UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Séries Incondicionalmente Convergentes e o Teorema de Dvoretzky-Rogers

Juiz de Fora
2023

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Séries Incondicionalmente Convergentes e o Teorema de Dvoretzky-Rogers

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra Cristiane de Andrade Mendes

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Veronezi, Anna Júlia.

Séries Incondicionalmente Convergentes e o Teorema de Dvoretzky-Rogers / Anna Júlia Gonçalves Veronezi. – 2023.

57 f.

Orientadora: Cristiane de Andrade Mendes

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Bacharelado em Matemática, 2023.

1. Análise Funcional 2. Teorema de Dvoretzky-Rogers. 3.Séries Incondicionalmente Convergentes. I. de Andrade Mendes, Cristiane, orient. II. Séries Incondicionalmente Convergentes e o Teorema de Dvortesky-Rogers.

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Séries Incondicionalmente Convergentes e o Teorema de Dvoretzky-Rogers

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra Cristiane de Andrade Mendes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. André Arbex Hallack
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por sempre estar iluminando meu caminho.

Agradeço aos meus pais, Aline e Lenilson, por todo amor e apoio que me deram. Eles sempre foram exemplo de dedicação e me permitiram, com muito esforço, chegar até aqui. Também agradeço à minha irmã, Anna Elize, por ser minha companheira e me fazer rir em todos os momentos, até os mais difíceis.

Agradeço ao meu namorado, Pedro, por ser incrível em todos os âmbitos. Como companheiro de vida, esteve do meu lado nos bons e maus momentos, me dando todo carinho e apoio que precisava. E como companheiro de estudos, me ajudou nas minhas dúvidas e fez parte da construção desse trabalho.

Agradeço a todos que foram meus professores e me abençoaram com o melhor presente que eu poderia ganhar, o conhecimento. Em destaque, ao Fábio por ter me apresentado o mundo acadêmico, ao Maikel, à Catarina e ao Luiz Fernando, por terem me guiado durante minha graduação.

Agradeço especialmente à minha orientadora, Cristiane. Obrigada por ter dedicado tanto do seu tempo para que eu pudesse chegar até aqui, por ser sempre atenciosa, gentil e por me dar ótimos conselhos.

Ademais, agradeço a todos meus familiares e amigos, lembrando, com carinho, das minhas avós: Maria das Graças e Zulmira.

"The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers."
Maryam Mirzakhani

RESUMO

A equivalência entre convergência absoluta e incondicional para séries na reta é bastante conhecida dos cursos de Análise. Neste trabalho, vamos expandir esse resultado para espaços normados de dimensão finita. Mostraremos que um espaço é completo se, e só se, a convergência absoluta implica convergência incondicional, verificando que esse lado da equivalência depende da completude e não da dimensão do espaço. Por outro lado, daremos um exemplo, que mostra a não validade da equivalência em dimensão infinita. O resultado principal desse trabalho é o Teorema de Dvoretzky-Rogers, que garante ainda mais: em todo espaço de Banach de dimensão infinita, é possível obter uma série que converge incondicionalmente mas não absolutamente. Mostraremos, então, quatro outras propriedades que são equivalentes à convergência incondicional. Por fim, iremos explorar mais um pouco a questão dos rearranjos, verificaremos que todo rearranjo de uma série incondicionalmente convergente tem mesma soma. Entretanto, se os rearranjos convergente de uma série convergem para a mesma soma, ela ainda pode não ser incondicionalmente convergente.

Palavras-chave: Teorema de Dvoretzky-Rogers. Séries Incondicionalmente Convergentes.

ABSTRACT

The equivalence between absolute and unconditional convergence for series on the line is quite known from Analysis courses. In this work, we will expand this result for finite-dimensional normed spaces. We will show that a space is complete if, and only if, absolute convergence implies unconditional convergence, verifying that this side of equivalence depends on completeness and not on the dimension of space. On the other hand, we will give an example, which shows the non-validity of equivalence in dimension infinite. The main result of this work is the Dvoretzky-Rogers Theorem, which guarantees even more: in every infinite-dimensional Banach space, it is possible to obtain a series that converges unconditionally but not absolutely. We will then show four other properties that are equivalent to unconditional convergence. Finally, we will explore the question of rearrangements a little more, we will verify that every rearrangement of an unconditionally summable series has the same sum.However, if convergent rearrangements of a series converge to the same sum, it still may not be unconditionally convergent.

Keywords: Dvoretzky-Rogers Theorem. Series Unconditionally Summable.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é o estudo de séries convergentes em espaços normados. Na Análise na Reta, vemos como as séries se comportam ao mudarmos a ordem em que somamos. Esse comportamento é alterado se ela converge absolutamente ou não. Podemos resumir essa dicotomia no seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Seja $\sum x_n$ uma série convergente de números reais, então apenas uma das seguintes alternativas é válida:*

1. *Dada uma permutação σ dos naturais, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge e $\sum x_{\sigma(n)} = \sum x_n$. Além disso, isso ocorre se, e somente se, há convergência absoluta;*

2. *Dado $c \in \mathbb{R}$ existe uma permutação dos naturais σ, tal que $\sum x_{\sigma(n)} = c$. Também podemos encontrar permutações que fazem a série divergir para $+\infty$ ou $-\infty$.*

O primeiro item foi provado por Dirichlet em 1837 enquanto o segundo teve seus primeiros passos obtidos por Riemann em 1854, tendo sido completado por Dini em 1868.

Em seus estudos sobre a completude, Banach deu o primeiro passo para a generalização do problema em 1922. Remontando às provas de completude de espaços L_p, ele demonstrou que um espaço é completo se, e só se, a convergência absoluta implica convergência incondicional. Já em 1932, ele propõe a seguinte pergunta: em espaços de Banach, a convergência incondicional implica convergência absoluta? O problema foi considerado interessante e entrou logo para a lista de problemas do Scottish Book.

Alguns ajustes simples na teoria mostravam que a equivalência era válida em qualquer espaço de dimensão finita. Isso se deve principalmente a dois fatores: o primeiro, a convergência no $\mathbb{R}^n$ ser equivalente à convergência coordenada a coordenada e, o segundo, aos espaços de mesma dimensão serem isomorfos.

Por outro lado, logo surgiram contra-exemplos de espaços de dimensão infinita para a questão que Banach apresentou. Ainda assim, não estava respondida se a convergência incondicional implicar convergência absoluta era um fato exclusivo de espaços com dimensão finita.

Um dos motivadores da resposta veio com o contraexemplo no espaço l_1, fornecido por M. S. Macphail em 1947. Inspirados por esse resultado, Dvoretsky e Rogers em 1950 conseguiram provar que, em um espaço de Banach de dimensão infinita, existe uma série que converge incondicionalmente, mas não absolutamente.

O Teorema de Dvoretsky-Rogers auxiliou na construção da teoria de espaços de Banach, além de ter inspirado Grothendieck e Pietsch, assim influenciando também o desenvolvimento da Teoria de Ideais de Operadores.

Mesmo não valendo a equivalência entre convergência absoluta e incondicional em dimensão infinita, convenientemente podemos encontrar outras propriedades de séries convergentes que são equivalentes com a convergência incondicional mesmo em dimensão infinita. Em [3] o leitor pode encontrar no Teorema 1.9, onze propriedades equivalentes à convergência incondicional.

Indo um pouco além, é possível obter uma série em que todo rearranjo que converge tem a mesma soma e, ainda assim, ela não é incondicionalmente convergente. O primeiro a explorar esse fato foi H. Hardwiger em 1941 com um exemplo em l_2, sendo mais tarde provado que esse fenômeno é comum em todo espaço de dimensão infinita por C. W. McArthur em 1956.

O primeiro capítulo desse trabalho será dedicado a apresentar alguns conceitos e teoremas de análise funcional, que serão utilizados durante o texto. Vamos, também, relembrar as definições e os resultados que nos permitem concluir a equivalência entre convergência absoluta e incondicional na reta. Isto é, iremos explorar os teoremas de Riemann e Dirichlet. Depois, iremos demonstrar como essa equivalência pode ser generalizada para o caso de espaços normados de dimensão finita.

No segundo capítulo iremos explorar o caso de dimensão infinita, com base no livro de Diestel, Jarchow e Tonge [3]. Iniciaremos com a demonstração do resultado de Riemann, citado acima, mostrando que um espaço é completo se, e só se, uma série que converge absolutamente também converge incondicionalmente. E então daremos um contra-exemplo em que a volta não é válida. Esse exemplo é bastante importante, pois servirá de inspiração para o resultado principal deste texto, o Teorema de Dvoretsky-Rogers, que será apresentado logo em seguida. Também traremos nesse capítulo três das propriedades que são equivalentes à convergência incondicional mesmo em dimensão infinita.

Para finalizar, no último capítulo, vamos seguir explorando séries convergentes e seus rearranjos. Aqui iremos introduzir duas novas classes de séries convergentes, as séries com soma invariantes e as séries fracamente incondicionalmente convergentes, inspiradas no artigo de C.W. McArthur [8]. O objetivo é relacioná-las entre si e com as séries incondicionalmente convergentes, que como veremos, acaba sendo uma subclasse de ambas. Vamos concluir, por fim, que mesmo se todo rearranjo convergente de uma série tiver a mesma soma, ainda assim ela pode não ser incondicionalmente convergente em dimensão infinita.

2 PRELIMINARES E RESULTADOS EM DIMENSÃO FINITA

Nesse capítulo, vamos apresentar as bases do nosso trabalho. Dedicaremos a primeira seção para os resultados de análise funcional, incluindo resultados de espaços métricos, que serão utilizados durante o texto.

Na segunda seção, iremos retomar os resultados pertinentes aos estudos de Análise na Reta. Dividindo nosso caminho em duas direções, iremos mostrar que, quando rearranjamos os termos de uma série absolutamente convergente, sua soma permanecerá sempre a mesma. Por outro lado, no Teorema de Riemann, veremos que quando a série é condicionalmente convergente, essa soma pode ir para qualquer valor. Com um simples raciocínio, poderemos obter o resultado de Dirichlet, que nos fala sobre a equivalência entre convergência absoluta e incondicional.

Na terceira seção iremos utilizar a convergência coordenada a coordenada para mostrar que a equivalência é mantida em espaços normados de dimensão finita sobre o corpo dos reais. E então, partindo de um isomorfismo conveniente, poderemos expandir esse resultado para espaços normados de dimensão finita sobre os complexos.

2.1 Análise Funcional

Nesta seção vamos retomar alguns resultados e definições de Análise Funcional. Como esse não é o foco do nosso trabalho, vamos deixar apenas indicações de onde podem ser encontradas as demonstrações dos resultados que citaremos. Como fonte de pesquisa, são recomendadas as referências [7], [10] .

Antes dos resultados mais importantes, vamos relembrar alguns outros que costumam ser dados mesmo em um curso de espaços métricos:

Teorema 2.1 (Caracterização dos Operadores Lineares Contínuos)**.** *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ e $T : E \to F$ linear. São equivalentes:*

- *T é lipschitziano;*
- *T é uniformemente contínuo;*
- *T é contínuo;*

- *T é contínuo em algum ponto de E;*
- *T é contínuo na origem;*
- $\sup\{||T(x)|| : x \in E, ||x|| \leq 1\} < \infty$;
- *existe uma constante $C \geq 0$ tal que $||T(x)|| \leq C||x||$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Página 25 de [7]. □

Proposição 2.2. *Sejam E e F espaços normados. Então temos:*

- $||T|| = \sup\{||T(x)|| : x \in E, ||x|| \leq 1\}$ *define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$, este é o espaço das aplicações lineares E em F;*
- $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ *para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$;*
- *Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é.*

Demonstração. Página 26 de [7]. □

Proposição 2.3. *A bola unitária fechada em um espaço de dimensão finita é compacta.*

Demonstração. Página 13 de [7]. □

Definição 2.4. Seja E um espaço de Banach. Uma sequência (x_i) de elementos de E é dita **Base de Schauder** quando para todo $x \in E$ existe uma única sequência de números (η_i) tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

Proposição 2.5. *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço linear fechado, também de dimensão infinita, com base de Schauder cujos elementos tem norma unitária.*

Demonstração. Página 39 de [6]. □

Usaremos os seguintes resultados de Análise Funcional:

Teorema 2.6 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear, contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. Página 33 de [7]. $\square$

Teorema 2.7 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear, então T é contínuo se, e somente se, o gráfico de T é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. Página 35 de [7]. $\square$

Teorema 2.8 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K}$ e seja $\phi : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\phi} : E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com ϕ e $\left|\left|\widetilde{\phi}\right|\right| = ||\phi||$.*

Demonstração. Página 47 de [7]. $\square$

Um corolário do último teorema bastante usado diz o seguinte:

Corolário 2.9. *Sejam E um espaço normado não-nulo e $x \in E$. Então*

$$||x|| = \sup\{|\phi| : \phi \in E' \text{ } e \text{ } ||\phi|| \leq 1\}$$

e o supremo é atingido. Aqui E' denota o ***dual*** *de E, isto é, o conjuntos dos operadores lineares contínuos de E em $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Página 47 de [7]. $\square$

Agora retomemos alguns exemplos de espaços de Banach de dimensão infinita e suas normas:

Exemplos 2.10. Para $1 \leq p < \infty$ o espaço das sequências de números reais (ou complexos), (a_n), tais que $\sum |a_n|^p < \infty$, chamado de l_p, é um espaço de Banach com a norma $||(a_n)|| = (\sum |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Exemplos 2.11. Para $p = \infty$, o espaço das sequências de números reais(ou complexos), (a_n), tais que $\sup_n\{|a_n|\} < \infty$, chamado de l_∞, é um espaço de Banach com norma $||(a_n)|| = \sup_n\{|a_n|\}$.

Além disso, o espaço das sequências que convergem para zero é um de seus subespaços de dimensão infinita, que denotaremos por c_0. Portanto, a norma utilizada nesse espaço é a norma induzida por l_∞, isto é, a mesma norma acima.

2.2 Primeiro Caso: Séries em $\mathbb{R}$

Para relembrar, uma série real $\sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente** quando $\sum |a_n|$ converge, **condicionalmente convergente** quando $\sum a_n$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge e **incondicionalmente convergente** quando para qualquer bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ converge.

Em alguns livros as séries incondicionalmente convergentes são chamadas de comutativamente convergentes. Isso ocorre no livro que usaremos como referência para demonstrar os resultados dessa seção: [5]

Vamos adotar como convenção que uma sequência (x_n) de números reais é **monótona não-decrescente** (resp. **não crescente**) se $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_{n+1} \leq x_n$) para todo n e **decrescente** (resp. **crescente**) se $x_n > x_{n+1}$ (resp. $x_{n+1} > x_n$) para todo n.

Dada a série real $\sum a_n$, podemos escrever:

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$$

em que $p_n = \max\{a_n, 0\}$ e $q_n = \max\{-a_n, 0\}$ são chamadas **parte positiva** e **parte negativa** de a_n, respectivamente.

Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, então $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são ambas divergentes. De fato, suponhamos por absurdo que uma das duas converge, digamos (q_n). Temos que $|a_n| = p_n + q_n$ e $a_n = p_n - q_n$. Combinando ambas as equações, obtemos que $|a_n| = a_n + 2q_n$. Daí $\sum |a_n| = \sum a_n + 2\sum q_n$, donde a série convergiria absolutamente, o que é uma contradição.

No primeiro resultado, iremos mostrar que toda série real absolutamente convergente é também incondicionalmente convergente e sua soma não se altera sob rearranjos.

Teorema 2.12. *Se* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente, então para toda bijeção* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, considerando* $b_n = a_{\sigma(n)}$*, tem-se* $\sum b_n = \sum a_n$*.*

Demonstração. Primeiramente vamos supor $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam s_n, t_n as reduzidas de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$$

Seja $m = \max_{i=1,..,n} \sigma(i)$. Temos que $\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \subset [1, m]$. Logo

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} \leq \sum_{j=1}^{m} a_j = s_m$$

Sabemos que s_m converge para $\sum a_n$, pois $\sum a_n$ converge absolutamente. Além disso, s_m é monótona não decrescente, com $s_m \leq \sum a_n$. Dessa forma, t_n é monótona e limitada, portanto converge. Daí, $\sum b_n = \lim t_n \leq \sum a_n$. Por outro lado, se olharmos para a inversa σ^{-1}, teremos $a_n = b_{\sigma^{-1}(n)}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_{\sigma^{-1}(i)} \leq \sum_{j=1}^{m'} b_j = t_{m'} \leq \sum b_n$$

em que $m' = \max_{i=1,...,n} \sigma^{-1}(i)$. Como $\lim s_n = \sum a_n$ e $s_n \leq \sum b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum a_n \leq \sum b_n$. Concluímos que $\sum a_n = \sum b_n$.

Para o caso geral, iremos escrever

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$$

sendo p_n e q_n a parte positiva e a parte negativa de a_n, respectivamente. Uma reordenação (b_n) dos termos a_n provoca uma reordenação (u_n) dos termos p_n e outra (v_n) dos termos q_n, com u_n parte positiva e v_n parte negativa de b_n, respectivamente. Como $p_n, q_n \geq 0$, temos pelo caso anterior que $\sum p_n = \sum u_n$ e $\sum q_n = \sum v_n$, donde:

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n$$

demonstrando o resultado. □

O teorema a seguir nos dá a outra propriedade que esperamos:

Teorema 2.13 (Riemann)**.** *Alternando-se convenientemente a ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente, pode-se fazer com que sua soma fique igual a qualquer número real pré-fixado.*

Demonstração. Sejam $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente, sendo p_n, q_n suas partes positiva e negativa, respectivamente. E seja c um número real fixado.

Vamos reordenar os termos de (a_n) da seguinte maneira: tomaremos $p_1, p_2, ..., p_{n_1}$ onde n_1 é o menor índice tal que $p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} > c$. Depois, tomaremos $q_1, q_2, ..., q_{n_2}$, sendo n_2 o menor índice tal que $p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} < c$. E então, tomaremos $p_{n_1+1}, ..., p_{n_3}$, onde n_3 é o menor índice tal que $p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3} > c$. Essas escolhas são possíveis pois, como a_n é condicionalmente convergente, $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Prosseguindo obteremos uma reordenação de $\sum a_n$.

Vamos mostrar que essa reordenação de $\sum a_n$ tem reduzidas t_n que tendem para c.

Pela maneira que tomamos o rearranjo, é intuitivo pensar que a suposição é verdadeira. Isto se deve ao fato das reduzidas estarem variando em torno de c e mais ainda, como $\sum a_n$ converge, teremos que $a_n \to 0$ donde $p_n, q_n \to 0$, o que significa que as somas ficarão cada vez mais próximas de c.

Para de fato demonstrar essa ideia, vamos adotar a seguinte notação $k_1 = n_1, k_i = n_i + n_{i-1}$ para $i = 2, 3, ...$ Assim teremos para i impar:

$$\begin{aligned}
t_{k_1} = t_{n_1} &= p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} \\
t_{k_2} = t_{n_2+n_1} &= p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} \\
&\vdots \\
t_{k_i} = t_{n_i+n_{i-1}} &= p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + ... - q_{n_{i-1-2}+1} - ...- \\
&\qquad - q_{n_{i-1}} + p_{n_{i-2}+1} + ... + p_{n_i}
\end{aligned}$$

Isto é, t_{k_i} irá representar a soma até o último elemento do i-ésimo bloco de partes positivas. E também $t_{k_{i+1}}$ a soma até o último elemento do bloco seguinte de partes negativas.

Notemos que:

$$t_{k_i} = t_{n_i+n_{i-1}} = (p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + ... - q_{n_{i-1-2}+1} - ... - q_{n_{i-1}}) +$$

$$+ p_{n_{i-2}+1} + ... + p_{n_i-1} + p_{n_i} = t_{k_{i-1}} + p_{n_{i-2}+1} + ... + p_{n_i-1} + p_{n_i}$$

e , como $t_{k_{i-1}} + p_{n_{i-2}+1} + ... + p_{n_i-1} \geq c$, teremos:

$$0 < t_{k_i} - c \leq p_{n_i}$$

Além disso,

$$t_{k_{i+1}} = (p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + ... + p_{n_{i-2}+1} + ... + p_{n_i}) -$$

$$- q_{n_{i+1-2}+1} - ... - q_{n_{i+1}-1} - q_{n_{i+1}} = t_{k_i} - q_{n_{i+1-2}+1} - ... - q_{n_{i+1}-1} - q_{n_{i+1}}$$

e, como $t_{k_i} - q_{n_{i+1-2}+1} - ... - q_{n_{i+1}-1} \geq c$, teremos:

$$0 < c - t_{k_{i+1}} \leq q_{n_{i-1}}$$

Como $\sum a_n$ converge, $\lim p_n = \lim q_n = 0$ e segue que $\lim_{i\to\infty} p_{n_i} = \lim_{i\to\infty} q_{n_i} = 0$. Logo, como $0 < t_{k_i} - c \leq p_{n_i}$ e $0 < c - t_{k_{i+1}} \leq q_{n_{i-1}}$, temos $lim_{n\to\infty} t_{k_n} = c$, como queríamos.

Agora, precisamos também que as reduzidas que terminam em um elemento qualquer dentro dos blocos naturais construídos pelo rearranjo tendam para c.

Para demonstrar isso, vamos notar o seguinte fato:

Como

$$k_i = n_i + n_{i-1}$$
$$k_{i+1} = n_{i+1} + n_i$$

com i impar, n_{i-1} e n_{i+1} são índices de q que crescem com i, logo $k_i < k_{i+1}$. Se existe k tal que $k_i < k < k_{i+1}$, isto é, k representa um elemento que está em uma posição dentro dos blocos, então podemos escrever:

$$t_k = t_{k_i} - q_{n_{i-1}+1} - ... - q_k \Rightarrow t_{k_i} \geq t_k - q_{k+1} - ... - q_{n_{i+1}} = t_{k_i+1}$$

Consequentemente, $t_k \geq t_{k_{i+1}}$.

Logo $t_{k_i} \geq t_k \geq t_{k_{i+1}}$ para i ímpar. Já para i par, teremos, repetindo o processo de forma análoga, que $t_{k_{i+1}} \geq t_k \geq t_{k_i}$. Quando i tende a infinito, k também tende a infinito, donde $\lim_{k\to\infty} t_k = c$, como queríamos.

Concluímos que toda reduzida do rearranjo vai para c, isto é, a soma da série rearranjada de maneira conveniente é o valor real esperado. □

Podemos ainda mostrar que podemos reordenar uma série incondicionalmente convergente para que sua soma seja infinita.

A ideia nesse caso é usar também o fato que $p_n, q_n \to 0$, isto é, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n, q_n < 1$. Daí, podemos somar elementos positivos até que $s_n+p_{n+1}+...+p_{n_1} > c+2$ e então subtraímos o termo negativo de menor índice ainda não somado e não nulo, isto é, $s_n+p_{n+1}+...+p_{n_1}-q_{n_2} > c+1$. Novamente somamos os termos positivos até que a soma ultrapasse $c+3$ e então subtraímos o próximo termo negativo não nulo, com $s_n+p_{n+1}+...+p_{n_1}-q_{n_2}+p_{n_1+1}+...+p_{n_3}-q_{n_4} > c+2$. Podemos fazer isso consecutivamente e então a soma irá crescer indefinidamente.

Portanto, existem duas opções para séries convergentes na reta: convergir absolutamente ou condicionalmente. Como existe uma reordenação de uma série condicionalmente convergente cuja soma diverge, ela não pode ser, por definição, incondicionalmente convergente. Daí concluímos que uma série incondicionalmente convergente deve ser também absolutamente convergente.

Vamos ainda mostrar posteriormente (Teorema 4.2), que uma série que converge incondicionalmente em um espaço normado, sempre deve convergir para o mesmo valor, o que nos daria a mesma conclusão acima.

Junto com o Teorema de Riemann (Teorema 2.13), concluímos que:

Teorema 2.14 (Dirichlet)**.** *Uma série de números reais é incondicionalmente convergente se, e somente se, é absolutamente convergente.*

2.3 Segundo Caso: Séries em Espaços Normados de Dimensão Finita

Solucionada a questão na reta, podemos pensar no que acontece quando tomamos espaços normados de dimensão finita.

Seja E um espaço normado, com norma $||\cdot||$. Uma série $\sum x_n$, com $x_n \in E$ para todo n, é **convergente** se existe $S \in E$ tal que $||\sum_{j=1}^{n} x_j - S|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Dizemos que S é a **soma** da série e escrevemos $\sum x_n = S$.

De forma análoga ao caso na reta, $\sum x_n$ é **absolutamente convergente** se $\sum ||x_n||$ converge e **incondicionalmente convergente**, se para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge. Poderemos utilizar também o termo **incondicionalmente somável** para sequências cuja série é incondicionalmente convergente.

Vamos começar considerando séries no espaço euclidiano. Iremos adotar a seguinte notação para sequências no espaço euclidiano de dimensão n: $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$, isto é, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered} x^{(1)} = (x_1^{(1)}, ..., x_n^{(1)}) \\ \vdots \\ x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \\ \vdots \end{gathered}$$

em que $x_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., n$ e $j \in N$.

Um dos resultados que irá facilitar nossas demonstrações é a convergência coordenada a coordenada:

Proposição 2.15. *Seja $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$, com $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Temos que $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}$ converge se, e somente se, $\sum_{k=1}^{\infty} x_i^{(k)}$ converge para todo $i = 1, ..., n$.*

Demonstração. Veja [9], Teorema 4 da seção 5 no Capítulo I. □

Além disso, também utilizaremos o resultado abaixo sobre equivalência de normas.

Proposição 2.16. *Sejam E e F espaços normados de dimensão finita. Então:*

1. *E é completo;*

2. *duas normas quaisquer em E são equivalentes;*

3. uma aplicação linear $\phi : E \to F$ é contínua.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na Proposição 12 do Capítulo 8 de [1]. □

Note que a convergência aqui está ligada à completude do espaço, pois a série deve convergir para um elemento no espaço em que ela está. Como vamos trabalhar em dimensão finita, não precisamos nos preocupar, pois todo espaço normado de dimensão finita é completo.

Podemos então generalizar a equivalência entre convergência absoluta e incondicional para o espaço euclidiano:

Proposição 2.17. *Dada uma sequência $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}^n$ e uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, então $\sum_{k=1}^{\infty} ||x^{(k)}||$ converge se, e somente se, $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(\sigma(k))}$ converge.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum_{k=1}^{\infty} ||x^{(k)}||$ convirja. Temos, usando a norma da soma, que:

$$||x^{(k)}||_1 = |x_1^{(k)}| + ... + |x_n^{(k)}|$$

logo $|x_i^{(k)}| \leq ||x^{(k)}||_1$ e pelo Critério da Comparação, como $\sum_{k=1}^{\infty} ||x^{(k)}||$ converge por hipótese, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_i^{(k)}|$ converge para todo $i \in \mathbb{N}$. Como essa série é real, pelo Teorema 2.12, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} x_i^{(\sigma(k))}$ converge para todo i. Isto é, cada entrada de $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(\sigma(k))}$ converge, donde ela converge.

Reciprocamente, suponhamos que, para qualquer permutação σ, $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(\sigma(k))}$ converge. Então, $\sum_{k=1}^{\infty} x_i^{(\sigma(k))}$ converge para todo $i = 1, ..., n$. Como a série é real, temos pelo Teorema 2.12 que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_i^{(k)}|$ converge para todo i, donde

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_1^{(k)}| + ... + |x_n^{(k)}| = \sum_{k=1}^{\infty} ||x^{(k)}||_1$$

converge.

Como estamos em um espaço de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Portanto, para uma norma qualquer $|| \cdot ||$, temos que existe $c > 0$ escalar tal que $||x^{(k)}|| \leq c||x^{(k)}||_1$, logo $\sum_{k=1}^{\infty} ||x^{(k)}||$ converge pelo Critério de Comparação.

□

Observe que podemos olhar para o conjunto dos complexos como um espaço vetorial sobre o corpo real. Então de maneira análoga ao teorema anterior, teríamos que uma série complexa é absolutamente convergente se, e somente se, é incondicionalmente convergente.

Além disso, poderíamos tomar $\mathbb{K}^n$ no lugar de $\mathbb{R}^n$ no teorema anterior. Isto porque na ida não usamos nenhuma propriedade específica do corpo, apenas da norma levar em um real. Já na volta, usaríamos apenas a observação acima no caso complexo para concluir a validade para um corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Isto é:

Proposição 2.18. *Dada uma sequência $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}^n$ e uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, então $\sum_{k=1}^{\infty} ||x^{(k)}||$ converge se, e somente se, $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(\sigma(k))}$ converge.*

A partir do resultado acima, podemos generalizá-lo para qualquer espaço normado de dimensão finita. Para isto, basta escolher um isomorfismo conveniente.

Proposição 2.19. *Seja E um espaço normado de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Dada uma sequência $\sum x_n$ em E e uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, então $\sum ||x_n||$ converge se, e somente se, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge.*

Demonstração. Vamos considerar então um espaço normado E cuja dimensão é n e seja $B_E = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ sua base. Então dado um $x \in E$, existem únicos escalares $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tal que $x = a_1\beta_1 + ... + a_n\beta_n$. Notemos que $||x||_E = ||a_1|| + ... + ||a_n||$ é uma norma em E.

Consideremos a função $\phi : E \to \mathbb{K}^n$ dada por $\phi(x) = (a_1, ..., a_n)$. Temos que ϕ é uma transformação linear. Por ser linear entre espaços de dimensão finita, temos que ϕ é uma função contínua. Além disso,

$$||\phi(x)||_1 = ||(a_1, ..., a_n)||_1 = ||a_1|| + ... + ||a_n|| = ||x||_E$$

Com isso, temos que ϕ é injetora.

Notemos ainda que, pelo Teorema do Núcleo-Imagem, ϕ é sobrejetora, portanto é uma bijeção. Como a inversa de uma transformação linear é sempre linear, obtemos que ϕ^{-1} é linear entre espaços de dimensão finita, logo é contínua.

Agora iremos de fato mostrar o teorema.
Suponhamos que $\sum ||x_n||$ convirja. Então, como toda norma em dimensão finita é equivalente, temos que existe $c > 0$ real tal que $||x_n||_E \leq c||x_n||$. Logo $\sum ||x_n||_E$ converge pelo Critério de Comparação. Daí, como $||\phi(x_n)||_1 = ||x_n||_E$, temos que $\sum ||\phi(x_n)||_1$ converge. Logo, pela equivalência das normas, a série $\sum ||\phi(x_n)||$ converge. Como $\phi(x_n) \in \mathbb{K}^n$, do Teorema 2.18 temos que $\sum \phi(x_{\sigma(n)})$ converge. Sabendo que ϕ^{-1} é contínua e linear, temos que $\phi^{-1}(\sum \phi(x_{\sigma(n)}))$ converge e $\phi^{-1}(\sum \phi(x_{\sigma(n)})) = \sum \phi^{-1}(\phi(x_{\sigma(n)})) = \sum x_{\sigma(n)}$, isto é, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge. Portanto, uma série qualquer em E que converge absolutamente, também converge incondicionalmente.

Por outro lado, suponhamos que $\sum x_{\sigma(n)}$ convirja. Como ϕ é contínua, $\phi(\sum x_{\sigma(n)})$ converge, e por ser linear e contínua, $\phi(\sum x_{\sigma(n)}) = \sum \phi(x_{\sigma(n)})$. Logo, a série $\sum \phi(x_{\sigma(n)})$ converge. Notemos que $\phi(x_{\sigma(n)}) \in \mathbb{K}^n$, logo podemos aplicar o Teorema 2.18, isto é, $\sum ||\phi(x_n)||$ converge. Pela equivalência das normas em dimensão finita e pelo Critério de Comparação, $\sum ||\phi(x_n)||_1$ converge. Já vimos que a série $\sum ||\phi(x_n)||_1 = \sum ||x_n||_E$ converge e, usando novamente a equivalência das normas, temos que a série $\sum ||x_n||$ converge, concluindo a demonstração. $\square$

Aqui encerramos o problema para espaços normados de dimensão finita.

3 O TEOREMA DE DVORETZKY-ROGERS

Neste capítulo, vamos verificar se existe uma generalização do Teorema de Dirichlet para espaços normados de dimensão infinita. Começaremos com um resultado obtido pelo próprio Banach, que observou que uma das implicações continua válida em espaços de Banach de dimensão infinita. Especificamente, é fato que séries absolutamente convergentes são incondicionalmente convergentes em espaços normados.

Por outro lado, não há validade da volta. Mostraremos inicialmente um contraexemplo no espaço l_2. Após algumas construções, poderemos finalmente demonstrar o Teorema de Dvoretsky-Rogers. Este teorema nos diz que em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, conseguimos uma série que invalida a volta.

É importante situar o leitor que, por volta do século 20, surgiu a Análise Funcional. Com isso, os resultados obtidos na reta passaram por testes para verificar sua validade em dimensões "maiores".

Um dos precursores dessa nova área foi Banach e, em sua tese, ele nos presenteou com o seguinte resultado:

Proposição 3.1. *Um espaço normado E é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Suponhamos que E seja um espaço de Banach e, que $\sum x_n$ seja uma série absolutamente convergente em E, isto é, $\sum ||x_n|| < \infty$. Como $\sum ||x_n||$ pode ser vista como uma série real, podemos aplicar o Teorema de Dirichlet que nos diz que, dada uma permutação σ, $\sum ||x_{\sigma(n)}|| < \infty$. Pelo Critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n > m \geq n(\varepsilon)$, temos que:

$$\sum_{j=m}^{n} ||x_{\sigma(j)}|| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Mas também temos que, para $n > m \geq n(\varepsilon)$:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)}\right\| = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} x_{\sigma(j)}\right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(j)}\right\| < \varepsilon$$

Usamos a desigualdade triangular e a desigualdade (3.1) na última passagem. Logo, a sequência das reduzidas de $\sum x_{\sigma(n)}$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$, é uma sequência de Cauchy e por estar em um espaço de Banach, convergem. Concluímos que $\sum x_{\sigma(n)}$ converge em E, mostrando que a série é incondicionalmente convergente.

Por outro lado, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em E, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n(\varepsilon)$, temos que $||x_n - x_m|| < \varepsilon$. Vamos tomar para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_k, n_{k+1} \geq n(\varepsilon)$, com $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Daí, teremos $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$. Construímos assim uma sequência $(n_k) \in \mathbb{N}$ tal que, denotando $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, temos que $||y_k|| < \frac{1}{2^k}$. Logo, $\sum ||y_k|| \leq \sum \frac{1}{2^k} = 2$. Isto é, obtemos uma sequência $(y_k) \subset E$ absolutamente convergente. Então, por hipótese, teremos que ela é incondicionalmente convergente. Notemos que

$$y_1 + y_2 + ... + y_k = x_{n_2} - x_{n_1} + x_{n_3} - x_{n_2} + ... + x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_{k+1}} - x_{n_1}$$

Consequentemente, $x_{n_1} + y_1 + y_2 + ... + y_k = x_{n_{k+1}}$. Dessa forma, fazendo $k \to \infty$, teremos que (x_{n_k}) converge, isto é, (x_n) tem uma subsequência convergente, logo converge. Isto prova que E é um espaço de Banach.

$\square$

Observemos que o importante para a validade da implicação da convergência absoluta em incondicional é o espaço ser completo em relação a sua norma, isto é, ela não depende da dimensão.

A novidade vem ao nos questionarmos se uma série em um espaço de Banach (de dimensão infinita), que converge incondicionalmente, vai convergir absolutamente. A resposta para essa pergunta é negativa, a seguir mostraremos um exemplo em que a implicação não é válida.

Exemplos 3.2. Tomando $E = l_2$, vamos mostrar que a série $\sum x_n$ quando $x_n = \dfrac{e_n}{n}$, aqui $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ com 1 na i-ésima entrada, converge incondicionalmente mas não absolutamente em l_2.

Primeiro, vamos analisar a série em l_2. Notemos que $x = (\frac{1}{n})$ está em l_2, isto por que $(\sum |\frac{1}{n}|^2)^{\frac{1}{2}}$ converge por resultado de análise na reta. Isto é, dado $\varepsilon > 0$,

existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n(\varepsilon)$, temos que $\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right| = \left|\sum \frac{1}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right| < \varepsilon^2$.
Além disso, temos que $\sum x_n = x$ pois, para $n \geq n(\varepsilon)$, temos:

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right|\right|_2 = \left|\left|\left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...\right) - \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...\right)\right|\right|_2 =$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Agora, vamos verificar que a série converge incondicionalmente. Dada σ uma permutação, como σ é sobrejetora, para cada $j = 1, ..., n(\varepsilon)$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(n_j) = j$. Seja $n_0 = \max\{n_1, ..., n_{n(\varepsilon)}\}$. Então, para $n \geq n_0$, teremos as $n(\varepsilon)$ primeiras coordenadas de $\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$ iguais as $n(\varepsilon)$ primeiras coordenadas de x. Isto ocorre porque j irá assumir os valores $\{n_1, ..., n_{n(\varepsilon)}\}$, pois esses são naturais menores que n, dessa forma, teremos os termos $x_{\sigma(n_1)} + ... + x_{\sigma(n_{n(\varepsilon)})} = x_1 + ... + x_{n(\varepsilon)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n(\varepsilon)}, ...)$. Como cada valor de j corresponde a uma entrada, as $n(\varepsilon)$ primeiras não serão alteradas pelas demais parcelas da série. Portanto:

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right|\right|_2^2 \leq \sum_{i=n(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2$$

donde $\sum x_{\sigma(n)}$ converge, como queríamos.

Por fim, como $||x_n||_2 = ||(0, ..., 0, \frac{1}{n}, 0, ...)||_2 = \frac{1}{n}$, então $\sum ||x_n||_2 = \sum \frac{1}{n}$ que diverge. Logo, a série não converge absolutamente em l_2.

Podemos ainda mostrar que para qualquer sequência (a_n) que está em l_2 mas não está em l_1, a série $\sum a_n e_n$ converge incondicionalmente mas não absolutamente. Para isso basta repetir o processo feito nesse exemplo usando $x_n = a_n e_n$.

A partir disso, podemos pensar se a convergência incondicional implicar convergência absoluta é um fato exclusivo de espaços com dimensão finita. Essa questão se mostrou bastante difícil, tendo sido abordada por Banach em [2] e tendo se tornado um dos problemas do Scottish Book[1]. Finalmente, em 1950, o problema foi solucionado por Dvoretsky e Rogers em [4], onde foi usada uma adaptação do exemplo anterior para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita.

Iremos provar nesse trabalho o Teorema de Dvoretsky-Rogers (Teorema 3.5), que nos permitirá afirmar que é sempre possível encontrar uma sequência que converge incondicionalmente mas não absolutamente em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita. Seguiremos aqui o caminho indicado no livro de Diestel, Jarchow e Tonge [3].

Antes de provarmos o Teorema de Dvoretsky-Rogers, precisamos demonstrar outros dois resultados. Estes são o lema de Diestel e um teorema que nos dá uma formulação conveniente para convergência incondicional.

Lema 3.3. *Seja E um espaço de Banach de dimensão $2n$. Então, existem n vetores $x_1, ..., x_n$ na bola fechada unitária de E cada um com norma maior ou igual a meio tal que, independentemente dos escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$, temos que:*

$$\left|\left|\sum_{j\leq n} \lambda_j x_j\right|\right| \leq \left(\sum_{j\leq n} |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos estabelecer algumas notações. Se w é uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão k, cada um com uma base escolhida, então $\det(w)$ e $\text{tr}(w)$ denotam o determinante e o traço, respectivamente, da matriz de w nas bases escolhidas.

Denotamos por l_2^{2n} o espaço métrico formado pelo conjunto $\mathbb{R}^{2n}$ e a métrica $d(x, y) = \sum_{i=1}^{2n} |x_i - y_i|^2$ onde $x = (x_1, ..., x_{2n}), y = (y_1, ..., y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Para facilitar a organização, iremos dividir a prova desse lema em duas etapas:

Etapa 1: Vamos começar nossa prova obtendo um isomorfismo $u : l_2^{2n} \to E$ de norma unitária que satisfaça:

$$|\text{tr}(u^{-1}v)| \leq 2n||v|| \tag{3.2}$$

[1] Caderno usado pelos matemáticos da Escola de Matemática de Lwów, na Polônia, para anotar problemas à resolver. Muitos dos problemas que foram resolvidos de modo cooperativo colaboraram para o avanço da Análise Funcional e da Topologia.

para todo operador $v : l_2^{2n} \to E$.

Para obter esse isomorfismo, vamos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{L}(l_2^{2n}, E) &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \det(v) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(l_2^{2n}, E)$ tem dimensão finita, então a esfera unitária nesse espaço, que denotaremos por S, é compacta. Pelo Teorema de Weierstrass, existe máximo da função $|.| \circ \det$ em S.

Tomaremos então $u \in S$ tal que

$$|\det(u)| = \max\{|\det(v)| : v \in \mathcal{L}(l_2^{2n}, E), v \in S\} \tag{3.3}$$

Esse será nosso palpite para o isomorfismo desejado. Temos que u tem norma unitária, pois está na esfera unitária e é isomorfismo pois $\det(u) \neq 0$, já que temos a "identidade", id, cujo determinante é 1. Logo, $|\det(u)| \geq 1$. Notemos que isso implica que u é invertível. Para concluir a primeira etapa, mostraremos que o isomorfismo u satisfaz a desigualdade 3.2, o que exige um pouco mais de trabalho.

Seja $\varepsilon \neq 0$ um escalar em $\mathbb{K}$ e $v \in \mathcal{L}(l_2^{2n}, E)$. Então, $u + \varepsilon v \in \mathcal{L}(l_2^{2n}, E)$, pois este é um espaço vetorial. Logo:

$$\frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{||u + \varepsilon v||^{2n}} = \left|\frac{\det(u + \varepsilon v)}{||u + \varepsilon v||^{2n}}\right| = \left|\det\left(\frac{u + \varepsilon v}{||u + \varepsilon v||}\right)\right| \leq |\det(u)|$$

A última desigualdade ocorre porque $\frac{u+\varepsilon v}{||u+\varepsilon v||} \in S$. Prosseguindo, obtemos:

$$|\det(u + \varepsilon v)| \leq |\det(u)| \cdot ||u + \varepsilon v||^{2n} \leq |\det(u)| \cdot (1 + |\varepsilon| \cdot ||v||)^{2n} \tag{3.4}$$

aqui usamos a desigualdade triangular na última desigualdade.

Também podemos escrever:

$$|\det(u + \varepsilon v)| = |\det(u \cdot id + \varepsilon u u^{-1} v)| = |\det(u)| \cdot |\det(id + \varepsilon u^{-1} v)| \tag{3.5}$$

Afirmação 1 $\det(id + \varepsilon u^{-1}v) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)$, em que $c(\varepsilon)$ é um polinômio em ε^2 sem termo independente.

Substituindo na equação 3.5, obtemos:

$$|\det(u + \varepsilon v)| = |\det(u)| \cdot |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)|$$

e usando a desigualdade 3.4,

$$|\det(u)| \cdot |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)| = |\det(u + \varepsilon v)| \overset{3.4}{\leq} |\det(u)| \cdot (1 + |\varepsilon| \cdot ||v||)^{2n}$$

$$\Rightarrow |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)| \leq (1 + |\varepsilon| \cdot ||v||)^{2n} \tag{3.6}$$

Podemos ainda manipular ambos os lados dessa desigualdade. Usando o Binômio de Newton, temos que

$$(1 + |\varepsilon| \cdot ||v||)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} |\varepsilon|^i \cdot ||v||^i = 1 + 2n|\varepsilon| \cdot ||v|| + |\varepsilon|^2(\dots) \tag{3.7}$$

Vamos também trabalhar o membro esquerdo na inequação

$$|1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)| \geq \Big| |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| - |c(\varepsilon)| \Big| \geq |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| - |c(\varepsilon)|$$

Notemos que tudo que fizemos até aqui vale para qualquer escalar ε e qualquer vetor $v \in \mathcal{L}(l_2^{2n}, E)$.

Fixado $v \in \mathcal{L}(l_2^{2n}, E)$, podemos tomar ε tal que:

$$\varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) = |\varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| \tag{3.8}$$

basta que para $\mathrm{tr}(u^{-1}v) = re^{i\theta}$ tomemos $\varepsilon = \delta e^{i(2\pi - \theta)}$, sendo δ real positivo. Daí:

$$|1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) = 1 + |\varepsilon| \cdot |\mathrm{tr}(u^{-1}v)|$$

Portanto, utilizando as construções válidas para qualquer escalar e vetor v, temos que

$$1 + |\varepsilon| \cdot |\mathrm{tr}(u^{-1}v)| - |c(\varepsilon)| \overset{3.8}{=} 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) - |c(\varepsilon)| \leq$$

$$\leq |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v)| - |c(\varepsilon)| \leq |1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)| \overset{3.6}{\leq} (1 + |\varepsilon| \cdot ||v||)^{2n} =$$

$$\overset{3.7}{=} 1 + 2n|\varepsilon| \cdot ||v|| + |\varepsilon|^2(\dots)$$

Podemos reagrupar ambos os termos dependentes de $|\varepsilon|^2$ e colocar em evidência:

$$|\varepsilon| \cdot |\mathrm{tr}(u^{-1}v)| \leq 2n|\varepsilon| \cdot ||v|| + |\varepsilon|^2(\dots)$$

$$\Rightarrow |\mathrm{tr}(u^{-1}v)| \leq 2n||v|| + |\varepsilon|(\dots)$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, isto é possível pois podemos tomar $\delta \to 0$, obtemos a desigualdade 3.2 o que finaliza a Etapa 1.

Dem. Afirmação 1: Queremos provar a seguinte igualdade:

$$\det(id + \varepsilon u^{-1}v) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + c(\varepsilon)$$

De fato, denotando $k = 2n$ e as entradas da matriz da transformação $u^{-1}v$ por (a_{ij}), temos que:

$$id + \varepsilon u^{-1}v = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \dots & \varepsilon a_{1k} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \dots & \varepsilon a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon a_{k1} & \varepsilon a_{k2} & \dots & 1+\varepsilon a_{kk} \end{pmatrix}$$

A fórmula de Leibniz nos diz que para uma matriz $M = (m_{ij})_k$:

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{k} m_\sigma(i), i \right)$$

em que S_k é o grupo de permutação de k elementos, sendo sgn sua função sinal que retorna 1 para permutações pares e -1 para permutações impares.

Temos que a diagonal é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \in S_k$, então sua parcela no determinante segundo a fórmula de Leibniz é:

$$(1+\varepsilon a_{11})\dots(1+\varepsilon a_{kk}) = 1 + \varepsilon a_{11} + \dots \varepsilon a_{kk} + \varepsilon^2(\dots) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1}v) + \varepsilon^2(\dots)$$

As demais parcelas terão pelo menos dois termos fora da diagonal, pois há a transposição de pelo menos dois elementos, b e c, donde $\sigma(b) \neq b$ e $\sigma(c) \neq c$. A parcela fica então:

$$\varepsilon a_{\sigma(b),b} \varepsilon a_{\sigma(c),c}(\dots)$$

Ou seja, todas as parcelas, fora a diagonal, entram no termo $c(\varepsilon)$, seguindo a igualdade.

Etapa 2: Seja P uma projeção ortogonal em um subespaço com dimensão m de l_2^{2n} . Isto é, P é uma transformação linear tal que $P = P^2$. Usando essa última identidade, pode-se verificar que a diagonal principal é composta por apenas números 1's. Logo teremos que $\text{tr}(P) = m$ e pela etapa anterior, $\text{tr}(P) = \text{tr}(u^{-1}uP) \leq 2n||uP||$, donde

$$||uP|| \geq \frac{m}{2n} \tag{3.9}$$

Temos que $||u||$ é uma função contínua e que S_2, a esfera unitária em l_2^{2n}, é compacta. Logo, $||u|| = \sup\{||u(x)|| : x \in S_2\} = 1$ atinge o máximo em S_2 pelo Teorema de Weierstrass. Isto é, existe $y_1 \in S_2$ tal que $||u(y_1)|| = 1$.

Consideremos então a projeção ortogonal P_1 de l_2^{2n} no complemento ortogonal do gerado por y_1, denotado por $[y_1]^\perp$. Como $\dim[y_1] + \dim[y_1]^\perp = \dim l_2^{2n}$, temos que $\dim[y_1]^\perp = 2n - 1$, donde, pela desigualdade 3.9, $||uP_1|| \geq \frac{2n-1}{2n}$.

Por sua vez, $||uP_1||$ é contínuo, pois P_1 também é uma aplicação linear em dimensão finita, portanto contínua. Assim ela atinge máximo em S_2, isto é, existe $x_2 \in S_2$ tal que $||uP_1(x_2)|| = ||uP_1||$, que como vimos é maior ou igual a $\frac{2n-1}{2n}$.

Vamos agora obter $y_2 \in S_2$ tal que $y_2 \in [y_1]^\perp$ e $||u(y_2)|| = ||uP_1(y_2)|| \geq \frac{2n-1}{2n}$. Para isso, notemos que $x_2 \notin [y_1]$, senão teríamos $P_1(x_2) = 0$, o que entra em contradição com $||uP_1(x_2)|| \geq \frac{2n-1}{2n}$. Podemos escrever então $x_2 = a_1 + b_1$ em que $0 \neq a_1 \in [y_1]^\perp$ e $b_1 \in [y_1]$. Notemos que $P_1(x_2) = P_1(a_1 + b_1) = P_1(a_1) = a_1$, além disso, $||a_1|| \leq 1$ pois, como $a_1 \perp b_1$, temos:

$$1 = ||x_2||^2 = \langle x_2, x_2 \rangle = ||a_1||^2 + ||b_1||^2$$

Tomemos então $y_2 = \frac{a_1}{||a_1||}$. Daí $||y_2|| = 1$, $y_2 \in [y_1]^\perp$ e

$$||u(y_2)|| = ||uP_1(y_2)|| = \frac{||uP_1(a_1)||}{||a_1||} \geq ||uP_1(a_1)|| = ||uP_1(x_2)|| \geq \frac{2n-1}{2n},$$

como queríamos.

Seja P_2 a projeção ortogonal de l_2^{2n} no complemento ortogonal $[y_1, y_2]^\perp$. Então $||uP_2|| \geq \frac{2n-2}{2n}$. Como $||uP_2||$ é contínua no compacto S_2, ela atinge o máximo em S_2. Portanto, existe $x_3 \in S_2$ tal que $||uP_2(x_3)|| \geq \frac{2n-2}{2n}$. Podemos repetir o argumento anterior para obter $y_3 \in [y_1, y_2]^\perp$ tal que $||y_3|| = 1$ e $||u(y_3)|| \geq \frac{2n-2}{2n}$.

Após n passos, construímos vetores ortonormais $y_1, ..., y_n \in l_2^{2n}$. Seja $x_j = u(y_j)$ para $1 \leq j \leq n$. Então, $||x_j|| \geq \frac{1}{2}$. De fato:

$$||x_j|| = ||u(y_j)|| = ||uP_{j-1}(y_j)|| \geq \frac{2n - (j-1)}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

Ao mesmo tempo que, se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são escalares, então pela ortonormalidade dos vetores $y_1, ..., y_n$, temos:

$$\left\|\sum_{j\leq n}\lambda_j x_j\right\| = \left\|\sum_{j\leq n}\lambda_j u(y_j)\right\| \leq ||u|| \cdot \left\|\sum_{j\leq n}\lambda_j y_j\right\| = \left(\left\langle\sum_{j\leq n}\lambda_j y_j, \sum_{i\leq n}\lambda_i y_i\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{j\leq n}|\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Portanto:

$$\left\|\sum_{j\leq n}\lambda_j x_j\right\| \leq \left(\sum_{j\leq n}|\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

como queríamos.

□

Estamos interessados, como dito, em uma caracterização para séries incondicionalmente convergente. Em particular, queremos mostrar que uma sequência (x_n) em um espaço de Banach é incondicionalmente somável se, e somente se, é sinal somável. Ser **sinal somável** significa que $\sum \varepsilon_n x_n$ converge para toda escolha de sinal $\varepsilon_n = \pm 1$.

Não iremos demonstrar essa equivalência diretamente. No lugar, provaremos o seguinte teorema mais geral:

Teorema 3.4. *Para uma sequência (x_n) em um espaço de Banach E, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\sum x_n$ *é incondicionalmente convergente.*

2. (x_n) *é **desordenadamente somável**, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ existe um natural positivo n_ε tal que para qualquer subconjunto finito dos naturais cujo* $\min M > n_\varepsilon$, *temos que* $||\sum_{n\in M} x_n|| < \varepsilon$

3. (x_n) *é **subséries somável**, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente de inteiros positivos (k_n), $\sum_n x_{k_n}$ converge.*

4. (x_n) *é sinal somável.*

Demonstração. Para demonstrar as equivalências primeiro vamos mostrar a equivalência entre (1) e (2), depois iremos provar que (2), (3) e (4) são equivalentes:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Vamos argumentar pela contrapositiva, isto é, vamos supor que (2) não seja verdade e provar que isso implica que (1) não é verdade. Ao dizer que (2) é falso, estamos afirmando que, dada uma sequência $(x_n) \subset E$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > m$ e $||\sum_{k \in M} x_k|| \geq \delta$.

A partir disso, podemos construir uma sequência de subconjunto finitos dos naturais, (M_n), tal que $\max M_n < \min M_{n+1}$ e $||\sum_{k \in M_n} x_k|| \geq \delta$:

De fato, dado $n_0 = 1$, pela negação de (2), existe um subconjunto finito de $\mathbb{N}$, M_1 tal que $\min M_1 > n_0$ e $||\sum_{k \in M_1} x_k|| \geq \delta$. Como M_1 é finito, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 = \max M_1$. Novamente pela negação de (2) existe um subconjunto finito de $\mathbb{N}$, M_2 tal que $\min M_2 > n_1 = \max M_1$ e $||\sum_{k \in M_2} x_k|| \geq \delta$. Assim, podemos definir indutivamente a sequência desejada, uma vez que como M_k é finito, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k = \max M_k$, e existe um subconjunto finito $M_{k+1} \subset \mathbb{N}$ tal que $\min M_{k+1} > n_k = \max M_k$ e $||\sum_{i \in M_k} x_i|| \geq \delta$.

Agora, como queremos provar que não vale (1), vamos tomar uma permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\sigma([\min M_n, \min M_n + |M_n|)) = M_n$, onde $|M_n|$ denota o número de elementos em M_n. Mostraremos então que $\sum_i x_{\sigma(i)}$ não converge, para isso, vamos mostrar que suas reduzidas, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}$, não são de Cauchy (portanto não convergem).

Tomando δ como anteriormente, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que existem um número natural n e um subconjunto finito dos naturais M_n com $p = \min M_n > k$ e $q = \min M_n + |M_k| - 1 \geq p$, isto é, existem $p, q > k$ tais que:

$$||S_q - S_p|| = ||S_{\min M_n + |M_n| - 1} - S_{\min M_n}|| = \left|\left| \sum_{i=\min M_n}^{\min M_n + |M_n| - 1} x_{\sigma(i)} \right|\right| =$$

$$= \left|\left| \sum_{i \in \sigma([\min M_n, \min M_n + |M_n|)} x_i \right|\right| = \left|\left| \sum_{i \in M_n} x_i \right|\right| \geq \delta$$

donde as reduzidas não são de Cauchy, com queríamos. Dessa maneira mostramos que uma sequência que não é desordenadamente somável não pode ser incondicionalmente somável, o que conclui a implicação desejada por contraposição.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Seja (x_n) uma sequência no espaço de Banach E que é desordenadamente somável. Vamos mostrar que ela é incondicionalmente somável:

Fixado $\varepsilon > 0$, pela sequência ser desordenadamente somável, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para um subconjunto finito M dos naturais com $\min M > n_\varepsilon$ temos que $|| \sum_{n \in M} x_n|| < \varepsilon$.

Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação. Como σ é sobrejetora, para cada $i \in 1, ..., n_\varepsilon$ existe um $j \in \mathbb{N}$ tal que $i = \sigma(j)$. Como a permutação é injetora, existem n_ε elementos tal que isso ocorra, logo existe o máximo do conjunto dos j's que vamos denotar por m_ε. Dessa forma $\{1, ..., n_\varepsilon\} \subset \sigma(\{1, ..., m_\varepsilon\})$. Sejam $q > p > m_\varepsilon$. Como o conjunto $M' = \{\sigma(p), ..., \sigma(q)\}$ é subconjunto dos naturais, podemos pensar no seu mínimo pelo Princípio da Boa Ordenação. Temos então pela escolha de m_ε, que para todo $i \in M'$, $i > j$ tal que $j \in \{1, ..., n_\varepsilon\}$, donde $minM' > n_\varepsilon$. Portanto, podemos usar as informações do parágrafo anterior para concluir que $|| \sum_{n \in M'} x_n|| < \varepsilon$.

Notemos que para $\varepsilon > 0$, obtemos $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para $q > p > m_\varepsilon$ temos que:

$$\left|\left|\sum_{i=p}^{q} x_{\sigma(i)}\right|\right| = \left|\left|\sum_{i \in \{\sigma(p), ..., \sigma(q)\}} x_i\right|\right| = \left|\left|\sum_{i \in M'} x_i\right|\right| < \varepsilon$$

Isto é, as reduzidas $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}$ são de Cauchy. Como estamos em um espaço de Banach se as reduzidas convergem então a série $\sum_i x_{\sigma(i)}$ é convergente, isto é, $\sum x_n$ é incondicionalmente convergente.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Agora mostraremos que dada uma sequência $(x_n) \subset E$ desordenadamente somável, então ela é subséries somável. Para isso, iremos fixar $\varepsilon > 0$. Então, por (2), existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer subconjunto finito dos naturais, M, tal que $\min M > m_\varepsilon$, temos que $|| \sum_{n \in M} x_n|| < \varepsilon$.

Seja (k_n) uma sequência de naturais estritamente crescente. Então, $k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que, para $q > p > m_\varepsilon$, temos $|| \sum_{i=p}^{q} x_{k_n}|| < \varepsilon$.

Como $k_n \geq n$, temos que $k_q, ..., k_p \geq p > m_\varepsilon$, logo podemos tomar o subconjunto dos naturais $M = \{k_q, ..., k_p\}$ que é finito e tem $\min M > m_\varepsilon$. Segue que $||\sum_{i\in M} x_i|| < \varepsilon$. Ou seja, $||\sum_{i=p}^{q} x_{k_i}|| = ||\sum_{i\in M} x_i|| < \varepsilon$, como queríamos.

Provamos então que $\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}$ atende ao Critério de Cauchy. Portanto, $\sum\limits_{n} x_{k_n}$ converge, sendo k_n qualquer sequência estritamente crescente de naturais, isto é, (x_n) é subséries somável.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Seja $(x_n) \subset E$ uma sequência subsérie somável. Vamos mostrar que ela é sinal somável. Consideremos uma sequência (ε_n) de elementos 1 ou -1. Sejam $S^+ = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = 1\}$ e $S^- = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = -1\}$, ordenando os elementos de S^+ e S^-, temos que $\sum_{n\in S^+} x_n$ e $\sum_{n\in S^+} x_n$ convergem. Logo, para $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in N$ tal que para $q > p \geq n(\varepsilon)$, temos que,

$$\left\|\sum_{n\in M^+} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \left\|\sum_{n\in M^-} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sendo $M^+ = \{n \in S^+ : p \leq n \leq q\}$ e $M^- = \{n \in S^- : p \leq n \leq q\}$

Ainda podemos escrever:

$$\left\|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in M^+} x_n - \sum_{n\in M^-} x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n\in M^+} x_n\right\| + \left\|\sum_{n\in M^-} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, a série $\sum \varepsilon_n x_n$ atende ao Critério de Cauchy e, portanto, converge. Concluímos que (x_n) é sinal somável.

(4) $\Rightarrow$ (2)

Vamos novamente usar o argumento de contraposição. Iremos mostrar que se $(x_n) \subset E$ não for uma sequência desordenadamente somável então ela não será também sinal somável.

Consideremos então $\delta > 0$ e a sequência (M_k) construída na implicação (1) $\Rightarrow$ (2). Lembremos que podemos fazer isso pois, em ambas implicações, estamos considerando a negação de (2) e que (M_k) é uma sequência de subconjuntos finitos do conjunto natural tal que $\max M_k < \min M_{k+1}$ e $||\sum_{n\in M_k} x_n|| \geq \delta$.

Vamos tomar uma sequência (ε_n) que vale 1 se $n \in \cup_k M_k$ e -1 caso contrário. Então, para δ, temos que para qualquer $n(\delta) \in \mathbb{N}$, existe algum M_k tal que $p = \min M_k > n(\delta)$ e $q = \max M_k > n(\delta)$, isto é, existem $q > p > n(\delta)$ com:

$$\left|\left|\sum_{n=p}^{q}(1+\varepsilon_n)x_n\right|\right| = \left|\left|2\sum_{n\in M_k} x_n\right|\right| \geq \delta$$

Notemos que entre p e q podem existir naturais que não estão entre M_k, mas como nesses pontos $\varepsilon_n = -1$, eles acabam sendo excluídos do somatório sobrando apenas os termos em M_k.

Dessa forma, mostramos que as reduzidas de $\sum_n(1+\varepsilon_n)x_n$ não são de Cauchy, logo o somatório não converge. Como $\sum_{n=1}^{L}(1+\varepsilon_n)x_n = \sum_{n=1}^{L} x_n + \sum_{n=1}^{L} \varepsilon_n x_n$, para todo $L \in \mathbb{N}$, pelo menos uma das séries $\sum_n x_n$,$\sum_n \varepsilon_n x_n$ deve divergir. Se a primeira diverge, (x_n) não pode ser sinal somável (basta tomar $\varepsilon_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$) e se a segunda diverge também não será (pois ε_n é uma sequência de 1 e -1's). Isto é, em qualquer uma das possibilidades, (x_n) não é sinal somável, concluindo o resultado.

$\square$

Enfim, chegamos ao teorema principal deste capítulo:

Teorema 3.5 (Dvoretsky-Rogers). *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Dado $(\lambda_n) \in l_2$, existe sempre uma sequência incondicionalmente convergente (x_n) em E com $||x_n|| = |\lambda_n|$.*

Demonstração. Vamos fixar (λ_n), um elemento qualquer em l_2. Podemos escolher naturais $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n\geq n_k} |\lambda_n|^2 \leq 2^{-2k} \tag{3.11}$$

De fato, como $(\lambda_n) \in l_2$ temos que $\sum_n |\lambda_n|^2$ converge, isto é, se $S_n = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_j|^2$, então $S_n \to S$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n(\varepsilon)$ temos:

$$\sum_{i>n} |\lambda_i|^2 = |S - S_n| < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 2^{-2}$, existe $n_1 \in N$ tal que $\sum_{i\geq n_1} |\lambda_i| < 2^{-2}$. Para $\varepsilon = 2^{-4}$, existe $n_2 > n_1$ em $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{i\geq n_2} |\lambda_i| < 2^{-4}$. Como $2^{-2k} > 0$ para todo $k \in N$, podemos continuar tomando $\varepsilon = 2^{-2k}$ para todo k e obter $n_k > n_{k-1}$ tal que vale a desigualdade (3.11).

Como E tem dimensão infinita, não podemos usar diretamente o Lema 3.3. Por outro lado, podemos considerar subespaços de E com dimensão finita e obter uma sequência $(y_n)_{n\geq n_1}$ de vetores na bola unitária de E, B_E, $(||y_n|| \geq \frac{1}{2})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\left|\sum_{n=n_k}^{N} \alpha_n y_n\right|\right| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

para qualquer sequência de escalares (α_n) e qualquer N tal que $n_k \leq N < n_{k+1}$.

De fato, tomaremos E_1 subespaço de E de dimensão $2(n_2 - n_1)$. Como E_1 tem dimensão finita, ele é um espaço de Banach. Podemos aplicar então o Lema 3.3: existem $z_1, ..., z_{n_2-n_1}$ vetores em $B_{E_1} \subset B_E$, cada um com norma maior ou igual a meio, tal que para quaisquer escalares $\beta_1, ..., \beta_{n_2-n_1}$:

$$\left|\left|\sum_{j\leq n_2-n_1} \beta_j z_j\right|\right| \leq \left(\sum_{j\leq n_2-n_1} |\beta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vamos tomar então $y_{n_1} = z_1, y_{n_1+1} = z_2, ..., y_{n_2-1} = z_{n_2-n_1}$ e $\alpha_{n_1} = \beta_1, ..., \alpha_{n_2-1} = \beta_{n_2-n_1}$. Dessa maneira, teremos que:

$$\left|\left|\sum_{j\leq n_2-n_1} \beta_j z_j\right|\right| = \left|\left|\sum_{j=n_1}^{n_2-1} \alpha_j y_j\right|\right| \quad e \quad \left(\sum_{j\leq n_2-n_1} |\beta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=n_1}^{n_2-1} |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Notemos ainda que, pela construção que fizemos no Lema 3.3, a desigualdade (3.10) continua valendo tomando um número $N < n_2 - 1$ de vetores. Isso se deve ao fato dos vetores $y_1, ..., y_N$ continuarem sendo ortonormais, independente se pararmos antes do n-ésimo elemento. Portanto, podemos escrever:

$$\left|\left|\sum_{j=n_1}^{N} \alpha_j y_j\right|\right| \leq \left(\sum_{j=n_1}^{N} |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

O segundo passo é tomar um subespaço de E, E_2, com dimensão $2(n_3 - n_2)$. Novamente, esse será um espaço de Banach. Então, podemos aplicar o lema como no caso anterior. Vamos obter $z_1, ..., z_{n_3-n_2}$ vetores em $B_{E_2} \subset B_E$, todos de norma maior ou igual a meio, e tais que, para quaisquer escalares $\beta_1, ..., \beta_{n_3-n_2}$, teremos:

$$\left\| \sum_{j \leq n_1 - n_2} \beta_j z_j \right\| \leq \left(\sum_{j \leq n_3 - n_2} |\beta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Vamos tomar dessa vez $y_{n_2} = z_1, y_{n_2+1} = z_2, ..., y_{n_3-1} = z_{n_3-n_2}$ e também, $\alpha_{n_2} = \beta_1, \alpha_{n_2+1} = \beta_2, ..., \alpha_{n_3-1} = \beta_{n_3-n_2}$, de maneira que:

$$\left\| \sum_{j \leq n_3 - n_2} \beta_j z_j \right\| = \left\| \sum_{j=n_2}^{n_3-1} \alpha_j y_j \right\| \quad e \quad \left(\sum_{j \leq n_3 - n_2} |\beta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=n_2}^{n_3-1} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Novamente, podemos parar o somatório antes de $n_3 - 1$ e obter:

$$\left\| \sum_{j=n_2}^{N} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=n_2}^{N} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Podemos prosseguir dessa maneira tomando indutivamente E_k subespaço de E com dimensão $2(n_{k+1} - n_k)$ e obtendo $z_1, ..., z_{n_{k+1}-n_k}$ vetores em $B_{E_k} \subset B_E$ todos com norma maior ou igual a meio, tais que, para quaisquer escalares $\beta_1, ..., \beta_{n_{k+1}-n_k}$, teremos:

$$\left\| \sum_{j \leq n_{k+1} - n_k} \beta_j z_j \right\| \leq \left(\sum_{j \leq n_{k+1} - n_k} |\beta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De maneira que fazendo $y_{n_k} = z_1, ..., y_{n_{k+1}-1} = z_{n_{k+1}-n_k}$ e $\alpha_{n_k} = \beta_1, ..., \alpha_{n_{k+1}-1} = \beta_{n_{k+1}-n_k}$, além de considerar que podemos parar o somatório antes de $n_{k+1} - 1$ sem perdas, teremos que:

$$\left\| \sum_{n=n_k}^{N} \alpha_n y_n \right\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Isto é, obtemos a sequência (y_n) como desejada e que nos fornece a inequação 3.12 para todo $k \in \mathbb{N}$, como queríamos.

Vamos definir $x_j = \lambda_j \frac{y_j}{||y_j||}$ e tomar uma sequência qualquer (ε_j), $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, para todo j em $\mathbb{N}$. Usando a sequência (y_n) construída anteriormente, temos para $n_k \leq N < n_{k+1}$ que:

$$\left\| \sum_{j=n_k}^{N} \varepsilon_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n_k}^{N} \varepsilon_j \lambda_j \frac{y_j}{||y_j||} \right\| \leq \left(\sum_{j=n_k}^{N} \left| \frac{\varepsilon_j \lambda_j}{||y_j||} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aqui $(\frac{\varepsilon_n\lambda_n}{||y_n||})$ é uma sequência de escalares. Notemos ainda que, como $|\varepsilon_j|^2 = 1$ e $||y_j|| \geq \frac{1}{2}$, temos que:

$$\left|\frac{\varepsilon_j\lambda_j}{||y_j||}\right|^2 = \frac{|\varepsilon_j|^2 \cdot |\lambda_j|^2}{||y_j||^2} \leq 4|\lambda_j|^2$$

Logo,

$$\left|\left|\sum_{j=n_k}^{N} \varepsilon_j x_j\right|\right| \leq 2\left(\sum_{j=n_k}^{N} |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando a inequação (3.11), como $\sum_{j=n_k}^{N} |\lambda_j|^2 \leq \sum_{n\geq n_k} |\lambda_j|^2$, obtemos que:

$$\left|\left|\sum_{j=n_k}^{N} \varepsilon_j x_j\right|\right| \leq 2 \cdot (2^{-2k})^{\frac{1}{2}} = 2^{1-k} \tag{3.13}$$

Vamos mostrar a partir desse resultado que as reduzidas da série $\sum_n \varepsilon_n x_n$ são de Cauchy:

Notemos que, dado $p > m \geq n_1$, existem k *e* k', podendo ser iguais, tais que $n_k \leq m \leq n_{k+1}$ e $n_{k'} \leq p \leq n_{k'+1}$. Suponhamos $k' \neq k$. Então, podemos escrever:

$$\left|\left|\sum_{j=m}^{p} \varepsilon_j x_j\right|\right| = \left|\left|\sum_{j=m}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j + \sum_{j=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \varepsilon_j x_j + ... + \sum_{j=n_{k'}}^{p} \varepsilon_j x_j\right|\right|$$

$$\leq \left|\left|\sum_{j=m}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j\right|\right| + \left|\left|\sum_{j=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \varepsilon_j x_j\right|\right| + ... + \left|\left|\sum_{j=n_{k'}}^{p} \varepsilon_j x_j\right|\right|$$

Observemos que:

$$\left|\left|\sum_{j=m}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j\right|\right| = \left|\left|\left(\sum_{j=m}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j + \sum_{j=n_k}^{m-1} \varepsilon_j x_j\right) - \sum_{j=n_k}^{m-1} \varepsilon_j x_j\right|\right|$$

$$\leq \left|\left|\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j\right|\right| + \left|\left|\sum_{j=n_k}^{m-1} \varepsilon_j x_j\right|\right|$$

E pela desigualdade 3.13, temos que:

$$\left|\left|\sum_{j=m}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j\right|\right| < 2^{2-k}$$

Pela desigualdade anterior e novamente 3.13, obtemos por fim:

$$\left|\left|\sum_{j=m}^{p} \varepsilon_j x_j\right|\right| < 2^{2-k} + 2^{-k} + ... + 2^{1-k'} = 2^{2-k} + \sum_{j=k}^{k'-1} \frac{1}{2^j}$$

Sabemos que $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. Logo, pelo Critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq n_1(\varepsilon)$, temos que $\sum_{j=k}^{k'-1} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Também sabemos que $2^{2-k} \to 0$, logo existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ para $k \geq n_2(\varepsilon)$ temos $||2^{2-k}|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, se tomarmos m tal que $n_k \leq m < n_{k+1}$ e $k \geq \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, teremos que:

$$\left|\left|\sum_{j=m}^{p} \varepsilon_j x_j\right|\right| < \varepsilon,$$

como queríamos.

Concluímos que a série $\sum \varepsilon_n x_n$ converge. Logo, pelo Teorema 3.4, a série $\sum x_n$ é incondicionalmente convergente. Por outro lado, construímos a sequência $(x_n) = \left(\lambda_n \frac{y_n}{||y_n||}\right)$, daí $||x_n|| = |\lambda_n|$.

$\square$

Dessa maneira em um espaço de Banach de dimensão infinita, basta tomar uma sequência que está em l_2 mas não em l_1 para que tenhamos uma série que converge incondicionalmente mas não absolutamente.

4 SÉRIES COM SOMA INVARIANTE E A CONVERGÊNCIA INCONDICIONAL

O foco deste capítulo é remontar aos estudos de C. W. McArthur, [8]. Assim como H. Hardwiger, McArthur explorou a ideia de que, dada uma série convergente, mesmo se os rearranjos que convergem dessa série tiverem a mesma soma, ela não precisa ser incondicionalmente convergente.

Na primeira seção, iremos definir formalmente essas séries como sequências com soma invariante. Mostraremos que o conjunto das sequências incondicionalmente somáveis está contido no conjunto das sequências com soma invariante.

Na segunda seção, iremos introduzir as sequências fracamente incondicionalmente somáveis. Iremos mostrar que as séries incondicionalmente somáveis estão contidas nesse conjunto mas não o contrário. Por fim, poderemos provar o resultado principal desse capítulo: existem séries com soma invariante que não são incondicionalmente convergentes.

Aqui, iremos considerar sempre E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$. Vamos também denotar por $U(E)$ o conjunto das sequências incondicionalmente somáveis.

4.1 Sequências com Soma Invariante

Definição 4.1. Seja (x_n) uma sequência em E. (x_n) tem **soma invariante** se $\sum x_n = x$ e dada uma permutação σ de $\mathbb{N}$ que faz $\sum x_{\sigma(n)}$ convergir, teremos que $\sum x_{\sigma(n)} = x$. Denotamos o conjunto das funções com soma invariante por $IS(E)$.

Nosso objetivo nesta seção é relacionar as séries com soma invariante com as séries incondicionalmente convergentes. Podemos partir do seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Se $\sum x_n$ é uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado, então para cada permutação σ de $\mathbb{N}$, temos que $\sum x_{\sigma(n)} = \sum x_n$.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum x_n$ seja uma série em um espaço de Banach incondicionalmente convergente e σ seja uma permutação de $\mathbb{N}$ tais que $\sum x_n$ e $\sum x_{\sigma(n)}$ convergem para limites diferentes. Vamos mostrar que existe outra permutação σ' de $\mathbb{N}$ tal que $\sum x_{\sigma'(n)}$ não converge. Dessa forma, $\sum x_n$ não seria incondicionalmente convergente demonstrando o resultado. Dado $\varepsilon > 0$, como $\sum x_{\sigma(n)}$ converge, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $p_1 \geq n(\varepsilon)$ temos:

$$\left\| \sum x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{p_1} x_{\sigma(n)} \right\| < \varepsilon$$

Analogamente, pela convergência de $\sum x_n$ existe $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq q(\varepsilon)$, temos

$$\left\| \sum x_n - \sum_{n=1}^{m} x_n \right\| < \varepsilon$$

Além disso, podemos tomar q_1 tal que $q_1 \geq q(\varepsilon)$ *e* $q_1 \geq \sigma(n)$ para $1 \leq n \leq p_1$. Daí $\{\sigma(1), ..., \sigma(p_1)\} \subset \{1, ..., q_1\}$ e

$$\left\| \sum x_n - \sum_{n=1}^{q_1} x_n \right\| < \varepsilon$$

Prosseguindo dessa maneira, existe também $p_2 \geq n(\varepsilon)$ tal que $\{1, ..., q_1\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(p_2)\}$ e

$$\left\| \sum x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{p_2} x_{\sigma(n)} \right\| < \varepsilon$$

Repetindo o processo, construímos duas sequências (p_n) e (q_n).

Vamos agora considerar a permutação σ' que lista $\mathbb{N}$ da seguinte maneira: tomamos $\sigma(1), ..., \sigma(p_1)$, depois tomamos os elementos de $1, ..., q_1$ que ainda não foram listados, depois tomamos os elementos de $\sigma(1), ..., \sigma(p_2)$ que ainda não foram listados, assim por diante.

Denotaremos as reduzidas de $\sum x_{\sigma'(n)}$ por $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_{\sigma'(n)}$. Temos então que

$$S_{p_1} = \sum_{n=1}^{p_1} x_{\sigma'(n)} = \sum_{n=1}^{p_1} x_{\sigma(n)}$$

$$S_{p_2} = \sum_{n=1}^{p_2} x_{\sigma(n)}$$

$$\vdots$$

$$S_{p_n} = \sum_{n=1}^{p_n} x_{\sigma(n)}$$

e

$$S_{q_1} = \sum_{n=1}^{q_1} x_{\sigma'(n)} = \sum_{n=1}^{q_1} x_n$$

$$\vdots$$

$$S_{q_n} = \sum_{n=1}^{q_n} x_n$$

Notemos que dessa maneira, a subsequência das reduzidas $S_{p_1}, ..., S_{p_n}, ...$ converge para $\sum x_{\sigma(n)}$ enquanto a subsequência das reduzidas $S_{q_1}, ..., S_{q_n}, ...$ converge para $\sum x_n$. Como os valores de convergência são distintos, a sequência das reduzidas diverge, donde $\sum x_{\sigma'(n)}$ diverge, concluindo o resultado.

□

A partir desse resultado podemos concluir o seguinte:

Corolário 4.3. *Seja $\sum x_n$ uma série incondicionalmente convergente, então ela também tem soma invariante. Isto é, $U(E) \subset IS(E)$.*

Demonstração. É claro que sendo incondicionalmente convergente existe $x \in E$ tal que $\sum x_n = x$. Além disso, dada uma permutação σ de $\mathbb{N}$ temos que $\sum x_{\sigma(n)}$ converge e pelo resultado acima, temos que $\sum x_{\sigma(n)} = x$, o que nos diz que a série (x_n) tem soma invariante. □

Esta inclusão é válida para espaços de Banach de qualquer dimensão, mas não podemos garantir que $IS(E) \subset U(E)$ sempre. O contra-exemplo será dado na próxima seção.

Ainda assim, para espaços de Banach de dimensão finita, podemos garantir a igualdade como mostraremos a seguir:

Proposição 4.4. *Seja E um espaço de dimensão finita. Então, $IS(E) = U(E)$.*

Demonstração. Para esta prova, usaremos o seguinte resultado derivado do Teorema de Levy-Steinitz:

Lema 4.5. *Seja $\sum x_n$ uma série em $\mathbb{K}^m$. Se existe $w \in \mathbb{K}^m$ tal que a parte positiva e a parte negativa de $\sum \langle x_n | w \rangle$ convergem (aqui $\langle x_n | w \rangle$ é o produto interno de*

x_n com w), então o conjunto das somas dos rearranjos convergentes dessa série é $x + M$, onde x a soma de algum rearranjo e M o complemento ortogonal do conjunto $\{w \in \mathbb{K}^m :$ partes positiva e negativa de $\sum \langle x_n | w \rangle < \infty\}$.

Para mais detalhes, olhar [11], [12].

Vamos denotar o conjunto das somas dos rearranjos convergentes como SR e o conjunto $\{w \in \mathbb{K}^m :$ partes positiva e negativa de $\sum \langle x_n | w \rangle < \infty\}$ como K. Além disso, e_j vai denotar o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{K}^m$.

Segue então a demonstração desta proposição para o caso em que $E = \mathbb{K}^m$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad ou \quad \mathbb{R}$:

Seja (x_n) uma sequência com soma invariante em E. Suponhamos que (x_n) não seja incondicionalmente somável. Como E tem dimensão finita, então ela também não é absolutamente somável. Escrevendo $x_k = (x_1^{(k)}, ..., x_m^{(k)})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, deve existir algum $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|$ diverge. Como $x_j^{(k)} = \langle x_k | e_j \rangle$, podemos dizer que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x_k | e_j \rangle|$ diverge.

Indicando por (p_k) e (q_k) as partes positiva e negativa de $(\langle x_k | e_j \rangle)_k$, respectivamente, temos:

$$|\langle x_k | e_j \rangle| = p_k + q_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

sendo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x_k | e_j \rangle|$ divergente, temos que $\sum_k p_k$ diverge ou $\sum_k q_k$ diverge. Assim, $e_j \notin K$.

Lembrando que $\mathbb{K}^m = K \bigoplus K^{\perp}$, então podemos escrever $e_j = w + v$, com $v \neq 0$, onde $w \in K$ e $v \in K^{\perp}$. Dessa maneira, $M = K^{\perp} \neq \{0\}$.

Pelo Lema 4.5, temos que $SR = x + M$, onde $x = \sum_n x_n$, com $M \neq \{0\}$. Assim, existe uma permutação σ de $\mathbb{N}$ tal que $\sum x_{\sigma(n)} = \alpha \neq x$, o que contradiz o fato de que (x_n) é de soma invariante.

Portanto (x_n) é incondicionalmente convergente.

Por fim, seja E espaço normado sobre $\mathbb{K}$ de dimensão m. Garantimos, por isomorfismo, que toda série que converge em $\mathbb{K}^n$ continua convergindo em E, concluindo a demonstração.

□

4.2 Sequências Fracamente Incondicionalmente Somáveis

Definição 4.6. Seja (x_n) uma sequência em E. Dizemos que a sequência (x_n) é **fracamente incondicionalmente somável** se para cada $\phi \in E'$ temos $\sum |\phi(x_n)|$ converge. Denotamos o conjunto das sequências fracamente incondicionalmente somáveis por $B(E)$.

Como na seção anterior, queremos verificar as inclusões entre o conjunto das séries fracamente incondicionalmente convergentes e incondicionalmente convergentes. Além disso, também iremos obter uma outra caracterização bastante útil, que será utilizada mais a frente. Para ambos os casos vamos partir do seguinte teorema inspirado no Teorema 6 da página 44 do livro [6]:

Teorema 4.7. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço de Banach E. São equivalentes:*

1. *$(x_n) \in B(E)$;*
2. *Para qualquer sequência $(t_n) \in c_0$ temos que $\sum_n t_n x_n$ converge;*
3. *Dado F subconjunto finito de $\mathbb{N}$, temos que* $\sup\{||\sum_{n\in F} x_n||\} < \infty$

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2)

Suponhamos que $(x_n) \in B(E)$ e seja (t_n) uma sequência em c_0. Queremos mostrar que $\sum_n t_n x_n$ converge. Como estamos em um espaço de Banach, basta que as reduzidas dessa sequência sejam de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $p > m \geq n(\varepsilon)$ queremos que $||\sum_{n=m}^{p} t_n x_n|| < \varepsilon$. Para demonstrar esse fato, vamos iniciar usando o Corolário 2.9 que nos diz que:

$$\left|\left|\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right|\right| = \sup\left\{\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| : \phi \in E' \text{ e } ||\phi|| \leq 1\right\} \tag{4.1}$$

Agora focaremos em mostrar que $\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| < \varepsilon$. Para isso, vamos definir a seguinte função auxiliar: $T : E' \to l_1$ dada por $T(\phi) = (\phi(x_n))_n = (\phi(x_1), \phi(x_2), ..., \phi(x_n), ...)$. Notemos que ela está bem definida pois, por hipótese, $(x_n) \in B(E)$, isto é, dado $\phi \in E'$ temos que $\sum_n |\phi(x_n)| < \infty$, que é o mesmo que dizer que $(\phi(x_n))_n \in l_1$. Vamos supor que vale a seguinte afirmação:

Afirmação 1: T é limitada.

Vamos denotar as bolas unitárias de E' e c_0 por $B_{E'}$ e B_{c_0}. Sejam $\phi \in B_{E'}$ e $(t_n) \in B_{c_0}$. Usando a linearidade da ϕ, podemos escrever:

$$\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| = \left|\sum_{n=m}^{p} t_n \phi(x_n)\right| \leq \sum_{n=m}^{p} |t_n| \cdot |\phi(x_n)| \leq \sum_{n=m}^{p} |\phi(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\phi(x_n)|$$

Notemos que o último termo é a norma em l_1 de $(\phi(x_n))_n$. Vamos denotá-la por $||\cdot||_1$. Além disso, por ser limitada, $||T|| = \sup_{\phi \in B_{E'}}\{||(T(\phi)||_1\} = \sup_{\phi \in B_{E'}}\{||(\phi(x_n)_n)||_1\}$. Com isso, temos que:

$$\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| = ||(\phi(x_n))_n||_1 \leq \sup_{\phi \in B_{E'}}\{||(\phi(x_n)_n)||_1\} = ||T||$$

Resumindo, dado $\phi \in B_{E'}$ e $(t_n) \in B_{C_0}$, para $m \leq n \leq p$, temos que:

$$\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| \leq ||T|| \tag{4.2}$$

Podemos expandir esse resultado para uma sequência qualquer em c_0. Para isso, dada $(t_n) \in c_0$, basta aplicarmos a desigualdade 4.2 em $s_n = \frac{t_n}{||(t_n)_{n=m}^{\infty}||}$, pois nesse caso, para $m \leq n \leq p$ temos que $s_n \in B_{c_0}$. Daí teríamos:

$$\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| \leq ||T|| \cdot ||(t_n)_{n=m}^{\infty}||$$

Como $t_n \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n(\varepsilon)$ temos que $|t_n)| < \frac{\varepsilon}{||T||}$. Logo, temos $\sup_{n \geq n(\varepsilon)} |t_n| < \dfrac{\varepsilon}{||T||}$ e para $p > m \geq n(\varepsilon)$:

$$\left|\phi\left(\sum_{n=m}^{p} t_n x_n\right)\right| \leq ||T|| \cdot ||(t_n)_{n=m}^{\infty}|| < ||T|| \frac{\varepsilon}{||T||} = \varepsilon$$

Daí, por 4.1, temos que $\left|\left|\sum\limits_{n=m}^{p} t_n x_n\right|\right| < \varepsilon$. Concluimos que a série converge pelo Critério de Cauchy.

Dem. Afirmação 1:

Queremos mostrar que T é limitada. Para isso, vamos usar o Teorema 2.7, isto é, basta provar que ela é linear e contínua e assim ela será limitada.

Sejam $\phi, \psi \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então $T(\phi + \alpha\psi) = ((\phi + \alpha\psi)(x_n))_n$. Como $\phi(x_n), \psi(x_n) \in l_1$ por hipótese, ambas convergem para zero. Logo podemos, escrever $T(\phi + \alpha\psi) = (\phi(x_n))_n + \alpha(\psi(x_n))_n = T(\phi) + \alpha T(\psi)$, donde T é linear.

Agora, vamos provar que o gráfico de T é fechado, isto é, toda sequência que converge no gráfico de T, irá convergir para um elemento no gráfico de T. Seja então $(\phi_m, T(\phi_m))$ uma sequência qualquer no gráfico de T que converge para (ϕ, h). Basta mostrarmos que $h \in T(E')$.

Por hipótese temos que $\phi_m \to \phi$, logo como a convergência na norma implica convergência pontual, temos $\phi_m(x_n) \to \phi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que a sequência da esquerda é a n-ésima coordenada de $T(\phi_m)$ e a da direita é a n-ésima coordenada de $T(\phi)$. Sabemos que $T(\phi_m)$ converge para h, logo, pela unicidade do limite temos que $h = T(\phi)$, ou seja, $h \in T(E')$ como queríamos.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Vamos novamente usar uma função para auxiliar nossa demonstração. Definimos $T : c_0 \to E$ por $T((t_n)) = \sum_n t_n x_n$. Notemos que T está bem definida, já que por hipótese, dada $(t_n) \in c_0$ temos que $\sum t_n x_n < \infty$.

Afirmação 2: T é limitada.

Considerando a afirmação, que será provada posteriormente, temos que os valores de T em B_{c_0}, são limitados. Isto é, $||T((t_n))|| \leq ||T|| \cdot ||(t_n)|| \leq ||T||$ quando $(t_n) \in B_{c_0}$.

Consideremos então F um subconjunto finito de $\mathbb{N}$, digamos $F = \{n_1, ..., n_p\}$. Se tomarmos uma sequência (s_n) em que as posições $n_1, ..., n_p$ são 1 ou -1 e as demais zero, temos que $(s_n) \in c_0$. Logo:

$$\left|\left|\sum_{n\in F} \pm x_n\right|\right| = \left|\left|\sum_n s_n x_n\right|\right| = ||T((s_n))|| \leq ||T||$$

Daí, concluímos que:

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n\in F}\pm x_n\right\| : F\subset\mathbb{N}\ finito\right\}<\infty$$

Como queríamos.

Dem. Afirmação 2: Queremos mostrar que T é limitada e usaremos a mesma estratégia anterior, provando pelo Teorema do Gráfico Fechado.

Comecemos então mostrando a linearidade. Dadas $(t_n),(s_n)\in c_0$ e $\alpha\in\mathbb{K}$, temos que $T((t_n)+\alpha(s_n))=\sum(t_n+\alpha s_n)x_n$. Por hipótese $\sum t_nx_n,\sum s_nx_n$ convergem. Então, podemos escrever: $T((t_n)+\alpha(s_n))=\sum t_nx_n+\alpha\sum s_nx_n=T(t_n)+\alpha T(s_n)$, portanto T é linear.

Agora mostremos que o gráfico de T é fechado:

Para isso, vamos considerar uma sequência de elementos de c_0 que denotaremos por (γ_k), onde $\gamma_k=(t_n^{(k)}),\quad k\in\mathbb{N}$. Vamos supor ainda a convergência $\gamma_k\to\gamma$, em que $\gamma=(t_n)$. Podemos esquematizar da seguinte maneira:

$$\begin{gathered}\gamma_1=(t_1^{(1)},t_2^{(1)},...,t_n^{(1)},...)\\ \gamma_2=(t_1^{(2)},t_2^{(2)},...,t_n^{(2)},...)\\ \vdots\\ \gamma_n=(t_1^{(n)},t_2^{(n)},...,t_n^{(n)},...)\\ \downarrow\\ \gamma=(t_1,t_2,...,t_n,...)\end{gathered}$$

Além disso, vamos supor também que $T((\gamma_k))\to h$. Queremos mostrar que $h=T(\gamma)$.

Observemos que:

$$T(\gamma_k)=T((t_n^{(k)}))=\sum_n t_n^{(k)}x_n\to\sum_n t_nx_n$$

como $T((\gamma_k))\to h$, pela unicidade do limite, temos que $h=\sum_n t_nx_n=T((t_n))$, isto é, $h=T(\gamma)$ como esperávamos. Usando o Teorema do Gráfico Fechado, temos que T é limitada.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Suponhamos que $\sup\left\{\left\|\sum_{n\in F} \pm x_n\right\| : F \subset \mathbb{N}\ finito\right\} < \infty$. Digamos que seja menor que C. Seja ϕ um funcional qualquer em $B_{E'}$. Então, dado F subconjunto finito de $\mathbb{N}$, temos que:

$$\left|\phi\left(\sum_{n\in F} \pm x_n\right)\right| \leq ||\phi|| \cdot \left|\left|\sum_{n\in F} \pm x_n\right|\right| \leq C$$

daí $\left|\phi\left(\sum_{n\in F} \pm x_n\right)\right| \leq C$. Como os sinais são arbitrários, podemos escolhê-los de maneira que $\sum_{n\in F} |\phi(x_n)| \leq C$. Portanto para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} |\phi(x_i)| \leq C$$

Por propriedade do limite, podemos concluir que, para $\phi \in B_{E'}$:

$$\sum_n |\phi(x_n)| \leq C$$

Agora para uma $\phi \in E'$, temos que $\frac{\phi}{||\phi||} \in B_{E'}$, donde:

$$\sum_n \left|\frac{\phi(x_n)}{||\phi||}\right| \leq C \Rightarrow \frac{1}{||\phi||} \sum_n |\phi(x_n)| \leq C$$

Por fim,

$$\sum_n |\phi(x_n)| \leq C||\phi|| < \infty$$

donde $(x_n) \in B(E)$, como queríamos. $\square$

A equivalência entre 1 e 3 será utilizada como uma caracterização de sequência fracamente incondicionalmente convergentes. Já a equivalência de 1 e 2 usaremos para mostrar que $U(E) \subset B(E)$, mas para isso precisamos ainda de um segundo resultado:

Teorema 4.8 (Teste do Multiplicador Limitado)**.** *Em um espaço de Banach qualquer E, a série $\sum x_n$ é incondicionalmente convergente se, e somente se, a série $\sum b_n x_n$ converge para todo $(b_n) \in l_\infty$.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum b_n x_n$ convirja para toda sequência $(b_n) \in l_\infty$. Notemos que as sequências cujos elementos são -1 ou 1 pertencem a l_∞, com isso,

(x_n) é sinal somável. Portanto, como vimos no Teorema 3.4, $\sum x_n$ é incondicionalmente convergente.

Para o outro lado, suponhamos que $\sum x_n$ seja incondicionalmente convergente. Dado $b = (b_n) \in l_\infty$, vamos mostrar que $\sum x_n b_n$ converge:

Como E é um espaço de Banach, basta mostrar que as reduzidas são de Cauchy. Pelo Corolário 2.9, dado $y = \sum_{k=m}^{n} b_k x_k \in E$, temos que

$$||y|| = \sup \left\{ \left| \phi \left(\sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right) \right| : \phi \in E' e \, ||\phi|| \leq 1 \right\}$$

Notemos que:

$$\left| \phi \left(\sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right) \right| = \left| \sum_{k=m}^{n} b_k \phi\left(x_k\right) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |b_k| \left|\phi\left(x_k\right)\right| \leq \sum_{k=m}^{n} ||b||_\infty \left|\phi\left(x_k\right)\right|$$

$$= ||b||_\infty \sum_{k=m}^{n} \left|\phi\left(x_k\right)\right|$$

Dessa forma,

$$||y|| \leq ||b||_\infty \sup \left\{ \sum_{k=m}^{n} \left|\phi\left(x_k\right)\right| : \phi \in E' e \, ||\phi|| \leq 1 \right\}$$

Vamos fixar ϕ na bola unitária de E', que vamos denotar por $B_{E'}$. Então

$$\sum_{k=m}^{n} |\phi(x_k)| = \sum_{k=m}^{n} |Re \ \phi(x_k) + iIm \ \phi(x_k)| \leq \sum_{k=m}^{n} |Re \ \phi(x_k)| + |Im \ \phi(x_k)|$$

Vamos mostrar que podemos limitar o último termo.

Agora retomemos o fato de que (x_n) é incondicionalmente somável. Daí pelo Teorema 3.4, (x_n) é desordenadamente somável, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer conjunto $M \subset \mathbb{N}$ finito, com $\min M > m_\varepsilon$, temos que $||\sum_{k \in M} x_k|| < \frac{\varepsilon}{4||b||_\infty}$.

Sejam $n > m > m_\varepsilon$. Vamos definir os seguintes conjuntos:

$$M^+ = \{m \leq k \leq n : Re \ \phi(x_k) \geq 0\}$$

$$M^- = \{m \leq k \leq n : Re \ \phi(x_k) < 0\}$$

Então
$$\sum_{k=m}^{n} |Re\ \phi(x_k)| = \sum_{k\in M^+} Re\ \phi(x_k) - \sum_{k\in M^-} Re\ \phi(x_k)$$
Como a parte real de uma função linear é linear, podemos escrever:

$$\sum_{k=m}^{n} |Re\ \phi(x_k)| = \sum_{k\in M^+} Re\ \phi(x_k) - \sum_{k\in M^-} Re\ \phi(x_k)$$

$$= Re\ \phi(\sum_{k\in M^+} x_k) - Re\ \phi(\sum_{k\in M^-} x_k) = \left|Re\ \phi(\sum_{k\in M^+} x_k)\right| + \left|Re\ \phi(\sum_{k\in M^-} x_k)\right|$$

Lembrando que $|Re\ \phi(x)| \leq |\phi(x)|$ e como ϕ é um operador contínuo, portanto limitado, temos $|\phi(x)| \leq ||\phi|| \cdot ||x|| \leq ||x||$. Logo:

$$\sum_{k=m}^{n} |Re\ \phi(x_k)| \leq \left|\left|\sum_{k\in M^+} x_k\right|\right| + \left|\left|\sum_{k\in M^-} x_k\right|\right|$$

Como observado, (x_n) é desordenadamente somável. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para $M \subset \mathbb{N}$ finito, com $\min M > m_\varepsilon$, como é o caso de M^+ e M^-, temos que $||\sum_{k\in M^-} x_k|| < \frac{\varepsilon}{4||b||_\infty}$, assim como para M^+, logo:

$$\sum_{k=m}^{n} |Re\ \phi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2||b||_\infty}$$

Por um processo análogo, podemos obter que $\sum_{k=m}^{n} |Im\ \phi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2||b||_\infty}$. Portanto:

$$\sum_{k=m}^{n} |\phi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{||b||_\infty}$$

Segue que

$$||y|| \leq ||b||_\infty \sup\left\{\sum_{k=m}^{n} |\phi\left(x_k\right)| : \phi \in E' e\, ||\phi|| \leq 1\right\} < \varepsilon$$

Isto é, as reduzidas da série $\sum b_k x_k$ são de Cauchy, donde essa série é convergente, com queríamos.

$\square$

Notemos que esse resultado poderia ser acrescentado ao Teorema 3.4 e assim, poderíamos considerar como uma opção para obtermos definições equivalentes à de séries incondicionalmente convergentes em dimensão infinita, uma vez que não temos a desejada equivalência com as séries absolutamente convergentes.

Voltando ao foco dessa seção, com o Teorema 4.7 e o resultado acima, podemos obter a seguinte inclusão:

Corolário 4.9. *Se uma sequência (x_n) em E é incondicionalmente somável, então (x_n) é fracamente incondicionalmente somável. Isto é, $U(E) \subset B(E)$.*

Demonstração. Como (x_n) é incondicionalmente convergente, pelo Teorema 4.8, temos que, dada $(b_n) \in l_\infty$, então $\sum b_n x_n$ converge. Observemos que, dada $(t_n) \in c_0$, como $c_0 \subset l_\infty$, então $\sum t_n x_n$ converge. Daí, pelo Teorema 4.7, temos que (x_n) é fracamente incondicionalmente convergente. □

Resta-nos então perguntar se vale a outra inclusão, isto é, se $B(E) \subset U(E)$. A resposta é negativa e o seguinte exemplo ilustra uma sequência que é fracamente incondicionalmente somável mas não é incondicionalmente somável:

Exemplos 4.10. A sequência (e_n), onde e_n é o n-ésimo vetor de coordenada unitária, é fracamente incondicionalmente somável mas não é incondicionalmente somável.

De fato, quando tomamos uma sequência qualquer (t_n) em c_0, temos que

$$\left\|\sum_{n=k}^{m} t_n e_n\right\|_\infty = ||(0, ..., 0, t_k, t_{k+1}, ..., t_m, 0, ...)||_\infty = \sup_{k \le n \le m} |t_n|$$

Como $t_n \to 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \ge n(\varepsilon)$, $|t_n| < \varepsilon$. Tomando $m > k \le n(\varepsilon)$,

$$\left\|\sum_{n=k}^{m} t_n e_n\right\|_\infty = \sup_{k \le n \le m} |t_n| < \varepsilon$$

Dessa forma, a série atende ao Critério de Cauchy e, portanto, converge. Logo, pelo Teorema 4.7, temos que (e_n) é fracamente incondicionalmente somável.

Por outro lado, a série $\sum e_n$ não converge em c_0, logo não é incondicionalmente convergente.

Para responder nossa dúvida sobre se $IS(E) \subset U(E)$,o objetivo principal desse capítulo, vamos um pouco mais longe. Mostraremos no próximo resultado que, quando a dimensão do espaço é infinita, existe uma sequência com soma invariante que não é fracamente incondicionalmente somável. Dessa maneira, como temos a inclusão $U(E) \subset B(E)$, essa sequência também não poderá ser incondicionalmente convergente.

Teorema 4.11. *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

1. *E tem dimensão infinita;*

2. *$IS(E) - B(E) \neq \emptyset$;*

3. *$U(E) \subset IS(E)$ propriamente.*

Demonstração. (2) $\Rightarrow$ (3):

Por (2), existe uma sequência com soma invariante que não é fracamente incondicionalmente somável. Como $U(E) \subset B(E)$, teremos também que essa sequência não é incondicionalmente somável. Por outro lado, já sabemos que $U(E) \subset IS(E)$, logo podemos concluir que essa inclusão é própria.

(3) $\Rightarrow$ (1):

Se a dimensão de E é finita, então $U(E) = IS(E)$. Mas, por hipótese, temos que não vale essa igualdade. Então, pela contrapositiva, concluímos que a dimensão de E é infinita.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Para provarmos (2), considerando E um espaço de dimensão infinita, vamos dar um exemplo de sequência que tem soma invariante, mas não é fracamente incondicionalmente somável.

Consideremos a Proposição 2.5. Seja E_0 subespaço fechado de E. Iremos denotar sua base de Schauder unitária por $\beta = \{x(i) : i \in \mathbb{N}\}$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos o seguinte bloco em E_0:

$$B_k = \left\{ \left(\frac{x(k)}{k}, -\frac{x(k)}{k}, ..., \frac{x(k)}{k}, -\frac{x(k)}{k} \right) \right\}$$

em que B_k tem $2k^2$ termos para todo $k \in \mathbb{N}$.

Notemos que como $\frac{x(k)}{k}$ se repete k^2 vezes, temos que a soma das posições ímpares de B_k tem norma igual a k:

$$\left|\left|\frac{x(k)}{k} + ... + \frac{x(k)}{k}\right|\right| = \left|\left|k^2 \cdot \frac{x(k)}{k}\right|\right| = k$$

Na última igualdade, utilizamos a propriedade da base ser unitária.

Agora, construiremos, a partir dos blocos B_k, uma sequência $s \in E$. Para isso vamos tomar $s_1 = x(1), s_2 = -x(1), s_3 = \frac{x(2)}{2}, s_4 = -\frac{x(2)}{2}, ..., s_{10} = -\frac{x(2)}{2}, s_{11} = \frac{x(3)}{3}, ...$, isto é, tomaremos os elementos dos blocos $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ em ordem.

Vamos mostrar que s não é fracamente incondicionalmente somável.

Tomemos o conjunto F_n como as posições dos termos ímpares nos primeiros n blocos. Então, teremos $||\sum_{i\in F_n} s_i|| \leq 1 + 2 + ... + n$. Daí, teremos que $\sup_n \{||\sum_{i\in F_n} s_i||\}$ diverge. Como $\sup \{||\sum_{i\in F} s_i|| : F \subset \mathbb{N}\ finito\} \geq \sup_n \{||\sum_{i\in F_n} s_i||\}$, então o primeiro termo também diverge. Pelo Teorema 4.7, temos que (s_n) não é fracamente incondicionalmente convergente.

Por fim, resta mostrarmos que (s_n) tem soma invariante. Primeiro, observemos que a série correspondente converge para zero devido aos termos simétricos consecutivos. Com isso, precisamos mostrar apenas que, dado um rearranjo dessa série que converge, ele também irá para zero.

Seja então σ uma permutação de $\mathbb{N}$, tal que $\sum_n s_{\sigma(n)} = c$. Como E_0 é fechado, temos necessariamente que $c \in E_0$.

Afirmação: Existe uma sequência $(\phi_i) \in E'$ tal que $\phi_i(x(j)) = \delta_{ij}$ e para cada $x \in E_0$, podemos escrever: $x = \sum_i \phi_i(x)x(i)$.

Desta forma, podemos expressar $c = \sum_i \phi_i(c)x(i)$. Além disso,

$$\phi_i(c) = \phi_i\left(\sum_n s_{\sigma(n)}\right) = \sum_n \phi_i(s_{\sigma(n)})$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que $s_{\sigma(n)} = \frac{\pm x(j)}{j}$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Como $\phi_i(x(j)) = \delta ij$, temos que para $j \neq i$, $\phi_i(\frac{\pm x(j)}{j}) = 0$. Então, no final, estamos somando apenas os n tais que $s_{\sigma(n)} = \frac{\pm x(i)}{i}$, isto é, estamos somando todos os elementos de

$B_i = \{\frac{x(i)}{i}, -\frac{x(i)}{i}, ..., \frac{x(i)}{i}, -\frac{x(i)}{i}\}$. Como temos $2i^2$ termos, isto é, um número par de termos iguais com sinais alternados, a soma deles é zero.

Concluímos que $\phi_i(c) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Daí, $c = \sum_i \phi_i(c)x(i) = 0$, isto é, dada uma permutação σ de $\mathbb{N}$, $\sum_n s_{\sigma(n)} = 0$ e, portanto, a sequência (s_n) tem soma invariante.

Dem. Afirmação:

Já sabemos que E_0 usado na demonstração tem base de Schauder unitária, denotada por $\beta = \{x(i) : i \in \mathbb{N}\}$. Isto é, dado $x \in E_0$, existe (η_i) sequência de escalares tal que $x = \sum_i \eta_i x(i)$. Agora vamos observar alguns fatos:

1. Seja F o conjunto das sequências $y = (\eta_i)$ tal que $\sum_i \eta_i x(i)$ converge. Este é um espaço de Banach com a norma $||y|| = \sup_{n\geq 1} ||\sum_{i=1}^n \eta_i x(i)||$. Além disso, $||\eta_i x_i|| \leq 2||y||$.

2. A aplicação $U : F \to E_0$ dada por $U(y) = x = \sum_i \eta_i x(i)$ é limitada, pois $||U(y)|| \leq ||y||$. Além disso, U é uma aplicação bijetora. Logo pelo, Teorema da Aplicação Aberta 2.6, U^{-1} é limitado. Daí $||y|| \leq ||U^{-1}|| \cdot ||x||$

Para mais detalhes, olhar [7] p. 233. Voltando para a afirmação, seja $\phi_i : E_0 \to \mathbb{K}$ dada por $\phi_i(x) = \eta_i$, onde $x = \sum_i \eta_i x(i)$. Temos que ϕ_i é linear e limitada.

De fato, ϕ_i é limitada, pois

$$|\phi_i(x)| = |\eta_i| \leq \frac{2||y||}{||x(i)||} \leq \frac{2||U^{-1}|| \cdot ||x||}{||x(i)||}$$

Temos ainda que $\phi_i(x(j)) = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Podemos então escrever $x = \sum_i \phi_i(x)x(i)$.

□

REFERÊNCIAS

1 LIMA, Elon. **Espaços Métricos**. 3ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

2 BANACH, **S. Théorie des opérations linéaires**. Warszawa: Z Subwencji Funduszu Kultury, 1932.

3 DIESTEL, J.; JARCHOW, H.; TONGE, A. **Absolutely Summing Operators**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

4 DVORETSKY, A.; ROGERS, C.A. **Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces**. USA: Proc. N. A. S, v. 36, n.3, p.193-197, 1950.

5 LAGES, E. **Análise Real Volume 1**: Funções de uma variável. 8ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

6 DIESTEL, J. **Sequences and Series in Banach Space**: Graduate Texts in Mathematics . Nova York: Springer-Verlag, 1984.

7 BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional** . 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

8 MCARTHUR, C. W.**On Relationships Amongst Certain Spaces Of Sequences In An Arbitrary Banach Space**. Canadá: Canadian Journal of Mathematics, v. 8, p.192-197, 1956.

9 LAGES, E. **Curso de Análise vol.2**. 11ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

10 KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. USA: John Wiley and Sons, 1978.

11 ROSENTHAL, P. **The Remarkable Theorem of Levy and Steinitz**. EUA: Mathematical Association of America, v. 94, p.342-541, 1987.

12 STEINITZ, E. **Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe System**. Alemanha: Journal für die reine und angewandte Mathematik, v. 143, p.128-176, 1913.