1996.