UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE MATEMÁTICA

Jacqueline Ribeiro de Oliveira Roque

O Teorema de Normalização de Noether e Dimensão

Juiz de Fora
2023

Jacqueline Ribeiro de Oliveira Roque

O Teorema de Normalização de Noether e Dimensão

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ribeiro de Oliveira Roque, Jacqueline.
O Teorema de Normalização de Noether e Dimensão / Jacqueline Ribeiro de Oliveira Roque. – 2023.
48 f.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Curso de Matemática, 2023.

1. Variedades Afins. 2. Variedades quasi-projetivas. 3. Morfismos finitos e variedades normais. I. Feitosa, Frederico Sercio, orient. II. Título.

Jacqueline Ribeiro de Oliveira Roque

O Teorema de Normalização de Noether e Dimensão

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Aprovada em 05 de Dezembro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Beatriz Casulari da Mota Ribeiro
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Flaviana Andrea Ribeiro
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho ao meu filho Gustavo, pelo apoio, amizade e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFJF por todo suporte e apoio, à minha família e aos amigos por estarem sempre ao meu lado, e aos meus colegas do Instituto de Artes e Design.

“Somos assim: Sonhamos o voo, mas tememos a altura. Para voar é preciso ter coragem para enfrentar o terror do vazio. Porque é só no vazio que o voo acontece. O vazio é o espaço da liberdade, a ausência de certezas. Por isso trocamos o voo por gaiolas. As gaiolas são o lugar onde as certezas moram. ” - Os Irmãos Karamazov, Fiodor Dostoievski.

RESUMO

Este trabalho tem como foco principal a apresentação do Teorema da Normalização de Noether e Dimensão. Para isso, mostramos inicialmente conceitos básicos da geometria Algébrica, tais como Variedades afins, Variedades quasi-projetivas, Topologia de Zariski, Morfismos, entre outros. Apresentamos também alguns teoremas importantes da Geometria Algébrica: Teorema da Base de Hilbert, Teorema dos Zeros de Hilbert, Teorema Fraco dos Zeros e outros de fundamental importância para a compreensão do Teorema da Normalização de Noether.

Palavras-chave: Variedades Afins. Variedades quasi-projetivas. Morfismos finitos.

ABSTRACT

This work has as its main focus the presentation of the Normalization Theorem of Noether and Dimension. To do this, we initially show basic concepts of geometry Algebraic, such as Affine Varieties, Quasi-projective Varieties, Zariski Topology, Morphisms, among others. We also present some important theorems of Geometry Algebraic: Hilbert Base Theorem, Hilbert Zeros Theorem, Weak Theorem of Zeros and others of fundamental importance for understanding the Theorem of Noether normalization.

Keywords: Affine Varieties. Quasi-projective varieties. Finite morphisms.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho de conclusão do curso de bacharelado em matemática, estudamos alguns conceitos e resultados da Geometria Algébrica clássica. Nosso objetivo principal foi provar o Teorema de Normalização de Noether e relacionar com o conceito de dimensão. Para tal empreitada foi necessário tomar conhecimento do objeto principal de estudo da Geometria Algébrica que é a variedade algébrica e estudar resultados clássicos e importantes que culminaram na prova do Teorema de Noether.

No primeiro capítulo estudamos os conjuntos algébricos afins, as variedades afins, os anéis de coordenadas e a topologia de Zariski. Os Teoremas da base e dos zeros, ambos de Hilbert, são ferramentas importantíssimas para o estudo que foi feito. Estudamos ainda a equivalência das categorias das k-álgebras finitamente geradas e sem nilpotentes e as variedades algébricas além dos morfismos entre as variedades. Por último introduzimos o corpo de funções racionais de uma variedade afim, objeto muito importante na definição de dimensão.

No segundo capítulo adentramos no mundo projetivo. Refizemos alguns estudos do capítulo anterior mas, agora no espaço projetivo. Estudamos conjuntos algébricos projetivos, variedades projetivas, anéis de coordenadas e a topologia de Zariski. Observamos as diferenças de resultados no Teorema dos zeros de Hilbert e estudamos também os morfismos entre variedades projetivas. Além disso definimos conjuntos algébricos e variedades quasi-projetivas generalizando as definições afins e projetivas dadas anteriormente.

No último capítulo introduzimos a noção de morfismos finitos e variedades normais. Além disso provamos o famoso Teorema de Normalização de Noether e relacionamos com o conceito de dimensão de uma variedade.

2 VARIEDADES AFINS

Variedades Algébricas são os objetos principais da Geometria Algébrica, são objetos geométricos (variedades) definidos por polinômios (algébricas).

2.1 Topologia de Zariski no espaço afim e Teorema dos Zeros de Hilbert

Seja k um corpo. A menos que seja dito o contrário, k será sempre algebricamente fechado. Um corpo k diz-se algebricamente fechado se qualquer polinômio de uma variável e grau maior ou igual a 1, com coeficientes em k, tiver uma raiz em k. $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, não é algebricamente fechado. Denotamos por $\mathbb{A}^n$ ou $\mathbb{A}^n_k$ o espaço afim n-dimensional sobre k, isto é:

$$A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in k,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Vamos imbuir $\mathbb{A}^n$ de uma topologia. Consideremos o anel de polinômios $k[T_1, ..., T_n]$ nas variáveis $T_1, ..., T_n$ com coeficientes em k e seja $S \subset k[T_1, ..., T_n]$ um subconjunto. Dizemos que $Z(S)$ é o conjunto de zeros de S.

$$Z(S) := \{x \in A^n | f(x) = 0\ \forall f \in S\}$$

Lema 2.1. *(a) $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ e $Z\ (\ k[T_1, ..., T_n]\ ) = \emptyset$;*

(b) Se S_1 e S_2 são subconjuntos de $k[T_1, ..., T_n]$ com $S_1 \subset S_2$, então $Z(S_2) \subset Z(S_1)$;

(c) Dada uma família S_i de subconjuntos de $k[T_1, ..., T_n]$, então $\bigcap_i Z(S_i) = Z(\bigcup_i S)$

(d) Se S_1 e S_2 são subconjuntos de $k[T_1, ..., T_n]$, então $Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S)$, onde $S = S_1 \cdot S_2 := \{f_1.f_2 | f_i \in S_i, i = 1, 2\}$

Demonstração. (a) Todo elemento de $\mathbb{A}^n$ é zero do polinômio nulo. Assim $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n$. Agora $Z(c) = \emptyset$ para todo c $\in k^*$, daí $Z(k[T_1, T_2, \ldots, T_n]) = \emptyset$

(b) $S_1 \subset S_2 \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ e $Z(S) = \{x \in \mathbb{A}^n |\ f(x) = 0,\ \forall f \in S\}$.

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Z(S_2)$. Então temos $f(x) = 0$, $\forall f \in S_2$. Em particular, $f(x) = 0\ \ \forall$ f $\in S_1$ e, por definição, $x = (x_1, \ldots, x_n)\ \in Z(S_1)$. Logo, $Z(S_2) \subset Z(S_1)$.

(c) Seja S_i uma família de subconjuntos de $k[x_1, \ldots, x_n]$.
Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \cap_i\ Z(S_i)$. Assim, $x \in Z(S_i)\ \forall\ i$, isto é, para cada i temos $f(x) = 0$, $\forall\ f \in S_i$. Logo, devemos ter $f(x) = 0$, $\forall f \in U_i S_i$, na qual, por definição, temos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Z(U_i S_i)$. Por outro lado, seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Z(U_i S_i)$. Assim temos que $f(x) = 0$, $\forall\ f \in\ S_i$. Particularmente, temos, para cada i, que $f(x) = 0, \forall f \in S_i\ \subset \cup_i S_i$, ou seja, $x \in Z(S_i)\ \forall\ i$. Portanto, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in\ \cap_i Z(S_i)$. Logo, $\cap_i Z(S_i) = Z(\cup_i S_i)$.

(d) Tome $x \in Z(S_1) \cup Z(S_2)$. Então $x \in Z(S_i)$ para algum i = 1, 2 e logo $f_i(x) = 0$ para todo $f_i \in S_i$. Portanto $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = 0$ para todo $f_1 \in S_1$ *e* $f_2 \in S_2$, implicando que x $\in Z(S)$.

Reciprocamente, tome $x \in Z(S)$. Suponha que $x \notin Z(S_1)$. Então existe $f_1 \in S_1$ tal que $f_1(x) \neq 0$. Mas $f_1(x) f_2(x) = 0$. Logo $f_2(x) = 0$ para todo $f_2 \in S_2$, isto é, $x \in Z(S_2)$.

$\square$

Definição 2.2. *Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é fechado se X = Z(S) para algum $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$.*

O complementar de um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^n$ é chamado subconjunto aberto de $\mathbb{A}^n$. Os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$ são também chamados de conjuntos algébricos afins. Consideraremos um conjunto algébrico como um objeto mais geral, que será definido posteriormente.

Corolário 2.3. *Os subconjuntos abertos de $\mathbb{A}^n$ formam uma topologia, a topologia de Zariski.*

Demonstração. Como consequência do lema 2.1, temos:

- $\mathbb{A}^n$ e $\emptyset$ são abertos (pois $\emptyset = Z\ (k\ [T_1, \ldots, T_n])$ e $\mathbb{A}^n = Z(\{0\})$ são fechados);
- união de abertos é aberta;
- interseção finita de abertos é aberta.

$\square$

Exemplo 2.4. *É fácil descrever os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^1$. Como polinômios em uma variável têm apenas um número finito de zeros, os fechados de $\mathbb{A}^1$ são subconjuntos finitos.*

Exemplo 2.5. *Agora descreveremos os fechados em $\mathbb{A}^2$. Tome $g(T_1, T_2) \in k[T_1, T_2]$. O fechado*

$$Z(g) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 | g(x_1, x_2) = 0\}$$

é chamado uma curva (algébrica) plana afim. Note que como k é um corpo infinito (por ser algebricamente fechado), o conjunto $Z(g)$ é infinito. Por exemplo, se $g(T_1, T_2) = T_2(T_2^2 - T_1)$, então

$$Z(g) = \{(t, 0) | t \in k\} \cup \{(t^2, t) | t \in k\}.$$

Tome $S \subset k[T_1, T_2]$ e seja $X = Z(S)$. Suponha que $\emptyset \neq X \neq \mathbb{A}^2$. Queremos descrever X.

Primeiro supomos que os polinômios de S não têm fator comum não constante. Então podemos escolher $f_1, \ldots . f_r \in S$ sem divisor comum em $k[T_1, T_2]$. Pelo lema de Gauss, $f_1, \ldots, f_r$ não têm divisor comum em $k(T_1)[T_2]$. Como $k(T_1)[T_2]$ é euclidiano, pelo algoritmo de Euclides existem $g_1, \ldots, g_r \in k(T_1)[T_2]$ tais que

$$1 = f_1 g_1 + ... + f_r g_r.$$

Seja $d \in k[T_1]$ o denominador comum de $g_1, \ldots, g_r$, de modo que cada g_i se escreve $g_i = h_i/d$ com $h_i \in k[T_1, T_2]$ para $i = 1, \ldots, r$. Logo temos

$$d = f_1 h_1 + \cdots + f_r h_r.$$

Assim, se $(x_1, x_2) \in X$ então $f_i(x_1, x_2) = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ e logo $d(x_1) = 0$. Como d é polinômio em uma variável, então tem apenas um número finito de raízes e logo existe apenas um número finito de possibilidades para x_1. Analogamente, existe apenas um número finito de possibilidades para x_2. Portanto, X é finito.

Por outro lado, suponha que os polinômios de S têm divisor comum. Seja g o máximo divisor comum dos $f \in S$. Então X contém a curva $Z(g)$. Agora, existe $S' \in k[T_1, T_2]$ tal que cada $f \in S$ é da forma $f = gh$ com $h \in S'$. Pelo Lema 2.1 (d), temos:

$$X = Z(S) = Z(g) \cup Z(S').$$

Como os polinômios de S' não têm fator comum não constante, então $Z(S')$ é finito. Logo, os fechados de $\mathbb{A}^2$ são da forma:

$$X = \textit{curva plana afim} \bigcup \textit{número finito de pontos}.$$

Por exemplo, se $S = \{T_2(T_2^2 - T_1), T_2(T_1 - 1)\}$, então $X = Z(S)$ é dado por

$$\begin{aligned} X &= Z(T_2) \cup Z(T_2^2 - T_1, T_1 - 1) \\ &= \{(t, 0) | t \in k\} \cup \{(1, 1), (1, -1)\} \end{aligned}$$

Observação 2.6. *Considere um fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$ dado por $X = Z(S)$ com $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$. Denotamos por $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S em $k[T_1, \ldots, T_n]$. Note que $X = Z(S) = Z(\langle S \rangle)$. Mais ainda, suponha que $\langle S \rangle$ é finitamente gerado, isto é, que existe um número finito de polinômios $f_1, \ldots, f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tais que $\langle S \rangle = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. Então temos $X = Z(f_1, \ldots, f_r)$, já que todo $f \in \langle S \rangle$ é da forma $f = h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r$ com $h_1, \ldots, h_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$.*

Definição 2.7. *Um anel A é dito um anel noetheriano se, equivalentemente,*

(i) cada ideal de A é finitamente gerado, ou seja, se existem $a_1,\ldots,a_n$ em I, tais que qualquer elemento de I pode ser escrito da forma $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ com $x_1, x_2,\ldots, x_n \in A$);

(ii) cada cadeia ascendente de ideais $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ em A é estacionária, isto é, existe n tal que $I_n = I_{n+l}$ para todo $l \geq 0$;

(iii) a condição de máximo é satisfeita em A, ou seja, cada conjunto não vazio de ideais de A tem elemento maximal.

Exemplo 2.8. *Todo corpo k é anel noetheriano (os únicos ideais de um corpo são $\langle 0\rangle$ e k).*

Exemplo 2.9. *O anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros é Noetheriano pois todo ideal em $\mathbb{Z}$ é principal, gerado por um único elemento.*

Exemplo 2.10. *O anel de polinômios em n variáveis sobre um corpo k (não necessariamente fechado) é Noetheriano (Teorema da base de Hilbert, que veremos a seguir).*

Teorema 2.11. *(Teorema da Base de Hilbert)*

Se A é anel Noetheriano, então o anel de polinômios em uma variável $A[T]$ também é Noetheriano.

Demonstração. Suponha que $A[T]$ não é Noetheriano e tome um ideal $J \subset A[T]$ que não seja finitamente gerado. Escolhemos elementos $f_1, f_2, \ldots, \in J$ da seguinte forma: escolha $f \in J - \{0\}$ de menor grau e para cada r, se $f_1, \ldots, f_{r-1}$ estão escolhidos, tome

$$f_r \in J - \langle f_1, \ldots, f_{r-1}\rangle$$

de menor grau.

Para cada $r \geq 1$ seja n_r o grau de f_r e $a_r \in A$ o coeficiente do termo de grau n_r em f_r. Então $n_1 \leq n_2 \leq \ldots$ e temos cadeia ascendente de ideais de A

$$\langle a_1\rangle \subset \langle a_1, a_2\rangle \subset \cdots \subset A.$$

Como A é Noetheriano, esta cadeia é estacionária, logo temos, para qualquer r

$$\langle a_1, \ldots, a_r\rangle = \langle a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}\rangle$$

e, portanto

$$a_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$$

com $c_i \in A$. Mas então o polinômio

$$f_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i f_i T^{n_{r+1}-n_i} \in J - \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$$

tem grau menor que n_{r+1}, contrariando a escolha de f_{r+1}. Assim $A[T]$ é Noetheriano.

$\square$

Corolário 2.12. *Se A é Noetheriano, então o anel de polinômios $A[T_1, \ldots, T_n]$ em n variáveis também é Noetheriano. Em particular, $k[T_1, \ldots, T_n]$ é Noetheriano e todo fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$ pode ser descrito por um número finito de equações na seguinte forma:*

$$X = Z(f_1, \ldots, f_r) \text{ com } f_1, \ldots, f_r \ \in k \ [T_1, \ldots, T_n]$$

Definição 2.13. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto qualquer. Seja $I(X)$ o ideal de X definido da seguinte forma:*

$$I(X) = \{f \ \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0 \ \forall x \in X\}$$

É fácil ver que $I(X)$ é um ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$

Lema 2.14. *(a) $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ e $I(\emptyset) = k[T_1, \ldots, T_n]$;*

(b) Se X_1 e X_2 são subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ com $X_1 \subset X_2$ então $I(X_2) \subset I(X_1)$;

(c) Para $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ e $X \subset \mathbb{A}^n$ subconjuntos, temos $S \subset I(Z(S))$ e $X \subset Z(I(X))$.

(d) Para X e Y subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ temos $I(X \cup Y) = \ I(X) \ \cap \ I(Y)$.

Demonstração. (a) Para o caso $n = 1$ temos que $I(\mathbb{A}^{\Bbbk}) = \{f \in k[T] : f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{A}^{\Bbbk}\}$. Como k é infinito segue que um polinômio em $I(\mathbb{A}^{\Bbbk})$ deveria ter infinitas raízes. Mas isto só é possível para o polinômio nulo. Logo $I(\mathbb{A}^{\Bbbk}) = \{0\}$. O resultado geral segue por indução sobre n.

Se $X = \emptyset, I(X) = I(\emptyset)$ é o próprio $\mathbb{A}^{\varkappa}$.

(b) Sejam $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{A}^n$ e $I(X_2) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0, \forall x \in X_2\}$.

Em particular, $f(x) = 0, \forall x \in X_1$, pois $X_1 \subset X_2$ e, por definição, $f(X_1) \in I(X_1)$. Portanto, $I(X_2) \subset I(X_1)$.

(c) Vamos provar que $S \subset I(Z(S))$

Temos $Z(S) := \{x \in \mathbb{A}^n | f(x) = 0, \forall f \in S\}$

e $I(Z(S)) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0 \ \forall x \in Z(S)\}$.

Seja $f \in S$. Então existe $x \in Z(S)$ tal que $f(x) = 0$.

Logo $f \in I(Z(S))$, ou seja, $S \subset I(Z(S))$.

Agora vamos provar que $X \subset Z(I(X))$.

Temos $Z(I(X)) := \{x \in \mathbb{A}^n | f(x) = 0, \forall f \in I(X)\}$

e $I(X) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0, \forall x \in X\}$

Seja $x \in X$. Então existe $f(x) \in I(X)$ tal que $f(X) = 0, \forall x \in X$. Logo $f \in Z(I(X))$, ou seja, $X \subset Z(I(X))$.

(d) Temos:

$I(X) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0, \ \forall \ x \in X\}$

e $I(Y) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(y) = 0, \forall y \in Y\}$

Para provar a igualdade, temos que provar duas inclusões:

1ª)$I(X) \cap I(Y) \subset I(X \cup Y) \longrightarrow$ Seja $f \in I(X) \cap I(Y)$. Então $f \in I(X)$ e $f \in I(Y)$. Logo $f \in I(X \cup Y)$

2ª) $I(X \cup Y) \subset I(X) \cap I(Y)$

Temos $I(X \cup Y) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid f(z) = 0, \forall z \in (X \cup Y)\}$

Se $f(z) = 0 \ \forall z \in (X \cup Y)$, então, em particular:

- $f(z) = 0 \ \forall z \in X \Rightarrow f \in I(X)$
- $f(z) = 0 \ \forall z \in Y \Rightarrow f \in I(Y)$

Portanto, $f \in I(X) \cap I(Y)$

□

Definição 2.15. *(Fecho de X)*

Seja $X \subset A^n$. O fecho de X é o menor fechado $\overline{X}$ de A^n contendo X, ou seja, se W é um fechado de A^n contendo X, então W contém $\overline{X}$.

Exemplo 2.16. *Se $X = \{(x_1, x_2) \in A^2 | x_2 = 0, x_1 \neq 0\}$ então $\overline{X} = \{(x_1, x_1) \in A^2 | x_2 = 0\}$.*

Proposição 2.17. *Se X é um subconjunto de A^n, então $\overline{X} = Z(I(X))$.*

Demonstração. Sabemos que:

$I(X) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0, \forall \ x \in X\}$

e $Z(I(X)) := \{x \in A^n | f(x) = 0 \forall f \in I(X)\}$

Pelo Lema 2.14 (c), $Z(I(X))$ é um fechado contendo X.

Tome $W \subset A^n$ um fechado contendo X. Temos que mostrar que W contém $Z(I(X))$. Como W é fechado, temos $W = Z(S)$ para algum $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$. Como $X \subset W$, pelo Lema 2.14 (b), $S \subset I(W) \subset I(X)$ e, portanto, $Z(I(X)) \subset Z(S) = W$.

□

Definição 2.18. *Sejam A um anel e $J \subset A$ um ideal. Definimos o radical de J como*

$$\sqrt{J} = \{f \in A \mid f^r \in J \; para \; algum \; r \in \mathbb{N}\}$$

Note que $\sqrt{J}$ é um ideal de A. De fato, tomemos $f, g \in \sqrt{J}$. Então $f^r, g^s \in J$ para algum $r, s \in \mathbb{N}$, e temos:

$(f+g)^{r+s} = c_0 f^{r+s} + c_1 f^{r+s-1} g + \cdots + c_s f^r g^s + \cdots + c_{r+s-1} f g^{r+s-1} + c_{r+s} g^{r+s} \in J,$

onde $c_0, \ldots, c_{r+s} \in A$ são coeficientes binomiais.

Assim $f + g \in \sqrt{J}$.

Além disso, se $h \in A$, então $(hf)^r = h^r f^r \in J$ e logo $hf \in \sqrt{J}$.

Dizemos que o ideal J é um ideal radical se $J = \sqrt{J}$.

Exemplo 2.19. $\sqrt{\langle T_1^2, T_2^3 \rangle} = \langle T_1, T_2 \rangle$

Teorema 2.20. *(Teorema dos Zeros de Hilbert, Nullstellensatz)*

Para cada ideal $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$, temos $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.

O corpo k, neste teorema, não precisa ser algebricamente fechado. Para demonstrar o Teorema dos Zeros de Hilbert, precisamos de um resultado preliminar conhecido como Lema de Zariski.

Definição 2.21. *Uma k-álgebra é uma estrutura algébrica com duas operações internas, adição e multiplicação, e uma operação externa.*

Teorema 2.22. *Seja k um corpo (não necessariamente algebricamente fechado) e tome K uma extensão de k. Assuma que K é finitamente gerado como k-álgebra, isto é, existem $f_1, \ldots, f_n \in K$ tais que $K = k[f_1, \ldots, f_n]$. Então K é algébrico sobre k.*

Lembramos que o grau de transcendência de uma extensão de corpos L/k é uma certa medida do ”tamanho” da extensão. Ele define a maior cardinalidade de um subconjunto algebricamente independente de L sobre k.

Demonstração. Vamos supor K transcendente sobre k e que o grau de transcendência é 1, ou seja, para algum $x \in K$, temos:

$$k \subset k(x) \subset K$$

com K algébrico sobre $k(x)$ e X transcendente sobre k. Então K é finitamente gerado como $k(x)$-álgebra e, como K é algébrico sobre $k(x)$, sua dimensão como $k(x)$-espaço vetorial é finita.

Seja $e_1, \ldots, e_m \in K$ uma base de K como $k(x)$-espaço vetorial. Os produtos $e_r e_s$ estão em K e se escrevem como

(1)

$$e_r \cdot e_s = \sum_{t=1}^{m} \frac{a_{rst}(x)}{b_{rst}(x)} e_t$$

com $a_{rst}(x), b_{rst}(x) \in k[x]$.

Vamos mostrar que para qualquer escolha de $f_1, \ldots, f_n \in K$ temos uma inclusão estrita

$$A := k[f_1, \ldots, f_n] \subsetneq K,$$

ou seja, que K não é finitamente gerado como k-álgebra. Tome $f_0 = 1$ e para cada $l = 0, \ldots, n$ escreva

(2)

$$f_l = \sum_{r=1}^{m} \frac{c_{lr}(x)}{d_{lr}(x)} e_r$$

onde $c_{lr}(x), d_{lr}(x) \in k[x]$. Como cada $a \in A$ é combinação k-linear de $f_0 = 1$ e produtos de $f_1, \ldots, f_n$, usando (2) vemos que cada a é combinação $k(x)$-linear de produtos de $e_1, \ldots, e_m$.

Assim, por (1), a é então combinação $k(x)$-linear de $e_1, \ldots, e_m$. Note que a é da forma

$$a = \frac{1}{\text{produto de } b_{rst(x)}\text{'s e } d_{lr(x)}\text{'s}} \sum_{i=1}^{m} h_i(x) e_i$$

com $h_i(x) \in k[X]$. Deste modo, dado $g(x) \in k[x]$ irredutível que não é fator de nenhum $b_{rst}(x)$ ou $d_{lr}(x)$, temos $1/g(x) \notin A$. Mas é claro que $1/g(x) \in K$ e logo $A \subsetneq K$.

Agora, se o grau de transcendência de K sobre k é maior que 1, tomamos um corpo k' com $k \subset k' \subset K$ e tal que o grau de transcendência de k sobre k' seja 1. Pelo argumento acima, K não é uma k'-álgebra finitamente gerada, e logo não é uma k-álgebra finitamente gerada.

□

Observação 2.23. *Lembramos que ideal M do anel A é maximal se, para qualquer ideal I de A , a propriedade $M \subseteq I$ implica $I = M$ ou $I = A$. Sabemos que M ideal de A é maximal se e somente se o quociente A/M é corpo.]*

Teorema 2.24. *(Teorema Fraco dos Zeros de Hilbert)*

Todo ideal maximal do anel $k[T_1, \ldots, T_n]$ é da forma $(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in k$. Como consequência, um conjunto de polinômios em $k[T_1, \ldots, T_n]$ sem zeros em comum em A^n gera o ideal unitário em $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Demonstração. Seja $M \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ um ideal maximal. Então o quociente $\frac{k[T_1,\ldots,T_n]}{M}$ é um corpo contendo k. Como $k[T_1, \ldots, T_n]$ é uma k-álgebra finitamente gerada, o corpo $k[T_1, \ldots, T_n]/M$ também é. Pelo teorema anterior, $k[T_1, \ldots, T_n]/M$ é uma extensão algébrica de k. Além disso, k é algebricamente fechado. Então $k[T_1, \ldots, T_n]/M = k$.

Consideremos o mapa natural: $\phi : k[T_1, \ldots, T_n] \to k[T_1, \ldots, T_n]/M = k$. Seja $x_i = \phi(T_i), i = 1, \ldots, n$. O ideal maximal $(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ está contido em M e é, portanto, igual a M.

Agora seja J o ideal gerado por polinômios sem zeros em comum. Se J está contido no ideal $(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$, então os polinômios têm zero em comum em $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$. Então J não está contido em nenhum ideal maximal de $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Logo $J = k[T_1, \ldots, T_n]$

□

Demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert. (Truque de Rabinowich) Seja $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ um ideal. Queremos mostrar que $I(Z(J)) = \sqrt{J}$. Como $k[T_1, \ldots, T_n]$ é Noetheriano, então $J = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, finitamente gerado. Temos que mostrar que um polinômio $g \in k[T_1, \ldots, T_n]$ se anula nos zeros comuns de $f_1, \ldots, f_m$ se e somente se $g^r \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Ora, se $g^r \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ então é óbvio que g^r (e logo g) se anula nos zeros comuns de $f_1, \ldots, f_m$.

Agora suponha que g se anula nos zeros comuns de $f_1, \ldots, f_m$ e considere os polinômios $g, f_1, \ldots, f_m$ como elementos do anel $k[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]$. Note que os polinômios $f_1, \ldots, f_m$ e $T_{n+1}g - 1$ não têm zeros em comum em $\mathbb{A}^{n+1}$ e, pelo Teorema Fraco dos Zeros, podemos escrever

$$1 = p_1 f_1 + \cdots + p_m f_m + p_{m+1}(T_{n+1}g - 1)$$

com $p_1, \ldots, p_m, p_{m+1} \in k[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]$. Fazendo $T_{n+1} = 1/g$, temos

$$1 = p_1(T_1, \ldots, T_n, 1/g) f_1 + \cdots + p_m(T_1, \ldots, T_n, 1/g) f_m.$$

Multiplicando por uma potência apropriada de g obtemos

$$g^r = q_1 f_1 + \cdots + q_m f_m,\ g^r \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$$

com $q_1, \ldots, q_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$. □

Corolário 2.25. *Existe bijeção revertendo inclusões.*

$$\{fechados\ em\ \mathbb{A}^n\} \leftrightarrow \{ideais\ radicais\ em\ k[T_1, \ldots, T_n]\}$$
$$X \mapsto I(X)$$
$$Z(J) \leftarrow J$$

Podemos estender a topologia de Zariski da maneira usual a um subconjunto X de $\mathbb{A}^n$ (não necessariamente fechado), considerando a topologia induzida.

Dessa maneira, um aberto de X (respectivamente fechado) é a interseção de um aberto (respectivamente fechado) de $\mathbb{A}^n$ com X.

Observação 2.26. *(Topologia Fraca) Seja $X \subset \mathbb{A}^n$. Na topologia de Zariski as funções polinomiais ($f : X \to k$) são contínuas. A imagem inversa de um fechado de $k = \mathbb{A}^1$ é um fechado de X, ou seja, é a interseção de X com um fechado de $\mathbb{A}^n$. Os fechados próprios de $\mathbb{A}^1$ são conjuntos finitos de pontos. Logo, para cada $a \in k = \mathbb{A}^1$:*

$$f^{-1}(a) = \{x \in X | f(x) = a\} = X \cap Z(f - a) \text{ fechado em } X.$$

Definição 2.27. *Um espaço topológico X é irredutível se, equivalentemente:*

(i) X não é a união de dois fechados próprios;

(ii) dois abertos não vazios quaiquer de X se intersectam;

(iii) Todo aberto não vazio de X é denso em X.

Exemplo 2.28. *Seja $X = Z(T_1T_2) \subset \mathbb{A}^2$, temos*

$$X = \{(0, t) \mid t \ \in k\} \cup \{(t, 0) \mid t \in k\} = Z(T_1) \cup Z(T_2)$$

Logo, X não é irredutível.

Exemplo 2.29. *$\mathbb{A}^1$ é irredutível pois seus fechados próprios são conjuntos finitos de pontos. Na verdade, $\mathbb{A}^n$ é irredutível para todo n. Este resultado seguirá facilmente da Proposição 2.33.*

Proposição 2.30. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ se escreve, de forma única, como união finita de fechados irredutíveis de X:*

$$X = W_1 \cup \cdots \cup W_r$$

onde $W_i \not\subset W_j$ se $i \neq j$

Ainda, W_i fechado em X não implica que X seja fechado em $\mathbb{A}^n$.

Dizemos que $W_1, \ldots, W_r$ são as componentes irredutíveis de X.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro a decomposição em fechados irredutíveis. Suponha que este resultado não seja válido para X. Em particular, X não é irredutível e $X = X_1 \cup X_1'$, com X_1, X_1' subconjuntos fechados próprios de X. Se X não satisfaz a proposição, significa que pelo menos um destes conjuntos também não satisfaz a proposição, por exemplo X_1. Então X_1 não é irredutível e se escreve $X_1 = X_2 \ \cup \ X_2'$ com

X_2, X_2' fechados próprios de X_1. E suponha novamente que um destes conjuntos, digamos X_2, não satisfaça a proposição. Procedendo deste modo obtemos uma cadeia infinita de subconjuntos de $\mathbb{A}^n$

$$X = X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots$$

Note que os conjuntos X_i são fechados em X.

Seja $J_n = I(X_n)$, para $n \geqslant 0$. Temos então a seguinte cadeia ascendente de ideais

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset k[T_1, \ldots, T_n]$$

onde $J_m = J_{m+1}$ para algum $m \geqslant 0$, pois $k[T_1, \ldots, T_n]$ é Noetheriano. Assim, $I(X_m) = I(X_{m+1})$ e, pela proposição 2.17, $\overline{X}_m = \overline{X}_{m+1}$. Como cada X_i é fechado em X podemos escrever $X_i = X \cap Y_i$, com Y_i fechado em $\mathbb{A}^n$. Assim temos:

$$\overline{X} \cap Y_m = \overline{X \cap Y_m} = \overline{X \cap Y_{m+1}} = \overline{X} \cap Y_{m+1}$$

Portanto

$$X_m = X \cap (\overline{X} \cap Y_m) = X \cap (\overline{X} \cap Y_{m+1}) = X_{m+1}$$

contrariando a cadeia infinita.

Agora vamos mostrar a unicidade da decomposição em componentes irredutíveis.

Suponha que $X = W_1 \cup W_2 \cup \ldots W_r = W_1' \cup W_2' \cup \ldots W_s'$ com W_i, W_j' como no enunciado do teorema, para $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, s$. Então, para cada i temos:

$$W_i = W_i \cap X = W_i \cap (\cup_j W_j') = \cup_j (W_j' \cap W_i)$$

Como W_i é irredutível e as interseções $W_j' \cap W_i$ são fechados em W_i, temos que ter $W_i = W_i \cap W_j'$ para algum j. Assim, $W_i \subset W_j'$. Do mesmo modo, temos

$$W_j' = W_j' \cap X = \cup_l (W_j' \cap W_l)$$

e, como W_j' é irredutível e $W_i \cap W_j' \neq \emptyset$, então temos $W_j' = W_j' \cap W_i$, ou seja, $W_j' \subset Wi$. Assim $W_i = W_j'$. Procedendo deste modo para cada i, j obtemos a unicidade. $\square$

Exemplo 2.31. *Seja* $X = Z(T_2(T_2^2 - T_1)) \subset \mathbb{A}^2$

As componentes irredutíveis de X *são* $W_1 = Z(T_2)$ *e* $W_2 = Z(T_2^2 - T_1)$. *É fácil ver que* W_1 *e* W_2 *são fechados em* X *cuja união é* X. *A proposição 2.33 mostra que* W_1 *e* W_2 *são irredutíveis.*

Definição 2.32. *Uma variedade afim é um fechado afim irredutível. Para um conjunto* $X \subset \mathbb{A}^n$, *dizemos que* $Y \subset X$ *é uma subvariedade de* X *se* Y *é irredutível e fechado em* X. *Em* $\mathbb{A}^{\Bbbk}$, *as subvariedades são conjuntos de um único ponto.*

Proposição 2.33. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{A}^n$. Então X é irredutível se, e somente se, $I(X)$ é um ideal primo. Em particular, X é irredutível se, e somente se, $\overline{X}$ é irredutível.*

Demonstração. Suponha primeiro que X é irredutível. Se $I(X)$ não for um ideal primo, existem ideais I e J de $k[T_1, \dots, T_n]$ tais que $I \cdot J \subset I(X)$, mas I e J não estão contidos em $I(X)$. Pelo Lema 2.1 (d):

$$X \subset Z(I(X)) \subset Z(I \cdot J) = Z(I) \cup Z(J)$$

mas

$$X \subset Z(I(X)) \not\subset Z(I) \text{ e } X \subset Z(I(X)) \not\subset Z(J)$$

o que contraria a irredutibilidade de X.

Suponha agora que $I(X)$ é primo, mas X não é irredutível, ou seja, $X = X_1 \cup X_2$, X_1 e X_2 fechados próprios de X. Então pelo lema 2.14, temos:

$$I(X) = I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2) \supset I(X_1) \cdot I(X_2)$$

mas $I(X)$ não contém $I(X_1)$ nem $I(X_2)$, o que contradiz o fato de $I(X)$ ser primo.

□

Definição 2.34. *Uma hipersuperfície de $\mathbb{A}^n$ é um fechado X dado por uma única equação, isto é, tal que $I(X) = \langle f \rangle$ para algum $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ não nulo.*

Exemplo 2.35.

- *$\mathbb{A}^n$ é irredutível para todo n pois o ideal $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ é primo.*
- *$W_1 = Z(T_2)$ e $W_2 = Z(T_2^2 - T_1)$ são hipersuperfícies irredutíveis de $\mathbb{A}^n$ pois os ideais $\langle T_2 \rangle$ e $\langle T_2^2 - T_1 \rangle$ são primos.*

2.2 Funções Regulares e Morfismos

Definição 2.36. *Seja X um fechado de $\mathbb{A}^n$. Uma função $f : X \to k$ é dita uma função regular se existe um polinômio $F \in k[T_1, \dots, T_n]$ tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$.*

Observação 2.37. *As funções regulares são contínuas.*

Observação 2.38. *Note que o polinômio F não é unicamente determinado. De fato, dois polinômios F e G determinam a mesma função regular em X se, e somente se, $F(x) = G(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $F(x) - G(x) = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, se, e somente se, $F - G \in I(X)$.*

Assim, o anel quociente $k[X] := k[T_1, \dots, T_n]/I(X)$ é chamando de anel de funções regulares em X ou anel de coordenadas de X. A cada função regular em X corresponde um único elemento de $k[X]$ e vice-versa. Note que $k[X]$ é Noetheriano, já que é um quociente *do anel Noetheriano $k[T_1,\ldots,T_n]$. Além disso, $k[X]$ é um domínio se, e somente se, $I(X)$ é um ideal primo, se, e somente se, X é irredutível.*

Exemplo 2.39. $k[\mathbb{A}^n] = k[T_1,\ldots,T_n]$, *pois* $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0\rangle$

Exemplo 2.40. $X = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{A}^3 | x_1 + x_2 = x_3\}$ *e* $I(X) = \langle T_1 + T_2 - T_3\rangle$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
k[X] = \frac{k[T_1,T_2,T_3]}{\langle T_1 + T_2 - T_3\rangle} &\xrightarrow{\sim} k[S_1,S_2] \\
T_1 &\mapsto S_1 \\
T_2 &\mapsto S_2 \\
T_3 &\mapsto S_1 + S_2
\end{aligned}
$$

Teorema 2.41. *Seja X um fechado afim. Existe bijeção revertendo inclusões.*

$$
\begin{array}{rcl}
\{\textit{fechados em } X\} & \leftrightarrow & \{\textit{ideais radicais em } k[X]\} \\
Y & \mapsto & I_X(Y) := \{h \in k[X] | h(y) = 0,\ \forall y \in Y\} \\
Z(J) := \{y \in X | h(y) = 0\ \forall h \in J\} & \leftarrow\!\shortmid & J
\end{array}
$$

Além disso, para Y fechado em X, temos:

$$k[Y] \cong k[X]/I_X(Y)$$

e Y é irredutível se, e somente se, $I_X(Y)$ é ideal primo.

Demonstração. O teorema segue de propriedades de anéis quocientes. Para I ideal de um anel A, existe bijeção

$$
\begin{array}{rcl}
\{\text{ideais em } A \text{ contendo } I\} & \leftrightarrow & \{\text{ideais em } A/I\} \\
J & \mapsto & J/I
\end{array}
$$

tal que

- J é radical se e somente se J/I é radical;
- J é primo se e somente se J/I é primo;
- J é maximal se e somente se J/I é maximal;
- $A/J \cong (A/I)/(J/I)$.

□

Definição 2.42. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados afins. Uma função $f : X \to Y$ é dita um morfismo se existem $f_1, \dots, f_m \in k[X]$ tais que*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

para todo $x \in X$. Assim, uma função regular é um morfismo $f : X \to \mathbb{A}^1$.

Exemplo 2.43. *Considere $X = Z(T_1 + T_2 - T_3)$ e $Y = Z(T_1^2 - T_2^2 + T_3)$ hipersuperfícies em $\mathbb{A}^3$ (X é um plano e Y uma superfície de sela). Consideramos o morfismo*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^3 & \to & \mathbb{A}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3(x_2 - x_1)) \end{array}$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$, então $x_3 = x_1 + x_2$ e

$$f(x) = (x_1, x_2, (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)) = (x_1, x_2, x_2^2 - x_1^2) \in Y$$

Deste modo, f induz um morfismo $f|_X : X \to Y$.

Proposição 2.44. *Sejam X e Y fechados afins. Dado um morfismo $f : X \to Y$, o mapa de pullback*

$$f^* : k[Y] \to k[X]$$
$$g \mapsto g \circ f := f^*g$$

é um homomorfismo de k-álgebras.

Reciprocamente, se $f : X \to Y$ é uma função tal que $g \circ f \in k[X]$ para todo $g \in k[Y]$, então f é um morfismo.

Demonstração. Suponha $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$. Se $f : X \to Y$ é um morfismo, existem $f_1, \dots, f_m \in k[X]$ tais que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ para todo $x \in X$. Tome $g \in k[Y]$. Então existem polinômios $F_1, \dots, F_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ e $G \in k[S_1, \dots, S_m]$ tais que $f_i(x) = F_i(x)$ e $g(y) = G(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Portanto

$$(f^*g)(x) = G(F_1(x), \dots, F_m(x))$$

é polinomial, mostrando que $f^*g \in k[X]$. Além disso, f^* é homomorfismo de k-álgebras. De fato, para $g, g' \in k[Y]$ e $a \in k$ temos

- $f^*(ag) = (ag) \circ f = a(g \circ f) = a(f^*g)$;
- $f^*(g + g') = (g + g') \circ f = (g \circ f) + (g' \circ f) = (f^*g) + (f^*g')$;

- $f^*(g \cdot g') = (g \cdot g') \circ f = (g \circ f) \cdot (g' \circ f) = (f^*g) \cdot (f^*g')$.

Agora suponha que $f : X \to Y$ é tal que $g \circ f \in k[X]$ sempre que $g \in k[Y]$. Escrevemos $f = (f_1, \ldots, f_m)$ e tomamos $g = s_i \in k[Y]$ a função regular correspondente ao polinômio $S_i \in k[S_1, \ldots, S_m]$. Então $s_i \circ f = f_i \in k[X]$ para cada $i = 1, \ldots, m$, mostrando que f é morfismo.

□

Corolário 2.45. *Todo morfismo entre fechados afins é contínuo.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ um morfismo com $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados. Tome $W \subset Y$ um fechado. Precisamos mostrar que $f^{-1}(W)$ é fechado em X. Pelo Teorema 2.41, W é o conjunto de zeros de funções regulares $h_1, \ldots, h_r \in k[Y]$. Então $f^{-1}(W)$ é o conjunto dos zeros de $f^*h_1, \ldots, f^*h_r \in k[X]$, pois

$$\begin{aligned} f^{-1}(W) &= \{x \in X | f(x) \in W\} \\ &= \{x \in X | f(x) \text{ é zero de } h_1, \ldots, h_r\} \\ &= \{x \in X | (h_i \circ f)(x) = 0, i = 1, \ldots, r\} \\ &= \{x \in X | (f^*h_i)(x) = 0, i = 1, \ldots, r\} \end{aligned}$$

Deste modo $f^{-1}(W)$ é fechado em X e f contínua. □

Vimos então que um morfismo entre fechados afins X e Y induz um homomorfismo de k-álgebras.Vejamos agora que um homomorfismo de k-álgebras

$$\varphi : k[Y] \to k[X]$$

induz um morfismo $f : X \to Y$ tal que $f^* = \varphi$. Suponha $Y \subset \mathbb{A}^m$ e tome $s_1, \ldots, s_m \in k[Y]$ as funções regulares correspondentes aos polinômios $S_1, \ldots, S_m \in k[S_1, \ldots, S_m]$. Seja $f_i = \varphi(S_i) \in k[X]$, para cada i, e considere a função

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{A}^m \\ x &\mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \end{aligned}$$

É claro que f é um morfismo. Além disso, para cada $x \in X$ temos $f(x) \in Y$. De fato, para todo $H \in I(Y)$ temos $H = 0$ em $k[Y]$. Logo $\varphi(H) = 0$ em $k[X]$ e, portanto, $H(f(x)) = \varphi(H)(x) = 0$, ou seja, $f(x) \in Z(I(Y)) = Y$, pois Y é fechado. É óbvio pela definição de f que $f^* = \varphi$. Esta construção indica que existe uma relação profunda entre álgebra e geometria.

Um isomorfismo é um morfismo $f : X \to Y$ para o qual existe um morfismo $g : Y \to X$ com $f \ o \ g = 1_Y$ e $g \ o \ f = 1_X$, onde 1_X *e* 1_Y são as funções identidades em X e Y. Neste caso, dizemos que X e Y são isomorfos e denotamos $X \cong Y$.

Na Geometria Algébrica existem poucos isomorfismos. Assim, problemas de classificação a menos de isomorfismo são, em geral, problemas difíceis. Uma solução possível é utilizar uma classificação menos fina, isto é, uma equivalência mais fraca que o isomorfismo.

Definição 2.46. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. O corpo de funções racionais de X é o corpo de frações de k[X], que é*

$$k(X) := \left\{ \frac{f}{g} \ |f, g \in k[X] \ , g \neq 0 \right\}$$

onde $f/g \sim f'/g'$ se $fg' = f'g$.

Uma função racional $\varphi \in k(X)$ é dita regular em um ponto $x \in X$ se podemos escrever $\varphi = f/g$ com $f, g \in k[X]$ e $g(x) \neq 0$.

Proposição 2.47. *Seja X uma variedade afim. Uma função racional que é regular em todos os pontos de X é uma função regular.*

Demonstração. Tome $\varphi \in k(X)$ função racional que é regular em todo ponto de X. Então, para cada $x \in X$ podemos escrever $\varphi = f_x/g_x$ com $f_x, g_x \in k[x]$ e $g_x \neq 0$. Seja $J = \langle g_x | x \in X \rangle$ o ideal gerado pelos denominadores das representações de φ acima. Pelo Teorema da Base de Hilbert, $k[X]$ é Noetheriano.Logo existem $x_1, \ldots, x_r \in X$ tais que $J = \langle g_{x_1}, \ldots, g_{x_r} \rangle$. Agora, se $g_{x_1}, \ldots, g_{x_r}$ tivessem zero comum em um $x \in X$, então toda função de J se anularia em x. Em particular, g_x se anularia em x, o que não ocorre. Assim, $Z(J) = \emptyset$, e pelo Teorema Fraco dos Zeros, temos $J = k[X]$. Desse modo, temos $1 \in J$ e existem $h_1, \ldots, h_r \in k[X]$ tais que $\sum_{i=1}^{r} h_i \ g_{x_i} = 1$. Portanto

$$\varphi = (\sum_{i=1}^{r} h_i g_{x_i})\varphi = \sum_{i=1}^{r} h_i (g_{x_i}\varphi) = \sum_{i=1}^{r} h_i f_{x_i} \in k[X],$$

isto é, φ é função regular. □

Lema 2.48. *Seja X uma variedade afim e $\varphi \in k(X)$. O conjunto U_φ dos pontos de X onde φ é regular é um aberto denso de X. Dizemos que U_φ é o domínio de definição de φ.*

Demonstração. Escrevendo $\varphi = f_i/g_i$ com $f_i, g_i \in k[X]$, vemos que $x \in U_\varphi$ sempre que $g_i(x) \neq 0$ para algum i. Assim, como g_i é não nulo, temos $U_\varphi \neq \emptyset$. Agora seja $Y_i = Z(g_i)$. Pelo Teorema 2.41, Y_i é fechado em X e logo $U_i = X - Y_i$ é aberto em X. Temos então que $U_\varphi = \cup_i U_i$ é aberto não vazio em X e, como X é irredutível, U_φ é denso em X. □

O Lema 2.48 diz que uma função racional φ em uma variedade afim X define um mapa $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{A}^1$ onde U_φ é aberto denso em X.

Proposição 2.49. *Sejam X e Y variedades afins e seja $\varphi : X \dashrightarrow Y$ um mapa racional. Suponha que $\varphi(X)$ é denso em Y.*

(a) Se $\psi : Y \dashrightarrow Z$ é um mapa racional com Z variedade afim, então a composição φ o ψ é um mapa racional de X em Z.

(b) O mapa φ induz um homomorfismo injetor de corpos

$$\varphi^* : k(Y) \to k(X)$$
$$g \mapsto g \circ \varphi =: \varphi^*(g)$$

Demonstração. (a) Basta notar que a composição de quocientes de polinômios é ainda um quociente de polinômios. Note ainda que, como $\varphi(X)$ e o domínio de definição V de ψ são ambos densos em Y, então $\varphi^{-1}(V)$ é ainda um aberto denso de X e é o aberto de definição da composição φ *o* ψ.

(b) Pelo item (a) com $Z = \mathbb{A}^1$, temos $\varphi^*(g) \in k(X)$ para todo $g \in k(Y)$. Como na Proposição 2.44, vemos que φ^* é homomorfismo de corpos e, portanto, injetor. □

Definição 2.50. *Um mapa birracional entre variedades afins X e Y é um mapa racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ com $\varphi(X)$ denso em Y tal que existe mapa racional $\psi : Y \dashrightarrow X$ de modo que φ o ψ e ψ o φ são identidades onde estão definidas.Neste caso, dizemos que X e Y são birracionalmente equivalentes ou apenas birracionais.*

Se $\varphi : X \dashrightarrow Y$ birracional,então φ^* é isomorfismo de corpos pois tanto φ^* quanto sua inversa ψ^* são injetoras. Reciprocamente, se φ^* é isomorfismo, então φ é birracional.

Observação 2.51. *Se X e Y são variedades afins, então*

$$X \text{ isomorfo a } Y \iff k[X] \text{ isomorfo a } k[Y]$$
$$X \text{ birracional a } Y \iff k(X) \text{ isomorfo a } k(Y)$$

Exemplo 2.52. *Seja $X = Z(T_1T_2 - 1)$ variedade em $\mathbb{A}^2$. Já vimos que a projeção*

$$f : X \to \mathbb{A}^1$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1$$

não é um isomorfismo. Porém f é mapa birracional. De fato, f tem uma inversa racional

$$f^{-1} : \mathbb{A}^1 \dashrightarrow X$$
$$t \mapsto (t, 1/t)$$

definida em $\mathbb{A}^1 - \{0\}$. Vimos que $k[X] \cong k[T, T^{-1}]$ e logo $k(X) \cong k(T)$, que é $k(\mathbb{A}^1)$.

Exemplo 2.53. *Seja* $X = Z(T_1^3 - T_2^2)$ *variedade em* $\mathbb{A}^2$. *O morfismo*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to X \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

é birracional com inversa dada por

$$\begin{aligned} f^{-1} &: X \to \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2/x_1 \end{aligned}$$

definida em $X - \{(0,0)\}$.

Os exemplos ilustram o fato de que a condição de duas variedades serem birracionais é realmente mais fraca que a de serem isomorfas, ou seja, a classificação a menos de equivalência birracional é um problema mais simples que a classificação a menos de isomorfismo.

3 VARIEDADES QUASI-PROJETIVAS

3.1 Topologia de Zariski no espaço projetivo

A Geometria Projetiva acrescenta novos objetos à Geometria Euclidiana, os pontos no infinito, de modo que, por exemplo, quaisquer duas retas no plano se intersectem, o que não acontece no plano afim. Para construir o plano projetivo, identificamos o plano afim $\mathbb{A}^2$ com o plano

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in k^3 | x_0 = 1\}$$

do espaço afim k^3. Cada ponto $(1, x_1, x_2)$ deste plano determina uma reta passando pela origem, a saber a reta $\{(\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2) | \lambda \in k\}$. As retas em k^3 passando pela origem que não intersectam o plano $x_0 = 1$ são as retas do plano $x_0 = 0$. Intuitivamente, uma tal reta encontra o plano $x_0 = 1$ no infinito. Usamos estas retas então para definir os pontos no infinito.

Assim, o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ é tal que existe bijeção.

$$\{pontos\ de\ \mathbb{P}^2\} \longleftrightarrow \{retas\ em\ k^3\ passando\ pela\ origem\}.$$

Uma tal reta é da forma $\{(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) | \lambda \in k\}$, onde $(x_0, x_1, x_2) \in k^3$ não é a origem. Note que dois vetores (x_0, x_1, x_2) e (y_0, y_1, y_2) definem a mesma reta pela origem se e somente se

$$(y_0, y_1, y_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$$

para algum $\lambda \in k$. Denotamos o ponto correspondente em $\mathbb{P}^2$ por $(x_0 : x_1 : x_2)$. Analogamente, denotamos o espaço projetivo de dimensão n por $\mathbb{P}^n$ e os pontos correspondem a retas em k^{n+1} passando pela origem.

Definição 3.1. *O espaço projetivo de dimensão n é dado por*

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k := k^{n+1}/\sim$$

onde

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \iff x_i = \lambda y_i, \forall i = 1, \ldots, n \text{ para algum } \lambda \in k^*$$

Denotamos o ponto correspondente a $(x_0, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{P}^n$ por $(x_0 : \ldots : x_n)$ e chamamos $x_0, \ldots, x_n$ de coordenadas homogêneas ou coordenadas projetivas do ponto.

Os pontos do conjunto da forma

$$\{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_0 \neq 0\} = \{(1 : x_1 : \ldots : x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n\}$$

são chamados de pontos finitos e chamamos de pontos infinitos os pontos

$$\{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_0 = 0\} = \{(0 : x_1 : \ldots : x_n) | (x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}\}.$$

O conjunto dos pontos finitos de $\mathbb{P}^n$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^n$ e o conjunto dos pontos infinitos com $\mathbb{P}^{n-1}$.

Em particular,

$$\mathbb{P}^1 = \text{reta afim dos pontos finitos} \cup \{(0 : 1)\},$$

ou seja, $\mathbb{P}^1$ tem um único ponto infinito. E

$$\mathbb{P}^2 = \text{plano afim dos pontos finitos} \cup \text{reta projetiva dos pontos infinitos}.$$

O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ também é imbuído de uma Topologia de Zariski, dada por polinômios. Tome $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$. Não faz sentido se falar em valor de F em um ponto $(x_0 : \cdots : x_n)$, já que, em geral, este valor depende da escolha das coordenadas projetivas, ou seja, $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ em geral depende de λ. Dizemos que F se anula em $(x_0 : \cdots : x_n)$ se $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda \in k^*$.

Um polinômio $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ é dito homogêneo de grau r se

$$F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r F(x_o, \ldots, x_n)$$

para todo $\lambda \in k$. Então, os polinômios de grau r são da forma

$$F = \sum_{r_0 + \cdots + r_n = r} c_{r_0, \ldots, r_n} T_0^{r_0} \ldots T_n^{r_n}.$$

Assim, todo polinômio $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ se escreve como uma soma $F = F_0 + \cdots + F_d$, onde $F_i \in k[T_0, \ldots, T_n]$ é um polinômio homogêneo de grau i e $F_0, \ldots, F_d$ são chamadas de componentes homogêneas de F.

Agora suponha que F se anula em um ponto $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$. Então para todo $\lambda \in k$ temos

$$\begin{aligned}
0 &= F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \\
&= F_0(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) + F_1(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) + \cdots + F_d(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \\
&= F_0(x_0, \ldots, x_n) + \lambda F_1(x_0, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda^d F_d(x_0, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Fazendo $a_i := F_i(x_0, \ldots, x_n)$, vemos que todo $\lambda \in k$ é raiz do polinômio $a_0 + Ta_1 + \cdots + T^d a_d$. Como k é infinito (k é algebricamente fechado) o polinômio deve ser identicamente nulo, ou seja, $F_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$ para todo $i = 0, \ldots, d$.

Definição 3.2. *Seja $S \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ um subconjunto. O conjunto de zeros de S é*

$$Z_p(S) := \{x \in \mathbb{P}^n | F(x) = 0 \text{ para todo } F \in S\}.$$

Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é dito fechado se $X = Z(S)$ para algum S. Um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ é aberto se seu complementar é fechado. Os abertos (respectivamente fechados) de $\mathbb{P}^n$ são também chamados abertos projetivos (respectivamente fechados projetivos ou conjuntos algébricos projetivos). Para $X \subset \mathbb{P}^n$ um subconjunto, definimos o ideal de X por

$$I_p(X) := \{F \in k[T_0, \ldots, T_n] \mid F(x) = 0 \text{ para todo } x \in X\}$$

$I_p(X)$ é um ideal homogêneo, ou seja, um polinômio F está em $I_p(X)$ se, e somente se, todas as componentes homogêneas de F estão em $I_p(X)$.

Observação 3.3. *Os abertos em $\mathbb{P}^n$ formam a topologia de Zariski de $\mathbb{P}^n$. De fato, continuam valendo as afirmações (b), (c) e (d) do lema 2.1. A Topologia de Zariski de $\mathbb{P}^n$ se entende a subconjuntos $X \subset \mathbb{P}^n$ tomando-se interseções. Os fechados (respectivamente abertos) de X são interseções de X com fechados (respectivamente abertos) de $\mathbb{P}^n$.*

Observação 3.4. *Pelo Teorema da Base de Hilbert, o anel $k[T_0, \ldots, T_n]$ é Noetheriano e, como para cada $X \subset \mathbb{P}^n$ o ideal $I_p(X)$ é homogêneo, podemos escrever*

$$I_p(X) = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$$

com $F_1, \ldots, F_k$ polinômios homogêneos.

Observação 3.5. *Da mesma forma que mostrado para os subconjuntos de $\mathbb{A}^n$, todo $X \subset \mathbb{P}^n$ se escreve de modo único como*

$$X = W_1 \cup \ldots \cdots \cup W_k$$

com $W_1, \ldots, W_k$ fechados irredutíveis em X tais que $W_i \not\subset W_j$, se $i \neq j$, onde $W_1, \ldots, W_k$ são as componentes irredutíveis de X. Um fechado projetivo irredutível é dito uma variedade projetiva.

Observação 3.6. *Existe uma diferença básica entre os casos afim e projetivo. Considere o ideal $I = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$. Então $Z_p(I) = \emptyset$ já que, se os polinômios de I se anulassem em um ponto $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, teríamos que ter $x_0 = \cdots = x_n = 0$.*

A definição a seguir será útil na demonstração do caso projetivo do Teorema dos Zeros.

Definição 3.7. *Um subconjunto C de k^{n+1} é dito um cone se $\lambda \cdot c \in C$ para todo $c \in C$ e $\lambda \in k$. Note que $0 := \{(0, \ldots, 0)\}$ é o cone nulo.*

Teorema 3.8 (Projetivo dos Zeros)**.** *Existe bijeção invertendo inclusões.*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{fechados em } \mathbb{P}^n\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \textit{ideais radicais homogêneos em} \\ k[T_0, \ldots, T_n] \textit{ diferentes de } \langle T_0, \ldots, T_n \rangle \end{array}\right\} \\ X & \mapsto & I_p(X) \\ Z_p(J) & \leftarrow & J \end{array}$$

Demonstração. Considere a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : k^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) &\mapsto (x_0 : \ldots : x_n) \end{aligned}$$

Existe bijeção monótona

$$\begin{aligned} \{\textit{subconjuntos em } \mathbb{P}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{cones não nulos em } k^{n+1}\} \\ X &\mapsto \pi^{-1}(X) \cup \{0\} \\ \pi(\}) &\leftarrow C. \end{aligned}$$

Um fechado C em k^{n+1} é um cone se e somente se é o conjunto de zeros de uma família de polinômios homogêneos. Assim, temos uma bijeção

$$\{\textit{fechados em}\, \mathbb{P}^n\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{cones fechados} \\ \text{não nulos em } k^{n+1} \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{ideais radicais homogêneos em} \\ k[T_0, \ldots, T_n] \text{ diferentes de } \langle T_0, \ldots, T_n \rangle \end{array}\right\}$$

$\square$

Corolário 3.9 (Teorema fraco projetivo dos zeros)**.** *Seja $J \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ um ideal homogêneo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$Z_p(J) = \emptyset$;*
2. *$\sqrt{J} = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$ ou $\sqrt{J} = k[T_0, \ldots, T_n]$;*
3. *$T_0^r, \ldots, T_n^r \in J$ para algum $r \geq 0$;*
4. *Existe $d \geq 0$ tal que todo polinômio homogêneo de grau d está contido em J.*

Demonstração. $i) \Rightarrow$ii) Se $Z_p(J) = \emptyset$, então pelo Teorema dos Zeros Projetivo, temos:

$$\sqrt{J} = I_p(Z_p(J)) = I_p(\emptyset) = k[T_0, \dots, T_n]$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Se $\sqrt{J} = \langle T_0, \dots, T_n \rangle$, existem $r_i \in \mathbb{N}$ tais que $T_i^{r_i} \in J$, para todo $i = 0, \dots, n$. Escolhendo $r = \Pi r_i$, temos o resultado. De maneira análoga, provamos $\sqrt{J} = k[T_0, \dots, T_n]$.

$iii) \Rightarrow iv)$ Basta escolher $d = r$ obtido em iii.

$iv) \Rightarrow i)$ Por hipótese, $T_0^d, \dots, T_n^d \in J$, donde $\langle T_0^d, \dots, T_n^d \rangle \subset J$. Logo, $\emptyset = Z_p(\langle T_0^d, \dots, T_n^d \rangle) \supset Z_p(J)$. □

Definição 3.10. *Um conjunto algébrico quasi-projetivo é um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ satisfazendo as seguintes condições equivalentes:*

(i) X é a interseção de um aberto e um fechado de $\mathbb{P}^n$;

(ii) X é um subconjunto fechado de um aberto de $\mathbb{P}^n$;

(iii) X é um subconjunto aberto de um fechado de $\mathbb{P}^n$;

(iv) X é um subconjunto aberto de seu fecho.

Uma variedade quasi-projetiva é um conjunto algébrico quasi-projetivo irredutível.

Exemplo 3.11. *Todo fechado projetivo é conjunto algébrico quasi-projetivo.*

Exemplo 3.12. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim. Identificando $\mathbb{A}^n$ com $\mathbb{A}_0^n$ temos $X \subset \mathbb{P}^n$. Note que $X = \overline{X} \cap \mathbb{A}_0^n$. Assim, como $\overline{X}$ é fechado em $\mathbb{P}^n$, temos que X é o conjunto algébrico quasi-projetivo.*

Exemplo 3.13. *Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo e Y um aberto (respectivamente fechado) de X. Então Y é um conjunto algébrico quasi-projetivo. De fato, podemos escrever $X = X_1 \cap X_2$ com X_1 fechado e X_2 aberto em $\mathbb{P}^n$ para algum n. Como Y é aberto (respectivamente fechado) em X, temos $Y = Y_1 \cap X$ com Y_1 aberto (respectivamente fechado) em $\mathbb{P}^n$. Deste modo temos,*

$$Y = X_1 \cap (X_2 \cap Y_1) \text{ (respectivamente } Y = (X_1 \cap Y_1) \cap X_2)$$

e como X_1 é fechado e $X_2 \cap Y_1$ é aberto em $\mathbb{P}^n$, então Y é um conjunto algébrico quasi-projetivo.

3.2 Funções Regulares e Morfismos

Um polinômio $F \in k[T_0, \dots, T_n]$ não pode ser visto como função em $\mathbb{P}^n$ porque, em geral, para $\lambda \in k$ temos $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \neq F(x_0, \dots, x_n)$. Além disso, um quociente $f = P/Q$ com $P, Q \in k[T_0, \dots, T_n]$ só pode ser visto como função em $\mathbb{P}^n$ se P e Q são homogêneos do mesmo grau.

Tome $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico quasi-projetivo e tome $f = P/Q$ com $P, Q \in k[T_0, \dots, T_n]$ homogêneos de mesmo grau. Dizemos que f é regular em um ponto $x \in X$ se f está bem definido em x, isto é, se $Q(x) \neq 0$. A função f é dita regular em X se é regular em cada ponto de X. As funções regulares em X formam uma k-álgebra denotada $k[X]$. De fato, se $a \in k$ e $f, g \in k[X]$, então é fácil ver que $af, f + g$ e fg estão ainda em $k[X]$. Dizemos que $k[X]$ é o anel das funções regulares de X.

Observação 3.14. *Se uma função f é regular em um ponto x então, por continuidade, f é regular em uma vizinhança U de x. Assim, f define uma função $U \to k$.*

Observação 3.15. *Se $Y \subset X$ então $k[X] \subset k[Y]$.*

Definição 3.16. *Seja $F \in k[T_0, \dots, T_n]$ um polinômio homogêneo. A desomogenização de F é o polinômio $f = F(1, T_1, \dots, T_n) \in k[T_1, \dots, T_n]$.*

Observação 3.17. *Seja X um fechado afim, digamos $X \subset \mathbb{A}^n$. Considere $X \subset \mathbb{P}^n$ do modo usual e tome $f = P/Q$ uma função regular em X, com $P, Q \in k[T_0, \dots, T_n]$ homogêneos de mesmo grau. Sejam $p, q \in k[T_1, \dots, T_n]$ as desomogenizações de P, Q. (Seja $F \in k[T_0, \dots, T_n]$ um polinômio homogêneo. A desomogenização de F é o polinômio $f = F(1, T_1, \dots, T_n) \in k[T_1, \dots, T_n]$). Como $X \subset \mathbb{A}^n_0$, para cada $x \in X$ temos*

$$f(x) = \frac{P}{Q}(x) = \frac{p}{q}(x).$$

Assim f é uma função racional no fechado afim X que é regular em todos os pontos de X. Pela proposição 2.47, temos que f é regular no sentido definido anteriormente.

Exemplo 3.18. *Temos $k[\mathbb{P}^n] = k$. De fato, tome $f = P/Q$ regular em $\mathbb{P}^n$. Suponha que P, Q não têm fator comum não constante. Se o grau de Q fosse diferente de zero, então Q teria alguma raiz, isto é, existiria $x \in \mathbb{P}^n$ tal que $Q(x) = 0$ e logo f não seria regular em x. Assim, o grau de Q, e logo o grau de F é zero, ou seja, $f = P/Q$ é constante. É fácil mostrar que se X é fechado afim então $k[X] = k$ se e somente se X consiste de um único ponto. E, ainda, k[X] é sempre finitamente gerado como k-álgebra se X é fechado afim, mas existem exemplos de conjuntos algébricos quasi-projetivos cujos anéis de funções regulares não são finitamente gerados.*

Definição 3.19. *Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é um morfismo se para todo aberto $V \subset Y$ e toda função regular $g \in k[V]$ temos:*

(i) $f^{-1}(V)$ é aberto em X (isto é, f é contínua);

(ii) $g \circ f$ é uma função regular em $f^{-1}(V)$.

Observação 3.20. *Pela Proposição 2.44 e seu corolário, se $f : X \to Y$ é um morfismo entre fechados afins como definido anteriormente, então f é um morfismo pela nova definição.*

Observação 3.21. *Um morfismo $f : X \to Y$ entre conjuntos algébricos quasi-projetivos induz um mapa de pullback*

$$\begin{aligned} f^* : k[Y] &\to k[X] \\ g &\mapsto gof \end{aligned}$$

Proposição 3.22. *Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos com $Y \subset \mathbb{P}^m$. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua tal que, para cada $x \in X$ existe aberto $V \subset Y$ contendo $f(x)$ e funções regulares $f_0, \ldots, f_m \in k[f^{-1}(V)]$ tais que, para cada $x' \in f^{-1}(V)$, temos*

$$f(x') = (f_0(x') : \cdots : f_m(x')).$$

Então f é um morfismo.

Demonstração. Ver em [3, pág.30] □

Teorema 3.23. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos com $Y \subset \mathbb{P}^n$. Então para cada $x \in X$ existe aberto U de X contendo x tal que para todo $x' \in U$ temos*

$$f(x') = (f_0(x') : \cdots : f_m(x'))$$

com $f_0, \ldots, f_m \in k[U]$.

Demonstração. Ver em [3, pág.31] □

Observação 3.24. *Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo. Tome $F_0, \ldots, F_m \in k[T_0, \ldots, T_n]$ homogêneos de mesmo grau sem zeros em comum em X. Então*

$$\begin{aligned} f = (F_0 : \cdots : F_m) : X &\to \mathbb{P}^m \\ x &\mapsto (F_0(x) : \cdots : F_m(x)) \end{aligned}$$

é um morfismo. De fato, não é difícil mostrar que f é contínua e leva funções regulares em funções regulares.

Definição 3.25. *Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Um isomorfismo entre X e Y é um morfismo $f : X \to Y$ tal que existe um morfismo $g : X \to Y$ de modo que as composições $g \circ f$ e f o g são identidade em X e Y. Neste caso, dizemos que X e Y são isomorfos e denotamos $X \cong Y$.*

Um conjunto algébrico quasi-projetivo é dito afim se for isomorfo a um fechado afim. Em particular, todo fechado afim é um conjunto algébrico afim, mas nem todo conjunto algébrico afim é um fechado afim. Analogamente, um conjunto algébrico quasi-projetivo X é dito projetivo se for isomorfo a um fechado projetivo. Em particular, todo fechado projetivo é conjunto algébrico projetivo. Veremos mais adiante que todo conjunto algébrico quasi-projetivo é um fechado projetivo.

Lema 3.26. *Seja X um conjunto algébrico afim e $Y \subset X$ um fechado. Então Y é um conjunto algébrico afim.*

Demonstração. Ver em [3, pág.35] □

Corolário 3.27. *Todo conjunto algébrico projetivo é um fechado projetivo.*

Demonstração. Seja X um conjunto algébrico projetivo, isto é, X é isomorfo a um fechado projetivo Y. Tome $f : Y \to X$ um isomorfismo, então $f(Y) = X$ é fechado projetivo. □

3.3 Funções Racionais

Uma função racional em um conjunto algébrico quasi-projetivo X é uma função regular definida sobre um aberto denso U de X. Duas funções regulares f e g em abertos densos U e V de X definem a mesma função racional em X se e somente se f e g coincidem em $U \cap V$. Seja $k(X)$ o conjunto das funções racionais em X. Temos então que

$$k(X) = \{(f, U) | f \in k[U], U \subset X \text{ aberto denso}\}$$

onde $(f, U) \sim (g, V)$ se, e somente se, $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. O domínio de definição de $\varphi \in k(X)$ é o maior aberto de X onde φ pode ser definida, isto é, é a união de todos os abertos densos U de X tais que $\varphi \sim (f, U)$ para algum f.

Observação 3.28. *Para cada aberto denso U de X temos $k[U] \subset k(X)$. Mais ainda, vale $k(U) = K(X)$ e, além disso,*

$$k(X) = \bigcup k[U]$$

onde a união é sobre todos os abertos densos de X.

Observação 3.29. *Note que $k(X)$ é uma k-álgebra. De fato, se f e g são funções racionais definidas por funções regulares em abertos densos U e V de X, então $f+g$ (respectivamente $f \cdot g$) é a função racional em X definida pela função regular $f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}$ (respectivamente $f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}$) no aberto denso $U \cap V$ de X. Além disso, se $a \in k$ então $a \cdot f$ é a função racional em X definida pela função regular $a \cdot f$ no aberto denso U de X.*

Definição 3.30. *Um isomorfismo é um morfismo $f : X \to Y$ tal que existe morfismo $g : Y \to X$ com $fog = 1_Y$ e $gof = 1_X$, onde 1_X e 1_Y são as funções identidades em X e Y.*

Proposição 3.31. *Seja X uma variedade afim. Então $k(X)$ é o corpo quociente de $k[X]$.*

Demonstração. Como X é variedade afim, X é isomorfo a algum $Y \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Como $k[X] \cong k[Y]$, podemos supor $X \subset \mathbb{A}^n$ fechado irredutível. Como os abertos principais $X_F = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ formam uma base da Topologia de Zariski, temos que:

$$k(X) = \bigcup k[X_F]$$

$F \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Como X é irredutível, todo aberto de X é denso. Seja f a imagem de F em $k[X]$, para cada F. Pelo Lema 3.33, temos:

$$k[X_F] = \left\{ \tfrac{g}{f^m} |\ g \in k[X], m \geq 0 \right\}$$

□

Corolário 3.32. *Se X é variedade quasi-projetiva, então $k(X)$ é corpo.*

Demonstração. Tome $U \subset X$ aberto afim não vazio. Então $k(U)$ é corpo pela Proposição 3.31 e, como $k(X) = k(U)$, $k(X)$ é corpo.

□

Lema 3.33. *Seja X um conjunto algébrico afim ou projetivo e tome $f \in k[X]$. Considere o aberto principal $X_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$. Então*

$$k[X_f] = k[X][1/f] = \left\{ \tfrac{g}{f^m} |\ \ g \in k[X], m \geq 0 \right\}$$

Demonstração. Ver em [3, pág.43] □

Definição 3.34. *Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo. Um mapa racional $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é dado por:*

(i) $f(x) = (F_0(x) : \cdots : F_m(x))$ para todo x em um aberto denso U de X, onde $F_0, \ldots, F_m \in k(X)$ não tem zeros em comum em U e tais que, se U_i é o domínio de definição de F_i, então $U \subset U_i$;

(ii) um morfismo $f : U \to \mathbb{P}^m$ onde U é um aberto denso de X e tal que, se $g : V \to \mathbb{P}^m$ é morfismo de um aberto denso V de X que coincide com f em $U \cap V$, então f e g definem o mesmo mapa racional.

Se $Y \subset \mathbb{P}^m$ é tal que $f(X) := f(U) \subset Y$, então podemos escrever $f : X \dashrightarrow Y$. Como no caso afim, se $F(X)$ é denso em Y, então f define um homomorfismo injetor de corpos

$$f^*k(Y) \hookrightarrow k(X)$$

dado por $f^*g = g \ o \ f$ *(mapa de pullback). Se* f *tem uma inversa racional* $g : Y \dashrightarrow X$ *tal que as composições* $g \ o \ f$ *e* $f \ o \ g$ *são identidades onde estiverem definidas, então dizemos que* f *é birracional e que* X *e* Y *são birracionais ou birracionalmente equivalentes. Neste caso, o mapa de pullback* f^* *é um isomorfismo de corpos.*

Proposição 3.35. *Duas variedades quasi-projetivas são birracionais se e somente se existem abertos* $U \subset X$ *e* $V \subset Y$ *tais que* $U \cong V$*.*

Demonstração. Se $U \cong V$ então, por definição, X e Y são birracionais. Supondo que X e Y são birracionais, tome $f : X \dashrightarrow Y$ mapa birracional com $g = f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ sua inversa racional. Sejam $U_1 \subset X$ e $V_1 \subset Y$ os abertos de definição de f e g. Por hipótese, $f(U_1)$ é denso em Y. Logo $U = f^{-1}(V_1) \cap U_1$ é um aberto não vazio de X. Tome $V = g^{-1}(U_1) \cap V_1$ aberto não vazio de Y. Então:

$$f(U) = V \ \text{ e } \ g(V) = U$$

e $f \ o \ g|_V = 1_V$ e $g \ o \ f|_U = 1_U$. Logo, U e V são isomorfos.

$\square$

Exemplo 3.36. *1 -* $\mathbb{A}^n$ *e* $\mathbb{P}^n$ *são birracionais pois* $\mathbb{A}^n$ *é isomorfo ao aberto denso* $\mathbb{A}^n_0$ *de* $\mathbb{P}^n$*. É claro que* $\mathbb{A}^n$ *e* $\mathbb{P}^n$ *não são isomorfos.*

2 - $\mathbb{P}^2$ *e* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *são birracionalmente equivalentes pois os abertos densos* $\mathbb{A}^2$ *e* $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ *são isomorfos. Porém* $\mathbb{P}^2$ *e* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *não são isomorfos pois quaisquer duas hipersuperfícies de* $\mathbb{P}^2$ *se intersectam, o que não ocorre em* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*.*

4 MORFISMOS FINITOS E VARIEDADES NORMAIS

Para definirmos morfismos finitos, precisamos relembrar uma noção de álgebra. Sejam A e B anéis comutativos com unidade, tal que $A \subset B$. Supomos que a unidade de A é igual à unidade de B. Dizemos que um elemento $b \in B$ é inteiro sobre A se b é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em A, isto é, se existem $a_1, \ldots, a_r \in A$ tais que

$$b^r + a_1 b^{r-1} + \cdots + a_r = 0$$

Dizemos que B é inteiro sobre A se todo elemento de B é inteiro sobre A.

Lema 4.1. *Sejam $A \subset B$ anéis comutativos com unidade. Suponha que B é finitamente gerado como A-álgebra. Então B é inteiro sobre A se e somente se B é finitamente gerado como A-módulo.*

Demonstração. Mostraremos o lema para B gerado como A-álgebra por um único elemento. O caso geral pode ser demonstrado por indução e encontrado em [1, Proposições 5.2 e 5.1].

Suponha que $B = A[b]$ e, neste caso, temos $B = \bigoplus_{n \geq 0} b^n A$. Suponha que B é inteiro sobre A, isto é, que b satisfaz $b^r + a_1 b^{r-1} + \cdots + a_r = 0$. Mas então, para todo $n \geq r$, todo b^n pode ser escrito como combinação linear de $b, b^2, \ldots, b^{r-1}$ com coeficientes em A e, portanto, $B = \bigoplus_{n=0}^{r-1} b^n A$.

Se B é finitamente gerado como A-módulo então $B = \bigoplus_{i=0}^{n} b^{e_i} A$. Seja $r - 1$ o máximo entre os e_i. Então todo b^s com $s \geq r$ pode ser escrito como combinação linear de $b^{e_1}, \ldots, b^{e_n}$ com coeficientes em A, ou seja, $b^s = a_1 b^{e_1} + \cdots + a_n b^{e_n}$ e, portanto, b é inteiro sobre A. □

Definição 4.2. *Sejam X e Y fechados afins e $f : X \to Y$ um morfismo. Dizemos que f é dominante se $f(X)$ for denso em Y, isto é, $\overline{f(X)} = Y$.*

Lema 4.3. *Se f é dominante, então o mapa de pullback*

$$\begin{aligned} f^* : k[Y] &\to k[X] \\ g &\mapsto gof \end{aligned}$$

é injetor. De fato, se $g \in k[Y]$ é tal que $gof = 0$ em $k[X]$ então $g(y) = 0$ para todo $y \in f(X)$. Assim temos $f(X) \subset Z(g) \subset Y$ e, como $Z(g)$ é fechado em Y, temos também que $\overline{f(X)} \subset Z(g)$. Como f é dominante, então $Z(g) = Y$, ou seja, $g = 0$ em $k[Y]$ e, portanto, f^* é injetor. Assim, se $f : X \to Y$ é um morfismo dominante, então podemos naturalmente ver $k[Y]$ como subanel de $k[X]$.

Definição 4.4. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de fechados afins. Dizemos que f é finito se f é dominante e, com a inclusão natural $k[Y] \hookrightarrow k[X]$ dada por f^*, temos $k[X]$ inteiro sobre $k[Y]$.*

Exemplo 4.5. *Seja $X = Z(T_1T_2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. A projeção*

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

é um morfismo dominante já que $f(X) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$. Porém f não é finito, já que

$$k[T] = k[\mathbb{A}^1] \overset{f^*}{\hookrightarrow} k[X] \cong k[T, T^{-1}]$$

e T^{-1} não é inteiro sobre $k[T]$.

Exemplo 4.6. *Agora tome $X = Z(T_1^3 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^2$ e considere o morfismo*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to X \\ t &\mapsto (t^2, t^3). \end{aligned}$$

Vejamos que f é finito. É óbvio que f é dominante. Mais ainda, f é sobrejetiva. Veremos que isto vale para todo morfismo finito no teorema 4.14.

Temos $k[X] = k[T_1, T_2]/[\langle T_1^3 - T_2^2 \rangle$. O mapa de pullback é dado por

$$\begin{aligned} f* : k[X] &\to k[\mathbb{A}^1] = k[T] \\ T_1 &\mapsto T^2 \\ T_2 &\mapsto T^3 \end{aligned}$$

e assim, via $f*$, temos $T = T_2/T_1$.

Precisamos ver que T é inteiro sobre $k[X]$. Temos

$$T^3 = \frac{T_2^3}{T_1^3} = \frac{T_2^3}{T_2^2}$$

e, portanto $T_2^2(T^3 - T_2) = 0$. Mas T_2 não é divisor de zeros em $k[X]$ (o anel $k[X]$ é um domínio). Logo temos que ter $T^3 - T_2 = 0$, mostrando que T é inteiro sobre $k[X]$. Assim, f é finito.

Teorema 4.7. *"Sejam $f : V \to W$ e $g : W \to X$ morfismos entre variedades. Se f e g são dominantes, então $g \circ f : V \to X$ é dominante.*

Demonstração. Temos: $f^* : k[W] \to k[V]$ é injetivo $\iff$ f é dominante. Como f é dominante podemos estender f^* para um homomorfismo

$$f^* : k(W) \to k(V)$$

definindo $f^*(g/h) := f^*(g)/f^*(h)$. Note que se $f : V \dashrightarrow W$ e $g : W \dashrightarrow X$ são dominantes, então $g \circ f : V \dashrightarrow X$ também é dominante. $\square$

Proposição 4.8. *Sejam $A \subseteq B \subseteq C$ anéis. Se B é inteiro sobre A e C é inteiro sobre B, então C é inteiro sobre A.*

Demonstração. Seja $x \in C$, com $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$. Então x é inteiro sobre $A[b_o, \ldots, b_{n-1}]$ Cada b_i é inteiro sobre A. Pelo Corolário 5.2 de [1], $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x]$ é finitamente gerado como A-módulo. Por 2.16 parte 3 de [1], x é inteiro sobre A.

$\square$

Definição 4.9. *Seja A um anel. Um A-módulo M é um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado de uma multiplicação escalar*

$$A \times M \to M$$
$$(a, m) \mapsto a \cdot m$$

que satisfaz as seguintes propriedades: M1) $1 \cdot m = m$

M2) $(ab) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$

M3) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$

M4) $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$

para todos a, b em A e para todos m, m_1, m_2 em M.

Proposição 4.10. *A composição de morfismos finitos é finito.*

Demonstração. Dizemos que um morfismo $f : X \to Y$ entre fechados afins é finito se f é dominante e, com a inclusão natural $k[Y] \hookrightarrow k[X]$ dada por f^*, temos $k[X]$ inteiro sobre $k[Y]$. Então para que a composição de morfismos seja um morfismo finito, deve ser dominante e inteiro. Pelo teorema 4.7 provamos que a composição de morfismos é dominante e pela proposição 4.8 provamos que a é inteiro. Logo, a composição de morfismos finitos é finita.

$\square$

Proposição 4.11. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito de fechados afins. Então cada $y \in Y$ tem no máximo um número finito de pré-imagens.*

Demonstração. Suponha que $X \subset \mathbb{A}^n$ e sejam $t_1, \ldots, t_n$ as imagens de $T_1, \ldots, T_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$ no quociente $k[X]$. Basta mostrarmos que cada t_i assume apenas um número finito de valores em $f^{-1}(y)$. Como f é finito, cada t_i satisfaz uma equação

$$t_i^r + a_1 t_i^{r-1} + \cdots + a_r = 0$$

onde $a_i, \ldots, a_r \in k[Y]$. Assim para cada $y \in Y$ e cada $x \in f^{-1}(y)$ temos a equação

$$t_i(x)^r + a_1(y)t_i(x)^{r-1} + \cdots + a_r(y) = 0$$

ou seja, $t_i(x)$ é a raiz de um polinômio com coeficientes $a_j(y) \in k, j = 1, \ldots, r$. Deste modo existe apenas um número finito de valores possíveis para $t_i(x)$ para cada i e logo $f^{-1}(y)$ tem no máximo um número finito de elementos. $\square$

Lema 4.12 (Nakayama)**.** *Seja A um anel comutativo e seja M um A-módulo finitamente gerado. Tome $J \subset A$ um ideal e considere o conjunto $1 + J := \{1 + b \mid b \ \in J\}$. Então a condição*

(i) para cada $a \in 1 + J$, temos $a \cdot M = 0 \Rightarrow M = 0$

implica na condição

(ii) $JM = M \Rightarrow M = 0$.

Demonstração. Suponha que M é gerado como A-módulo por $\mu_1, \ldots, \mu_n$, isto é,

$$M = \mu_1 A \bigoplus \cdots \bigoplus \mu_n A.$$

A hipótese $JM = M$ implica que para cada i podemos escrever

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mu_j$$

com $\alpha_{ij} \in J$. Assim temos

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - \delta_{ij})\mu_j = 0,$$

onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} - \delta_{11} & \ldots & \alpha_{1n} - \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} - \delta_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} - \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - 1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pela Regra de Cramer, temos então que $d_{\mu_i} = 0$ onde $d = det(\alpha_{ij} - \delta_{ij})$. Note que $d \in 1 + J$ e que $dM = 0$. Assim, por (i), temos $M = 0$. $\square$

Corolário 4.13. *Sejam $A \subset B$ anéis comutativos tais que B é um A-módulo finitamente gerado. Seja $J \subset A$ um ideal. Então $J \neq A$ implica que $JB \neq B$.*

Demonstração. Primeiro note que como $1 \in B$, então $aB = 0$ se e somente se $a = 0$. Além disso, se $J \neq A$ então $0 \notin 1 + J$. Assim, as hipóteses de Lema de Nakayama são satisfeitas e $JB \neq B$. □

Teorema 4.14. *Todo morfismo finito entre fechados afins é sobrejetor.*

Demonstração. Tome $y \in Y$ e seja $I_Y(y)$ o ideal em $k[Y]$ das funções que se anulam em y. Sejam $t_1, \ldots, t_n \in k[Y]$ as imagens de $T_1, \ldots, T_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$ no quociente onde supomos $Y \subset \mathbb{A}^n$. Se $y = (a_1, \ldots, a_n)$ então $I_Y(y) = \langle t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n \rangle$. Deste modo, $f^{-1}(y)$ é definido por

$$f^*(t_1) - a_1, \ldots, f^*(t_n) - a_n.$$

Pelo Teorema dos Zeros, temos $f^{-1}(y) = \emptyset$ se, e somente se, o ideal gerado por $f^*(t_1) - a_1, \ldots, f^*(t_n) - a_n$ em $k[X]$ é todo o $k[X]$. Mais precisamente, se e somente se,

$$I_Y(y)k[X] = k[X].$$

Como f é finita, então $k[X]$ é um $k[Y]$-módulo finito (Lema 3.1). Assim, como $I_Y(y) \neq k[Y]$, temos pelo Corolário 4.13 que $I_Y(y)k[X] \neq k[X]$ e portanto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$. Deste modo, f é sobrejetora.

□

Corolário 4.15. *Um morfismo finito $f : X \to Y$ entre fechados afins leva fechados em fechados, isto é, se $Z \subset X$ é fechado então $f(Z) \subset Y$ é fechado.*

Demonstração. Ver em [3, Pág. 48]. □

Proposição 4.16. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo entre conjuntos algébricos afins. Suponha que para todo ponto $y \in Y$ existe aberto afim $V \subset Y$ contendo y tal que $U = f^{-1}(V)$ é afim e $f : U \to V$ é um morfismo finito. Então f é finito.*

Demonstração. Tome $B = k[X]$ e $A = k[Y]$. Como os abertos principais formam uma base da topologia de Zariski, podemos supor que V é principal, digamos

$$V = Y_g = \{y \in Y | g(y) \neq 0\},$$

com $g \in k[Y]$. Assim, temos

$$U = f^{-1}(V) = X_{f^*g} = \{x \in X \mid f^*g(x) \neq 0\}$$

Pelo Lema 3.33, temos que

$$k[Y_g] = A[1/g] \text{ e } k[X_{f^*g}] = B[1/g],$$

onde consideramos $1/g \in k[Y_g] \subset k[X_{f^*g}]$ via f^*.

Então $A[1/g] \subset B[1/g]$ e, como $f : U \to V$ é finito, temos pelo Lema 4.1 que $B[1/g]$ é finitamente gerado como $A[1/g]$-módulo com uma base $w_1, \ldots, w_r$. Note que podemos tomar os w_i em B pois, se tomarmos uma base da forma w'_i/g^k com $w'_i \in B$, então os w'_i também formam uma base. Cada $b \in B \subset B[1/g]$ se escreve como

$$b = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{g^{n_i}} w_i$$

com $a_i \in A$ e $n_i \geq 0$. Agora, Y pode ser coberto por um número finito de abertos principais Y_{g_α} e podemos escrever

$$b = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \frac{a_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_{i,\alpha}}} w_{i,\alpha} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \frac{a'_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_\alpha}} w_{i,\alpha}$$

com $a'_{i,\alpha} \in A$. Considere o ideal J de A gerado pelos $g_\alpha^{n_\alpha}$. Como os Y_{g_α} cobrem Y, para cada $y \in Y$ existe α tal que $g_\alpha(y) \neq 0$. Portanto o conjunto dos zeros de J em Y é vazio e, pelo Teorema Fraco dos Zeros, temos $J = A$. Então podemos escrever $1 = \sum_\alpha h_\alpha \; g_\alpha^{n_\alpha}$ com $h_\alpha \in A$. Deste modo, temos

$$b = b \sum_\alpha h_\alpha g_\alpha^{n_\alpha} = \sum_i \sum_\alpha a'_{i,\alpha} h_\alpha w_{i,\alpha}.$$

Assim vemos que o conjunto de todos $w_{i,\alpha}$ forma uma base finita de B como A-módulo. Então f é finito, pelo Lema 4.1. □

Definição 4.17. *Um morfismo $f : X \to Y$ entre conjuntos algébricos quasi-projetivos é finito se cada $y \in Y$ possui vizinhança aberta afim $V \subset Y$ contendo y tal que $U := f^{-1}(V)$ é um aberto afim e $f|_U \to V$ é um morfismo finito de conjuntos algébricos afins.*

Um importante exemplo de morfismo finito é a projeção com centro em um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um fechado projetivo e E um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$, isto é, E é um fechado de $\mathbb{P}^n$ definido por polinômios homogêneos de grau 1. Tomamos E disjunto de X, isto é, $E \cap X = \emptyset$. Suponha que E é dado por $n - d$ equações linearmente independentes $L_0 = \cdots = L_{n-d-1} = 0$ (intuitivamente E tem dimensão d). Em particular, um ponto $x = (a_0 : \cdots : a_n)$ é um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ definido por $n - 1$ equações, de fato, se $x \in \mathbb{A}^n_j$ então x é definido por $a_i T_j - a_j T_i$ onde $i = 0, \ldots, n, i \neq j$. A projeção com centro em E é o mapa racional

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}^n \; &\dashrightarrow \; \mathbb{P}^{n-d-1} \\ x \; &\mapsto \; \pi(x) = (L_0(x) : \cdots : L_{n-d-1}(x)) \end{aligned}$$

que é regular no aberto $\mathbb{P}^n - E$ de $\mathbb{P}^n$. Como X é disjunto de E, então π está definido em X e obtemos um morfismo $X \to \mathbb{P}^{n-d-1}$.

Teorema 4.18. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado e E um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ disjunto de X. Então a projeção com centro em E define um mapa finito $\pi : X \to \pi(X)$.*

Demonstração. Suponha que E é dado por equações $L_0, \ldots, L_{n-d-1}$

Se $y_0, \ldots, y_{n-d-1}$ são as coordenadas de $\mathbb{P}^{n-d-1}$, então $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$ é dado por $y_j = L_j(x)$.

Então $U_i := \pi^{-1}(\mathbb{A}_i^{n-d-1}) \cap X$ é o aberto afim dado pela condição $L_i \neq 0$, isto é, $U_i = X_{L_i}$. Mostraremos que, para cada i , $\pi : U_i \to \mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)$ é um morfismo finito.

Lembre que $k[U_i] = k[X][1/L_i]$ pelo lema 3.33. Tome $g \in k[U_i]$, digamos $g = g'/L_i^m$ com $g' \in k[X]$. Mostraremos que g é raiz de um polinômio mônico cujos coefientes estão em $k[\mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)]$.

Considere o mapa $\pi_1 : X \to \mathbb{P}^{n-d}$ dado por

$$\pi_1(x) = (L_0(x)^m : \cdots : L_{n-d-1}(x)^m : g'(x)).$$

π_1 é um morfismo. Como X é um fechado projetivo, $\pi_1(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^{n-d}$. Suponhamos que $\pi_1(X)$ é dado por equações $F_1 = \cdots = F_s = 0$, onde $F_1, \ldots, F_s \in k[S_0, \ldots, S_{n-d}]$.

É importante notar que o ponto $(0 : \cdots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{n-d}$ não está em $\pi_1(X)$, pois, se estivesse, $L_0, \ldots, L_{n-d-1}$ teriam um zero em comum em X, o que não ocorre pois X é disjunto de E. Então as equações

$$S_0 = \cdots = S_{n-d-1} = F_1 = \cdots = F_s = 0$$

não têm solução em $\mathbb{P}^{n-d}$.

Portanto, pelo Teorema Fraco dos Zeros, temos:

$$\langle S_0, \ldots, S_{n-d-1}, F_1, \ldots, F_s \rangle \supset \langle S_0^k, \ldots, S_{n-d}^k \rangle$$

para algum $k \geq 0$. Em particular S_{n-d}^k se escreve como:

$$S_{n-d}^k = \sum_{j=0}^{n-d-1} S_j H_j + \sum_{j=1}^{s} F_j P_j$$

com $H_j, P_j \in k[S_0, \ldots, S_{n-d}]$. Assim, em $\pi_1(X)$ temos $F_j = 0 \ \forall \ j$ e, logo,

$$S_{n-d}^k = \sum_{j=0}^{n-d-1} S_j H_j.$$

Seja $H_j^{(l)}$ a componente homogênea de grau l de H_j. Então o polinômio homogêneo de grau k

$$\Phi(S_0,\dots,S_{n-d}) := S_{n-d}^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} S_j H_j^{(k-1)}$$

é identicamente nulo em $\pi_1(X)$. Visto como polinômio em S_{n-d}, Φ é mônico. Assim, podemos escrever:

$$\Phi = S_{n-d}^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} A_{k-j}(S_0,\dots,S_{n-d-1})\ S_{n-d}^j$$

com A_{k-j} homogêneo de grau $k-j$. Substituindo $S_j = L_j^m$ para $j = 0,\dots,n-d-1$ e $S_{n-d} = g'$, temos

$$(g')^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} A_{k-j}(L_0^m,\dots,L_{n-d-1}^m)(g')^j = 0$$

A_{k-j} é homogêneo. Então dividindo por L_i^{mk}, obtemos:

$$g^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} A_{k-j}\left(\frac{L_0^m}{L_i^m},\dots,\frac{L_{n-d-1}^m}{L_i^m}\right) g^j = 0$$

Como L_j/L_i é regular em $\mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)$ para cada j, obtemos que g é inteiro sobre $k[\mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)]$. □

Corolário 4.19. *Sejam $F_0,\dots,F_m \in k[T_0,\dots,T_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau sem zeros comuns em um fechado $X \subset \mathbb{P}^n$. Então*

$$\varphi(x) = (F_0(x) : \cdots : F_m(x))$$

define um morfismo finito $\varphi : X \to \varphi(X)$

Demonstração. Demonstração em [3, pág.52] □

4.1 Normalização de Noether e Dimensão

Teorema 4.20 (Normalização de Noether)**.** *Se X é um conjunto algébrico projetivo, então existe um morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ para algum m. O teorema também é válido se X for um conjunto algébrico afim. Aí teremos um morfismo $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$.*

Demonstração. Caso 1: X conjunto algébrico projetivo

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto fechado. Se $X = \mathbb{P}^n$, basta que φ seja a identidade. Se $X \neq \mathbb{P}^n$ então existe $x \in \mathbb{P}^n - X$.

Seja φ' a projeção com centro em $x : \varphi' : X \to \varphi'(X)$. $\varphi'(X)$ está definida em X e $\varphi'(X)$ é finito pelo Teorema 4.18. Além disso, $\varphi'(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é um conjunto fechado projetivo (Se X é um fechado projeivo e $f : X \to Y$ um morfismo de conjuntos algébricos projetivos, então $f(X)$ é um fechado projetivo).

Se $\varphi'(X) \neq \mathbb{P}^{n-1}$, podemos repetir o argumento anterior.

Sabemos que a composição de morfismos finitos é finito. Assim, obteremos um morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ para algum $m \leq n$.

Caso 2: X conjunto algébrico afim

Tomemos $X \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Se $X = \mathbb{A}^n$, basta que φ seja a identidade. Se $X \neq \mathbb{A}^n$, considere $X \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_0 \subset \mathbb{P}^n$. Tomemos $\overline{X}$ o fecho projetivo de X em $\mathbb{P}^n$. Seja $x \in \mathbb{P}^n - \overline{X}$ um ponto no infinito, ou seja, $x \notin \mathbb{A}^n$.

Seja φ' a projeção $\varphi' : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ com centro em x. Veremos que $\varphi'(X)$ está no aberto $\mathbb{A}^{n-1}_0$ dos pontos infinitos de $\mathbb{P}^{n-1}$.

Sabemos que $x \notin \mathbb{A}^n_0$. Então $x = (0 : a_1 : \cdots : a_n)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_1 \neq 0$ Então x é dado pelas n equações a seguir:

$$T_0, a_1T_2 - a_2T_1, \ldots, a_1T_n - a_nT_1 \text{ e}$$

$\varphi'(\mathbb{A}^n_0) \subset \mathbb{A}^{n-1}_0$. Em particular, $\varphi'(X) \subset \mathbb{A}^{n-1}_0$. Se $\varphi'(X) = \mathbb{A}^{n-1}_0$, a demonstração está concluída. Se $\varphi'(X) \neq \mathbb{A}^{n-1}_0$, repetimos o argumento até obter o morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$.

□

Proposição 4.21. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito entre variedades afins. Então a inclusão $k[Y] \subset k[X]$ dada por f^* induz uma extensão de corpos $k(Y) \subset k(X)$ que é finita.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{A}^n$, então $k(X) = k(t_1, \ldots, t_n)$, onde t_i é a imagem de T_i em $k[X] = k[T_1, \ldots, T_n]/I(X)$. Como f é finito, cada t_i é inteiro sobre $k[Y]$ e $k[X]$ é gerado por um número finito de elementos algébricos sobre $k(Y)$. Portanto a extensão $k(X)/k(Y)$ é finita. O grau de f é o grau da extensão.

$$deg(f) = [k(X) : k(Y)].$$

□

Exemplo 4.22. *Seja o morfismo de $X = \mathbb{A}^1 = \{t \in k\}$ em $Y = \mathbb{A}^1 = \{s \in k\}$ dado por*

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ t &\mapsto s = t^2 \end{aligned}$$

Primeiro devemos ver se f é finito. Não é difícil verificar que f é dominante. O mapa de pullback é:

$$\begin{aligned} f^* : k[Y] = k[S] &\to k[X] = k[T] \\ S &\mapsto T^2 \end{aligned}$$

Desta maneira, via f^*, $S = T^2$ e $k[T^2] = k[Y] \subset k[X] = k[T]$ e é claro que T é inteiro sobre $k[Y]$, uma vez que T é raiz do polimônio mônico $p(\lambda) = \lambda^2 - T^2$ com coeficientes em $k[Y]$.

Portanto, f é finito.

O próximo passo é calcular o grau de f.

Sabemos que $k(Y) = k(T^2)$ e $k(X) = k(T)$ e, portanto, o grau da extensão $k(X)/k(Y)$ é 2. Logo, $deg(f) = 2$. Para cada $s \in Y$ existem no máximo 2 elementos em $f^{-1}(s)$. E, se $char(k) \neq 2, f^{-1}(s)$ possui exatamente dois elementos para todo $s \in Y - \{0\}$.

Definição 4.23 (Dimensão)**.** *Vamos definir a dimensão de X, uma variedade quasi-projetiva. Sabemos que $k(X)$ é uma extensão de k, ou seja, $k(X)$ é um corpo contendo k. A dimensão de X é o grau de transcendência desta extensão.*

$$dim(X) = trdeg(k(X) \backslash k)$$

Convenção: $dim(\emptyset) = -1$

Lema 4.24. *(a) Seja X uma variedade quasi-projetiva e seja $U \subset X$ um aberto. Então $dim(X) = dim(U)$;*

(b) $dim(\mathbb{A}^n) = dim(\mathbb{P}^n) = n$;

(c) Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito entre variedades quasi-projetivas. Então $dim(X) = dim(Y)$ e, em particular, se $X \cong Y$, temos $dim(X) = dim(Y)$.

Demonstração. (a) Para cada aberto denso U de X temos $k[U] \subset k[X]$. Mais ainda, vale $k(U) = k(X)$. Então é óbvio que $dim(X) = dim(U)$.

(b) $k(\mathbb{A}^n) = k(T_1, \ldots, T_n)$ e, portanto, $trdeg(k(\mathbb{A}^n)|k) = n$. Então $dim(\mathbb{A}^n) = n$ e, pelo item (a), $dim(\mathbb{P}^n) = n$.

(c) f é finito $\Rightarrow$ a extensão de corpos $k(X)|k(Y)$ induzida por f é algébrica. Então $k \subset k(Y) \subset k(X)$ e $dim(X) = trdeg(k(X)|k) = trdeg(k(Y)|k) = dim(Y)$.

Por fim, é suficiente notar que todo isomorfismo é morfismo finito.

□

Proposição 4.25. *Nas hipóteses do Teorema de Normalização de Noether, ou seja, sendo X um conjunto algébrico projetivo (afim), existe um morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ ($\varphi : X \to \mathbb{A}^m$) para algum m. Então m é a dimensão de X.*

Demonstração. Pelo Teorema de Normalização de Noether, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$ é um morfismo finito. Pelo lema anterior, segue que $dim(X) = dim(\mathbb{A}^m) = m$.

□

REFERÊNCIAS

1 Atiyah, M.F.; Macdonald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra.* Reading: Addison-Wesley, 1969.

2 Hulek, K. *Elementary Algebraic Geometry.* Providence: AMS, Student Mathematical Library Vol. 20, 2003.

3 Coelho, J. *Introdução à Geometria Algébrica.* UFF, Niterói, 200p.

4 Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra* 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.