UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

BACHAREL EM MATEMÁTICA

Pedro de Oliveira Emerick

Uma Introdução às Álgebras de Banach e O Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko

Juiz de Fora

2022

Pedro de Oliveira Emerick

Uma Introdução às Álgebras de Banach e O Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane de Andrade Mendes

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Emerick, Pedro de Oliveira.
Uma Introdução às Álgebras de Banach e O Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko / Pedro de Oliveira Emerick. – 2022.
87 f.

Orientadora: Cristiane de Andrade Mendes
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Bacharel em Matemática, 2022.

1. Álgebra de Banach. 2. Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko 3. Funcional Linear Multiplicativo. I. Mendes, Cristiane de Andrade, orient. II. Título.

Pedro de Oliveira Emerick

Uma Introdução às Álgebras de Banach e O Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Aprovada em 20 de janeiro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Cristiane de Andrade Mendes - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. André Arbex Hallack
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Willian Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho a meus familiares, amigos e todos que fizeram parte da minha jornada até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades para chegar até aqui e as pessoas que colocou em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Moisés e Sueli, pelo apoio nos momentos difíceis, as palavras de incentivo e todo o suporte. Agradeço também pelo exemplo de determinação e trabalho duro. Este trabalho não seria possível de outro modo.

Agradeço à Anna Júlia, minha namorada e companheira nos estudos, que dividiu comigo todos os momentos difíceis e, ao mesmo tempo, me ajudou a completar diversas passagens deste trabalho.

Agradeço a todos os professores que ajudaram em minha formação, acadêmica e humana. Agradeço em especial ao professor Rodrigo, meu professor do PIC Jr, e aos professores Marcelo Salomão, Luiz Colatto e Fábio, meus professores no CEFET, que me apresentaram a um novo mundo na matemática.

Agradeço à minha orientadora, Cristiane, que como minha professora de Análise I, orientadora de Iniciação Científica e agora orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso dedicou centenas de horas à minha formação universitária, me aconselhando e me guiando e, por fim, sendo parte fundamental da escrita deste trabalho. Agradeço também ao professor Willian, meu orientador de mestrado, que contribuiu com diversos conselhos e, além disso, diversas passagens desse texto foram inspiradas pelo seu curso de Tópicos de Álgebra.

Agradeço também a todos meus amigos e companheiros que dividiram comigo essa jornada, especialmente àqueles que me deram valiosas dicas na construção deste trabalho. Agradeço à OBMEP e seus programas, que introduziram milhares de jovens à matemática, eu incluso. Agradeço à Alexandra Elbakyan e todos aqueles que lutam pelo conhecimento livre, seria inviável fazer ciência de outro modo.

Por fim, agradeço a todos que não atrapalharam.

"Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts."

Mathematische Probleme - David Hilbert.

RESUMO

O estudo das álgebras de Banach se posiciona entre a análise e álgebra. Por isso, é um campo de trabalho bastante fértil e que permite a aplicação de métodos diversos para resolver problemas. Apresentamos neste trabalho uma introdução concisa às álgebras de Banach, explorando as definições basilares e alguns dos resultados centrais. Iniciamos apresentado os conceitos de álgebra e álgebra de Banach, depois exploramos a estrutura envolvendo álgebras com unidade e seus elementos invertíveis. Apresentamos a unitização de álgebras, permitindo estender parte da teoria de álgebras com unidade à álgebras sem unidade. Nos capítulos finais, exploramos a teoria espectral para álgebras complexas, o conceito de ideais e álgebras quocientes e finalizamos com o estudo dos funcionais lineares multiplicativos, que são funções que aplicam álgebras complexas no conjunto dos números complexos preservando todas as operações da álgebra. Buscamos apresentar as conexões entre ideais maximais da álgebra e o núcleo de funcionais lineares multiplicativos e apresentar o resultado central do trabalho, o Teorema de Gleason-Kahane-Zelakzo, trazendo uma caracterização de funcionais lineares multiplicativos em termos do espectro de elementos da álgebra. Esperamos com essa exposição despertar no leitor o interesse do estudo das álgebras de Banach, especialmente levando em conta as muitas interseções com diversos campos de estudo em análise, álgebra, física, dentre outros.

Palavras-chave: Álgebra de Banach. Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko. Funcional linear multiplicativo.

ABSTRACT

The study of Banach algebras lies between analysis and algebra. Therefore, it is a very fertile field of work that allows the application of diverse methods to solve problems. In this paper we present a concise introduction to Banach algebras, exploring the basic definitions and some of the central results. We begin by introducing the concepts of algebra and Banach algebra, then explore the structure involving unit algebras and their invertible elements. We introduce unitization of algebras, allowing us to extend some of the theory of unit algebras to unitless algebras. In the final chapters we explore spectral theory for complex algebras, the concept of ideals and quotient algebras, and we finish with the study of multiplicative linear functionals, which are functions that apply complex algebras to the set of complex numbers while preserving all the operations of the algebra. We seek to present the connections between maximal ideals of the algebra and the kernel of multiplicative linear functionals and to present the central result of the paper, the Gleason-Kahane-Zelakzo Theorem, bringing a characterization of multiplicative linear functionals in terms of the spectrum of elements of the algebra. We expect with this exposition to awaken in the reader the interest in the study of Banach algebras, especially considering the many intersections with various fields of study in analysis, algebra, physics, among others.

Keywords: Banach Algebra. Gleason-Kahane-Zelazko Theorem. Multiplicative Linear Functional.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conceito de álgebra reúne ao mesmo tempo axiomas fortes o bastante para permitirem o desenvolvimento de uma teoria rica e comuns o suficiente para possuir uma grande gama de aplicações. Muitos exemplos e conceitos importantes que possuem muitas aplicações, como divisores topológicos de zero ou as C*-álgebras utilizadas em mecânica quântica, não foram incluídas nesta exposição, visando tornar o trabalho mais conciso e, principalmente, exigir menos conhecimento prévio do leitor. Apesar disso, procuramos fazer uma exposição de exemplos suficientemente ampla para justificar o interesse em estudar álgebras de Banach.

O nome álgebra de Banach, em homenagem ao matemático polonês Stefan Banach, se deve às álgebras de Banach, como veremos, quando consideradas como espaços normados, serem completos, isto é, serem espaços de Banach. Na verdade, Stefan Banach nunca estudou álgebras de Banach e talvez um nome melhor fosse "álgebra de Gelfand" em homenagem ao trabalho pioneiro do matemático soviético Israil Gelfand. Embora nenhuma área da matemática seja contribuição de um único homem, um grande marco para o estabelecimento da álgebra de Banach como campo de estudo é a tese de doutorado do Gelfand em 1940 e seus trabalhos subsequentes, diversos dele com o também soviético Mark Naimark. Desse período, destacam-se os dois Teoremas de Representação de Gelfand-Naimark. Em 1956, Naimark publica o livro *"Normed Rings"* que é a primeira exposição da teoria como um todo da álgebra de Banach. Quatro anos após, o matemático americano Charles Rickart publica o livro *"General Theory of Banach algebras"* que se torna a referência para estudos futuros de álgebras de Banach.

Seguimos como referência principal o livro *Complete Normed Algebra* (1). Esse trabalho cobre aproximadamente as seções 1, 2, 3, 5, 9, 14 e 16, embora não as cubra completamente e contenha certos conteúdos que não são contemplados no livro de Bonsall e Duncan. Buscamos realizar uma exposição que ao mesmo tempo fosse sucinta, não necessitasse de conhecimentos prévios excessivos e que constituísse um primeiro contato amplo o suficiente com as álgebras de Banach.

Esperamos do leitor conhecimentos de álgebra linear em nível de graduação e conhecimentos básicos de números complexos, equivalentes a um curso introdutório de graduação ao assunto. Conhecimentos de álgebra a nível de graduação são úteis para entender mais profundamente certos aspectos do trabalho, mas em geral não necessários. Boa parte dos conceitos usuais da álgebra, como ideais, serão ressignificados nesse trabalho (e por isso definidos cuidadosamente, não exigindo conhecer previamente o conceito de ideal). Apenas conhecimentos pontuais de álgebra são necessários, como o Teorema Fundamental da Álgebra (que tipicamente também é apresentado em um curso de variáveis complexas). Também se espera conhecimentos de análise real, como a familiaridade com as ideias de supremo e ínfimo.

Também é necessário familiaridade com os conceitos básicos de espaços métricos e análise funcional, por exemplo, o equivalente aos primeiros dois capítulos de (3) ou o primeiro capítulo e as duas primeiras seções do segundo capítulo de (2) junto com algum conhecimento básico relativo aos primeiros capítulos de (7). De todos os pré requisitos, o único que não é normalmente visto a nível de graduação são certos conhecimentos básicos de análise funcional.

Entre conceitos de análise funcional que esperamos que o leitor esteja familiarizado estão:

1. métrica, norma (e o fato que toda norma induz uma métrica);

2. definições topológicas básicas como de conjunto aberto, fechado, compacto e suas caracterizações mais básicas (por exemplo, a caracterização de fechados por sequências);

3. sequências, séries e seus limites;

4. continuidade de funções, caracterização de continuidade por sequências e caracterização de continuidade pela imagem inversa de conjuntos abertos serem abertos;

5. normas equivalentes e o fato que induzem a mesma topologia, isto é, trocar entre normas equivalentes preserva a continuidade de todas as funções e convergência de todas as sequências;

6. sequências de Cauchy e espaços métricos completos (e espaços normados de Banach);

7. o fato que dado n espaços normados $X_1, X_2, \cdots, X_n$ então em $X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ as relações $||(a_1, a_2, \cdots, a_n)||_\infty = \max\{||a_1||, ||a_2||, \cdots, ||a_n||\}$ e $||(a_1, a_2, \cdots, a_n)||_1 = ||a_1|| + ||a_2|| + \cdots + ||a_n||$ definem normas em $X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$, que chamaremos de norma do máximo e norma da soma, respectivamente;

8. o fato que a norma do máximo e da soma são equivalentes; o fato que em um espaço normado X as operações são contínuas, isto é, a operação soma de $X \times X \to X$ e a operação multiplicação por escalar $X \times \mathbb{F} \to X$ são contínuas, considerando em $X \times X$ e em $X \times \mathbb{F}$ a norma do máximo ou da soma;

9. o fato que em $X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ considerado com a norma da soma ou do máximo, uma sequência converge se, e somente se, cada uma das sequências coordenadas converge.

10. o fato que se X e Y são espaços vetoriais normados, então se $T : X \to Y$ é linear, temos T contínua se, e somente se, $\sup_{||x||=1} ||T(x)|| < \infty$. Além disso, que

$||T|| = \sup_{||x||=1} ||T(x)||$ define uma norma no espaço vetorial das aplicações lineares de X em Y. Se $X = Y$, temos $||TS|| \leq ||T|| \cdot ||S||$, onde T e S são operadores lineares de X em X. Chamamos operadores lineares de limitados significando que a imagem da esfera unitária é limitada. Operadores lineares limitados são contínuos e vice-versa.

11. o fato que o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y é um espaço de Banach sempre que Y for um espaço de Banach. Em particular, quando $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$ temos o espaço dos funcionais lineares contínuos, que é sempre de Banach.

12. o fato que para todo espaço vetorial normado X existe um espaço de Banach Y e $\phi : X \to Y$, onde ϕ é um operador linear isométrico, tal que $\phi(X)$ é denso em Y. Chamamos tal Y de completamento de X (pois $\phi(X)$, que é uma cópia do X em Y, tem como fecho o espaço completo Y). Além disso, Y é único a menos de isomorfismos (de espaço vetorial) isométrico.

A lista acima funciona como um "checklist" para aferição se o conhecimento é suficiente e, ao mesmo tempo, para fixar algumas nomenclaturas. Alguns desses resultados são apresentados como exercícios em algumas referências da literatura.

Esse trabalho, como o título sugere, se propõe a ser uma introdução ao estudo de álgebras de Banach e não simplesmente uma apresentação do Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko. Desse modo, muito do apresentado não será diretamente utilizado em algum momento posterior, tendo entretanto objetivo de exposição de certos aspectos que consideramos importantes da teoria. Quanto à organização do trabalho, no capítulo 2 apresentamos as fundações da teoria. Apresentamos o que é uma álgebra, uma álgebra de Banach e demais conceitos básicos. Apresentamos em seguida as álgebras com unidade e um pouco da rica teoria envolvendo os elementos invertíveis de uma álgebra. Terminamos apresentando a unitização de uma álgebra, isto é, uma extensão de uma álgebra sem unidade para uma álgebra com unidade.

No capítulo 3 desenvolvemos alguns conceitos básicos da teoria espectral para álgebras de Banach. A exposição é sucinta para evitar o uso de alguns resultados mais pesados de análise funcional, mas cobre vários dos fatos mais importantes e úteis.

O capítulo 4 é o mais algébrico do texto, apresentando os ideais e álgebras quocientes. Um conceito de especial relevância é o de ideal maximal, que será retomado no último capítulo. Buscamos nesse capítulo fazer uma exposição bastante ampla, sem usar suposições como que as álgebras têm unidade ou são comutativas, o que por um lado tornaria a teoria mais simples, mas por outro bem menos geral.

O capítulo 5 tem como foco o estudo de funcionais lineares multiplicativos e suas diversas relações com o restante dos conceitos. O grande resultado desse capítulo, e do trabalho como um todo, é o Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko, um teorema de caracterização dos funcionais lineares multiplicativos em uma álgebra.

Um aspecto importante da teoria, e que buscamos expor, é o uso de ideias tipicamente algébricas e tipicamente analíticas intercaladas. Obtemos resultados algébricos a partir da análise, resultados analíticos a partir da álgebra e às vezes temos resultados que no seu próprio enunciado apresentam uma forte relação entre álgebra e análise. Se por um lado são mais técnicas a serem dominadas, por outro é um campo de estudo com amplo ferramental para formular e resolver problemas.

2 FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRAS DE BANACH

Nesse capítulo, lançamos as fundações de nossa discussão sobre álgebras de Banach, com as definições e resultados mais básicos. Apresentamos na primeira seção as definições de álgebra, álgebra normada e álgebra de Banach. Também definimos homomorfismos entre álgebras e isomorfismos entre álgebras normadas. Estabelecemos algumas propriedades básicas, como a existência e unicidade de uma álgebra de Banach que age como completamento para álgebras em geral. Finalizamos com uma série de exemplos que ilustram a teoria e mostram sua amplitude.

Na segunda seção, apresentamos o elemento unidade e discutimos algumas propriedades básicas da unidade e dos elementos invertíveis. Também introduzimos o conceito de raio espectral e mostramos um dos resultados mais úteis para álgebras de Banach, o Teorema 2.2.1, que nos garante que certos elementos são invertíveis e nos dá uma forma explícita para calcular inversas. Exploramos algumas propriedades do conjunto dos elementos invertíveis, como o fato de que é um conjunto aberto e que é um grupo topológico. Ao fim, introduzimos o exemplo das matrizes de elementos de uma álgebra, que exploraremos outras vezes ao longo deste trabalho.

Na terceira seção, apresentamos a unitização de álgebras, permitindo estender uma álgebra sem unidade a uma álgebra com unidade e o conceito de quasi-produto e quasi-inversa. Essas ferramentas permitirão que tratemos de álgebras em geral em ambientes que muitos autores preferem tratar apenas do caso particular com unidade, como a teoria espectral para elementos de uma álgebra que desenvolveremos no próximo capítulo. Nessa seção buscamos, essencialmente, explorar as relações algébricas do quasi-produto e quasi-inversas com as operações na unitização de uma álgebra.

2.1 ÁLGEBRA, ÁLGEBRA NORMADA E ÁLGEBRA DE BANACH

Ao longo dessa seção, $\mathbb{F}$ é o corpo $\mathbb{R}$ dos reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos.

Definição 2.1.1. Uma **álgebra** sobre $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial A sobre $\mathbb{F}$ junto com uma aplicação $(x, y) \to xy$ de $A \times A$ em A satisfazendo os axiomas abaixo, para todos $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{F}$:

(a) $x(yz) = (xy)z$;

(b) $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$;

(c) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

Observação 2.1.1. 1. O corpo $\mathbb{F}$ é chamado corpo de escalares de A. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, A é chamado de álgebra real e se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, de álgebra complexa.

2. A aplicação $(x, y) \to xy$ é chamada produto em A e o vetor xy de produto de x e y.

3. O axioma (a) da definição anterior afirma que A com seu produto é um semigrupo. O axioma (c) é equivalente a $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$ para todos $x, y \in A$ e todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Definição 2.1.2. Sejam E um conjunto, X um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, α um elemento de $\mathbb{F}$ e f, g aplicações de E em X. Existe uma definição natural de $f + g$, αf como aplicações de E em X dadas por: $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ e $(\alpha f)(s) = \alpha f(s)$ para todo $s \in E$.

Essa definição é chamada de definição **ponto a ponto da adição e multiplicação por escalar**. Analogamente, quando X é uma álgebra, podemos definir o **produto ponto a ponto** por $(fg)(s) = f(s)g(s)$ para todo $s \in E$.

Exemplo 2.1.1. Seja E um conjunto não vazio e seja A o conjunto de todas as aplicações de E em $\mathbb{F}$. Com a adição, multiplicação por escalar e produto ponto a ponto, A é uma álgebra.

Notação. Dados espaços vetoriais X, Y sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$, denotamos por $L(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares de X em Y com a adição e multiplicação por escalar ponto a ponto.

Exemplo 2.1.2. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. $L(X, X)$, com o produto definido pela composição $(ST)(x) = S(T(x))$ para todo $x \in E$, é uma álgebra, denotada por $L(X)$.

Observação 2.1.2. Seja A uma álgebra e dado $a \in A$, sejam λ_a, ρ_a as aplicações de A em A dadas por $\lambda_a(x) = ax$ e $\rho_a(x) = xa$ para todo $x \in A$. Os axiomas (b) e (c) na definição 2.1.1 são equivalentes às afirmações que $\lambda_a, \rho_a \in L(A)$. O axioma (a) é equivalente às identidades $\lambda_a\lambda_b = \lambda_{ab}$, $\rho_a\rho_b = \rho_{ba}$ e $\lambda_a\rho_b = \rho_b\lambda_a$ para todos $a, b \in A$.

Notação. Seja θ o vetor nulo da álgebra A sobre $\mathbb{F}$ e 0 o elemento nulo de $\mathbb{F}$. Já que A é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, temos $0x = \theta$ para todo $x \in A$. Portanto para qualquer $x \in A$: $x\theta = x(0\theta) = 0(x\theta) = \theta$ e $\theta x = (0\theta)x = 0(\theta x) = \theta$

Isto mostra que o produto de x com θ em ambos os lados é igual a θ que também é o resultado de multiplicar x pelo escalar 0. Por isso, denotaremos ambos os elementos nulos por 0.

Definição 2.1.3. Sejam A e B álgebras sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Um **homomorfismo** de A em B é uma aplicação $\phi \in L(A, B)$ tal que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todos $x, y \in A$.

Um **monomorfismo** de A em B é um homomorfismo injetor de A em B e um **isomorfismo** de A em B é um homomorfismo bijetor de A em B. As álgebras A e B são **isomorfas** se existe um isomorfismo de A em B.

Definição 2.1.4. Um **subsemigrupo** de uma álgebra A é um subconjunto S de A tal que $x, y \in S$ implica $xy \in S$. Uma **subálgebra** de A é um subespaço vetorial de A que também é um subsemigrupo de A.

Uma subálgebra B de uma álgebra A é ela mesma uma álgebra com o mesmo corpo de escalares e com o produto em B sendo a restrição à $B \times B$ do produto em A. De fato, B é fechado para a soma, multiplicação por escalar e produto e essas operações em B herdam as propriedades da Definição 2.1.1 das operações de A.

Exemplo 2.1.3. Seja A uma álgebra e dado $a \in A$ seja λ_a como na Observação 2.1.2. Então a aplicação $\lambda : A \to L(A)$ dada por $\lambda(a) = \lambda_a$ é um homomorfismo de A em $L(A)$ chamado de representação regular à esquerda de A em A.

Definição 2.1.5. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja A uma álgebra sobre $\mathbb{F}$. Uma **seminorma** (ou **pseudonorma**) em X é uma aplicação p de X em $\mathbb{R}$ tal que, para todos $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ temos:

(a) $p(x) \geq 0$,

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,

(c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Uma **norma** em X é uma seminorma p em X tal que

(d) $p(x) = 0 \iff x = 0$.

Quando p definida em uma álgebra A for uma seminorma satisfazendo a propriedade (e) abaixo diremos que p é uma **seminorma-álgebra**. Quando p for uma norma em A satisfazendo a propriedade (e) dizemos que p é uma **norma-álgebra**.

(e) $p(xy) \leq p(x)p(y)$.

Definição 2.1.6. Seja E um subconjunto de um espaço vetorial X sobre $\mathbb{F}$. Então E é dito **absolutamente convexo** se para todo $x, y \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ com $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ temos $\alpha x + \beta y \in E$. Dizemos que E é **absorvente** se, para todo $x \in X$, $\lambda x \in E$ para algum $\lambda > 0$. Dizemos que E é **radialmente limitado** se, para todo $x \in X \backslash \{0\}$, o conjunto $R_x = \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda x \in E\}$ é limitado ou vazio.

Definição 2.1.7. O **funcional de Minkowski** p_E de um subconjunto absorvente E de X é definido em X por

$$p_E(x) = \inf\{\lambda > 0; \lambda^{-1} x \in E\}$$

Proposição 2.1.1. *Seja p uma seminorma-álgebra em uma álgebra A. Então a bola unitária $\{x \in A; p(x) < 1\}$ e a bola unitária fechada $\{x \in A; p(x) \leq 1\}$ são ambas subsemigrupos absorventes e absolutamente convexos de A e são radialmente limitadas se p é uma norma-álgebra.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração para a bola unitária $E = \{x \in A; p(x) < 1\}$. A demonstração para a bola unitária fechada é análoga. Sejam $x, y \in \{x \in A; p(x) < 1\}$. Então
$p(xy) \leq p(x)p(y) < 1.1 = 1$, donde $xy \in \{x \in A; p(x) < 1\}$. Logo, a bola unitária é um subsemigrupo. Se $p(x) = 0$ temos $\lambda x \in E$ para todo $\lambda > 0$. Se $p(x) > 0$ então tomando $\lambda = \dfrac{1}{2p(x)} > 0$, temos λx na bola unitária. De fato,

$$p(\lambda x) = \frac{1}{2p(x)} p(x) = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, a bola unitária é absorvente. Sejam agora $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ com $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Então

$$p(\alpha x + \beta y) \leq p(\alpha x) + p(\beta y) = |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) < |\alpha| + |\beta| \leq 1,$$

pois $p(x), p(y) < 1$. Segue que $\alpha x + \beta y$ pertence a bola unitária em todos os casos, o que prova que a bola unitária é absolutamente convexa.

Supondo agora que p é uma norma-álgebra, então $x \neq 0$ implica $p(x) > 0$. Nesse caso, se $|\lambda| \geq \dfrac{1}{p(x)}$, temos $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \geq \dfrac{p(x)}{p(x)} = 1$, donde λx não pertence a bola unitária. Isto é, o conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda x \in E\}$ não tem elementos com módulo maior que $1/p(x)$. Daí segue que $\{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda x \in E\}$ é sempre limitado e, por definição, temos a bola unitária radialmente limitada. □

Reciprocamente à proposição acima, temos o próximo resultado.

Proposição 2.1.2. *Seja U um subsemigrupo absorvente e absolutamente convexo não vazio de uma álgebra A. Então, o funcional de Minkowski p_U é uma seminorma-álgebra em A e*

$$\{x \in A; p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \in A; p_U(x) \leq 1\}.$$

Se U também é radialmente limitado, então p_U é uma norma-álgebra em A.

Demonstração. Por definição do funcional de Minkowski, temos $p_U(x) \geq 0$ para todo $x \in A$. Isto prova a propriedade (a) da definição 2.1.5.

Para verificar a propriedade (b), sejam $\alpha \in \mathbb{F}$ e $x \in A$. Supomos primeiramente que $\alpha \neq 0$. Definimos $C := \{\lambda > 0; \lambda^{-1} x \in U\}$ e $B := \{\lambda > 0; \lambda^{-1}(\alpha x) \in U\}$. Vamos mostrar que $|\alpha| C = B$. Seja $\lambda \in C$, ou seja, $\lambda^{-1} x \in U$. Como $\left| \dfrac{\alpha}{|\alpha|} \right| = \dfrac{|\alpha|}{|\alpha|} = 1$ e U é absolutamente convexo, então $\dfrac{\alpha}{|\alpha|} \lambda^{-1} x \in U$, isto é, $(\lambda |\alpha|)^{-1} \alpha x \in U$. Por definição, isto implica que $\lambda |\alpha| \in B$. Segue que $|\alpha| C \subset B$. Tomamos agora $\beta \in B$ e escrevemos $\lambda = \dfrac{\beta}{|\alpha|}$.

Disso segue que $\beta^{-1}(\alpha x) = (\lambda|\alpha|)^{-1}(\alpha x) \in U$. Reescrevendo, temos $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}(\lambda^{-1}x) \in U$. Como $\left|\dfrac{|\alpha|}{\alpha}\right| = 1$, segue de U ser absolutamente convexo que $\dfrac{|\alpha|}{\alpha}\dfrac{\alpha}{|\alpha|}(\lambda^{-1}x) = \lambda^{-1}x \in U$. Por definição, isto implica que $\lambda \in C$ e $\beta \in |\alpha|C$. Disso, concluímos que $B \subset |\alpha|C$ e temos $B = |\alpha|C$. Daí, $p_U(\alpha x) = \inf B = \inf |\alpha|C = |\alpha| \inf C = |\alpha|p_U(x)$. Para o caso $\alpha = 0$, vejamos que $0 \in U$, pois $|0| < 1$ e U é absolutamente convexo, então $0x = 0 \in U$. Daí, $B = \mathbb{R}^+$ e segue que $\inf B = 0$, donde $p_U(0x) = 0p_U(x)$.

Para mostrar (c), tomamos $x, y \in A$ e definimos $X := \{\lambda > 0; \lambda^{-1}x \in U\}$, $Y := \{\lambda > 0; \lambda^{-1}y \in U\}$ e $Z := \{\lambda > 0; \lambda^{-1}(x + y) \in U\}$. Sejam $\alpha \in X$ e $\beta \in Y$. Vamos mostrar que $\alpha + \beta \in Z$. De fato, segue que

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) = \frac{1}{\alpha+\beta}x + \frac{1}{\alpha+\beta}y = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\alpha^{-1}x) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\beta^{-1}y).$$

Como $\alpha, \beta > 0$, temos

$$\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right| = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1.$$

Daí, como $\alpha^{-1}x \in U$, $\beta^{-1}y \in U$ e U é absolutamente convexo, segue que $\dfrac{1}{\alpha+\beta}(x + y) \in U$, isto é, $\alpha + \beta \in Z$. Como tomamos $\alpha \in X$ e $\beta \in Y$ quaisquer, vale $X + Y \subset Z$. Com isto, $p_U(x + y) = \inf Z \leq \inf(X + Y) = \inf X + \inf Y = p_U(x) + p_U(y)$.

Para verificar a propriedade (e), sejam X e Y como no passo anterior e $W := \{\lambda > 0; \lambda^{-1}(xy) \in U\}$. Tomamos $\alpha \in X$ e $\beta \in Y$. Como U é subsemigrupo, segue que $(\alpha^{-1}x)(\beta^{-1}y) = (\alpha\beta)^{-1}(xy) \in U$, donde temos $\alpha\beta \in W$. Disso concluímos que $XY \subset W$. Portanto, $p_U(xy) = \inf W \leq \inf XY = \inf X \inf Y = p_U(x)p_U(y)$.

Vamos mostrar agora que $\{x \in A; p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \in A; p_U(x) \leq 1\}$. Dado $x \in A$ com $p_U(x) < 1$, então existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda^{-1}x \in U$. Como U é absolutamente convexo e $|\lambda| < 1$, então $\lambda\lambda^{-1}x = x \in U$. Isto prova que $\{x \in A; p_U(x) < 1\} \subset U$. Dado $x \in U$, temos que $1 \in \{\lambda > 0; \lambda^{-1}x \in U\}$. Daí, $p_U(x) = \inf\{\lambda > 0; \lambda^{-1}x \in U\} \leq 1$. Isto prova que $U \subset \{x \in A; p_U(x) \leq 1\}$.

Por fim, supomos que U é radialmente limitado e vamos provar que p_U satisfaz a propriedade (d) da definição 2.1.5. Seja dado $x \in A$ com $x \neq 0$. Como U é absorvente, então $\{\alpha > 0; \alpha x \in U\}$ é não vazio. Como U é radialmente limitado, então existe $C > 0$ tal que $\lambda^{-1}x \notin U$ sempre que $\lambda^{-1} > C$. Isto é, se $\lambda > 0$ é tal que $\lambda^{-1}x \in U$, então $\lambda \geq 1/C$. Em particular, $p_U(x) \geq 1/C > 0$. Isto prova que $p_U(x) = 0 \iff x = 0$.

Isto completa a demonstração que p_U é uma seminorma-álgebra e, quando U é radialmente limitado, p_U é uma norma-álgebra. □

Definição 2.1.8. Uma **álgebra normada** é um par (A, p) onde A é uma álgebra e p uma norma-álgebra em A. Uma **álgebra normada completa** ou **álgebra de Banach** é uma álgebra normada (A, p) tal que o espaço vetorial normado A com a norma p é completo. Denotamos tal norma por $||.||$, a menos que dito o contrário. Além disso, sempre que nos referirmos a uma norma em uma álgebra normada, assumimos que se trata de uma norma-álgebra, salvo dito o contrário.

Definição 2.1.9. Sejam A e B álgebras normadas. Um **isomorfismo topológico** de A em B é um isomorfismo de A em B que também é um homomorfismo do espaço métrico A no espaço métrico B. Um **isomorfismo isométrico** de A em B é um isomorfismo T da álgebra A na álgebra B que também é uma aplicação isométrica do espaço normado A no espaço normado B. Essa última condição afirma que para todos $x, y \in A$

$$||Tx - Ty|| = ||x - y||.$$

Pela linearidade de T, isto é equivalente a

$$||Tx|| = ||x||$$

para todo $x \in A$.

Notação. Dados espaços vetoriais normados X, Y sobre o mesmo corpo escalar $\mathbb{F}$, denotamos por $BL(X, Y)$ o subespaço vetorial de $L(X, Y)$, consistindo de todas as aplicações lineares limitadas (isto é, contínuas) de X em Y.

Como usual $BL(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma dada por

$$||T|| = \sup\{||Tx||; x \in X, ||x|| \leq 1\}.$$

O espaço dual $BL(X, \mathbb{F})$ de X é denotado por X' e seus elementos chamados funcionais lineares contínuos. Escrevemos $BL(X)$ para $BL(X, X)$.

Proposição 2.1.3. *Seja A uma álgebra normada. Então existe um isomorfismo isométrico de A em uma subálgebra densa de uma álgebra de Banach B. B é único a menos de isomorfismo isométrico.*

Demonstração. Se enxergamos A como um espaço normado, sabemos que existe o completamento B de A, isto é, existe um isomorfismo isométrico (de espaços normados) T de A em um espaço de Banach B com $\overline{T(A)} = B$. Além disso, B é único a menos de isomorfismo isométrico (de espaços normados). Resta mostrar que podemos tomar B como uma álgebra, que $T(A)$ é uma subálgebra de B e que T é um isomorfismo isométrico (de álgebras).

Sejam $x, y \in B$. Como $\overline{T(A)} = B$, existem sequências (x_n), (y_n) em A tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(y_n)$. Como $(T(x_n))$ e $(T(y_n))$ são sequências convergentes em B, são sequências de Cauchy. Como T é isometria, então (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em A. Além disso, dados $p, q \in \mathbb{N}$, temos

$$||x_p y_p - x_q y_q|| = ||x_p y_p - x_p y_q + x_p y_q - x_q y_q|| = ||x_p(y_p - y_q) + (x_p - x_q)y_q||$$
$$\leq ||x_p|| \cdot ||y_p - y_q|| + ||x_p - x_q|| \cdot ||y_q||.$$

Como (x_n) e (y_n) são sequências limitadas, existe $C > 0$ tal que $||x_p||, ||y_q|| < C$ para todos $p, q \in \mathbb{N}$. Daí segue que

$$||x_p y_p - x_q y_q|| \leq C||y_p - y_q|| + ||x_p - x_q||C = C(||y_p - y_q|| + ||x_p - x_q||).$$

Usando que (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p, q > n_0$ implica $||x_p - x_q|| < \epsilon/2C$ e $||y_p - y_q|| < \epsilon/2C$. Assim, se $p, q > n_0$ temos

$$||x_p y_p - x_q y_q|| < C(\epsilon/2C + \epsilon/2C) = \epsilon.$$

Isto prova que $(x_n y_n)$ é uma sequência de Cauchy em A. Como T é isometria, então $T(x_n y_n)$ é uma sequência de Cauchy em B e, como B é espaço de Banach, existe $z \in B$ tal que $\lim T(x_n y_n) = z$.

Vamos mostrar que z não depende da escolha das sequências (x_n) e (y_n), apenas da escolha de x e y em B. De fato, sejam α_n e β_n sequências em A tais que $\lim T(\alpha_n) = x$ e $\lim T(\beta_n) = y$. Como $\lim T(\alpha_n) = \lim T(x_n)$, então $\lim T(\alpha_n - x_n) = 0$. Como T é uma isometria, então $\lim(\alpha_n - x_n) = 0$. Analogamente, também temos $\lim(\beta_n - y_n) = 0$. Com isto, e o fato de T ser isometria, temos:

$$||T(\alpha_n\beta_n) - T(x_n y_n)|| = ||T(\alpha_n\beta_n - x_n y_n)|| = ||\alpha_n\beta_n - x_n y_n|| = ||\alpha_n\beta_n - \alpha_n y_n + \alpha_n y_n - x_n y_n||$$
$$\leq ||\alpha_n|| \cdot ||\beta_n - y_n|| + ||\alpha_n - x_n|| \cdot ||y_n||.$$

Como (α_n) e (y_n) são sequências limitadas (pois são de Cauchy) e $(||\beta_n - y_n||)$ e $(||\alpha_n - x_n||)$ convergem para 0, segue por argumento análogo ao usado para mostrar que $(x_n y_n)$ é sequência de Cauchy que $\lim ||T(\alpha_n\beta_n) - T(x_n y_n)|| = 0$, isto é, $\lim T(\alpha_n\beta_n) = \lim T(x_n y_n) = z$.

Como z não depende das sequências escolhidas, podemos definir o produto em B por $z = xy$, isto é, dados $x, y \in B$, tomamos quaisquer sequências (x_n) e (y_n) em A tais que $x = \lim T(x_n)$ e $y = \lim T(y_n)$ e definimos $xy = \lim T(x_n y_n)$. O fato de $T(A)$ ser denso em B garante a existência de tais sequências. Vejamos que dados $x, y \in A$, temos $T(x)T(y) = T(xy)$, pois a sequência constante $x_n = x$ é tal que $\lim T(x_n) = T(x)$ e igualmente a sequência constante $y_n = y$ é tal que $\lim T(y_n) = T(y)$, donde $T(x)T(y) = \lim T(x_n y_n) = T(xy)$. Isto é, T é um isomorfismo isométrico. O fato que o produto definido acima tem as propriedades (a), (b) e (c) da definição 2.1.1 segue do produto em A ter essas propriedades e de T ser um isomorfismo (de álgebras) isométrico. Logo, B é uma álgebra de Banach. $\square$

Definição 2.1.10. O **completamento** de uma álgebra normada A é uma álgebra de Banach B como na proposição anterior. Quando considerando o completamento B de uma álgebra normada A, consideramos por conveniência A como sua imagem em B sob o isomorfismo isométrico, isto é, consideramos B como uma álgebra de Banach tendo A como uma subálgebra densa.

Até o fim dessa seção, daremos alguns importantes exemplos de álgebras normadas e álgebras de Banach.

Exemplo 2.1.4. Seja X um espaço vetorial normado. Então $BL(X)$ com o produto sendo a composição é uma álgebra normada e é uma álgebra de Banach se X for um espaço de Banach. Os elementos de $BL(X)$ são chamados operadores lineares limitados em X e a norma em $BL(X)$ é chamada de norma de operador.

Definição 2.1.11. Seja E um conjunto não-vazio e X um espaço vetorial normado. Dizemos que f de E em X é uma **aplicação limitada** se $\{||f(s)||; s \in E\}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$. Para uma aplicação f a **norma uniforme** é definida por

$$||f||_\infty = \sup\{||f(s)||; s \in E\}.$$

Exemplo 2.1.5. Seja E um conjunto não-vazio e X um espaço vetorial normado. Denotamos por $l^\infty(E, X)$ o espaço vetorial normado de todas as aplicações limitadas de E em X com soma e multiplicação por escalar ponto a ponto e com a norma uniforme. Quando X é uma álgebra normada, $l^\infty(E, X)$ é uma álgebra normada com produto ponto a ponto.

De fato, com a definição $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in E$, o produto em $l^\infty(E, X)$ satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) da Definição 2.1.1 pois o produto em X possui essas propriedades. Além disso, dado $x \in E$ temos

$$||(fg)(x)|| = ||f(x)g(x)|| \leq ||f(x)|| \cdot ||g(x)|| \leq ||f||_\infty ||g||_\infty.$$

Tomando o supremo sobre todo $x \in E$ à esquerda, temos

$$||fg||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_\infty,$$

donde $l^\infty(E, X)$ é uma álgebra normada.

Além disso, se X é completo, segue que $l^\infty(E, X)$ é completo. Para mostrar isto, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $l^\infty(E, X)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$ implica que $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$, isto é, para cada $x \in E$ temos:

$$||(f_n - f_m)(x)|| < \epsilon \Rightarrow ||f_n(x) - f_m(x)|| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Ou seja, para cada $x \in E$ fixado, a sequência $(f_n(x))$ em X é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, existe y_x tal que $\lim f_n(x) = y_x$ para cada $x \in E$. Definimos

$f : E \to X$ por $f(x) = y_x$. Vamos mostrar que $f \in l^\infty(E, X)$ e $\lim f_n = f$. Na equação (2.1) fixando $m > n_0$ e fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade da norma, temos

$$||f(x) - f_m(x)|| \leq \epsilon$$

para todo $x \in E$ e todo $m > n_0$. Daí, como f_m é limitado, segue que f é limitada, isto é, $f \in l^\infty(E, X)$. Além disso, a desigualdade acima implica $||f - f_m||_\infty \leq \epsilon$. Portanto, (f_n) converge para f em $l^\infty(E, X)$, provando que esse espaço é completo.

Exemplo 2.1.6. Uma álgebra de funções em E é uma álgebra de aplicações de E em $\mathbb{F}$ com as definições de soma, multiplicação por escalar e produto ponto a ponto. Uma álgebra uniforme de funções em E é uma subálgebra da álgebra de Banach $l^\infty(E, \mathbb{F})$.

Dado um espaço métrico não vazio E e X um espaço vetorial normado, $C(E, X)$ denota o espaço vetorial de todas as aplicações contínuas de E em X com soma e multiplicação por escalar ponto a ponto. Quando E é compacto, $C(E, X)$ é um subespaço vetorial fechado de $l^\infty(E, X)$ e, em particular, $C(E, \mathbb{F})$ é uma álgebra uniforme de funções. De fato, toda função em $C(E, X)$ é limitada pois o domínio é compacto, donde a imagem é compacta e, por consequência, limitada. E, com a norma da convergência uniforme, se uma sequência de funções contínuas converge para uma função de $l^\infty(E, X)$ ela deve ser contínua e segue que $C(E, X)$ é fechado. A notação $C(E, \mathbb{C})$ é abreviada para $C(E)$.

Exemplo 2.1.7. Dado um subconjunto aberto D de $\mathbb{C}$, denotamos por $H(D)$ o conjunto de todas as aplicações de D em $\mathbb{C}$ que são localmente holomorfas, isto é, analítica complexa em cada subconjunto aberto conexo de D (iremos omitir a palavra "localmente" mesmo quando D não for conexo). $H(D)$ é uma álgebra de funções em D e $H^\infty(D)$ é uma álgebra uniforme de funções em D, sendo $H^\infty(D) = H(D) \cap l^\infty(D, \mathbb{C})$.

Seja Δ o disco unitário fechado $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ e Δ^0 seu interior. A álgebra de disco $\mathscr{A}(\Delta)$ é a álgebra uniforme de funções em Δ dada por

$$\mathscr{A}(\Delta) = \{f \in C(\Delta); f|_{\Delta^0} \in H(\Delta^0)\}.$$

Exemplo 2.1.8. Seja A uma álgebra normada. Seja $a \cdot b$ o produto reverso em A, isto é, dados $a, b \in A$

$$a \cdot b = ba.$$

Com o produto reverso e a norma dada, A é uma álgebra normada chamada álgebra reversa de A e denotada por $rev(A)$.

Exemplo 2.1.9. Seja $L^1(\mathbb{R})$ o espaço das classes de equivalência (sob a igualdade em quase todo ponto) de funções complexas Lebesgue integráveis em $\mathbb{R}$. Com a soma e multiplicação por escalar ponto a ponto, com a norma dada por

$$||f|| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$$

$L^1(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach. Com a convolução

$$(f * g)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(s-t)dt$$

para cada $s \in \mathbb{R}$ como produto, temos uma álgebra de Banach chamada de álgebra de grupo de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.10. Dado A um espaço vetorial, podemos definir em A o produto $ab = 0$ para todo $a, b \in A$. É fácil verificar que A com esse produto, chamado de produto trivial, satisfaz os axiomas (a),(b) e (c) da Definição 2.1.1. Além disso, se A for um espaço vetorial normado, então $||ab|| = ||0|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ para todos $a, b \in A$. Isto é, A é uma álgebra normada com o produto trivial.

A existência do produto trivial mostra que todo espaço vetorial pode ser munido de um produto e considerado como uma álgebra. Além disso, esse produto é útil para produzir contraexemplos simples em algumas situações.

Exemplo 2.1.11. Seja A um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{F}$ e $\{a, b\}$ uma base para A. O elemento geral de A pode ser escrito na forma $\alpha a + \beta b$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Podemos definir em A o produto

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b) = \beta_1 \beta_2 b$$

para todos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$.

Vamos verificar que A munido com o produto acima é uma álgebra, verificando que satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) da Definição 2.1.1.

(a)Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{F}$. Temos

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)[(\alpha_2 a + \beta_2 b)(\alpha_3 a + \beta_3 b)] = (\alpha_1 a + \beta_1 b)[\beta_2 \beta_3 b] =$$

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)(0a + (\beta_2 \beta_3) b) = \beta_1 (\beta_2 \beta_3) b = \beta_1 \beta_2 \beta_3 b.$$

Analogamente $[(\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b)](\alpha_3 a + \beta_3 b) = \beta_1 \beta_2 \beta_3 b$. Logo, vale a associatividade.

(b)Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{F}$. Temos

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)[(\alpha_2 a + \beta_2 b) + (\alpha_3 a + \beta_3 b)] = (\alpha_1 a + \beta_1 b)[(\alpha_2 + \alpha_3) a + (\beta_2 + \beta_3) b] = \beta_1 (\beta_2 + \beta_3) b$$

e também

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b) + (\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_3 a + \beta_3 b) = \beta_1 \beta_2 b + \beta_1 \beta_3 b = \beta_1 (\beta_2 + \beta_3) b.$$

Portanto, temos

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)[(\alpha_2 a + \beta_2 b) + (\alpha_3 a + \beta_3 b)] = (\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b) + (\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_3 a + \beta_3 b),$$

isto é, vale a distributividade à esquerda. A distributividade à direita se faz analogamente.

(c) Dados $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$ temos

$$[\lambda(\alpha_1 a + \beta_1 b)](\alpha_2 a + \beta_2 b) = [\lambda\alpha_1 a + \lambda\beta_1 b](\alpha_2 a + \beta_2 b) = \lambda\beta_1\beta_2 b,$$

$$\lambda[(\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b)] = \lambda[\beta_1\beta_2 b] = \lambda\beta_1\beta_2 b,$$

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)[\lambda(\alpha_2 a + \beta_2 b)] = (\alpha_1 a + \beta_1 b)[\lambda\alpha_2 a + \lambda\beta_2 b] = \beta_1\lambda\beta_2 b = \lambda\beta_1\beta_2 b.$$

Disso segue que $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ dados $x, y \in A$ quaisquer.

Portanto, A é de fato uma álgebra. Vejamos que, dado $x \in A$ qualquer, $x = \alpha a + \beta b$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Daí temos $ax = (a + 0b)(\alpha a + \beta b) = 0\beta b = 0$ e $xa = (\alpha a + \beta b)(a + 0b) = \beta 0 b = 0$. Portanto, existem álgebras A, com produto não trivial, onde existe $a \neq 0$ mas $ax = xa = 0$ para todo elemento $x \in A$.

2.2 UNIDADE E INVERSAS

Ao longo dessa seção, $\mathbb{F}$ é o corpo dos números reais ou dos números complexos e A é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.

Definição 2.2.1. Um elemento e de uma álgebra A é um elemento **unidade** ou elemento **identidade** se, e somente se, $e \neq 0$ e

$$ex = xe \ \forall x \in A.$$

Dizemos que A é uma **álgebra com unidade** se possui um elemento unidade. Se A é uma álgebra normada com unidade tal que $||e|| = 1$, então A é uma **álgebra unitária**.

Uma álgebra possui no máximo um elemento unidade, pois se e e e' são unidades, então $e' = e'e = e$. Na primeira igualdade usamos que e é unidade e na segunda igualdade usamos que e' é unidade.

Definição 2.2.2. Seja A uma álgebra com unidade e $a \in A$. Uma **inversa à esquerda** de a é um elemento b de A tal que $ba = e$ e uma **inversa à direita** de a é um elemento b de A tal que $ab = e$. Uma **inversa** de a é um elemento de A que é inversa à esquerda de a e inversa à direita de a. Um elemento de A que possui inversa é dito **invertível** (ou **regular**). Um elemento de A que não é invertível é dito **singular**.

Observação 2.2.1. Se a possui uma inversa à esquerda b e uma inversa à direita c, então $b = c$ e a é invertível. De fato

$$b = be = b(ac) = (ba)c = ec = c.$$

Em particular, isto mostra que um elemento tem no máximo uma inversa.

Notação. A única inversa de um elemento invertível a é denotada por a^{-1}. O conjunto dos elementos invertíveis de A é denotado por $\mathrm{Inv}(A)$ e o conjunto dos elementos singulares por $\mathrm{Sing}(A)$.

Definição 2.2.3. Dado um subconjunto E de uma álgebra A, o **comutador** de E é o subconjunto E^c de A dado por

$$E^c := \{a \in A; ax = xa \ \forall x \in E\}.$$

$(E^c)^c$ é abreviado por E^{cc} e é chamado de **segundo comutador** de E.

Proposição 2.2.1. *Dado E um subconjunto de uma álgebra A, então E^c é uma subálgebra de A. Em particular, dado $a \in A$, $\{a\}^{cc}$ é uma subálgebra comutativa contendo a.*

Demonstração. Sejam dados $a, b \in E^c$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Fixemos $x \in E$ qualquer. Temos:

$$(\lambda a + b)x = \lambda ax + bx = \lambda xa + xb = x(\lambda a) + xb = x(\lambda a + b)$$

e

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab).$$

Portanto, $\lambda a + b$ e ab comutam com qualquer $x \in E$. Por definição, $\lambda a + b \in E^c$ e $ab \in E^c$. Então E^c é um subespaço vetorial fechado para o produto, isto é, E^c é uma subálgebra.

Como $\{a\}^{cc}$ é uma subálgebra pelo item anterior, basta verificar que $a \in \{a\}^{cc}$ e que o conjunto é comutativo. Seja $x \in \{a\}^c$ qualquer. Por definição de comutador, temos $ax = xa$. Isto é, a comuta com todos os elementos de $\{a\}^c$, donde $a \in \{a\}^{cc}$.

Para verificar que $\{a\}^{cc}$ é comutativo, tomamos $x, y \in \{a\}^{cc}$. Como a comuta consigo mesmo, então $a \in \{a\}^c$. Disso temos que x comuta com a e, em particular, $x \in \{a\}^c$. Como $y \in \{a\}^{cc}$, então y comuta com todo elemento de $\{a\}^c$, inclusive com x. Daí temos $xy = yx$ para todo par $x, y \in \{a\}^{cc}$. Isto completa a demonstração. $\square$

Proposição 2.2.2. *Seja A uma álgebra com unidade e $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Então a^{-1} pertence a $\{a\}^{cc}$.*

Demonstração. Seja $x \in \{a\}^c$. Então $xa = ax$ e, portanto,

$$xa^{-1} = (a^{-1}a)xa^{-1} = a^{-1}(ax)a^{-1} = a^{-1}(xa)a^{-1} = a^{-1}x(aa^{-1}) = a^{-1}x.$$

Portanto, a^{-1} comuta com todos os elementos de $\{a\}^c$. Segue que $a^{-1} \in \{a\}^{cc}$. $\square$

Proposição 2.2.3. $\mathrm{Inv}(A)$ *é um grupo com respeito ao produto de A, isto é*

$$a, b \in \mathrm{Inv}(A) \Rightarrow ab, a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$$

.

Demonstração. Como $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ para todo $a \in \mathrm{Inv}(A)$ então pela definição $(a^{-1})^{-1} = a$. Em particular, $a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$ se $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Se $a, b \in \mathrm{Inv}(A)$ então $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = e$ e $(b^{-1}a^{-1})ab = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = e$. Daí $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Em particular, $ab \in \mathrm{Inv}(A)$. $\square$

Por causa da proposição anterior, $\mathrm{Inv}(A)$ é chamado grupo dos elementos invertíveis de A ou grupo dos elementos regulares de A.

Proposição 2.2.4. *Seja A uma álgebra e $x \in A$. Se $x \in \mathrm{Inv}(A)$, então $\lambda x \in \mathrm{Inv}(A)$ para todo $\lambda \neq 0$. Em particular, se $x \in \mathrm{Sing}(A)$, então $\lambda x \in \mathrm{Sing}(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Demonstração. Se $x \in \mathrm{Inv}(A)$ e $\lambda \neq 0$, então $(\lambda x)(\lambda^{-1}x^{-1}) = (\lambda\lambda^{-1})(xx^{-1}) = 1e = e$ e $(\lambda^{-1}x^{-1})(\lambda x) = (\lambda^{-1}\lambda)(x^{-1}x) = 1e = e$. Daí, λx possui inversa $\lambda^{-1}x^{-1}$ e, em particular, $\lambda x \in \mathrm{Inv}(A)$.

Seja $x \in \mathrm{Sing}(A)$. Suponhamos por absurdo que $\lambda x \in \mathrm{Inv}(A)$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$, devemos ter $\lambda \neq 0$, pois $0 = 0x \in \mathrm{Sing}(A)$ para qualquer $x \in A$. Desse modo, pela primeira parte, teríamos $\lambda^{-1}(\lambda x) = x \in \mathrm{Inv}(A)$, contrariando a hipótese. Isto completa a prova. $\square$

Proposição 2.2.5. *O produto em uma álgebra normada A é uma aplicação contínua de $A \times A$ em A.*

Demonstração. Vamos usar em $A \times A$ a norma $||(a, b)|| = \max\{||a||, ||b||\}$ para cada par $(a, b) \in A \times A$. Isto é, estamos tomando a norma do máximo em $A \times A$. Sejam $(a, b) \in A \times A$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Dado $(x, y) \in A \times A$ temos

$$||xy - ab|| = ||xy - xb + xb - ab|| = ||x(y - b) + (x - a)b|| \leq ||x|| \cdot ||y - b|| + ||x - a|| \cdot ||b||.$$

Se tomamos

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2||b||}, \frac{\epsilon}{2(||a|| + 1)}, 1\right\}$$

temos que: se $||(x, y) - (a, b)|| < \delta$ então $||x - a|| < \delta$ e $||y - b|| < \delta$. Como $||x - a|| < 1$ e $|\ ||x|| - ||a||\ | \leq ||x - a|| < 1$, então $||x|| < ||a|| + 1$. Como $||y - b|| < \dfrac{\epsilon}{2(||a|| + 1)}$, então

$$||x|| \cdot ||y - b|| < (||a|| + 1)\frac{\epsilon}{2(||a|| + 1)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, como $||x - a|| < \dfrac{\epsilon}{2||b||}$, então

$$||x - a|| \cdot ||b|| < \frac{\epsilon}{2||b||}||b|| = \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que $||xy - ab|| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$ se $||(x, y) - (a, b)|| < \delta$. Isto prova a continuidade do produto. $\square$

Vamos agora provar a continuidade da aplicação $a \to a^{-1}$ de $\mathrm{Inv}(A)$ em $\mathrm{Inv}(A)$ para uma álgebra normada com unidade. Para isto, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.2.1. *Seja A uma álgebra normada com unidade. Se $a, b \in \mathrm{Inv}(A)$ e $||b-a|| \leq \frac{1}{2}||a^{-1}||^{-1}$, então*

$$||b^{-1} - a^{-1}|| \leq 2||a^{-1}||^2||a-b||.$$

Demonstração. Sendo a, b como no enunciado temos

$$||b^{-1}|| - ||a^{-1}|| \leq |\ ||b^{-1}|| - ||a^{-1}||\ | \leq ||b^{-1} - a^{-1}|| = ||b^{-1}(a-b)a^{-1}|| \leq$$

$$||b^{-1}|| \cdot ||a-b|| \cdot ||a^{-1}|| \leq ||b^{-1}||\frac{1}{2}||a^{-1}||^{-1}||a^{-1}|| = \frac{1}{2}||b^{-1}||.$$

Como $||b^{-1}|| - ||a^{-1}|| \leq \frac{1}{2}||b^{-1}||$, então $\frac{1}{2}||b^{-1}|| \leq ||a^{-1}||$ ou ainda $||b^{-1}|| \leq 2||a^{-1}||$. Daí

$$||b^{-1} - a^{-1}|| \leq ||b^{-1}|| \cdot ||a-b|| \cdot ||a^{-1}|| \leq 2||a^{-1}|| \cdot ||a-b|| \cdot ||a^{-1}|| = 2||a^{-1}||^2||a-b||.$$

□

Antes da próxima proposição, vamos introduzir o conceito de grupo topológico.

Definição 2.2.4. Um grupo topológico é um grupo $(G, .)$ munido de uma topologia tal que o produto de $G \times G$ em G e a aplicação inversa $a \to a^{-1}$ de G em G são contínuas. Para a continuidade do produto adotamos a topologia produto em $G \times G$.

Observação 2.2.2. Para o leitor pouco familiarizado com topologia, basta saber que uma norma induz uma topologia e que, com a topologia induzida pela norma, a continuidade segundo a topologia coincide com a continuidade segundo a norma. Além disso, em um espaço normado X, a topologia produto de $X \times X$ é induzida pela norma do máximo ou pela norma da soma.

Portanto, na prática, na próxima proposição vamos usar a norma usual em A. A Proposição 2.2.5 foi demonstrada usando a norma do máximo, portanto com a topologia produto.

Proposição 2.2.6. *Seja A uma álgebra normada com unidade. Então, com a topologia induzida pela norma de A, a aplicação $a \to a^{-1}$ é um homeomorfismo topológico de $\mathrm{Inv}(A)$ em si mesma e $\mathrm{Inv}(A)$ é um grupo topológico.*

Demonstração. Seja $a \in \mathrm{Inv}(A)$ e seja dado $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2||a^{-1}||^2}$. Se $||b-a|| < \delta$, $b \in \mathrm{Inv}(A)$, então pelo Lema 2.2.1, temos

$$||b^{-1} - a^{-1}|| \leq 2||a^{-1}||^2||a-b|| < 2||a^{-1}||\frac{\epsilon}{2||a^{-1}||^2} = \epsilon.$$

Isto prova a continuidade da aplicação $a \to a^{-1}$. Se $a \in \text{Inv}(A)$ então $a = (a^{-1})^{-1}$. Ou seja, todo elemento de $\text{Inv}(A)$ está na imagem da aplicação inversa e ela é sobrejetora. Além disso, se $a^{-1} = b^{-1}$, então $a = (a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} = b$, pela unicidade da inversa. Concluímos que $a \to a^{-1}$ é uma bijeção. Além disso, a inversa é ela própria, pois aplicando a inversa duas vezes temos a identidade em $\text{Inv}(A)$.

Portanto, $a \to a^{-1}$ é contínua e tem inversa contínua, donde é um homeomorfismo. Além disso, pela Proposição 2.2.5 temos que o produto em $A \times A \to A$ é contínuo. Como estamos considerando a topologia induzida em $\text{Inv}(A)$ por A, então a restrição do produto $\text{Inv}(A) \times \text{Inv}(A) \to \text{Inv}(A)$ também é contínua. Por definição, um grupo cujo produto e aplicação inversa são contínuas é um grupo topológico. □

Definição 2.2.5. Seja a um elemento de uma álgebra normada. O **raio espectral** de a, denotado por $r(a)$, é definido por

$$r(a) = \inf\{||a^n||^{1/n}; n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposição 2.2.7. *Seja a um elemento de uma álgebra normada. Então*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}.$$

Demonstração. Seja $\rho = r(a)$ e $\epsilon > 0$ e escolha k tal que

$$||a^k||^{1/k} < \rho + \epsilon.$$

Tal k existe pela definição de raio espectral e porque $\rho + \epsilon > r(a)$. Para todo inteiro positivo n, pelo algoritmo de Euclides podemos escrever

$$n = p(n)k + q(n),$$

com $p(n), q(n) \geq 0$ e $q(n) \leq k-1$. Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} q(n) = 0$, então

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)k + q(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)k}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)k}{n}.$$

Portanto, temos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} p(n) = \dfrac{1}{k}$.

Daí, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$||a^n||^{1/n} = ||a^{p(n)k+q(n)}||^{1/n} = ||a^{p(n)k}a^{q(n)}||^{1/n} \leq ||a^{p(n)k}||^{1/n}||a^{q(n)}||^{1/n} \leq$$

$$||a^k||^{p(n)/n}||a||^{q(n)/n}.$$

Acima usamos que $||a^l|| \leq ||a||^l$ para todo $l \in \mathbb{N}$ (isto segue da aplicação da propriedade $||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||$, para todo $x, y \in A$, l vezes). Como a exponencial é contínua, $||a||$ e $||a^k||$ não dependem de n e temos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}q(n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}p(n) = \dfrac{1}{k}$, então

$$\lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} ||a^k||^{p(n)/n}||a||^{q(n)/n} = ||a^k||^{1/k} < \rho + \epsilon.$$

Como isto é verdade para todo $\epsilon > 0$, então $\lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n} \leq \rho$. Mas, por definição, $||a^n||^{1/n} \geq \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue então

$$\rho = r(a) = \lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}.$$

□

Teorema 2.2.1. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade, seja $a \in A$ e seja $r(a) < 1$. Então $e - a$ é invertível e*

$$(e-a)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n.$$

Demonstração. Escolha η com $r(a) < \eta < 1$. Pela Proposição 2.2.7, temos $||a^n|| < \eta^n$ para todo n suficientemente grande e portanto a série $||e|| + \sum_{n=1}^{\infty} ||a^n||$ converge pelo Critério da Comparação com a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \eta^n$. Como A é um espaço de Banach, pela Proposição 10.1.4 de (2), convergência absoluta implica convergência, isto é, $e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge para algum $s \in A$. Seja $s_n = e + a + \cdots + a^{n-1}$. Então por construção $\lim s_n = s$. Além disso, temos $||a^n|| \to 0$, pois o termo geral de uma série convergente deve convergir para 0. Ainda:

$$(e-a)s_n = (e-a)(e + a + \cdots + a^{n-1}) = e + a + \cdots + a^{n-1} - a - a^2 - \cdots - a^n = e - a^n.$$

Analogamente,

$$s_n(e-a) = e - a^n.$$

Pela Proposição 2.2.5, o produto é contínuo e temos, fazendo o limite com $n \to \infty$,

$$(e-a)s = e = s(e-a).$$

Portanto,

$$(e-a)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n.$$

□

Corolário 2.2.1. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade. Então cada elemento a de A com $||e - a|| < 1$ é invertível.*

Demonstração. Como $r(e-a) = \inf ||(e-a)^n||^{1/n} \leq ||e - a|| < 1$, então $e - (e - a) = a$ é invertível pelo Teorema 2.2.1. □

Teorema 2.2.2. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade. Então* $\mathrm{Inv}(A)$ *é um subconjunto aberto de A.*

Demonstração. Seja $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Dado $x \in A$ com $||x|| < ||a^{-1}||^{-1}$, temos

$$||a^{-1}x|| \leq ||a^{-1}|| \cdot ||x|| < 1.$$

Segue então que $r(a^{-1}x) < 1$ e, pelo Teorema 2.2.1, temos $e - a^{-1}x \in \mathrm{Inv}(A)$. Como $\mathrm{Inv}(A)$ é um grupo e $a \in \mathrm{Inv}(A)$ por hipótese, então $a(e - a^{-1}x) = a - x \in \mathrm{Inv}(A)$. Isto é, se $||a - y|| < ||a^{-1}||^{-1}$ temos que $y = a - (a - y) \in \mathrm{Inv}(A)$ (usando $x = a - y$ e o que provamos).

Logo, dado $a \in \mathrm{Inv}(A)$ qualquer, a bola de centro a e raio $||a^{-1}||^{-1}$ está contida em $\mathrm{Inv}(A)$. Isto completa a prova. □

Proposição 2.2.8. *Seja A uma álgebra com unidade e seja λ a representação regular à esquerda de A em A. Então $\lambda(e)$ é a unidade para $L(A)$ e*

$$a \in \mathrm{Sing}(A) \iff \lambda(a) \in \mathrm{Sing}(L(A)).$$

Demonstração. Para verificar a primeira parte, basta ver que $\lambda(e)x = ex = x$ para todo $x \in A$, isto é, $\lambda(e) = I$, a identidade (e unidade) em $L(A)$.

Sejam $B = L(A)$ e $a \in A$. Se $a \in \mathrm{Inv}(a)$, então $\lambda(a^{-1})\lambda(a) = I = \lambda(a)\lambda(a^{-1})$. De fato, dado $x \in A$ qualquer, temos $\lambda(a^{-1})\lambda(a)x = \lambda(a^{-1})(ax) = a^{-1}(ax) = x$ e $\lambda(a)\lambda(a^{-1})x = \lambda(a)(a^{-1}x) = a(a^{-1}x) = x$. Portanto, se $a \in \mathrm{Inv}(A)$, temos $\lambda(a) \in \mathrm{Inv}(B)$.

Seja agora $a \in A$ com $\lambda(a) \in \mathrm{Inv}(B)$. Seja T a inversa de $\lambda(a)$ e seja $b = T(e)$. Nesse caso,

$$ab = \lambda(a)(b) = \lambda(a)(T(e)) = (\lambda(a)T)e = e.$$

Portanto, $\lambda(a)\lambda(b)x = abx = x$ para todo $x \in A$. Portanto, $\lambda(a)$ possui inversa à direita $\lambda(b)$. Pela unicidade da inversa em B, temos $\lambda(a)^{-1} = \lambda(b)$. Em particular, temos $\lambda(b)\lambda(a)e = e$, isto é, $ba = e$. Segue que a é invertível e $a^{-1} = b$.

Provamos então que $a \in \mathrm{Inv}(A)$ se, e somente se, $\lambda(a) \in \mathrm{Inv}(L(A))$. Como a negação de ser invertível é ser singular, basta tomarmos a contrapositiva em ambas implicações e temos o resultado esperado. □

Com a apresentação do conceito de unidade, estamos preparados para explorar novos exemplos de álgebra.

Exemplo 2.2.1. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ álgebras sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Então $B = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é uma álgebra, munida das operações soma, multiplicação por escalar e produto como abaixo, para todos $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in B$ e $\lambda \in \mathbb{F}$:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n),$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n).$$

O fato de que B, com a soma e a multiplicação por escalar, é um espaço vetorial segue da teoria de álgebra linear. Para verificar que é de fato uma álgebra, basta verificarmos que B satisfaz (a),(b) e (c) da Definição 2.1.1. Essas propriedades seguem de $A_1, A_2, \cdots, A_n$ serem álgebras e da forma como definimos o produto (fazendo o produto entrada por entrada).

Da análise funcional, temos que $||(a_1, a_2, \cdots, a_n)|| = \max\{||a_1||, ||a_2||, \cdots, ||a_n||\}$ para cada $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in B$ define uma norma, a chamada norma do máximo. Com essa norma, B é um espaço de Banach se, e somente se, A_i é espaço de Banach para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Vamos mostrar que B é uma álgebra normada com a norma definida acima.

Como já sabemos que é uma norma, só precisamos verificar que é uma norma-álgebra. Sejam $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in B$. Temos

$$||(a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n)|| = ||(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n)|| =$$

$$\max\{||a_1 b_1||, ||a_2 b_2||, \cdots, ||a_n b_n||\} \leq$$

$$\max\{||a_1|| \cdot ||b_1||, ||a_2|| \cdot ||b_2||, \cdots, ||a_n|| \cdot ||b_n||\} \leq$$

$$\max\{||a_1||, ||a_2||, \cdots, ||a_n||\} \max\{||b_1||, ||b_2||, \cdots, ||b_n||\} =$$

$$||(a_1, a_2, \cdots, a_n)|| \cdot ||(b_1, b_2, \cdots, b_n)||.$$

Portanto, temos B uma álgebra dadas álgebras $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Temos que B é uma álgebra normada com a norma do máximo se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são álgebras normadas. Temos ainda que B é álgebra de Banach se, e somente se, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são álgebras de Banach.

Além disso, se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são álgebras com unidade e e_i é a unidade de A_i para cada i, então segue da definição do produto que $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ é a identidade de B. Reciprocamente, se B tem unidade $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ então segue que e_i é unidade da álgebra A_i para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Isto é, B tem unidade se, e somente se, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ têm unidade. Temos também que $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são unitárias, se e somente se, B é unitária.

Um caso particular do que fizemos acima é quando tomamos A uma álgebra e $A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n$. Nesse caso, denotamos B por A^n e temos que A^n é um espaço de Banach se, e somente se, A é um espaço de Banach. Além disso, A^n tem unidade se, e somente se, A tem unidade e A^n é uma álgebra unitária se, e somente se, A é uma álgebra unitária.

Exemplo 2.2.2. Como temos soma, multiplicação por escalar e produto em uma álgebra, podemos pensar em matrizes cujos elementos são elementos de uma álgebra A. E, assim como as matrizes de escalares estudadas em álgebra linear, podemos associar cada matriz a uma transformação linear.

Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{F}$ e $n \in \mathbb{N}$. Seja $M_n(A)$ o conjunto

$$M_n(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in A \text{ para cada i, j} \in \{1, \cdots, \text{n}\} \right\}.$$

Denotamos a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

por $M = (a_{ij})$. Com essa notação, definimos em $M_n(A)$ as seguintes operações: dados $M = (a_{ij})$ e $N = (b_{ij})$ em $M_n(A)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$ tomamos

$$M + N = (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$\lambda M = (\lambda a_{ij}),$$

$$MN = (c_{ij})$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Isto é, definimos a soma, multiplicação por escalar e produto de modo análogo ao feito para matrizes de escalares.

Podemos verificar que $M_n(A)$ é uma álgebra com as operações acima e que, se A possui unidade, então $I = (\delta_{ij})$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = e$ se $i = j$, é a identidade para $M_n(A)$.

Vamos agora associar matrizes a operadores de $BL(A^n)$, com A^n definido como no exemplo anterior. Para cada $M = (a_{ij}) \in M_n(A)$, definimos $T_M : A^n \to A^n$ por

$$T_M((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Ou seja, definimos o operador linear associado a uma matriz de modo análogo ao que fazemos em álgebra linear. O operador T_M é linear por construção. Vamos mostrar que T_M é contínuo para concluir que $T_M \in BL(A^n)$. Para isto, como as normas da soma e do máximo são equivalentes em A^n, vamos realizar as contas com a norma da soma e o resultado ainda valerá pra norma padrão do A^n, ou seja, a norma do máximo.

Fixemos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B(A^n) = \{x \in A^n ; ||x||_1 = 1\}$. Temos

$$||T_M(x)||_1 = \left\| \begin{matrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k \end{matrix} \right\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n a_{2k}x_k \right\| + \cdots + \left\| \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k \right\| \leq$$

$$\sum_{k=1}^n ||a_{1k}|| \cdot ||x_k|| + \sum_{k=1}^n ||a_{2k}|| \cdot ||x_k|| + \cdots + \sum_{k=1}^n ||a_{nk}|| \cdot ||x_k||.$$

Como $||x_k|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots + ||x_n|| = 1$ para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos

$$||T_M(x)||_1 \leq \sum_{k=1}^n ||a_{1k}|| + \sum_{k=1}^n ||a_{2k}|| + \cdots + \sum_{k=1}^n ||a_{nk}|| = \sum_{i,j=1}^n ||a_{ij}||.$$

Isto é, a imagem da bola unitária de A^n por T_M é limitada pela soma dos módulos de todas as entradas de M, que é uma constante. Logo, T_M é contínua.

Consideremos agora a aplicação $\Psi : M_n(A) \to BL(A^n)$ dada por $\Psi(M) = T_M$ para cada $M \in M_n(A)$. Pela forma como definimos as operações entre matrizes, podemos verificar que $T_{\lambda M+N} = \lambda T_M + T_N$ e $T_{MN} = T_M T_N$ para $M, N \in M_n(A)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Basta tomarmos $x \in A^n$ qualquer, aplicar os operadores e verificar que as igualdades valem. Portanto, $\Psi(\lambda M + N) = \lambda\Psi(M) + \Psi(N)$ e $\Psi(MN) = \Psi(M)\Psi(N)$, donde Ψ é linear e multiplicativa. Notemos que, no caso em que A possui unidade, temos $\Psi(I) = I$, isto é, Ψ leva a identidade de $M_n(A)$ na identidade de $BL(A^n)$.

De agora em diante, consideramos A uma álgebra com unidade. Pretendemos mostrar que podemos considerar $M_n(A)$ como uma subálgebra de $BL(A^n)$ através do homomorfismo Ψ. Para isto, vamos mostrar que Ψ é injetora. Suponhamos que $T_M = T_N$ com $M = (a_{ij})$ e $N = (b_{ij})$. Tomando $x = (e, 0, \cdots, 0)$ temos

$$T_M(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

e

$$T_N(x) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}.$$

Como $T_M(x) = T_N(x)$ segue que $a_{i1} = b_{i1}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Analogamente, usando cada $x \in \{(e, 0, 0, \cdots, 0), (0, e, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, 0, \cdots, e)\}$ na igualdade $T_M(x) = T_N(x)$, concluímos que $a_{ij} = b_{ij}$ para cada par $i, j \in \{1, 2 \cdots, n\}$. Isto é, $T_M = T_N$ implica que $M = N$, donde Ψ é injetora.

Portanto, $\Psi(M_n(A))$ é uma subálgebra com unidade de $BL(A^n)$. Por isso, usaremos o abuso de notação $M = T_M$ quando for conveniente, usando a matriz M como sinônimo para o operador linear associado. Inspirado por essa identificação, vamos definir em $M_n(A)$ a seguinte norma:

$$||M|| = ||\Psi(M)|| = \sup_{x \in A^n, ||x||=1} ||T_M(x)||.$$

O fato que essa é uma norma-álgebra em $M_n(A)$ segue de Ψ ser um homomorfismo e termos uma norma-álgebra em A^n como mostramos no Exemplo 2.2.1.

Supomos agora que A é uma álgebra de Banach e vamos mostrar que $M_n(A)$ é uma álgebra de Banach. Seja (M_k) uma sequência de Cauchy em $M_n(A)$ e $M_k = (a_{ij}^k)$ pra cada $k \in \mathbb{N}$. Fixemos $\epsilon > 0$. Pela definição de sequência de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, k' > k_0$ implica que $||M_k - M_{k'}|| < \epsilon/||e||$. Tomando $x = (e, 0, 0, \cdots, 0)$ temos

$$||(M_k - M_{k'})(x)|| \leq ||M_k - M_{k'}|| \cdot ||e|| < \epsilon$$

e além disso

$$(M_k - M_{k'})(x) = (a_{11}^k - a_{11}^{k'}, a_{21}^k - a_{21}^{k'}, \cdots, a_{n1}^k - a_{n1}^{k'}).$$

Como em A^n tomamos a norma do máximo, então temos $||a_{i1}^k - a_{i1}^{k'}|| \leq ||(M_k - M_{k'})(x)||$ para cada $i \in \{1, 2, \cdot, n\}$. Disso segue que

$$||a_{i1}^k - a_{i1}^{k'}|| < \frac{\epsilon}{||e||}||e|| = \epsilon$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Repetindo argumento análogo com cada
$x \in \{(e, 0, 0, \cdots, 0), (0, e, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, 0, \cdots, e)\}$ concluímos que

$$||a_{ij}^k - a_{ij}^{k'}|| < \epsilon \tag{2.2}$$

para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Temos então que $(a_{ij}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em A para cada par $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Como A é um álgebra de Banach, então existe

$$a_{ij} = \lim_{k \to \infty} a_{ij}^k$$

para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Vejamos que, fixando $k > k_0$ e fazendo $k' \to \infty$ em (2.2), temos

$$||a_{ij}^k - a_{ij}|| \leq \epsilon \tag{2.3}$$

para todo $k > k_0$ e todo $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Seja $M = (a_{ij})$. Vamos mostrar que $\lim M_k = M$. Para isto, seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$ com $||x|| = 1$. Temos, dado $k \in \mathbb{N}$, que

$$(M - M_k)(x) = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11}^k & a_{12} - a_{12}^k & \cdots & a_{1n} - a_{1n}^k \\ a_{21} - a_{21}^k & a_{22} - a_{22}^k & \cdots & a_{2n} - a_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{n1}^k & a_{n2} - a_{n2}^k & \cdots & a_{nn} - a_{nn}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11}-a^k_{11})x_1+(a_{12}-a^k_{12})x_2+\cdots+(a_{1n}-a^k_{1n})x_n \\ (a_{21}-a^k_{21})x_1+(a_{22}-a^k_{22})x_2+\cdots+(a_{2n}-a^k_{2n})x_n \\ \vdots \\ (a_{n1}-a^k_{n1})x_1+(a_{n2}-a^k_{n2})x_2+\cdots+(a_{nn}-a^k_{nn})x_n \end{pmatrix}.$$

Daí, como $||x_i|| \leq ||x|| = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos

$$||(M-M_k)(x)|| = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-a^k_{ij})x_j\right|\right|\right\} \leq \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}||(a_{ij}-a^k_{ij})||\cdot||x_j||\right\} \leq$$

$$\max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}||(a_{ij}-a^k_{ij})||\right\}.$$

Se tomamos $k > k_0$, temos que

$$||(M-M_k)(x)|| \leq n\epsilon.$$

Segue então que $||M - M_k|| = \sup_{||x||=1} ||(M - M_k)(x) \leq n\epsilon$ para todo $k > k_0$. Como podemos tomar ϵ arbitrariamente pequeno, segue que $\lim M_k = M$. Portanto, toda sequência de Cauchy em $M_n(A)$ é convergente, donde segue que $M_n(A)$ é uma álgebra de Banach, como queríamos.

Exemplo 2.2.3. Sejam A^n, $M_n(A)$ e Ψ como definidas no exemplo anterior. Conforme o Exemplo 2.1.10, dado A um espaço vetorial podemos definir o produto $ab = 0$ para todos $a, b \in A$ e A se torna uma álgebra. Com esse produto, temos

$$T_M((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ 0 = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Assim, se $A \neq \{0\}$, existem infinitas matrizes em $M_n(A)$ distintas, mas $T_M = 0$ para todo $M \in M_n(A)$. Logo, Ψ nem sempre é injetora se removermos a hipótese da existência da identidade.

Um exemplo que não envolve o produto trivial segue do Exemplo 2.1.11, onde $ax = 0$ para todo $x \in A$. Nesse caso, $\Phi(M) = 0 = \Phi(0)$ onde $M = (a_{ij})$ com $a_{ij} = a$ para todos $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

De modo geral, Φ é injetora se, e somente se, não existe $a \in A$ com $a \neq 0$ e tal que $ax = 0$ para todo $x \in A$. Para a ida basta observar, como acima, que se M é a matriz com todas as entradas iguais a a então $\Phi(M)$ é o operador nulo, que é igual a $\Phi(0)$. Isto prova a contrapositiva da ida.

Supomos então que não existe $a \in A$ com $a \neq 0$ tal que $ax = 0$ para todo $x \in A$. Em outras palavras, supomos que para todo $a \in A$, com $a \neq 0$, existe $x \in A$ tal que

$ax \neq 0$. Vamos provar que Ψ é injetora. Sejam $M, N \in M_n(A)$, $M = (a_{ij})$ e $N = (b_{ij})$, com $M \neq N$. Nesse caso, existe um par $k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $a_{kl} \neq b_{kl}$. Tomando $a = a_{kl} - b_{kl} \neq 0$, existe $x \in A$ tal que $ax \neq 0$. Seja $y = (0, 0, \cdots, 0, x, 0, \cdots, 0) \in A^n$, onde a entrada não nula de y é a l-ésima entrada. Assim

$$(\Psi(M) - \Psi(N))(y) = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} - b_{k1} & a_{k2} - b_{k2} & \cdots & a_{kn} - b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{1l} - b_{1l})x \\ \vdots \\ (a_{kl} - b_{kl})x \\ \vdots \\ (a_{nl} - b_{nl})x \end{pmatrix}.$$

Como $(a_{kl} - b_{kl})x \neq 0$, temos que $(\Psi(M) - \Psi(N))(y) \neq 0$, isto é, $\Psi(M)(y) \neq \Psi(N)(y)$. Em particular, temos $\Psi(M) \neq \Psi(N)$ sempre que $M \neq N$. Isto prova que Ψ é injetora, como queríamos.

Portanto, a condição "não existe $a \in A$ tal que $a \neq 0$ e $ax = 0$ para todo $x \in A$" é necessária e suficiente para que $M_n(A)$ possa ser imerso em $BL(A^n)$.

2.3 UNITIZAÇÂO E QUASI-INVERSA

Ao longo dessa seção, A representa uma álgebra sobre $\mathbb{F}$, sendo $\mathbb{F}$ o corpo dos reais ou o corpo dos complexos.

Definição 2.3.1. A **unitização** da álgebra normada A sobre $\mathbb{F}$, denotada por $A + \mathbb{F}$, é a álgebra normada consistindo do conjunto $A \times \mathbb{F}$ com a adição, multiplicação por escalar e produto definidos para todos $x, y \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, respectivamente, por:

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta),$$

$$\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta\alpha),$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta).$$

Em $A + \mathbb{F}$ usamos a norma definida por

$$||(x, \alpha)|| = ||x|| + |\alpha|.$$

A partir da definição, a verificação de que $A + \mathbb{F}$ é uma álgebra se resume a verificar as condições da Definição 2.1.1. As propriedades de espaço vetorial são herdadas diretamente da estrutura de espaço vetorial de A e de $\mathbb{F}$ pela forma como definimos soma e multiplicação por escalar. As propriedades (a),(b) e (c) da Definição 2.1.1 podem ser verificadas executando-se as contas. Segue da definição do produto que $(0, 1)$ é uma unidade para $A + \mathbb{F}$. A norma escolhida para $A + \mathbb{F}$ é a norma da soma de $A \times \mathbb{F}$, então sabemos que é de fato uma norma. Vamos verificar que é uma norma-álgebra. Sejam $(x,\alpha),(y,\beta)\in A+\mathbb{F}$, então

$$||(x,\alpha)(y,\beta)|| = ||(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)|| = ||xy+\alpha y+\beta x||+|\alpha\beta| \leq$$

$$||x||\cdot||y||+|\alpha|\cdot||y||+|\beta|\cdot||x||+|\alpha|\cdot|\beta| = (||x||+|\alpha|)(||y||+|\beta|) = ||(x,\alpha)||\cdot||(y,\beta)||.$$

Portanto, $A+\mathbb{F}$ é uma álgebra normada unitária.

Proposição 2.3.1. *A aplicação $a\to(a,0)$ é um isomorfismo isométrico de A em uma subálgebra de $A+\mathbb{F}$.*

Demonstração. Seja $\phi : A\to A+\mathbb{F}$ definida por $\phi(a)=(a,0)$ para cada $a\in A$. Vamos verificar que ϕ é linear.Sejam $a,b\in A$ e $\lambda\in\mathbb{F}$. Então

$$\phi(\lambda a+b) = (\lambda a+b,0) = \lambda(a,0)+(b,0) = \lambda\phi(a)+\phi(b).$$

Além disso,

$$\phi(ab) = (ab,0) = (a,0)(b,0) = \phi(a)\phi(b).$$

Portanto ϕ é um homomorfismo. Além disso, se $\phi(a)=\phi(b)$ então $(a,0)=(b,0)$ o que implica $a=b$. Isto é, ϕ é injetora e, restringindo o contradomínio a imagem da ϕ, temos ϕ um isomorfismo de álgebras. Para verificar que ϕ é uma isometria basta ver que $||\phi(a)|| = ||(a,0)|| = ||a||+|0| = ||a||$.

Concluímos então ϕ é um isomorfismo isométrico de A em uma subálgebra de $A+\mathbb{F}$. □

Definição 2.3.2. Dados elementos x,y em uma álgebra A, o **quasi-produto** de x,y é o elemento $x\circ y$ de A definido por

$$x\circ y = x+y-xy.$$

Proposição 2.3.2. *Seja A uma álgebra e sejam dados $x,y,z\in A$. Então*

(i) $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$,

(ii) $x\circ 0 = 0\circ x = x$.

Demonstração. (i) $(x\circ y)\circ z = (x+y-xy)\circ z = (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z =$ $x+y+z-xy-xz-yz+xyz = x+(y+z-yz)-x(y+z-yz) = x\circ(y+z-yz) = x\circ(y\circ z)$.

(ii) $x\circ 0 = x+0-x0 = x = 0+x-0x = 0\circ x$.

□

A Proposição 2.3.2 mostra que uma álgebra com seu quasi-produto é um semigrupo com identidade 0.

Definição 2.3.3. Seja x um elemento de uma álgebra A. Elementos y, z de A são respectivamente **quasi-inversa à esquerda e à direita** de x se

$$y \circ x = 0, \quad x \circ z = 0.$$

Uma **quasi-inversa** de x é um elemento de A que é quasi-inversa à esquerda e à direita de x. Um elemento que possui uma quasi-inversa é dito **quasi-invertível** (ou **quasi-regular**) e um elemento que não é quasi-invertível é dito **quasi-singular**. Analogamente, x é **quasi-singular à esquerda** (**direita**) se x não é **quasi-invertível à esquerda** (**direita**).

Observação 2.3.1. Se x possui uma quasi-inversa à esquerda y e uma quasi-inversa à direita z, então pela Proposição 2.3.2, temos

$$y = y \circ 0 = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = 0 \circ z = z$$

e x é quasi-invertível. Em particular um elemento tem no máximo uma quasi-inversa.

Notação. A quasi-inversa de um elemento quasi-invertível x de uma álgebra A é denotado por x°. O conjunto de todos os elementos quasi-invertíveis de A é denotado por $\mathrm{q} - \mathrm{Inv}(A)$ e o conjunto de todos os elementos quasi-singulares de A é denotado por $\mathrm{q} - \mathrm{Sing}(A)$.

Exemplo 2.3.1. Antes de prosseguirmos, vamos apresentar um exemplo relevante de álgebra sem unidade para justificar o interesse em estudá-las. Seja $C_0(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \backslash K$, temos $|f(x)| < \epsilon$.

Dado $f \in C_0(\mathbb{R})$, existe compacto K tal que $|f(x)| < 1$ se $x \in \mathbb{R} \backslash K$. Como f é contínua, então $f(K)$ é compacto e, portanto, limitado. Isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| < c$ para todo $x \in K$. Daí, $|f(x)| < \max\{1, c\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, toda função em $C_0(\mathbb{R})$ é limitada. Portanto, como conjuntos, temos $C_0(\mathbb{R}) \subset l^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Vamos mostrar que $C_0(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial e fechado para o produto, donde concluiremos que $C_0(\mathbb{R})$ é uma álgebra, por ser subálgebra de $l^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Sejam então $f, g \in C_0(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$ dado. Existem K_1, K_2 compactos de $\mathbb{R}$ tais que $|f(x)| < \epsilon/2$ se $x \in \mathbb{R} \backslash K_1$ e $|g(x)| < \epsilon/2$ se $x \in \mathbb{R} \backslash K_2$. Tomando $K = K_1 \cup K_2$ temos que K é compacto (pois é união de compactos) e se $x \in \mathbb{R} \backslash K$ então

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \epsilon.$$

Daí, $f + g \in C_0(\mathbb{R})$. Também existe compacto M de $\mathbb{R}$ com $|f(x)| < \epsilon/\lambda$ se $x \in \mathbb{R} \backslash M$. Nesse caso, se $x \in \mathbb{R} \backslash M$ então

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| < \epsilon.$$

Segue então que $\lambda f \in C_0(\mathbb{R})$. Analogamente ao caso da soma, existem L_1, L_2 compactos de $\mathbb{R}$ com $|f(x)| < \sqrt{\epsilon}$ se $x \in \mathbb{R}\backslash L_1$ e $|g(x)| < \sqrt{\epsilon}$ se $x \in \mathbb{R}\backslash L_2$. Tomando $L = L_1 \cup L_2$, temos L compacto e se $x \in \mathbb{R}\backslash L$ temos

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \epsilon.$$

Segue que $fg \in C_0(\mathbb{R})$. Com isso concluímos que $C_0(\mathbb{R})$ é uma subálgebra de $l^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Com a norma herdada de $l^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, isto é, a norma do supremo, temos que $C_0(\mathbb{R})$ é uma álgebra normada. Podemos mostrar ainda que $C_0(\mathbb{R})$ é fechado. Como $l^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ é uma álgebra de Banach, segue que $C_0(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach. Mas não é esse o foco do exemplo.

Vamos provar que $C_0(\mathbb{R})$ não tem unidade. De fato, suponha que $e \in C_0(\mathbb{R})$ é uma unidade. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ devemos ter

$$e(x)e(x) = (e^2)(x) = e(x)$$

Daí, temos $e(x) = 0$ ou $e(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como e deve ser contínua, então $e(\mathbb{R})$ deve ser conexo, isto é, não podemos ter $e(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$. Segue que $e(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $e(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $e \neq 0$, então $e(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, tal e não se anula no infinito. Temos uma contradição com a hipótese de que $e \in C_0(\mathbb{R})$. Portanto, $C_0(\mathbb{R})$ é uma álgebra sem unidade.

Observação 2.3.2. Pode-se provar, usando que todo intervalo fechado é compacto na reta, que $f \in C_0(\mathbb{R})$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Observação 2.3.3. Para o leitor habituado a topologia, o exemplo acima pode ser generalizado definindo $C_0(X)$ de modo análogo para X espaço Hausdorff localmente compacto. Nesse caso também podemos mostrar que $C_0(X)$ é um álgebra de Banach, sendo subálgebra de $l^\infty(X, \mathbb{C})$. Além disso, $C_0(X)$ possui unidade se, e somente se, X é compacto.

Proposição 2.3.3. *Seja A uma álgebra. Então:*

(i) Um elemento x de A tem quasi-inversa à esquerda (direita) y se, e somente se, $(0, 1) - (x, 0)$ tem inversa à esquerda (direita) $(0, 1) - (y, 0)$ em $A + \mathbb{F}$.

(ii) Se A tem unidade, um elemento x de A possui quasi-inversa à esquerda (direita) y se, e somente se, $e - x$ tem inversa à esquerda (direita) $e - y$.

Demonstração. Vamos começar demonstrando (ii). Vejamos que:

$$(e - x)(e - y) = e \iff e - x - y + xy = e \iff e - (x \circ y) = e \iff (x \circ y) = 0,$$

$$(e-y)(e-x)=e \iff e-y-x+yx=e \iff e-(y\circ x)=e \iff (y\circ x)=0,$$

donde segue que $e-y$ é inversa à esquerda (direita) de $e-x$ se, e somente se, y é quasi-inversa à esquerda (direita) de x. Em particular, vale o item (ii).

Vamos provar agora o item (i). Como $A+\mathbb{F}$ tem unidade, então pelo item (ii), $(0,1)-(x,0)$ possui inversa à esquerda (direita) $(0,1)-(y,0)$ se, e somente se, $(x,0)$ tem quasi-inversa à esquerda (direita) $(y,0)$. Além disso,

$$(x,0)\circ(y,0)=(0,0) \iff (x,0)+(y,0)-(x,0)(y,0)=(0,0) \iff$$

$$(x+y-xy,0)=(x\circ y,0)=(0,0) \iff x\circ y=0$$

e analogamente

$$(y,0)\circ(x,0)=(0,0) \iff y\circ x=0.$$

Portanto temos que y é quasi-inversa à esquerda (direita) de x se, e somente se, $(y,0)$ é quasi-inversa à esquerda (direita) de $(x,0)$. Junto com o que mostramos antes, temos a validade do item (i). $\square$

Proposição 2.3.4. *Seja A uma álgebra e $x,y\in A$. Se xy é quasi-invertível à esquerda (direita), então yx é quasi-invertível à esquerda (direita).*

Demonstração. Vejamos que dado $z\in A$

$$(yx)\circ(yzx-yx)=y(xy\circ z)x,$$

$$(yzx-yx)\circ yx=y(z\circ xy)x.$$

Daí, se z é quasi-inversa à esquerda de xy, temos

$$(yzx-yx)\circ yx=y(z\circ xy)x=y0x=0$$

e segue que yx possui quasi-inversa à esquerda $yzx-yx$. Do mesmo modo, se z é quasi-inversa à direita de xy, temos

$$(yx)\circ(yzx-yx)=y(xy\circ z)x=y0x=0$$

donde yx possui quasi-inversa à direita $yzx-yx$. Isto completa a prova. $\square$

Antes do próximo teorema, enunciamos um lema que segue da imersão de A em $A+\mathbb{F}$ (Proposição 2.3.1).

Lema 2.3.1. *Seja A uma álgebra e $a\in A$ qualquer. Então $r((a,0))=r(a)$, com $(a,0)\in A+\mathbb{F}$.*

Demonstração. Como a aplicação $a \to (a, 0)$ preserva o produto, então $(a, 0)^n = (a^n, 0)$. Desse modo,

$$r((a, 0)) = \inf\{||(a, 0)^n||^{1/n}; n \in \mathbb{N}\} = \inf\{||(a^n, 0)||^{1/n}; n \in \mathbb{N}\} = \inf\{||a^n||^{1/n}; n \in \mathbb{N}\} = r(a).$$

Acima usamos que $||(a^n, 0)|| = ||a^n|| + |0| = ||a^n||$. □

Teorema 2.3.1. *Seja a um elemento da álgebra de Banach tal que $r(a) < 1$. Então a é quasi-invertível e*

$$a^\circ = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, de $r(a) < 1$ segue que $r((a, 0)) < 1$ em $A + \mathbb{F}$. Como $A + \mathbb{F}$ é uma álgebra de Banach com unidade segue do Teorema 2.2.1 que

$$((0, 1) - (a, 0))^{-1} = (0, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (a, 0)^n.$$

Seja $(s, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a, 0)^n$. Como $(a, 0)^n = (a^n, 0)$, temos

$$(s, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a^n, 0).$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $(s_k, 0) = \sum_{n=1}^{k} (a^n, 0)$. Pela definição da soma em $A + \mathbb{F}$, temos

$$(s_k, 0) = \left(\sum_{n=1}^{k} a^n, 0\right).$$

Daí, como $\lim_{k\to\infty} (s_k, 0) = (s, 0)$ por construção, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} a^n, 0\right) = (s, 0).$$

Como em $A + \mathbb{F}$ temos a norma da soma, podemos passar para dentro de cada entrada o limite e temos

$$(s, 0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n, 0\right)$$

.

Pela Proposição 2.3.3(i), como $(0, 1) - (a, 0)$ tem inversa $(0, 1) + (s, 0)$, então a possui quasi-inversa $-s$, isto é,

$$a^0 = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n.$$

□

Teorema 2.3.2. *O conjunto dos elementos quasi-invertíveis de uma álgebra de Banach é aberto.*

Demonstração. Seja A uma álgebra de Banach. Notemos que se $(-x,1)$ possui inversa $(-y,\alpha)$ então $\alpha = 1$, pois

$$(0,1) = (-x,1)(-y,\alpha) = (xy - \alpha x - y, \alpha).$$

Temos a caracterização

$$\mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A) = \{x \in A; (-x,1) \in \mathrm{Inv}(A+\mathbb{F})\}. \tag{2.4}$$

De fato, se $x \in \mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A)$ segue que $(0,1)-(x,0) = (-x,1) \in \mathrm{Inv}(A+\mathbb{F})$ pela Proposição 2.3.3(i). Inversamente, se $(-x,1) \in \mathrm{Inv}(A+\mathbb{F})$ então, pelo que mostramos antes, a sua inversa é da forma $(-y,1) = (0,1)-(y,0)$ e pela aplicação do mesmo resultado temos $x \in \mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A)$ com quasi-inversa y.

Mostremos que a aplicação $\phi : A \to A+\mathbb{F}$ dada por $\phi(x) = (-x,1)$ para todo $x \in A$ é contínua. De fato, seja dado $\epsilon > 0$ qualquer e tomemos $\delta = \epsilon$. Se $||x-y|| < \delta = \epsilon$ então $||\phi(x)-\phi(y)|| = ||(-x,1)-(-y,1)|| = ||(y-x,0)|| = ||y-x|| + |0| = ||y-x|| < \delta = \epsilon$.

Temos que $\mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A) = \phi^{-1}(\mathrm{Inv}(A+\mathbb{F}))$ por (2.4). Como $\mathrm{Inv}(A+\mathbb{F})$ é um conjunto aberto pelo Teorema 2.2.2 e ϕ é contínua, então $\mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A)$ é aberto. $\square$

3 O ESPECTRO DE UM ELEMENTO DE UMA ÁLGEBRA NORMADA COMPLEXA

Nesse capítulo vamos apresentar a teoria espectral para uma álgebra complexa. O leitor familiarizado com a teoria espectral para operadores lineares notará uma série de semelhanças. Os resultados centrais nessa seção são o Teorema 3.3 e o Teorema de Gelfand-Mazur. O Teorema 3.3 garante que o espectro nunca é vazio, é compacto e dá sentido ao nome "raio espectral" definido no capítulo anterior. O Teorema de Gelfand-Mazur, por sua vez, nos mostra que toda álgebra complexa em que todos os elementos não nulos são invertíveis (as chamadas álgebras de divisão) é homomorfa aos complexos como álgebra e, além disso, é isometricamente isomorfa se for unitária.

Ao longo deste capítulo, A denotará uma álgebra normada complexa.

Definição 3.1. O **espectro** de um elemento a de A é o conjunto $\mathrm{Sp}(A,a)$ dos números complexos definido como:

(i) Se A possui unidade, $\mathrm{Sp}(A,a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda e - a \in \mathrm{Sing}(A)\}$;

(ii) Se A não possui unidade,

$$\mathrm{Sp}(A,a) = \{0\} \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \neq 0, \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)\right\}.$$

Quando não houver risco de confusão, escreveremos $\mathrm{Sp}(a)$ para denotar $\mathrm{Sp}(A,a)$.

Observação 3.1. Em virtude da Proposição 2.2.4, sabemos que $\lambda e - a \in \mathrm{Sing}(A)$ se, e somente se, $a - \lambda e \in \mathrm{Sing}(A)$. Usaremos ambas as versões para caracterizar $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ para uma álgebra com unidade, a depender da conveniência.

Proposição 3.1. Seja A uma álgebra com unidade e $a \in A$. Então

$$\mathrm{Sp}(a)\backslash\{0\} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \neq 0, \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)\right\}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ com $\lambda \neq 0$. Então $\lambda e - a \in \mathrm{Sing}(A)$. Pela Proposição 2.2.4 temos que $e - \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{Sing}(A)$. Pela Proposição 2.3.3(ii) temos que $\frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)$, pois se $\frac{1}{\lambda}a$ possuísse quasi-inversa, teríamos $e - \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{Inv}(A)$. Disso segue que

$$\mathrm{Sp}(a)\backslash\{0\} \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)\right\}.$$

Reciprocamente, se $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)$, então $e - \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{Sing}(A)$. De fato, se $e - \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{Inv}(A)$, então tomando $y = e - \left(e - \frac{1}{\lambda}a\right)^{-1}$, temos que $e - y$ é a inversa de $e - \frac{1}{\lambda}a$ e segue da Proposição 2.3.3(ii) que y é quasi-inversa de $\frac{1}{\lambda}a$, o que contradiz a hipótese. Daí, temos $\lambda e - a \in \mathrm{Sing}(A)$ pela Proposição 2.2.4 e, portanto, $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Isto completa a prova $\square$

Observação 3.2. O resultado acima nos afirma que, para A com ou sem unidade, podemos usar a definição do espectro de $a \in A$ como $\left\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \neq 0, \dfrac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)\right\}$ quando estamos preocupados apenas com elementos não nulos do espectro.

Vejamos que as duas definições de espectro podem divergir em uma álgebra com unidade, pois uma sempre contém o 0 e a outra não necessariamente. De fato, dado qualquer elemento invertível a de uma álgebra com unidade A, por exemplo, a matriz identidade em $M_2(\mathbb{R})$, temos que $0 \notin \mathrm{Sp}(a)$.

Vamos apresentar agora alguns exemplos.

Exemplo 3.1. Considere X um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $T \in L(X)$, isto é, um operador linear de X em X. Vamos provar que o espectro de T coincide com os autovalores de T.

De fato, se $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$, então $T - \lambda I \in \mathrm{Sing}(L(X))$. Em virtude do Teorema do Núcleo-Imagem, se $T - \lambda I$ não é invertível, então $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Segue que existe $x \in X$ com $x \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)(x) = 0$, donde $T(x) = \lambda x$ e, portanto, λ é autovalor de T. Reciprocamente, se λ é autovalor de T, então $T - \lambda I$ é singular e segue que $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$.

Exemplo 3.2. Considere $X = l^\infty$. Vamos provar que nesse caso, dado $T \in L(X)$, não necessariamente o espectro coincide com os autovalores.

De fato, considere o operador $T : X \to X$ dado por $T((a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)) = (0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$. É fácil mostrar que T é um operador linear. Além disso, como $(1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ não está na imagem da T, então T não é sobrejetora. Portanto, T não é invertível e temos $0 \in \mathrm{Sp}(T)$. Mas, 0 não é autovalor de T.

Para provar isto, suponha que $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ é tal que $T(a) = 0a = 0$. Pela definição da T, isto implica que $a_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Isto é, $T(a) = 0 \iff a = 0$. Portanto, 0 não é autovalor de T.

Exemplo 3.3. Considerando $\mathbb{C}$ como uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, podemos calcular o espectro de cada número complexo. Seja $z \in \mathbb{C}$ qualquer. Temos que

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(z) \iff \lambda - z \in \mathrm{Sing}(\mathbb{C}) = \{0\} \iff \lambda = z.$$

Portanto, $\mathrm{Sp}(z) = \{z\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 3.4. Vamos calcular o espectro de uma função $f \in C_0(\mathbb{R})$, conforme o Exemplo 2.3.1.

Temos, por definição, que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$. Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ se, e somente se, $\dfrac{1}{\lambda}f \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(C_0(\mathbb{R}))$. Se $\dfrac{1}{\lambda}f$ é quasi-invertível, então deve existir $g \in C_0(\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{1}{\lambda}f \circ g = 0$, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{1}{\lambda}f(x) + g(x) - \frac{1}{\lambda}f(x)g(x) = 0.$$

Se $\lambda = f(y)$ para algum $y \in \mathbb{R}$ temos

$$0 = \frac{1}{\lambda}f(y) + g(y) - \frac{1}{\lambda}f(y)g(y) = 1 + g(y) - g(y) = 1$$

o que é uma contradição. Logo, se $\lambda \in f(\mathbb{R})$, então $\frac{1}{\lambda}f$ não é quasi-invertível.

Suponha então que $\lambda \notin f(\mathbb{R})$. Nesse caso, podemos isolar $g(x)$ para cada x obtendo

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) - \lambda}.$$

Tal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está bem definida e é contínua, pois $f(x) \neq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $f(x)$ tende a 0 conforme $|x|$ aumenta. Daí, como $\lambda \neq 0$, temos que $g(x)$ também se anula no infinito, isto é, $g \in C_0(\mathbb{R})$. Portanto, obtemos g tal que $\frac{1}{\lambda}f \circ g = 0$. Pela comutatividade de $\mathbb{C}$, segue que $g \circ \frac{1}{\lambda}f = 0$ e, consequentemente, que $\frac{1}{\lambda}f$ é quasi-invertível. Logo, dado $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}f \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(C_0(\mathbb{R}))$ se, e somente se, $\lambda \in f(\mathbb{R})$. Segue que

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0\} \cup \{f(x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Daí, por exemplo, tomando $f \in C_0(\mathbb{R})$ dado por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, temos que $\mathrm{Sp}(f) = f(\mathbb{R}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Lema 3.1. Seja A uma álgebra sem unidade e seja B a unitização $A + \mathbb{C}$ de A. Então $\mathrm{Sp}(A, a) = \mathrm{Sp}(B, (a, 0))$ para todo $a \in A$.

Demonstração. Dados $x, y \in A$ e $\eta \in \mathbb{C}$, temos

$$(x, 0) \circ (y, \eta) = (x, 0) + (y, \eta) - (x, 0)(y, \eta) = (x, 0) + (y, \eta) - (xy + \eta x, 0) =$$

$$(x + y - xy - \eta x, \eta) = (x \circ y - \eta x, \eta).$$

Portanto, se $(x, 0) \circ (y, \eta) = (0, 0)$, temos $\eta = 0$ e $x \circ y = 0$. Substituindo $\eta = 0$ e $x \circ y = 0$ na última igualdade vemos que também vale a volta. Analogamente, temos $(y, \eta) \circ (x, 0) = (0, 0)$ se, e somente se, $\eta = 0$ e $y \circ x = 0$.

O que argumentamos acima implica que x é quasi-invertível se, e somente se, $(x, 0)$ é quasi-invertível. Além disso, a quasi-inversa de $(x, 0)$, caso exista, tem a forma $(y, 0)$ onde $y = x^\circ$. Como um elemento que não é quasi-invertível é quasi-singular, então também temos: x é quasi-singular de A se, e somente se, $(x, 0)$ é quasi-singular de B.

Com isto, dado $a \in A$ e $\lambda \neq 0$, temos:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A, a) \iff \frac{1}{\lambda}a \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(A) \iff \left(\frac{1}{\lambda}a, 0\right) \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(B).$$

Pela Proposição 2.3.3(ii), temos

$$\left(\frac{1}{\lambda}a, 0\right) \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(B) \iff (0, 1) - \left(\frac{1}{\lambda}a, 0\right) \in \mathrm{Sing}(B).$$

Pela Proposição 2.2.4, temos

$$(0,1) - \left(\frac{1}{\lambda}a, 0\right) \in \mathrm{Sing}(B) \iff \lambda(0,1) - (a,0) \in \mathrm{Sing}(B) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(B,(a,0)).$$

Assim, temos $\mathrm{Sp}(A,a)\backslash\{0\} = \mathrm{Sp}(B,(a,0))\backslash\{0\}$. Temos $0 \in \mathrm{Sp}(A,a)$ por definição e temos $0 \in \mathrm{Sp}(B,(a,0))$, pois $(a,0) - 0(0,1) = (a,0) \in \mathrm{Sing}(B)$ para todo $a \in A$. Isto completa a prova. □

Proposição 3.2. Sejam $a, b \in A$. Então

$$\mathrm{Sp}(ab)\backslash\{0\} = \mathrm{Sp}(ba)\backslash\{0\}.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.1, temos que $\lambda \in \mathrm{Sp}(ab)\backslash\{0\}$ se, e somente se, $\frac{1}{\lambda}ab \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)$ e $\lambda \in \mathrm{Sp}(ba)\backslash\{0\}$ se, e somente se, $\frac{1}{\lambda}ba \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A)$, tendo A unidade ou não.

Mas, pela Proposição 2.3.4, temos para $\lambda \neq 0$ que $\frac{1}{\lambda}ab \in \mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A) \iff \frac{1}{\lambda}ba \in \mathrm{q}-\mathrm{Inv}(A)$. Daí, temos

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(ab)\backslash\{0\} \iff \frac{1}{\lambda}ab \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A) \iff$$
$$\frac{1}{\lambda}ba \in \mathrm{q}-\mathrm{Sing}(A) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(ba)\backslash\{0\}.$$

Segue que $\mathrm{Sp}(ab)\backslash\{0\} = \mathrm{Sp}(ba)\backslash\{0\}$. □

Proposição 3.3. Seja A uma álgebra com unidade, seja π um homomorfismo de A na álgebra B com unidade tal que $\pi(e)$ é a unidade de B e seja λ a representação regular à esquerda de A em A. Então:

(i) $\mathrm{Sp}(B,\pi(a)) \subset \mathrm{Sp}(A,a)$ para todo $a \in A$.

(ii) $\mathrm{Sp}(L(A),\lambda(a)) = \mathrm{Sp}(A,a)$ para todo $a \in A$.

Demonstração. Vejamos que se $x \in \mathrm{Inv}(A)$, então $\pi(x) \in \mathrm{Inv}(B)$, pois $\pi(x^{-1})\pi(x) = \pi(x^{-1}x) = \pi(e) = \pi(xx^{-1}) = \pi(x)\pi(x^{-1})$. Como $\pi(e)$ é a unidade de B, segue que $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1})$ e, em particular, $\pi(x) \in \mathrm{Inv}(B)$. Portanto, se $\pi(x) \in \mathrm{Sing}(B)$ para algum $x \in A$, devemos ter $x \in \mathrm{Sing}(A)$.

Pelo discutido acima, se $\alpha \in \mathrm{Sp}(B,\pi(a))$ então $\pi(\alpha e - a) = \alpha\pi(e) - \pi(a) \in \mathrm{Sing}(B)$, donde $\alpha e - a \in \mathrm{Sing}(A)$ e segue que $\alpha \in \mathrm{Sp}(A,a)$. Isto prova o item (i).

Para (ii), temos da Proposição 2.2.8 que $x \in \mathrm{Sing}(A) \iff \lambda(x) \in \mathrm{Sing}(L(A))$. Temos então, para cada $a \in A$,

$$\alpha \in \mathrm{Sp}(A,a) \iff \alpha e - a \in \mathrm{Sing}(A) \iff \lambda(\alpha e - a) \in \mathrm{Sing}(L(A)) \iff$$
$$\alpha I - \lambda(a) \in \mathrm{Sing}(L(A)) \iff \alpha \in \mathrm{Sp}(L(A),\lambda(a)).$$

Segue que $\mathrm{Sp}(L(A),\lambda(a)) = \mathrm{Sp}(A,a)$ para todo $a \in A$. □

Notação. Dado um subconjunto não-vazio aberto D de $\mathbb{C}$, denotamos por $P(D)$ a álgebra de todos os polinômios complexos em D e por $R(D)$ a álgebra de todas as funções racionais em D sem polos em D, isto é, funções $f : D \to \mathbb{C}$ da forma $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ para cada $z \in D$, onde $p, q \in P(D)$ e q não tem raízes em D. Consideramos $P(D)$ e $R(D)$ como subálgebras de $l^\infty(D, \mathbb{C})$, isto é, temos soma, multiplicação por escalar e produto definidos ponto a ponto.

De agora em diante, suponhamos que A possui uma unidade e seja $a \in A$. Dado $p \in P(D)$ existem $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$$

para todo $z \in D$, pois p é um polinômio. Além disso, como D tem infinitos pontos, se $p(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n$ para todo $z \in D$, então temos

$$0 = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)z + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)z^n$$

para todo $z \in D$. Como D possui infinitos pontos e um polinômio não nulo de grau n pode ter no máximo n raízes, então $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Desse modo, cada polinômio em $P(D)$ é caracterizado por um conjunto único de coeficientes. Definimos então $p(a)$ por

$$p(a) = \alpha_0 e + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n.$$

Pela discussão acima sobre a unicidade dos coeficientes, $p(a)$ está bem definido. É uma questão de manipulação formal verificar que a aplicação $p \to p(a)$ de $P(D)$ em A é um homomorfismo de álgebras.

Queremos estender o homomorfismo $p \to p(a)$ para um homomorfismo de $R(D)$ em A. Notamos primeiro que uma condição necessária para isto é que

$$\mathrm{Sp}(a) \subset D.$$

Para ver isto, seja $\lambda \in \mathbb{C} \backslash D$ e seja $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$ para todo $z \in D$. Então $f \in R(D)$ e

$$f(z)(\lambda - z) = (\lambda - z)f(z) = 1 \ \forall z \in D.$$

Se $f(a)$ denota a imagem de f sob o homomorfismo de $R(D)$ em A que estende o homomorfismo $p \to p(a)$ de $P(D)$ em A temos

$$f(a)(\lambda e - a) = (\lambda e - a)f(a) = e,$$

donde $\lambda e - a \in \mathrm{Inv}(A)$, isto é, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(a)$. Daí, temos que, se $\lambda \in \mathbb{C} \backslash D$, então $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(a)$, isto é, $\mathrm{Sp}(a) \subset D$.

Antes da próxima proposição, precisamos do seguinte lema

Lema 3.2. Seja A uma álgebra com unidade, $a \in A$ e D um aberto não vazio de $\mathbb{C}$. Então dados $p, q \in P(D)$, temos $p(a)q(a) = q(a)p(a)$ e se $p(a) \in \text{Inv}(A)$, então $q(a)[(p(a)]^{-1} = [p(a)]^{-1}q(a)$. Além disso, dados $p_1, p_2, \cdots, p_n \in P(D)$, se definimos $f(a) = p_1(a)p_2(a)\cdots p_n(a)$, temos $f(a) \in \text{Sing}(A)$ se, e somente se, $p_k(a) \in \text{Sing}(A)$ para algum $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Demonstração. Para verificarmos que $p(a)$ e $q(a)$ comutam, basta aplicar a propriedade distributiva para abrir o produto $p(a)q(a)$ e o produto $q(a)p(a)$ em termos das potências de a e verificar que são iguais.

Suponhamos que $p(a)$ é invertível. Pela Proposição 2.2.2 temos que $[p(a)]^{-1} \in \{p(a)\}^{cc}$. Como $q(a) \in \{p(a)\}^c$, então $q(a)$ e $[p(a)]^{-1}$ comutam.

Para a última parte, como $\text{Inv}(A)$ é um grupo, temos que $f(a) \in \text{Inv}(A)$ sempre que $p_1(a), \cdots, p_n(a) \in \text{Inv}(A)$. Pela contrapositiva, vale a ida. Para a volta, supomos que $p_k(a) \in \text{Sing}(A)$ para algum $k \in \{1, \cdots, n\}$. Supomos, por absurdo, que $f(a)$ é invertível. Pela comutatividade dos polinômios e suas inversas que provamos anteriormente, temos que

$$e = f(a)[f(a)]^{-1} = p_1(a)\cdots p_n(a)[f(a)]^{-1} =$$

$$p_k(a)p_1(a)\cdots p_{k-1}(a)p_{k+1}(a)\cdots p_n(a)[f(a)]^{-1} =$$

$$p_1(a)\cdots p_{k-1}(a)p_{k+1}(a)\cdots p_n(a)[f(a)]^{-1}p_k(a).$$

Daí segue que $p_k(a) \in \text{Inv}(A)$, com $[p_k(a)]^{-1} = p_1(a)\cdots p_{k-1}(a)p_{k+1}a\cdots p_n(a)[f(a)]^{-1}$. Isto contradiz a hipótese. Logo, temos $f(a) \in \text{Sing}(A)$. □

Proposição 3.4. Seja A uma álgebra com unidade, seja $a \in A$, seja D uma vizinhança aberta não-vazia de $\text{Sp}(a)$ e seja $p \in P(D)$, com p não constante. Então

$$\text{Sp}(p(a)) = \{p(z); z \in \text{Sp}(a)\}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra e o fato que $\lambda - p(z)$ para cada $z \in A$ é um polinômio, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda - p(z) = \beta(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)\cdots(\alpha_n - z)$$

para todo $z \in D$.

Usando o homomorfismo de $P(D)$ em A, temos

$$\lambda e - p(a) = \beta(\alpha_1 e - a)(\alpha_2 e - a)\cdots(\alpha_n e - a).$$

Como p não é o polinômio constante, temos $\beta \neq 0$. Nesse caso, $\lambda e - p(a)$ é singular se, e somente se, $\alpha_k e - a$ é singular para algum $k \in \{1, \cdots, n\}$ pelo lema anterior.

Portanto $\lambda \in \mathrm{Sp}(p(a))$ se, e somente se, $\alpha_k \in \mathrm{Sp}(a)$ para algum $k \in \{1, \cdots, n\}$. Isto é, $\lambda \in \mathrm{Sp}(p(a))$ se, e somente se, alguma raiz de $\lambda - p(z)$ pertence a $\mathrm{Sp}(a)$. Como w é raiz de $\lambda - p(z)$ se, e somente se, $p(w) = \lambda$, então

$$\mathrm{Sp}(p(a)) = \{p(z); z \in \mathrm{Sp}(a)\}.$$

□

Definição 3.2. Sejam A uma álgebra com unidade, $a \in A$, D uma vizinhança aberta não-vazia de $\mathrm{Sp}(a)$ e $f \in R(D)$. Então $f = p/q$, onde $p/q \in P(D)$ e q não tem raízes em D. Como $\mathrm{Sp}(a) \subset D$, então pela Proposição 3.4 temos que $0 \notin \mathrm{Sp}(q(a))$, pois $q(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathrm{Sp}(a)$. Ou seja, $q(a) - 0e \notin \mathrm{Sing}(A)$, donde temos $q(a) \in \mathrm{Inv}(A)$. Definimos então

$$f(a) = p(a)[q(a)]^{-1}.$$

Pela unicidade dos coeficientes para p e q que argumentamos anteriormente, a escrita da f é única a menos de fatores em comum no numerador e denominador. Para provarmos que $f(a)$ está bem definido, vejamos que se $f = p_1/q_1$ e $f = p_2/q_2$, então $p_1q_2 = p_2q_1$. Pelo homomorfismo de $P(D)$ em A temos $p_1(a)q_2(a) = p_2(a)q_1(a)$. Como $q_1(a)$ e $q_2(a)$ são invertíveis, então $f(a) = p_1(a)[q_1(a)]^{-1} = p_2(a)[q_2(a)]^{-1}$.

Proposição 3.5. Seja A uma álgebra com unidade, seja $a \in A$ e seja D uma vizinhança aberta não-vazia de $\mathrm{Sp}(a)$. A aplicação $f \to f(a)$ é um homomorfismo de $R(D)$ em A que estende o homomorfismo de $P(D)$ em A e satisfaz

$$\mathrm{Sp}(f(a)) = \{f(z); z \in \mathrm{Sp}(a)\}$$

para cada $f \in R(D)$ com f não constante.

Demonstração. Dado $f \in P(D)$, então $f \in R(D)$ e $f(a)$ é definido do mesmo modo no homomorfismo de $P(D)$ em A e no homomorfismo de $R(D)$ em A. Isto mostra que $f \to f(a)$ é uma extensão do homomorfismo de $P(D)$ em A. Sejam $x, y \in R(D)$ com $x = f_1/g_1$ e $y = p_2/q_2$ e seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Chamando de ϕ o homomorfismo de $R(D)$ em A, isto é, $\phi(f) = f(a)$ para todo $f \in R(D)$, temos:

$$\phi(\alpha x + y) = \phi\left(\alpha\frac{f1}{g1} + \frac{f2}{g2}\right) = \phi\left(\frac{\alpha f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}\right) =$$

$$[\alpha f_1(a)g_2(a) + f_2(a)g_1(a)][(g_1(a))(g_2(a))]^{-1} =$$

$$\alpha f_1(a)[g_1(a)]^{-1} + f_2(a)[g_2(a)]^{-1} = \alpha\phi(x) + \phi(y)$$

e

$$\phi(xy) = \phi\left(\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}\right) = [f_1(a)f_2(a)][g_1(a)g_2(a)]^{-1} = f_1(a)[g_1(a)]^{-1}f_2(a)[g_2(a)]^{-1} = \phi(x)\phi(y).$$

Temos então que a aplicação $f \to f(a)$ é de fato um homomorfismo de $R(D)$ em A.

Seja f não constante e $f = p/q$. Então, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda - f(z) = \lambda - \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\lambda q(z) - p(z)}{q(z)} = \beta(\alpha_1 - z) \cdots (\alpha_n - z) q(z)^{-1}$$

para todo $z \in D$.

Usando o homomorfismo de $R(D)$ em A, temos

$$\lambda e - f(a) = \lambda e - p(a)[q(a)]^{-1} = \beta(\alpha_1 e - a) \cdots (\alpha_n e - a)[q(a)]^{-1}. \tag{3.1}$$

Como f não é constante, segue que $\beta \neq 0$. Pelo Lema 3.2, temos que $\beta(\alpha_1 e - a) \cdots (\alpha_n e - a) \in \mathrm{Sing}(A)$ se, e somente se, $\alpha_i e - a \in \mathrm{Sing}(A)$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Como $[q(a)]^{-1}$ comuta com $\beta(\alpha_1 e - a) \cdots (\alpha_n e - a)$, então podemos repetir o mesmo argumento usado na demonstração da última parte do Lema 3.2 para concluir, a partir de (3.1), que $\lambda e - f(a)$ é singular se, e somente se, $\beta(\alpha_1 e - a) \cdots (\alpha_n e - a)$ é singular ou $[q(a)]^{-1}$ é singular. Como $[q(a)]^{-1}$ é invertível, então $\beta(\alpha_1 e - a) \cdots (\alpha_n e - a)$ é singular se, e somente se, $\lambda e - f(a)$ é singular.

Segue então que $\lambda e - f(a) \in \mathrm{Sing}(A)$ se, e somente se, $\alpha_i e - a \in \mathrm{Sing}(A)$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Ou seja, temos que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f(a))$ se, e somente se, $\alpha_i \in \mathrm{Sp}(a)$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Lembrando que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são as raízes de $\lambda - f(z)$, isto é, os números complexos z tais que $f(z) = \lambda$, temos $\lambda \in \mathrm{Sp}(f(a))$ se, e somente se, $\lambda = f(z)$ para algum $z \in \mathrm{Sp}(a)$. Ou seja,

$$\mathrm{Sp}(f(a)) = \{f(z); z \in \mathrm{Sp}(a)\}.$$

$\square$

Antes do próximo teorema, vamos provar a seguinte identidade para os números complexos.

Lema 3.3. Para todo $z \in \mathbb{C}$, se $w_1, w_2, \cdots, w_n$ são as raízes de $z^n - 1$, então vale

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - w_k^{-1} z} = \frac{1}{1 - z^n}.$$

Demonstração. Observemos que para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos

$$\frac{1}{1 - w_k^{-1} z} = \frac{w_k}{w_k - z}.$$

Daí temos

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - w_k^{-1} z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{w_k - z} =$$

$$\frac{1}{n}\frac{\sum_{k=1}^{n} w_k(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_{k-1}-z)(w_{k+1}-z)\cdots(w_n-z)}{(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_n-z)}.$$

Como $(z-w_1)(z-w_2)\cdots(z-w_n)=z^n-1$ então $(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_n-z)=(-1)^n(z^n-1)$. Substituindo, temos

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-w_k^{-1}z}=\frac{(-1)^n}{n(z^n-1)}\sum_{k=1}^{n} w_k(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_{k-1}-z)(w_{k+1}-z)\cdots(w_n-z). \tag{3.2}$$

Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_{k-1}-z)(w_{k+1}-z)\cdots(w_n-z)=(-1)^{n+1}n$$

Observemos que no polinômio $w_k(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_{k-1}-z)(w_{k+1}-z)\cdots(w_n-z)$ o coeficiente do z^i com $1\leq i<n$ é

$$(-1)^i \sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-i-1}\leq n}^{k_j\neq k \text{ para cada } j\in\{1,2,\cdots,n-i-1\}} w_{k_1}w_{k_2}\cdots w_{k_{n-i-1}}w_k.$$

Isto é, são todos os possíveis produtos com $n-i$ termos distintos de $w_1,w_2,\cdots,w_n$, incluindo necessariamente w_k. O coeficiente de z^i de

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_{k-1}-z)(w_{k+1}-z)\cdots(w_n-z)$$

é então

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^i \sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-i-1}\leq n}^{k_j\neq k \text{ para cada } j\in\{1,2,\cdots,n-i-1\}} w_{k_1}w_{k_2}\cdots w_{k_{n-i-1}}w_k. \tag{3.3}$$

Na k-ésima parcela do primeiro somatório estão incluídos todos os produtos de $n-i$ termos distintos, com um deles sendo o w_k. Então, em (3.3), estão somados todos os possíveis produtos de $n-i$ termos distintos de $w_1,w_2,\cdots,w_n$. Mais ainda, por simetria, cada um deles é somado o mesmo número de vezes. Isto é, temos que (3.3) é igual a

$$(-1)^i N(i)\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leq n} w_{k_1}w_{k_2}\cdots w_{k_{n-i}}, \tag{3.4}$$

onde $N(i)$ é um número natural.

O coeficiente do z^i em $(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_n-z)$ é

$$(-1)^i\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leq n} w_{k_1}w_{k_2}\cdots w_{k_{n-i}}.$$

Como $(w_1-z)(w_2-z)\cdots(w_n-z)=(z^n-1)(-1)^n$, então o coeficiente do z^i deve ser zero. Isto é,

$$\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leq n} w_{k_1}w_{k_2}\cdots w_{k_{n-i}}=0.$$

Daí, o coeficiente de z^i dado por (3.4) é zero. Lembrando que isso é valido para todo i com $1 \leq i < n$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(w_1 - z)(w_2 - z)\cdots(w_{k-1} - z)(w_{k+1} - z)\cdots(w_n - z) = nw_1w_2\cdots w_n,$$

pois o único termo não nulo será o independente.

Por fim, olhando novamente para $(w_1 - z)(w_2 - z)\cdots(w_n - z) = (z^n - 1)(-1)^n$, temos $w_1w_2\cdots w_n = (-1)^{n+1}$ pela comparação dos termos independentes. Substituindo

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(w_1 - z)(w_2 - z)\cdots(w_{k-1} - z)(w_{k+1} - z)\cdots(w_n - z) = n(-1)^{n+1}$$

em (3.2) temos

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - w_k^{-1}z} = \frac{(-1)^n}{n(z^n - 1)} n(-1)^{n+1} = -\frac{1}{z^n - 1} = \frac{1}{1 - z^n}.$$

□

Teorema 3.1. Seja a um elemento de uma álgebra normada complexa A. Então existe um número complexo λ em $\mathrm{Sp}(a)$ tal que $|\lambda| \geq r(a)$.

Demonstração. Se a álgebra normada A não possui unidade, então pelo Lema 3.1, temos $\mathrm{Sp}(A, a) = \mathrm{Sp}(B, (a, 0))$ com $B = A + \mathbb{C}$. Temos ainda $r(a) = r((a, 0))$ pelo Lema 2.3.1. Portanto, se o resultado vale para álgebras com unidade, existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(B, (a, 0))$ com $|\lambda| \geq r((a, 0))$ e segue que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A, a)$ e $|\lambda| \geq r(a)$.

Podemos então assumir que A possui unidade sem perda de generalidade. Se $0 \notin \mathrm{Sp}(a)$, então $a \in \mathrm{Inv}(A)$ e $a^n(a^{-1})^n = e$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < ||e|| \leq ||a^n|| \cdot ||a^{-1}||^n \Rightarrow$$

$$0 < ||e||^{1/n} \leq ||a^n||^{1/n} \cdot ||a^{-1}|| \Rightarrow$$

$$0 < \frac{||e||^{1/n}}{||a^{-1}||} \leq ||a^n||^{1/n}.$$

Como $||e|| = ||e^2|| \leq ||e||^2$, então $||e|| \geq 1$ e, em particular, $||e||^{1/n} \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $||a^n||^{1/n} \geq \dfrac{1}{||a^{-1}||}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e temos $r(a) = \inf ||a^n||^{1/n} \geq \dfrac{1}{||a^{-1}||} > 0$.

Disso, temos que $r(a) = 0$ implica que $0 \in \mathrm{Sp}(a)$. Temos então $|0| \geq r(a) = 0$. Precisamos então verificar o caso em que $r(a) > 0$.

Seja $a \in A$ com $r(a) = 1$ e supomos que existe $\eta > 1$ tal que o anel $E = \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq ||z|| \leq \eta\}$ tenha uma interseção vazia com $\mathrm{Sp}(a)$. Daí, temos $ze - a \in \mathrm{Inv}(A)$ para cada $z \in E$. Pela Proposição 2.2.6, temos que a aplicação $z \to ze(ze - a)^{-1}$ é uma aplicação contínua de E em A (pois a aplicação $z \to ze - a$ e a função inversa são contínuas, donde $(ze-a)^{-1}$ é contínua. A aplicação $z \to ze$ e o produto são contínuos, donde segue a continuidade de $z \to ze(ze-a)^{-1}$). Como E é compacto, então a aplicação é uniformemente contínua e, portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||\lambda e(\lambda e - a)^{-1} - \mu e(\mu e - a)^{-1}|| < \epsilon \tag{3.5}$$

para todo $\lambda, \mu \in E$ tais que $||\lambda - \mu|| \leq \delta$.

Dado um inteiro positivo n, sejam $w_1, w_2, \cdots, w_n$ as raízes do polinômio $z^n - 1$ e consideremos a identidade do Lema 3.3

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - w_k^{-1}z} = \frac{1}{1-z^n}.$$

Seja $D = \mathbb{C}\backslash E$. Então D é uma vizinhança aberta (pois E é fechado) de $\mathrm{Sp}(a)$ (pois $\mathrm{Sp}(a) \cap E = \emptyset$). Dado $\lambda \in E$, temos para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$ que $\lambda w_k \in E$, pois $|\lambda w_k| = |\lambda||w_k| = |\lambda|$, já que todas as raízes de $z^n - 1$ têm norma 1. Daí a relação

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - w_k^{-1}\lambda^{-1}z} = \frac{1}{1-\lambda^{-n}z^n}, \tag{3.6}$$

obtida usando $\lambda^{-1}z$ na identidade acima, relaciona funções racionais de $R(D)$. De fato, temos apenas polinômios em z envolvidos e as raízes de $1 - \lambda^{-n}z^n$ e de $1 - w_k^{-1}\lambda^{-1}z$ (que são os números $\lambda w_1, \lambda w_2, \cdots, \lambda w_n$) estão em E e temos $D = \mathbb{C}\backslash E$.

Portanto, pela Proposição 3.5 que garante que a aplicação $f \to f(a)$ de $R(D)$ em A é um homomorfismo e, de (3.6), temos:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e - w_k^{-1}\lambda^{-1}a)^{-1} = (e - \lambda^{-n}a^n)^{-1} \tag{3.7}$$

para cada $\lambda \in E$.

Seja

$$c_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e - w_k^{-1}\lambda^{-1}a)^{-1}$$

para cada $\lambda \in E$. Dados $\lambda, \mu \in E$ com $|\lambda - \mu| < \delta$ e $k \in \{1, \cdots, n\}$, temos $\lambda w_k, \mu w_k \in E$ e $|\lambda w_k - \mu w_k| < \delta$, pois $|w_k| = 1$. Portanto, por (3.5) temos

$$||\lambda w_k e(\lambda w_k e - a)^{-1} - \mu w_k e(\mu w_k e - a)^{-1}|| < \epsilon$$

para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$. Então, para $\lambda, \mu \in E$ com $|\lambda - \mu| < \delta$, temos

$$||c_n(\lambda) - c_n(\mu)|| < \epsilon \tag{3.8}$$

pois $(e - w_k^{-1}\lambda^{-1}a)^{-1} = [(w_k\lambda - a)/(w_k\lambda)]^{-1} = \lambda w_k(\lambda w_k - a)^{-1}$ para cada $\lambda \in E$ e cada $k \in \{1, \cdots, n\}$. Vejamos que o δ para valer (3.8) não depende de n, donde essa relação vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $|\lambda| > 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} e - \lambda^{-n}a^n = e. \tag{3.9}$$

De fato, dado ξ com $1 < \xi < |\lambda|$, sabemos que $||a^n||^{1/n} < \xi$ para todo n suficientemente grande, pois $1 = r(a) = \lim ||a^n||^{1/n}$. Daí, temos $||a^n|| < \xi^n$ para n suficientemente grande e, em particular, para n grande

$$0 \leq ||\lambda^{-n}a^n|| = |\lambda|^{-n}||a^n|| < \xi^n|\lambda|^{-n} = \left(\frac{\xi}{|\lambda|}\right)^n.$$

Como $\left(\frac{\xi}{|\lambda|}\right) < 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\xi}{|\lambda|}\right)^n = 0$$

e segue do teorema do confronto que

$$\lim_{n\to\infty} ||\lambda^{-n}a^n|| = 0$$

donde vale o afirmado em (3.9).

Pela Proposição 2.2.6 e (3.7) segue que $\lim_{n\to\infty} c_n(\lambda) = e$.

Tomamos agora $\lambda \in E$ com $|\lambda| > 1$ e $||\lambda e - e|| < \delta$. Então, por (3.8),

$$||c_n(\lambda) - c_n(1)|| < \epsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, como $c_n(\lambda) \to e$, temos

$$||e - c_n(1)|| \leq \epsilon$$

para n suficientemente grande. Isto implica que $c_n(1) \to e$ quando $n \to \infty$. Por (3.7) temos $c_n(1) = (e - a^n)^{-1}$, donde $\lim(e - a^n)^{-1} = e$. Pela continuidade da inversa e o fato que $e^{-1} = e$, temos $\lim e - a^n = e$ e segue que $\lim a^n = 0$. Mas isto é uma contradição, pois

$$||a^n|| \geq (r(a))^n = 1$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Essa contradição implica que $E \cap \mathrm{Sp}(a)$ é não-vazio, isto é, existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ tal que $\eta \geq |\lambda| \geq 1 = r(a)$. Isto prova o que queríamos para o caso $r(a) = 1$.

Se a é tal que $r(a) \neq 0$, então $b = r(a)^{-1}a$ está bem definido. Temos que

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} ||b^n||^{1/n} = \lim_{n\to\infty} ||r(a)^{-n}a^n||^{1/n} = \lim_{n\to\infty} [|r(a)|^{-n}||a^n||]^{1/n} =$$

$$r(a)^{-1} \lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n} = r(a)^{-1}r(a) = 1.$$

Como $r(b) = 1$, então existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(b)$ com $|\alpha| \geq 1 = r(b)$. Temos $\alpha e - b \in \mathrm{Sing}(A)$ e, pela Proposição 2.2.4, temos $\alpha r(a)e - a = \alpha r(a)e - r(a)b = r(a)(\alpha e - b) \in \mathrm{Sing}(A)$, donde $\alpha r(a) \in \mathrm{Sp}(a)$. Daí, fazendo $\lambda = \alpha r(a)$ temos $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ e $|\lambda| \geq r(a)$ pois $|\alpha| \geq 1$. Isto prova o teorema no caso geral. $\square$

Corolário 3.1. O espectro de um elemento de uma álgebra normada complexa nunca é vazio.

Com esse último teorema, podemos provar um importante resultado da teoria de álgebra, o Teorema de Gelfand-Mazur.

Definição 3.3. Uma **álgebra de divisão normada** é uma álgebra normada A com unidade tal que

$$Inv(A) = A\backslash\{0\}.$$

Teorema 3.2 (Teorema de Gelfand-Mazur)**.** Seja D uma álgebra de divisão normada complexa. Então $D = \mathbb{C}e$. Em particular, se D é uma álgebra de divisão unitária, então D é isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $a \in D$. Pelo 3.1, existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Portanto, $\lambda e - a \in \mathrm{Sing}(D) = \{0\}$, isto é, $a = \lambda e$. Isto prova que $D = \mathbb{C}e$.

Supondo que $||e|| = 1$, temos que a aplicação $\phi : \mathbb{C} \to D$ dada por $\phi(\lambda) = \lambda e$ é um isomorfismo isométrico. De fato, é fácil verificar que ϕ é linear e multiplicativa. O fato de ϕ ser sobrejetora segue de $D = \mathbb{C}e$ que provamos anteriormente. Para ser uma isometria, basta ver que $||\phi(\lambda)|| = ||\lambda e|| = |\lambda| \cdot ||e|| = |\lambda|$. E, como ϕ é uma isometria, segue que ϕ é injetora. Isto completa a prova. $\square$

A injetividade segue do fato que $\lambda e = 0$ implica que $\lambda = 0$, pois $0 \in \mathrm{Sing}(D)$ e $\lambda e \in \mathrm{Inv}(A)$ para todo $\lambda \neq 0$, isto é, $\phi(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = 0$

Observação 3.3. Para álgebras de divisão reais, D não precisa ser isomorfo a $\mathbb{C}$. É fácil ver que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ considerados como álgebras sobre $\mathbb{R}$ são álgebras de divisão. Outro exemplo são os quatérnions considerados como álgebra sobre $\mathbb{R}$. Podemos mostrar que toda álgebra de divisão unitária real é isomorfa a um dos desses três exemplos, esse é o Teorema 14.7 de (1).

Teorema 3.3. Seja a um elemento de uma álgebra de Banach complexa A. Então $\mathrm{Sp}(a)$ é um subconjunto compacto não-vazio de $\mathbb{C}$ e

$$\max\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\} = r(a).$$

Demonstração. Analogamente ao feito na demonstração do Teorema 3.1, podemos assumir que A possui unidade. Seja $|\lambda| > \rho = r(a)$. Então $r(\lambda^{-1}a) < 1$ e, pelo Teorema 2.2.1, segue que $e - \lambda^{-1}a$ é invertível. Pela Proposição 2.2.4 segue que $\lambda e - a \in \mathrm{Inv}(A)$ e $\lambda \notin \mathrm{Sp}(a)$. Isto prova que $\mathrm{Sp}(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \rho\}$. Junto com o Teorema 3.1, temos

$$\max\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\} = r(a).$$

Como $\mathrm{Sp}(a)$ é limitado, resta mostrarmos que é fechado para concluirmos que é compacto. Mas vejamos que $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(a)$, ou seja, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda e - a \in \mathrm{Inv}(A)$, é a imagem inversa do conjunto $\mathrm{Inv}(A)$ com respeito a aplicação contínua $\lambda \to \lambda e - a$

de $\mathbb{C}$ em A. Como $\mathrm{Inv}(A)$ é um conjunto aberto pelo Teorema 2.2.2, segue que $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(a)$ é aberto, donde $\mathrm{Sp}(a)$ é fechado. $\square$

4 IDEAIS E ÁLGEBRA QUOCIENTE

Neste capítulo buscaremos estender o conceito dos ideais de anéis para álgebras. Como veremos, pedimos que todo ideal seja um subespaço vetorial além do que pedimos quando estudamos anéis. Também introduziremos o conceito de unidade modular, permitindo provar certas propriedades conhecidas para álgebras com unidade em um contexto geral. Nas primeiras proposições, estabeleceremos algumas propriedades básicas e são de particular interesse as que envolvem ideais maximais. Depois, introduziremos o conceito de álgebra quociente e estabeleceremos uma norma canônica que faz a álgebra quociente herdar a propriedade de ser completa. Após, vamos caracterizar os ideais de uma álgebra quociente na Proposição 4.9 e obteremos uma propriedade importante para o espectro de um elemento na álgebra quociente na Proposição 4.10. Vamos terminar caracterizando os ideais de $M_n(A)$, retomando o exemplo das matrizes de elementos de uma álgebra.

Ao longo dessa seção, consideramos A uma álgebra sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Notação. Seja A uma álgebra com ou sem unidade. Dado $a \in A$ e subconjuntos E, F de A denotamos por EF, $E(1-a)$ e $(1-a)E$ respectivamente os conjuntos $\{xy; x \in E, y \in F\}$, $\{x - xa; x \in E\}$, $\{x - ax; x \in E\}$.

Definição 4.1. Um **ideal à esquerda** de A é um subespaço vetorial J de A tal que $AJ \subset J$. Um elemento u de A é dito uma **unidade modular à direita** para um subespaço vetorial E de A se $A(1-u) \subset E$. Um **ideal modular à esquerda** é um ideal à esquerda para o qual existe uma unidade modular à direita.

Um ideal à esquerda J de A é **próprio** se $J \neq A$, **maximal** se é próprio e não está contido propriamente em outro ideal à esquerda próprio, **modular maximal** se é próprio, modular e não está contido propriamente em nenhum outro ideal modular à esquerda próprio.

Definições semelhantes se aplicam para **ideais à direita** e **unidades modulares à esquerda**, em termos das inclusões $JA \subset J$ e $(1-u)A \subset E$.

Um **bi-ideal** é um subespaço vetorial J de A que é, ao mesmo tempo, um ideal à esquerda e um ideal à direita de A. Também se aplicam aos bi-ideais definições análogas para próprio e maximal. Dizemos que um bi-ideal é **modular** quando possui uma unidade modular à esquerda e uma unidade modular à direita.

Ao longo de toda a seção, para evitar repetições, faremos os resultados para ideais à esquerda e unidades modulares à direita. O caso para ideais à direita e unidades modulares à esquerda são análogos.

Exemplo 4.1. Vamos mostrar que nem todo ideal à esquerda é um ideal à direita. Dada A uma álgebra e $a \in A$, então $J = \{xa; x \in A\}$ é um ideal à esquerda de A.

Entretanto, tomando $A = M_2(\mathbb{R})$ e

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que $J = \{xa; x \in A\}$ são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

com $b, c \in \mathbb{R}$. Daí, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J.$$

Isto é, J não é um ideal à direita.

Exemplo 4.2. Vamos mostrar que nem todo ideal à esquerda é modular. Considere em $C_0(\mathbb{R})$ o ideal à esquerda $J = \{0\}$. Se J possuísse uma unidade modular à direita u, então $f - fu \in J = \{0\}$ para todo $f \in C_0(\mathbb{R})$. Como $C_0(\mathbb{R})$ é uma álgebra comutativa, temos $fu = uf = f$ para todo $f \in C_0(\mathbb{R})$. Isto é, se J possuísse unidade modular, teríamos que $C_0(\mathbb{R})$ tem unidade, o que sabemos que é falso.

As proposições a seguir estabelecem alguns resultados fundamentais sobre ideais de uma álgebra A.

Proposição 4.1. (i) Um ideal à esquerda de A é uma subálgebra de A.

(ii) Se A tem uma unidade e, então e é unidade modular à direita para todo subespaço vetorial de A. Em particular, todo ideal à esquerda de A é um ideal modular à esquerda.

(iii) Dado qualquer $u \in A$, $A(1-u)$ é um ideal modular à esquerda de A com unidade modular à direita u.

(iv) Se A é uma álgebra normada e J é um ideal à esquerda de A, então $\overline{J}$ (o fecho de J) também é um ideal à esquerda de A.

Demonstração. (i) Como sabemos, para J ser uma subálgebra de A é necessário e suficiente que J seja um subespaço vetorial de A e seja fechado para o produto. E, de fato, temos J subespaço vetorial por hipótese e a condição $AJ \subset J$ implica que dados $x, y \in J$ e considerando $x \in A$ temos $xy \in J$, isto é, J é fechado para o produto.

(ii) Dado um subespaço vetorial M de A qualquer, temos $0 \in M$. Daí, temos que $A(1-e) = \{a - ae; a \in A\} = \{0\} \subset M$. Por definição, isto quer dizer que e é uma unidade modular a direita para M. Disso segue que todo ideal à esquerda de A é um ideal modular à esquerda .

(iii) Precisamos verificar que $A(1-u)$ é um subespaço vetorial. Para isto, sejam $a-au, b-bu \in A(1-u)$ quaisquer e $\lambda \in \mathbb{F}$. Temos $\lambda(a-au)+b-bu = \lambda a - \lambda au + b - bu = (\lambda a + b) - (\lambda a + b)u$ que pertence a $A(1-u)$ por construção. Vamos verificar agora que $A[A(1-u)] \subset A(1-u)$. Para isto, seja $a - au \in A(1-u)$ qualquer e $x \in A$ arbitrário. Temos $x(a-au) = xa - (xa)u$ que pertence a $A(1-u)$. Logo, $A(1-u)$ é um ideal à esquerda de A. Por definição, u é unidade modular à direita para $A(1-u)$ se $A(1-u) \subset A(1-u)$. Como isto é sempre verdade, segue que $A(1-u)$ é ideal modular à esquerda com unidade modular à direita u.

(iv) Sejam $x, y \in \overline{J}$, $a \in A$ qualquer e $\lambda \in \mathbb{F}$. Como x, y estão no fecho de J, existem sequências $(x_n), (y_n) \in J$ com $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$. Pela continuidade das operações em A, temos

$$\lambda x + y = \lambda \lim x_n + \lim y_n = \lim(\lambda x_n + y_n),$$

mostrando que $\lambda x + y \in \overline{J}$, pois J é subespaço vetorial e $\lambda x_n + y_n \in J$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\overline{J}$ é subespaço vetorial. Além disso, temos

$$ax = a \lim x_n = \lim ax_n,$$

donde $ax \in \overline{J}$, pois J é ideal à esquerda e temos $ax_n \in J$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto prova que $A\overline{J} \subset \overline{J}$. Portanto, $\overline{J}$ é um ideal à esquerda de A.

$\square$

Proposição 4.2. (i) Se u é uma unidade modular à direita para um subespaço vetorial E, então u é uma unidade modular à direita para qualquer subespaço F contendo E.

(ii) Se u é uma unidade modular à direita para um ideal à esquerda próprio J, então $u \notin J$.

(iii) u é quasi-invertível à esquerda se, e somente se, $A(1-u) = A$.

(iv) Se J é um ideal modular à esquerda próprio de A, então J está contido em um ideal maximal à esquerda (que também é modular).

(v) Ideais modulares maximais à esquerda são ideais maximais à esquerda.

(vi) Se A possui uma unidade, todo ideal à esquerda próprio está contido em um ideal maximal à esquerda.

Demonstração. (i) Seja dado F um subespaço contendo E. Por hipótese, $A(1-u) \subset E$. Como $E \subset F$, segue que $A(1-u) \subset F$ e, por definição, u é uma unidade modular à direita para F.

(ii) Suponhamos, por absurdo, que $u \in J$. Nesse caso, para todo $a \in A$ temos $a - au \in J$. Como $u \in J$ e J é um ideal à esquerda, temos $au \in J$ para todo $a \in A$. Como J é subespaço vetorial, temos $a = (a - au) + au \in J$ para todo $a \in A$. Temos uma contradição com a hipótese que J é próprio. Segue que $u \notin J$.

(iii) Suponhamos que u é quasi-invertível à esquerda. Isto é, existe $x \in A$ tal que $x \circ u = 0$, ou ainda, $x + u - xu = 0$. Tomando $a = -x$, temos $-a + u + au = 0 \Rightarrow u = a - au$. Daí, $u \in A(1-u)$. Pela Proposição 4.1(iii), u é uma unidade modular à direita para o ideal à esquerda $A(1-u)$, então segue do item (ii) que $A = A(1-u)$.

Reciprocamente, se $A = A(1-u)$, então $u \in A(1-u)$. Disso, existe $a \in A$ tal que $u = a - au$. Tomando $x = -a$, temos $u + x - xu = 0$, ou ainda, $x \circ u = 0$. Daí u é quasi-invertível à esquerda.

(iv) Seja u a unidade modular à direita de J. Definimos Γ como a família de todos os ideais à esquerda próprios de A que contém J. Por (i), para cada $M \in \Gamma$, temos que M é um ideal modular à esquerda com unidade modular à direita u. Como M é próprio, segue do item (ii) que $u \notin M$.

Usando a ordem parcial da inclusão de conjuntos em Γ, vamos provar que toda cadeia possui uma cota superior. Para isto, seja $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cadeia em Γ, sendo Λ um conjunto de índices. Seja $K = \cup_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$. Como $u \notin K_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$, então K é um subconjunto próprio de A. Além disso, por construção, K contém K_α para todo $\alpha \in \Lambda$. Então basta mostrar que K é um ideal à esquerda para concluir que K é cota superior da cadeia em Γ.

Sejam dados $a, b \in K$, $c \in A$ qualquer e $\lambda \in \mathbb{F}$. Pela definição do K, existem K_β e $K_{\beta'}$ em Γ tais que $a \in K_\beta$ e $b \in K_{\beta'}$. Como $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma cadeia, podemos supor, sem perda de generalidade, que temos $K_{\beta'} \subset K_\beta$. Daí, $a, b \in K_\beta$ para algum $\beta \in \Lambda$. Desse modo, como K_β é subespaço vetorial, temos $\lambda a + b \in K_\beta \subset K$. Logo, K é um subespaço vetorial. Vamos mostrar agora que $ca \in K$. Como já argumentamos, $a \in K_\beta$ para algum $\beta \in \Gamma$. Daí, $ca \in K_\beta$ pois K_β é um ideal à esquerda. Segue então que $ca \in K$. Portanto, $AK \subset K$. Isto completa a prova que K é um ideal à esquerda.

Como toda cadeia de Γ admite uma cota superior, pelo Lema de Zorn temos um elemento maximal em Γ para a ordem da inclusão. Isto é, existe um ideal à esquerda L de A tal que $J \subset L$ e, se $L \subset I$, sendo I um ideal à esquerda próprio de A, então $L = I$. Por definição, L é um ideal maximal à esquerda e contém J. O fato de L ser modular segue do item (i), pois J é suposto ideal modular à esquerda.

(v) Seja J um ideal modular maximal à esquerda. Suponhamos, por absurdo, que J não é um ideal maximal à esquerda. Então, existe um ideal à esquerda M tal que $J \subset M$, com $J \neq M$ e $M \neq A$. Mas, pelo item (i), temos que M é um ideal modular à esquerda. Temos uma contradição, pois isto contradiz o fato de J ser um ideal modular maximal à esquerda.

(vi) Se A possui unidade, então todo ideal à esquerda é modular pela Proposição 4.1(ii). Então, nesse caso, todo ideal à esquerda próprio é um ideal modular à esquerda próprio. Segue então do item (iv) que todo ideal à esquerda próprio está contido em um ideal maximal à esquerda.

□

Teorema 4.1. Sejam A uma álgebra de Banach, J um ideal modular à esquerda próprio de A e u uma unidade modular à direita para J. Então:

(i) $||u - x|| \geq 1$ para todo $x \in J$;

(ii) o fecho de J é um ideal modular à esquerda próprio de A.

Demonstração. (i) Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in J$ tal que $||u - x|| < 1$. Daí, $r(u-x) \leq ||u-x|| < 1$. Então, pelo Teorema 2.3.1 $u-x$ tem uma quasi-inversa y. Isto é,

$$y + (u - x) - y(u - x) = 0 \iff u = x - y + y(u - x) = x - yx - (y - yu).$$

Como J é um ideal à esquerda, então $yx \in J$ e como u é unidade modular à direita de J então $y - yu \in J$. Daí, como J é um subespaço vetorial de A, temos $u \in J$. Pela Proposição 4.2(ii), isto implica que J não é um ideal à esquerda próprio, contradizendo a hipótese. Com isto concluímos que $||u - x|| \geq 1$ para todo $x \in J$.

(ii) Pelo item (i), temos que $u \notin \overline{J}$. Pela Proposição 4.1(iv), temos que $\overline{J}$ é um ideal à esquerda de A. Pela Proposição 4.2(i), $\overline{J}$ é modular. Com isto, $\overline{J}$ é um ideal modular à esquerda próprio de A.

□

Corolário 4.1. Cada ideal modular maximal à esquerda de uma álgebra de Banach é fechado.

Demonstração. Seja J um ideal modular maximal à esquerda de uma álgebra de Banach A. Pelo Teorema 4.1(ii), temos que $J \subset \overline{J}$, onde $\overline{J}$ é um ideal modular à esquerda próprio de A. Pela maximalidade de J, isto implica $J = \overline{J}$. Portanto, J é fechado. □

Corolário 4.2. Seja A uma álgebra de Banach com unidade. Então, todo ideal à esquerda próprio de A está contido em um ideal maximal à esquerda de A e todo ideal maximal à esquerda de A é fechado.

Demonstração. Pela Proposição 4.2(vi), todo ideal à esquerda próprio está contido em um ideal maximal à esquerda. Pela Proposição 4.1(ii), todo ideal à esquerda de A é um ideal modular à esquerda. Daí, dado J um ideal maximal à esquerda de A, temos que J é modular. Pelo Corolário anterior, J deve ser fechado. $\square$

Proposição 4.3. Seja J um bi-ideal modular de A. Seja u uma unidade modular à direita para J. Então u também é uma unidade modular à esquerda para J.

Demonstração. Como J é um bi-ideal modular, existe uma unidade modular à esquerda v para J. Nesse caso, $v - vu \in J$, pois u é unidade modular à direita, e $u - vu \in J$, pois v é uma unidade modular à esquerda. Como J é subespaço vetorial, então $u - v = (u - vu) - (v - vu) \in J$. Portanto, para qualquer $a \in A$ temos

$$a - ua = a - va + (v - u)a,$$

onde $(v - u)a \in J$ pois J é um bi-ideal e $a - va \in J$ porque v é unidade modular à esquerda. Segue, de J ser subespaço vetorial, que $a - ua \in J$ para todo $a \in A$. Isto é, $(1 - u)A \subset J$. Então u, por definição, é unidade modular à esquerda para J. $\square$

Por causa da Proposição anterior, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 4.2. Dado um bi-ideal modular J de A, dizemos que u é **unidade modular** para J quando u for uma unidade modular à esquerda e uma unidade modular à direita para J.

Estabelecidos os fatos básicos sobre ideais e unidades modulares, passamos a construir a álgebra quociente.

Lema 4.1. Seja X um espaço vetorial e L um subespaço vetorial de X. A relação $\sim$ definida em X por $x \sim y$ quando $x - y \in L$ é uma relação de equivalência em X.

Demonstração. Como $x - x = 0 \in L$ para todo $x \in X$, então $\sim$ é reflexiva. Além disso, como $x - y \in L \iff y - x \in L$, então $\sim$ é simétrica. Supomos agora que $x \sim y$ e $y \sim z$ para $x, y, \in X$. Daí, temos $x - y \in L$ e $y - z \in L$. Como L é subespaço vetorial, temos $x - z = (x - y) + (y - z) \in L$. Assim temos $x \sim z$, ou seja, $\sim$ é transitiva. Isto prova que $\sim$ é relação de equivalência. $\square$

Definição 4.3. Seja L um subespaço vetorial do espaço vetorial X. A relação $\sim$ em X obtida escrevendo que $x \sim y$ quando $x - y \in L$ é uma relação de equivalência em X. A classe de equivalência que contém x é chamada de $\mathbf{L}$ **– coclasse** de x e denotada por x'. O conjunto de todas as $L -$ coclasses é um espaço vetorial com a soma e a multiplicação por escalar definidas por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2)', \quad \lambda z_1 = (\lambda x_1)',$$

onde x_1, x_2 são elementos arbitrários das coclasses z_1, z_2 respectivamente e $\lambda \in \mathbb{F}$ qualquer. Esse espaço vetorial é chamado **espaço diferença** de X módulo L e é denotado por $X - L$. A aplicação $x \to x'$ de X em $X - L$ é chamada **aplicação canônica** (ou **aplicação quociente**).

Observação 4.1. Como $X - L$ é o conjunto das classes de equivalência para a relação $\sim$ em X, então dado $z \in X - L$ qualquer, existe $x \in z$ e segue $z = x'$. Isto é, a aplicação canônica é sempre sobrejetora.

Para a definição acima fazer sentido, devemos verificar que as operações de soma e multiplicação por escalar estão bem definidas.

Proposição 4.4. As operações em $X - L$ dadas acima estão bem definidas e de fato fazem $X - L$ um espaço vetorial.

Demonstração. Vamos iniciar a verificação pela soma. Sejam $z_1, z_2 \in X - L$ e x_1, x_2, y_1, y_2 elementos de X tais que $x_1, y_1 \in z_1$ e $x_2, y_2 \in z_2$. Queremos mostrar que $(x_1 + x_2)' = (y_1 + y_2)'$ para que $z_1 + z_2$ esteja bem definido. Como sabemos, uma relação de equivalência particiona o conjunto em classes de equivalência onde a relação está definida. Daí, $(x_1 + x_2)' = (y_1 + y_2)'$ ou as classes são disjuntas. Desse modo, para a igualdade valer, é necessário e suficiente que $y_1 + y_2 \in (x_1 + x_2)'$, ou ainda, $y_1 + y_2 \sim x_1 + x_2$. E temos

$$y_1 + y_2 \sim x_1 + x_2 \iff y_1 + y_2 - (x_1 + x_2) \in L \iff (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) \in L.$$

Vejamos que $y_1 - x_1 \in L$ e $y_2 - x_2 \in L$ pela hipótese. Então, como L é espaço vetorial, temos $(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) \in L$. Do argumentado anteriormente, segue $(x_1 + x_2)' = (y_1 + y_2)'$.

Verificaremos agora a boa definição da multiplicação por escalar. Para isto, seja $\lambda \in \mathbb{F}$ e $z \in X - L$. Tomemos $x, y \in z$. Vamos verificar que $(\lambda x)' = (\lambda y)'$. Como anteriormente, é necessário e suficiente provar que $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y \in L$. Mas, isto segue de L ser um espaço vetorial e de $x - y \in L$.

O fato que $X - L$ é um espaço vetorial segue da forma como definimos a soma e a multiplicação por escalar em $X - L$, fazendo com que $X - L$ herde as propriedades de X. Por exemplo, para a distributividade à esquerda da multiplicação por escalar com respeito a soma, temos: dados x', y' em $X - L$ quaisquer e $\lambda \in \mathbb{F}$ qualquer

$$\lambda(x' + y') = \lambda(x + y)' = (\lambda(x + y))' = (\lambda x + \lambda y)' = (\lambda x)' + (\lambda y)' = \lambda x' + \lambda y'.$$

Isto é, a distributividade de $X - L$ segue imediatamente da distributividade à esquerda de X. As demais propriedades seguem analogamente, sendo $0'$ o elemento neutro da soma de $X - L$ e $-z = (-x)'$ para cada $z \in X - L$, onde $x \in z$ qualquer. □

Proposição 4.5. Quando L é um subespaço vetorial fechado do espaço vetorial normado X, a aplicação $||.||$ de $X - L$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$||z|| = \inf\{||x||; x \in z\}$$

para cada $z \in X - L$ é uma norma.

Demonstração. Vamos verificar que $||.||$ satisfaz os axiomas da Definição 2.1.5.

(a) $||z|| \geq 0$ para cada $z \in X - L$, pois $||x|| \geq 0$ para todo $x \in z$.

(b) Dado $\alpha \in \mathbb{F}$ e $z \in X - L$, sabemos que $\alpha z = (\alpha x)'$ para cada $x \in z$. Isto é, $\alpha z = \{\alpha x; x \in z\}$. Portanto,

$$||\alpha z|| = \inf\{||\alpha x||; x \in z\} = |\alpha| \inf\{||x||; x \in z\} = |\alpha| \cdot ||z||.$$

(c) Dados $z_1, z_2 \in X - L$, sabemos que para cada $x_1 \in z_1$ e $x_2 \in z_2$, $x_1 + x_2 \in z_1 + z_2$. Daí

$$||z_1 + z_2|| = \inf\{||x||; x \in z_1 + z_2\} \leq$$

$$\inf\{||x_1 + x_2||; x_1 \in z_1, x_2 \in z_2\} \leq \inf(\{||x_1||; x_1 \in z_1\} + \{||x_2||; x_2 \in z_2\}) =$$

$$\inf\{||x_1||; x_1 \in z_1\} + \inf\{||x_2||; x_2 \in z_2\} = ||z_1|| + ||z_2||.$$

Acima usamos a desigualdade triangular para a norma de X.

(d) Se $z = 0'$, então $||z|| = \inf\{||x||; x \in z\} \leq ||0|| = 0$. Para a recíproca, vamos mostrar que z é fechado para cada $z \in X - L$. Seja (x_n) uma sequência contida em z convergindo para x e seja $y \in z$ qualquer. Por definição, temos $x_n - y \in L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como L é fechado e $\lim(x_n - y) = x - y$, então $x - y \in L$. Segue que $x \in z$ e, portanto, z é fechado. Daí, se $||z|| = 0$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in z$ tal que $||x_n|| < 1/n$. Como (x_n) converge para 0 e z é fechado, então $0 \in z$. Portanto $z = 0'$, como queríamos.

Logo, $||.||$ é de fato uma norma em $X - L$ □

Definição 4.4. Dado X espaço vetorial normado e L subespaço vetorial fechado de X, a norma $||.||$ de $X - L$ como na Proposição anterior é chamada **norma canônica** em $X - L$. A menos que dito o contrário, $X - L$ sempre será considerado com sua norma canônica.

Lema 4.2. Dado um espaço normado X e uma sequência de Cauchy (x_k) em X, podemos obter (y_n) uma subsequência de (x_k) tal que $||y_{n+1} - y_n|| < 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como (x_k) é sequência de Cauchy, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k, l \geq k_1$ implica que $||x_k - x_l|| < 2^{-1}$. Tomamos $y_1 = x_{k_1}$. De igual modo, existe $k_2 > k_1$ tal que $k, l \geq k_2$ implica que $||x_k - x_l|| < 2^{-2}$. Tomamos $y_2 = x_{k_2}$. Prosseguindo desse modo, obtemos $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ tais que $k, l \geq k_n$ implica que $||x_k - x_l|| < 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e definimos $y_n = x_{k_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, dado $n \in \mathbb{N}$, temos $k_{n+1}, k_n \geq k_n$ donde $||y_{n+1} - y_n|| = ||x_{k_{n+1}} - x_{k_n}|| < 2^{-n}$. Como (y_n) é subsequência de (x_k) por construção, o resultado está completo. □

Proposição 4.6. Seja L um subespaço vetorial fechado de um espaço vetorial normado X. Então:

(i) A aplicação canônica é uma aplicação linear limitada de X em $X - L$ com norma 1, a menos que $L = X$ quando sua norma é zero;

(ii) Se F é um subconjunto completo de X tal que $F + L = F$, então a imagem canônica $F' = \{f'; f \in F\}$ é um subconjunto completo de $X - L$;

(iii) Se X é completo, então $X - L$ é completo.

Demonstração. (i) Seja ψ a aplicação canônica de X em $X - L$. Dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos $\psi(\lambda x + y) = (\lambda x + y)' = (\lambda x)' + y' = \lambda x' + y' = \lambda\psi(x) + \psi(y)$. Daí a aplicação canônica é linear. Além disso, pela definição da norma canônica, $||x'|| = \inf\{||y||; y \in x'\} \leq ||x||$. Consequentemente,

$$\sup_{||x|| \leq 1} ||\psi(x)|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||x'|| \leq 1.$$

Portanto, a aplicação canônica é limitada e de norma no máximo 1. Suponhamos que $||\psi|| < 1$ e seja l tal que $||\psi|| < l < 1$. Seja dado $x \in X$ qualquer. Temos $||x'|| = ||\psi(x)|| \leq ||\psi|| \cdot ||x|| < l||x||$. Pela definição da norma em $X - L$, existe $x_1 \in x'$ tal que $||x_1|| < l||x||$. Podemos aplicar o mesmo raciocínio para $x_1 \in X$, obtendo $x_2 \in x_1'$ tal que $||x_2|| < l||x_1||$. Mas, vejamos que $x_1 \in x'$ implica que $x_1' = x'$ e também temos $||x_2|| < l(l||x||) = l^2||x||$. Suponhamos já obtidos $x_1 \cdots, x_n \in x'$ tais que $||x_i|| < l^i||x||$ para cada $i \in \{1 \cdots, n\}$. Então, existe $x_{n+1} \in x_n' = x'$ tal que $||x_{n+1}|| < l||x_n|| < l(l^n||x||) = l^{n+1}||x||$. Assim, indutivamente, construímos uma sequência (x_n) em x' tal que $0 \leq ||x_n|| < l^n||x||$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $l < 1$, segue do Teorema do Sanduíche que $\lim x_n = 0$. Como x' é fechado (pois L é fechado), então $0 \in x'$ e temos $x' = 0'$. Isto é, $\psi(x) = 0'$ para todo $x \in X$. Disso temos que $x \in L$ para todo $x \in X$, isto é, $L = X$. Temos então nesse caso ψ identicamente nulo e $||\psi|| = 0$. Se supomos que $L \neq X$, não podemos ter $||\psi|| < 1$. Segue então $||\psi|| = 1$, como queríamos.

(ii) Dada uma sequência de Cauchy (x_k) em F', pelo Lema 4.2 podemos passar a uma subsequência (y_n) em F' de modo que $||y_{n+1} - y_n|| < 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que podemos escolher f_n em F tal que $f'_n = y_n$ e $||f_{n+1} - f_n|| < 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in F$ tal que $g'_n = y_n$, pois F' é a imagem canônica de F. Tomamos $f_1 = g_1$ e escolhemos $v_2 \in (y_2 - y_1)$ com $||v_2|| < 2^{-1}$. Vejamos que podemos fazer isto, pois $||y_2 - y_1|| < 2^{-1}$ e, pela definição da norma em $X - L$, temos

$$\inf\{||x||; x \in y_2 - y_1\} < 2^{-1}$$

e isto implica a existência de v_2 como descrito. Como $g_2 \in y_2$ e $f_1 \in y_1$, então $g_2 - f_1 \in y_2 - y_1$. Daí, $v_2 - (g_2 - f_1) \in L$, pois é a diferença de dois termos da mesma coclasse, a saber, $y_2 - y_1$.

Assim $v_2 + f_1 = (v_2 - (g_2 - f_1)) + g_2 \in F + L$, pois $g_2 \in F$ por hipótese e $v_2 - (g_2 - f_1) \in L$. Como $F + L = F$, então $v_2 + f_1 \in F$. Tomamos $f_2 = f_1 + v_2$. Vejamos que $f_2 \in g'_2$, pois $v_2 \in y_2 - y_1$ e $f_1 \in y_1$, donde $f_2 \in (y_2 - y_1) + y_1 = y_2 = g'_2$. Além disso, $||f_2 - f_1|| = ||v_2|| < 2^{-1}$.

Suponhamos já obtidos $f_1, \cdots, f_m$ como desejados, isto é, $f_i \in F$, $f'_i = y_i$ para i de 1 até m e $||f_{i+1} - f_i|| < 2^{-i}$ para i de 1 até $m - 1$. Vamos mostrar que podemos construir y_{m+1}. Prosseguiremos de forma análoga. Tomamos $v_{m+1} \in y_{m+1} - y_m$ com $||v_{m+1}|| < 2^{-(m+1)}$. Como $g_{m+1} \in y_{m+1}$ e $f_m \in y_m$, então $v_{m+1} - (g_{m+1} - f_m) \in L$. Desse modo, $v_{m+1} + f_m = (v_{m+1} - (g_{m+1} - f_m)) + g_{m+1} \in F + L = F$. Tomamos $f_{m+1} = f_m + v_{m+1}$. Já verificamos que $f_{m+1} \in F$. Além disso, $f_{m+1} \in y_{m+1}$, pois $f_m \in y_m$ e $v_{m+1} \in y_{m+1} - y_m$. Por fim, $||f_{m+1} - f_m|| = ||v_{m+1}|| < 2^{-(m+1)}$.

Assim, por indução, podemos construir a sequência (f_n) em F como desejada. Vejamos que, dados $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$ vale que

$$||f_n - f_m|| \leq \sum_{i=m}^{n-1} ||f_{i+1} - f_i|| < \sum_{i=m}^{n-1} 2^{-i} < \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}.$$

Como a série geométrica converge, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i} < \epsilon$$

para todo $m > n_0$. Desse modo, dados $n, m > n_0$, temos $||f_n - f_m|| < \epsilon$. Isto é, (f_n) é uma sequência de Cauchy. Como F é fechado, existe $f \in F$ tal que $\lim f_n = f$. Pela continuidade da aplicação canônica, temos $\lim f'_n = f' \in F'$. Isto é, $\lim y_n = f'$.

Então, dada uma sequência (x_k) de Cauchy qualquer em F', obtemos uma subsequência (y_n) que converge. Mas, como sabemos, uma sequência de Cauchy com subsequência convergente é convergente e converge para o mesmo ponto que a subsequência, isto é, $\lim x_k = f'$. Isto prova que F' é completo.

(iii) Vejamos que $X + L = X$. Logo, se X é completo, podemos tomar $F = X$ no item (ii) e concluímos que X' é completo. Mas, como a aplicação canônica é sobrejetora por construção, então $\psi(X) = X' = X - L$ e temos $X - L$ completo sempre que X for completo.

□

Definição 4.5. Dado um bi-ideal J de uma álgebra A, um produto é definido em $A - J$ por

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2)'$$

onde $x_1 \in z_1$ e $x_2 \in z_2$ são tomados arbitrariamente. Com esse produto, $A - J$ é uma álgebra, que é chamada **álgebra quociente** de A módulo J e é denotada por A/J.

Proposição 4.7. O produto definido em A/J como na definição acima está bem definido e A/J é uma álgebra quando equipado com tal produto.

Demonstração. Sejam $x_1, y_1 \in z_1$ e $x_2, y_2 \in z_2$, onde tomamos $z_1, z_2 \in A/J$ quaisquer e tomamos x_1, x_2, y_1, y_2 nas respectivas coclasses de forma arbitrária. Vamos mostrar que $(x_1 x_2)' = (y_1 y_2)'$, isto é, $x_1 x_2 - y_1 y_2 \in J$. Temos

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = x_1 x_2 - x_1 y_2 + x_1 y_2 - y_1 y_2 = x_1(x_2 - y_2) + (x_1 - y_1) y_2.$$

Como $x_2 - y_2 \in J$ e $x_1 - y_1 \in J$ por hipótese e J é um bi-ideal, então $x_1(x_2 - y_2) \in J$ e $(x_1 - y_1) y_2 \in J$, donde $x_1 x_2 - y_1 y_2 \in J$, pois J é um subespaço vetorial. Isto prova que o produto está bem definido.

O fato que A/J é uma álgebra segue da Proposição 4.4 e do fato que A/J herda as propriedades do produto de A. Por exemplo, para a associatividade do produto, tomamos $z_1, z_2, z_3 \in A/J$ com $x_1 \in z_1$, $x_2 \in z_2$ e $x_3 \in z_3$. Temos

$$(z_1 z_2) z_3 = (x_1 x_2)' z_3 = ((x_1 x_2) x_3)' = (x_1(x_2 x_3))' = z_1 (x_2 x_3)' = z_1(z_2 z_3).$$

Acima usamos a associatividade do produto em A. Isto é, a associatividade do produto em A/J segue da associatividade do produto em A. Analogamente para as demais propriedades da Definição 2.1.1. □

Proposição 4.8. Se J é um bi-ideal fechado de uma álgebra normada A, então a norma canônica de $A - J$ é uma norma-álgebra em A/J.

Demonstração. Pela Proposição 4.5, basta verificar que $||.||$ satisfaz o axioma (e) da Definição 2.1.5. Temos

$$||z_1 z_2|| = \inf\{||x||; x \in z_1 z_2\}.$$

Mas, pela definição de z_1z_2, temos que para todo $x_1 \in z_1$ e todo $x_2 \in z_2$, $x_1x_2 \in z_1z_2$. Daí,

$$||z_1z_2|| \leq \inf\{||x_1x_2||; x_1 \in z_1, x_2 \in z_2\} \leq \inf\{||x_1||; x_1 \in z_1\} \inf\{||x_2||; x_2 \in z_2\} = ||z_1||\cdot||z_2||.$$

Acima usamos que $||x_1x_2|| \leq ||x_1|| \cdot ||x_2||$. Isto completa a demonstração. $\square$

Observação 4.2. Pela definição do produto e o fato que a aplicação canônica é uma aplicação linear sobrejetora, temos que a aplicação canônica em A/J, sendo A uma álgebra e J um bi-ideal de A, é um homomorfismo sobrejetor, pois $(x_1x_2)' = x_1'x_2'$ para todos $x_1, x_2 \in A$. Além disso, se A possui unidade, então e' é a unidade de A/J, pois $e'x' = (ex)' = x' = (xe)' = x'e'$ para todo $x' \in A/J$.

Proposição 4.9. Seja A uma álgebra e I um bi-ideal de A. Então M é um bi-ideal de A/I se, e somente se, $M = J/I$ para algum J bi-ideal de A que contém I.

Demonstração. Seja $M \subset A/I$ com M bi-ideal de A/I. Definimos

$$J := \{x \in A; x \in z \text{ para algum } z \in M\} \subset A.$$

Vamos provar que J é um bi-ideal de A e que $I \subset J$. Para ver que J é subespaço vetorial, sejam $x, y \in J$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Pela definição da J, temos $x', y' \in M$. Como M é subespaço vetorial, segue que $\lambda x' + y' \in M$, isto é, $(\lambda x + y)' \in M$. Daí $\lambda x + y \in J$.

Seja $a \in A$, $x \in J$ quaisquer. Como M é um bi-ideal, então $a'x', x'a' \in M$, ou seja, $(ax)', (xa)' \in M$ e temos $ax, xa \in J$. Temos então $AJ \subset J$ e $JA \subset J$.

Provado que J é um bi-ideal, vamos verificar que $I \subset J$. Isto segue do fato que $0' \in M$ pois M é um subespaço vetorial. Daí, como $x \in 0'$ para todo $x \in I$, então $I \subset J$.

Provaremos agora que $J/I = M$. Inicialmente, verifiquemos que, dado $x \in J$, se x' é a coclasse de x do espaço quociente A/I e x" a coclasse de x do espaço quociente J/I, então $x" = x'$. Seja $y \in x"$. Isto significa que $y - x \in I$ e $y \in J$. Em particular, $y \in A$ e temos $y \in x'$, donde $x" \subset x'$. Reciprocamente, se $y \in x'$, então $y - x \in I$ e $y \in A$. Daí, temos que $y = x + w$, onde $w \in I \subset J$. Como $x \in J$ por hipótese e J é subespaço vetorial, segue $y \in J$. Daí temos $y \in x"$ e segue a igualdade $x' = x"$. Por isso, representaremos por x' a coclasse de x em J/I e em A/I.

Dado $z \in J/I$ qualquer, temos que $z = x'$ para algum $x \in J$. Pela construção da J, isto implica que $x' \in M$. Daí $J/I \subset M$. Seja agora $z \in M$ qualquer. Pela construção de J, existe $x \in J$ tal que $x' = z$. Como $x' \in J/I$, temos $z \in J/I$. Segue a igualdade $J/I = M$.

Supomos agora que $M = J/I$, onde J é um bi-ideal de A contendo I. Vamos verificar que M é um bi-ideal de A/I. Para isto, sejam $x', y' \in M$, $\lambda \in \mathbb{F}$ e $a' \in A/I$ qualquer. Então

$$\lambda x' + y' = (\lambda x + y)',$$

$$a'x' = (ax)' \text{ e } x'a' = (xa)'.$$

Como J é um subespaço vetorial, então $\lambda x + y \in J$ e como J é um bi-ideal então $ax, xa \in J$. Segue que $\lambda x' + y' \in J/I = M$ donde M é subespaço vetorial e $(A/I)M \subset M$ e $M(A/I) \subset M$. Isto conclui que M é um bi-ideal de A/I. □

Para o próximo resultado, precisamos de um lema para estender bi-ideais de A para $A + \mathbb{F}$ quando A é uma álgebra sem unidade.

Lema 4.3. Seja A uma álgebra sem unidade e J um bi-ideal de A. Então $I = \{(x, 0); x \in J\}$ é um bi-ideal de $B = A + \mathbb{F}$. Além disso, I é fechado se J é fechado.

Demonstração. Vamos iniciar verificando que I é um subespaço vetorial de B. Sejam $(x, 0), (y, 0) \in I$ quaisquer e $\lambda \in \mathbb{F}$. Nesse caso, $\lambda(x, 0) + (y, 0) = (\lambda x + y, 0)$. Como J é subespaço vetorial de A e $x, y \in J$, então $\lambda x + y \in J$. Isto é, $\lambda(x, 0) + (y, 0) \in I$. Isto prova que I é subespaço vetorial. Seja agora $(x, 0) \in I$ qualquer e $(a, \lambda) \in B$ qualquer. Então

$$(a, \lambda)(x, 0) = (ax + \lambda x, 0)$$

e

$$(x, 0)(a, \lambda) = (xa + \lambda x, 0).$$

Como J é bi-ideal, então $ax, xa \in J$ e como J é subespaço vetorial $\lambda x \in J$ e temos $ax + \lambda x \in J$ e $xa + \lambda x \in J$. Portanto $(a, \lambda)(x, 0) \in I$ e $(x, 0)(a, \lambda) \in I$. Isto prova que $IB \subset I$ e $BI \subset I$. Segue que I é um bi-ideal de B.

Supomos agora que J é fechado. Seja $(x_n, 0)$ uma sequência em I convergente e seja (x, λ) tal limite. Vejamos que, como

$$||(x_n, 0) - (x, \lambda)|| = ||(x_n - x, -\lambda)|| = ||x_n - x|| + |\lambda|$$

e temos

$$\lim ||(x_n, 0) - (x, \lambda)|| = 0,$$

então $\lambda = 0$ e $\lim ||x_n - x|| = 0$. Isto é, x_n converge para x, sendo x_n uma sequência em J. Como J é fechado, temos $x \in J$. Daí, $\lim(x_n, 0) = (x, 0) \in I$. Isto prova que I é fechado. □

Proposição 4.10. Seja J um bi-ideal de uma álgebra complexa A e seja a' a J-coclasse de um elemento $a \in A$. Então

$$\mathrm{Sp}(A/J, a') \subset \mathrm{Sp}(A, a).$$

Demonstração. Se A possui unidade, então pela Proposição 3.3(i), como $a \to a'$ é um homomorfismo de A em A/J e e' é a unidade de A/J, então $\mathrm{Sp}(A/J, a') \subset \mathrm{Sp}(A, a)$.

Se A não possui unidade, consideramos $B = A + \mathbb{C}$. Para cada $a \in A$ sabemos que $\mathrm{Sp}(A, a) = \mathrm{Sp}(B, (a, 0))$ pelo Lema 3.1. Seja $I = \{(x, 0); x \in J\}$. Pelo Lema 4.3, segue que I é um bi-ideal de B.

Pela Proposição 3.3(i), temos $\mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)') \subset \mathrm{Sp}(B, (a, 0))$. Resta mostrarmos que $\mathrm{Sp}(A/J, a') \subset \mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)')$. Inicialmente, notemos que $(a, 0)' \in \mathrm{Sing}(B/I)$. De fato, se $(a, 0)'$ possuísse inversa, teríamos um $(x, \lambda) \in B$ tal que $(a, 0)'(x, \lambda)' = (0, 1)'$, isto é, $(a, 0)(x, \lambda) - (0, 1) \in I$. Mas

$$(a, 0)(x, \lambda) - (0, 1) = (ax + \lambda a, -1).$$

Como todo elemento de I tem um 0 na segunda entrada, temos que $(a, 0)$ é singular. Segue que $0 \in \mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)')$. Então basta verificarmos que se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \mathrm{Sp}(A/J, a')$ então $\lambda \in \mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)')$. Como $\lambda \neq 0$, então pela Proposição 3.1, temos que $\lambda^{-1}a' \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(A/J)$ sendo A/J com ou sem unidade. Suponhamos, por absurdo, que $\lambda(0, 1)' - (a, 0)' \in \mathrm{Inv}(B/I)$. Nesse caso, existe $(x, \alpha)'$ em B/I tal que $(\lambda(0, 1)' - (a, 0)')(x, \alpha)' = (0, 1)' = (x, \alpha)'(\lambda(0, 1)' - (a, 0)')$. Como $(\lambda(0, 1)' - (a, 0)') = (\lambda(0, 1) - (a, 0))' = (-a, \lambda)'$, então

$$(\lambda(0, 1)' - (a, 0)')(x, \alpha)' = (-a, \lambda)'(x, \alpha)' =$$

$$[(-a, \lambda)(x, \alpha)]' = (-ax - \alpha a + \lambda x, \lambda\alpha)'$$

e analogamente

$$(x, \alpha)'(\lambda(0, 1)' - (a, 0)') = (-xa - \alpha a + \lambda x, \lambda\alpha)'.$$

Como ambos os produtos acima são iguais a $(0, 1)'$ temos $(-ax - \alpha a + \lambda x, \lambda\alpha) - (0, 1) \in I$ e $(-xa - \alpha a + \lambda x, \lambda\alpha) - (0, 1) \in I$. Como a segunda entrada de todo elemento em I é 0, então $\lambda\alpha = 1$, isto é, $\alpha = \lambda^{-1}$. Analisando a primeira entrada, temos $-ax - \alpha a + \lambda x \in J$ e $-xa - \alpha a + \lambda x \in J$. Substituindo $\alpha = \lambda^{-1}$, temos $-ax - \lambda^{-1}a + \lambda x \in J$, donde $(\lambda^{-1}a - \lambda x + ax)' = 0'$. Como $ax = -(\lambda^{-1}a)(-\lambda x)$, temos $\lambda^{-1}a' \circ \lambda x' = \lambda^{-1}a' - \lambda x' + a'x' = 0'$. Fazendo uma análise análoga para $-xa - \lambda^{-1}a + \lambda x \in J$, concluímos que $\lambda x' \circ \lambda^{-1}a' = 0'$. Por definição, isto implica que $\lambda^{-1}a' \in \mathrm{q} - \mathrm{Inv}(A/I)$. Isto contraria a hipótese. Logo, $\lambda(0, 1)' - (a, 0)' \in \mathrm{Sing}(B/I)$, isto é, $\lambda \in \mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)')$. Está então provado que $\mathrm{Sp}(A/J, a') \subset \mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)')$.

Assim, temos $\mathrm{Sp}(A/J, a') \subset \mathrm{Sp}(B/I, (a, 0)') \subset \mathrm{Sp}(B, (a, 0)) = \mathrm{Sp}(A, a)$. Isto completa a demonstração. □

Observação 4.3. Na demonstração acima, consideramos A/J com ou sem unidade mesmo supondo A sem unidade. E, de fato, A/J pode ter unidade mesmo que A não possua. Se u é unidade modular para J, então $a - au \in J$ e $a - ua \in J$ para todo $a \in A$. Isto é, $a'u' = (au)' = a' = (ua)' = u'a'$ para todo $a' \in A/J$. Por definição, isto implica que

u' é uma unidade para A/J. Reciprocamente, se u' é uma unidade para A/J, então $u'a' = a' = a'u'$ para todo $a' \in A/J$. Isto é, para todo $a \in A$ temos $a - au, a - ua \in J$. Portanto, u é uma unidade modular para J. Concluímos que A/J possui unidade se, e somente se, J é um bi-ideal modular.

Proposição 4.11. Seja p uma seminorma-álgebra em uma álgebra de Banach complexa A. Então

$$\lim_{n\to\infty}[p(a^n)]^{1/n} \leq r(a),$$

para todo $a \in A$.

Demonstração. Seja $N = \{x \in A; p(x) = 0\}$. Sejam $x, y \in N$, $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ quaisquer. Então:

$$p(\lambda x + y) \leq p(\lambda x) + p(y) = |\lambda|p(x) + p(y) = 0$$

e

$$p(ax) \leq p(a)p(x) = 0, \quad p(xa) \leq p(x)p(a) = 0.$$

Daí, temos $p(\lambda x + y) = 0$, $p(ax) = 0$ e $p(xa) = 0$. Portanto N é um subespaço vetorial, $AN \subset N$ e $NA \subset N$, ou seja, N é um bi-ideal de A. Seja $B = A/N$ e definimos a norma $|.|$ em B por $|z| = p(x)$ para $x \in z$. Vamos verificar que $|.|$ está bem definida e que é uma norma-álgebra.

Para a boa definição, seja $z \in B$ e $x, y \in z$. Então $x - y \in N$ e $y - x \in N$. Isto é,

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) = p(y),$$

$$p(y) = p(y - x + x) \leq p(y - x) + p(x) = p(x).$$

Portanto, $p(x) = p(y)$ e $|.|$ está bem definida. Vamos verificar que $|.|$ satisfaz os axiomas de 2.1.5.

(i) Como $p(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, então $|z| \geq 0$ para todo $z \in B$.

(ii) Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ e $z \in B$, então se $x \in z$, temos $\lambda x \in (\lambda x)' = \lambda z$. Daí, $|\lambda z| = p(\lambda x) = |\lambda|p(x) = |\lambda||z|$.

(iii) Se $z = 0'$, então $z = N$ e temos $p(x) = 0$ para todo $x \in z$, isto é, $|z| = 0$. Se $|z| = 0$, então $p(x) = 0$ para todo $x \in z$. Daí, tomando qualquer $x \in z$, temos que $x \in N$, isto é, $0' = x' = z$.

(iv) Dados $z, w \in B$, $x \in z$ e $y \in w$, então z+w=x'+y'=(x+y)'. Isto é, $x + y \in z + w$. Desse modo

$$|z + w| = p(x + y) \leq p(x) + p(y) = |z| + |w|.$$

(v) Sejam $z, w \in B$, $x \in z$ e $y \in w$, temos $zw = x'y' = (xy)'$. Portanto, $xy \in zw$ e temos

$$|zw| = p(xy) \leq p(x)p(y) = |z||w|.$$

Portanto, $(B, |.|)$ é uma álgebra normada. Seja a' a N-coclasse de um elemento $a \in A$. Pela Proposição 4.10, temos $\mathrm{Sp}(B, a') \subset \mathrm{Sp}(A, a)$. Aplicando o Teorema 3.1 à álgebra normada B, existe $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(B, a')$ tal que $|\lambda_0| \geq r(a')$ e aplicando o Teorema 3.3 à álgebra de Banach A, temos que $r(a) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(A, a)\} \geq \max\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(B, a')\} \geq |\lambda_0|$. Daí, temos $r(a') \leq r(a)$. Pela definição de $r(a')$ em $(B, |.|)$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} [(a')^n]^{1/n} \leq r(a),$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} [p(a^n)]^{1/n} \leq r(a).$$

□

Exemplo 4.3. Neste exemplo vamos explorar os conceitos de bi-ideal, unidade modular e álgebra quociente. Considere em $C_0(\mathbb{R})$ o subconjunto dado por $J = \{f \in C_0(\mathbb{R}); f(0) = 0\}$. Vamos verificar que J é um bi-ideal.

Sejam $f, g \in J$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $h \in C_0(\mathbb{R})$. Temos

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$$

e

$$(fh)(0) = f(0)h(0) = 0 = h(0)f(0) = (hf)(0).$$

Temos então $(\lambda f + g), fh, hf \in J$, ou seja, J é um subespaço vetorial com $AJ \subset J$ e $JA \subset J$, isto é, J é um bi-ideal. Vamos mostrar que J é fechado. Seja (f_n) uma sequência em J com $\lim f_n = f$. Como em $C_0(\mathbb{R})$ usamos a norma do supremo, em particular vale a convergência pontual, isto é, $\lim f_n(0) = f(0)$. Mas, pela hipótese, $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue $f(0) = 0$ e que J é fechado.

Como J é fechado, então $C_0(\mathbb{R})/J$ é uma álgebra normada. Vamos determinar explicitamente todas as possíveis classes da álgebra quociente.

Dados $f, g \in C_0(\mathbb{R})$, temos que $f' = g'$ se, e somente se, $f - g \in J$. Portanto, $f' = g'$ se, e somente se, $f(0) = g(0)$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tomaremos $f_\lambda \in C_0(\mathbb{R})$ com $f_\lambda(0) = \lambda$. Definimos $f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{1 + x^2}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Como

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = 0,$$

então $f_\lambda \in C_0(\mathbb{R})$. Temos ainda que $f_\lambda(0) = \lambda$, como queríamos.

Afirmamos que $C_0(\mathbb{R}) = \{f'_\lambda; \lambda \in \mathbb{C}\}$. De fato, dado $f \in C_0(\mathbb{R})$ qualquer, se $f(0) = c$, então $f' = f'_c$. Veja que o conjunto dos f_λ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ contém exatamente um representante de cada coclasse, pois se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $(f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2})(0) = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ e segue que $f'_{\lambda_1} \neq f'_{\lambda_2}$.

Vamos calcular agora a norma de cada elemento de $C_0(\mathbb{R})/J$. Dada a classe f'_λ, temos que se $f \in f'_\lambda$ então $f(0) = \lambda$. Daí,

$$||f|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \geq |\lambda|.$$

Portanto, $||f'_\lambda|| = \inf\{||f||; f \in f'_\lambda\} \geq |\lambda|$. Por outro lado, temos que

$$||f_\lambda|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\lambda}{1 + x^2} \right| = |\lambda|,$$

pois $1 + x^2 \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f_\lambda \in f'_\lambda$, então $||f'_\lambda|| \leq ||f_\lambda|| = |\lambda|$. Segue então que $||f'_\lambda|| = |\lambda|$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Como $C_0(\mathbb{R})$ não tem unidade, resta a questão se J tem unidade modular e, por consequência, se $C_0(\mathbb{R})/J$ tem unidade. Seja $f \in C_0(\mathbb{R})$ qualquer. Temos que

$$(f - ff_1)(0) = f(0) - f(0)f_1(0) = f(0) - f(0) = 0,$$

donde $C_0(\mathbb{R})(1 - f_1) \subset J$. Pela comutatividade, isso implica que f_1 é unidade modular para J. Daí, temos que f'_1 é unidade para $C_0(\mathbb{R})/J$. Além disso, como $||f'_1|| = 1$, então $C_0(\mathbb{R})/J$ é uma álgebra unitária.

Vamos retomar agora o exemplo das matrizes $M_n(A)$ do Exemplo 2.2.2. Pretendemos caracterizar os bi-ideais de $M_n(A)$ quando A é uma álgebra com unidade. Começamos com os seguintes lemas.

Lema 4.4. Se A é uma álgebra com unidade, $M = (a_{ij}) \in M_n(A)$ e $k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então existem $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}) \in M_n(A)$ tais que

$$PMQ = \begin{pmatrix} a_{kl} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Tomamos $p_{1k} = e$ e $p_{ij} = 0$ para os demais pares e tomamos $q_{l1} = e$ e $q_{ij} = 0$ para os demais pares. Daí,

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & e & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

E disso temos

$$PMQ = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{kl} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

como queríamos. □

Lema 4.5. Seja A uma álgebra com unidade e $a \in A$. Dados a matriz $A = (a_{ij})$, onde $a_{11} = a$ e $a_{ij} = 0$ para os demais pares, e um par $k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$, existem $T, R \in M_n(A)$, tal que $TAR = X = (x_{ij})$, onde $x_{kl} = a$ e $x_{ij} = 0$ para os demais pares.

Demonstração. Tomamos $T = (t_{ij})$ com $t_{k1} = e$ e $t_{ij} = 0$ para os demais pares e tomamos $R = (r_{ij})$ com $r_{1l} = e$ e $r_{ij} = 0$ para os demais pares. Para verificar que $TAR = X$ basta executar as multiplicações de matrizes, como no lema anterior. □

Podemos agora enunciar e provar o resultado desejado.

Teorema 4.2. Seja A uma álgebra. Se I é um bi-ideal de A, então $M_n(I)$ é um bi-ideal de $M_n(A)$. A recíproca é verdadeira quando A é uma álgebra com unidade, isto é, se J é um bi-ideal de $M_n(A)$ então $J = M_n(I)$ para algum I bi-ideal de A.

Demonstração. ($\Rightarrow$)Começamos verificando que $M_n(I)$ é um subespaço vetorial de $M_n(A)$. Para isto, sejam $M = (a_{ij}), N = (b_{ij}) \in M_n(I)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$ qualquer. Então

$$\lambda M + N = (\lambda a_{ij} + b_{ij}).$$

Como $a_{ij}, b_{ij} \in I$ para cada par e I é um subespaço vetorial, então $\lambda a_{ij} + b_{ij} \in I$ para todo par $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Segue que $\lambda M + N \in M_n(I)$ e temos $M_n(I)$ subespaço vetorial.

Vamos verificar agora que $M_n(A)M_n(I) \subset M_n(I)$. Seja $M = (a_{ij}) \in M_n(A)$ e $N = (b_{ij}) \in M_n(I)$. Então $MN = (c_{ij})$ onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Como $a_{ij} \in A$ e $b_{ij} \in I$ para todo par, então $a_{ik}b_{kj} \in I$ para cada $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Como I é subespaço vetorial, segue que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \in I$ para cada par $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Temos então $MN \in M_n(I)$.

Provamos que $M_n(I)M_n(A) \subset M_n(I)$ de modo análogo. Concluímos que $M_n(I)$ é um bi-ideal de $M_n(A)$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Seja J um bi-ideal de $M_n(A)$. Definimos o conjunto I por

$$I = \{x \in A; x = a_{kl} \text{ para alguma matriz } M = (a_{ij}) \in J \text{ e algum par } k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}\}.$$

Isto é, I é o subconjunto de A com todas as entradas das matrizes de J. Vamos mostrar que I é um bi-ideal de A. Começamos pela observação que, dado $a \in I$, então pelo Lema 4.4 temos que

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in J,$$

pois a é o elemento de uma matriz M de J e podemos tomar $P, Q \in M_n(A)$ tal que PMQ é a matriz acima. Como J é um bi-ideal, então $PMQ \in J$. Daí, $a \in I$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in J.$$

Chamamos a matriz acima de X_a para cada $a \in A$.

Vamos provar agora que I é um espaço vetorial. Sejam $a, b \in I$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Então $\lambda X_a + X_b \in J$, pois J é espaço vetorial. Como

$$\lambda X_a + X_b = \begin{pmatrix} \lambda a + b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

temos $\lambda a + b \in I$. Segue que I é subespaço vetorial.

Vamos provar agora que $AI \subset I$. Para isto, seja $a \in A$ e $b \in I$ quaisquer. Então $X_a X_b \in J$, pois J é um bi-ideal. Mas

$$X_a X_b = \begin{pmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue que $ab \in I$, isto é, $AI \subset I$. A prova de que $IA \subset I$ é análoga.

Estabelecido que I é um bi-ideal de A, vamos provar que $M_n(I) = J$. A inclusão $J \subset M_n(I)$ segue da definição de I. De fato, como I é o conjunto de todos os possíveis coeficientes de matrizes de J, então toda matriz em J está em $M_n(I)$. Seja agora $M = (a_{ij}) \in M_n(I)$ qualquer. Vamos provar que $M \in J$.

Pelo que argumentamos antes, dados $k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$, como $a_{kl} \in I$, então $X_{a_{kl}} \in J$. Pelo Lema 4.5, existem $T, R \in M_n(A)$ tais que $N_{kl} = TX_{a_{kl}}R$, onde $N_{kl} = (b_{ij})$ com $b_{kl} = a_{kl}$ e $b_{ij} = 0$ para os demais pares. Como J é um bi-ideal, temos que $N_{kl} \in J$ para cada par $k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Como J é um subespaço vetorial, temos que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} N_{kl} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = M \in J.$$

Isto prova a inclusão $M_n(I) \subset J$. Com isto temos $J = M_n(I)$, com I bi-ideal de A, como queríamos. □

Corolário 4.3. Se A é uma álgebra com unidade, então existe uma bijeção entre os bi-ideais maximais de A e os bi-ideais maximais de $M_n(A)$.

Demonstração. Se J é um bi-ideal maximal de A, segue do Teorema 4.2 que $M_n(J)$ é um bi-ideal de $M_n(A)$. Seja $M_n(I)$, com I bi-ideal de A, um ideal de $M_n(A)$ com $M_n(J) \subset M_n(I)$ (vejamos que um bi-ideal qualquer de $M_n(A)$ tem a forma $M_n(I)$ pelo teorema anterior). A inclusão $M_n(J) \subset M_n(I)$ implica que $J \subset I$. Como J é maximal, temos $J = I$ ou $J = A$. Isto é, $M_n(J) \subset M_n(I)$ implica que $M_n(I) = M_n(J)$ ou $M_n(I) = M_n(A)$. Portanto, se J é maximal, temos $M_n(J)$ maximal.

Temos então que a aplicação $J \to M_n(J)$ com domínio bi-ideais maximais de A e contradomínio bi-ideais maximais de $M_n(A)$ está bem definida. Para ver que é injetora, se $M_n(J) = M_n(I)$, então $I = J$, pois igualdade de matrizes é igualdade entrada por entrada. Para ver que é sobrejetora, seja $M_n(J)$ um bi-ideal maximal de $M_n(A)$. Se J não fosse maximal, existiria $J \subset I$, com I bi-ideal próprio de A. Nesse caso, teríamos $M_n(J) \subset M_n(I)$ com $M_n(I)$ bi-ideal próprio de $M_n(A)$, contradizendo a maximalidade de $M_n(J)$. Daí, $J \to M_n(J)$ é uma bijeção entre bi-ideais maximais de A e de $M_n(A)$, como queríamos. □

5 FUNCIONAIS LINEARES MULTIPLICATIVOS

Quando estudamos análise funcional, os funcionais lineares e o espaço dual são de particular interesse. É natural nos questionarmos se os funcionais lineares multiplicativos têm propriedades interessantes em uma álgebra. E, como veremos, esse é o caso. Vemos uma relação entre ideais modulares maximais e os núcleos de funcionais lineares multiplicativos na Proposição 5.2 e no Teorema 5.1. Mostraremos ainda que existe uma bijeção entre ideais maximais e os núcleos de funcionais lineares multiplicativos no caso comutativo e com unidade no Corolário 5.1. Além disso, o Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko nos traz uma caracterização de funcionais lineares multiplicativos usando o espectro dos elementos da álgebra. Neste capítulo, o leitor notará a aplicação de resultados de todos os capítulos, numa grande convergência de tudo que apresentamos até aqui.

Ao longo desse capítulo, A é uma álgebra de Banach complexa.

Definição 5.1. Um **funcional linear multiplicativo** em A é um funcional linear não nulo ϕ em A tal que

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

para todos $x, y \in A$. Isto é, ϕ é um homomorfismo não nulo de A em $\mathbb{C}$.

Observação 5.1. É comum na literatura chamar o conjunto de todos os funcionais lineares multiplicativos de uma álgebra A de espectro da álgebra A. O nome deriva de certas relações entre o espectro da álgebra e o espectro dos elementos da álgebra, como veremos no Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko e na Proposição 5.6.

Exemplo 5.1. Seja A uma álgebra uniforme de funções em um conjunto E, seja $t \in E$ e seja $\phi(f) = f(t)$ para cada $f \in A$. Neste caso, ϕ é um funcional linear multiplicativo.

Proposição 5.1. Seja ϕ um funcional linear multiplicativo em A. Então ϕ é contínua e $||\phi|| \leq 1$. Se A possui unidade, $\phi(e) = 1$. Em particular, se A for unitária então $||\phi|| = 1$.

Demonstração. Suponhamos que exista $x \in A$ com $||x|| < 1$ e $\phi(x) = 1$ e seja $y = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Vejamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é absolutamente convergente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} ||x^n|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x||^n$ e essa última série converge, pois é a série geométrica. Portanto, y está bem definido. Então, pela continuidade do produto, temos

$$x + xy = x + x\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = y,$$

e assim temos

$$1 + \phi(y) = \phi(x) + \phi(x)\phi(y) = \phi(x + xy) = \phi(y).$$

E obtemos uma contradição. Isto implica que não existe $x \in A$ com $||x|| < 1$ e $\phi(x) = 1$. Vejamos que se $\sup_{||x||=1} |\phi(x)| > 1$, existe $a \in A$ com $||a|| = 1$ e $|\phi(a)| > 1$.

Daí, se $x = a/\phi(a)$, temos $||x|| < 1$ e $\phi(x) = 1$ e caímos no caso anterior. Concluímos que $||\phi|| = \sup_{||x||=1} |\phi(x)| \leq 1$.

Se A possui unidade, $\phi(e) = \phi(e.e) = \phi(e)\phi(e)$. Daí $\phi(e) = 1$ ou $\phi(e) = 0$, pois não existem divisores de 0 em $\mathbb{C}$. Se $\phi(e) = 0$, teríamos $\phi(x) = \phi(x.e) = \phi(x)\phi(e) = 0$ para todo $x \in A$. Como ϕ é não nulo, segue $\phi(e) = 1$. Além disso, se $||e|| = 1$, então $||\phi|| \geq |\phi(e)| = |1| = 1$. Junto com o que provamos antes, temos $||\phi|| = 1$. $\square$

Em geral, um funcional linear multiplicativo em uma álgebra de Banach complexa A pode ter norma arbitrariamente pequena. Para ver isto, seja ϕ um funcional linear multiplicativo em A e sejam $t \geq 1$ e

$$p(a) = ||a|| + t|\phi(a)|$$

para cada $a \in A$.

Vamos mostrar que p é uma norma-álgebra de Banach em A equivalente a $||.||$. Para isto verificaremos as condições da Definição 2.1.5. Se $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{F}$:

a) $p(x) = ||x|| + t|\phi(x)| \geq 0$, pois $||.||$ e $|.|$ são normas e portanto não negativos;

b) $p(\alpha x) = ||\alpha x|| + t|\phi(\alpha x)| = |\alpha| \cdot ||x|| + t|\alpha\phi(x)| = |\alpha| \cdot ||x|| + |\alpha| \cdot t|\phi(x)| = |\alpha|p(x)$;

c) $p(x+y) = ||x+y||+t|\phi(x+y)| = ||x+y||+t|\phi(x)+\phi(y)| \leq ||x||+||y||+t|\phi(x)|+t|\phi(y)| = p(x) + p(y)$;

d) $p(x) = 0 \iff ||x|| + t|\phi(x)| = 0 \iff ||x|| = 0$ e $\phi(x) = 0 \iff x = 0$;

e) $p(xy) = ||xy|| + t|\phi(xy)| = ||xy|| + t|\phi(x)\phi(y)| \leq ||x|| \cdot ||y|| + t|\phi(x)| \cdot |\phi(y)| \leq ||x|| \cdot ||y|| + t||x|| \cdot |\phi(y)| + t||y|| \cdot |\phi(x)| + t^2|\phi(x)| \cdot |\phi(y)| = (||x|| + t|\phi(x)|)(||y|| + t|\phi(y)|) = p(x)p(y)$, pois $t \geq 1$.

Portanto, p é uma norma-álgebra. Vamos verificar agora que p é equivalente a $||.||$. Diretamente pela definição, como $t|\phi(x)| \geq 0$, então $p(x) \geq ||x||$ para todo $x \in A$. Do fato que $||\phi|| \leq 1$, então $p(x) = ||x||+t|\phi(x)| \leq ||x||+t||\phi|| \cdot ||x|| = (1+t)||x||$ para todo $x \in A$. Isto é, temos $||x|| \leq p(x) \leq (1 + t)||x||$ para qualquer x, então as normas são equivalentes. Como A com a norma $||.||$ é um espaço de Banach e as normas são equivalentes, A com a norma p também é um espaço de Banach.

Com isto estabelecido, vamos mostrar que ϕ, com a norma p em A, tem norma menor ou igual a t^{-1}. De fato, como $||x|| \geq 0$, então pela definição de p temos $p(x) \geq t|\phi(x)|$, ou ainda, $|\phi(x)| \leq t^{-1}p(x)$ para cada $x \in A$. Daí, temos $||\phi||_p = \sup_{p(x)=1} |\phi(x)| \leq \sup_{p(x)=1} t^{-1}p(x) = t^{-1}$, onde $||.||_p$ denota a norma no espaço dos funcionais lineares limitados em relação a norma p em A.

Disso concluímos que dado $\epsilon > 0$ qualquer, se tomamos t grande o suficiente de modo que $t^{-1} < \epsilon$, então $||\phi||_p \leq t^{-1} < \epsilon$. Isto é, está provado que os funcionais lineares multiplicativos podem ter normas arbitrariamente pequenas. E toda essa argumentação é válida mesmo que A seja álgebra com unidade.

Proposição 5.2. Os bi-ideais modulares maximais de codimensão 1 de A são os núcleos de funcionais lineares multiplicativos em A.

Demonstração. Seja ϕ um funcional linear multiplicativo em A. Então, $\ker(\phi)$ é um subespaço vetorial de A pela teoria de álgebra linear. Como ϕ não é o funcional nulo, $\ker(\phi) \neq A$. Se $y \in A \backslash \ker(\phi)$, vamos mostrar que $A = \ker(\phi) \bigoplus [y]$. Suponhamos que $x \in \ker(\phi) \cap [y]$, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $x = \alpha y$, com $x \in \ker(\phi)$. Daí, $\phi(\alpha y) = 0$, donde $\phi(y) = 0$ ou $\alpha = 0$. Como $y \notin \ker(\phi)$, então temos $\alpha = 0$. Isto prova que $\ker(\phi) \cap [y] = \{0\}$. Tomamos agora $a \in A$ qualquer. Seja

$$k := a - \frac{\phi(a)}{\phi(y)} y.$$

Como ϕ é linear multiplicativo, $\phi(k) = 0$, isto é, $k \in \ker(\phi)$. Daí,

$$a = k + \frac{\phi(a)}{\phi(y)} y.$$

Isto prova que todo elemento de A pode ser escrito como a soma de um elemento de $\ker(\phi)$ e um elemento de $[y]$. Segue que $A = \ker(\phi) \bigoplus [y]$. Isto prova que $\ker(\phi)$ tem codimensão 1. Para completar, vamos verificar que $\ker(\phi)$ é um bi-ideal modular maximal.

Seja $x \in A$ e $a \in \ker(\phi)$ quaisquer. Como ϕ é multiplicativo temos $\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) = 0 = \phi(x)\phi(a) = \phi(xa)$, isto é, $xa, ax \in \ker(\phi)$. Logo $\ker(\phi)$ é um bi-ideal. Além disso, dado J um bi-ideal de A, em particular J é um subespaço vetorial. Daí, se $\ker(\phi) \subset J$, temos $J = \ker(\phi)$ ou $J = A$, pois $\ker(\phi)$ tem codimensão 1. Então, provamos a maximalidade. Como $\phi(y) \neq 0$, então podemos obter um múltiplo u de y com $\phi(u) = 1$. Dado $a \in A$ qualquer, temos:

$$\phi(a - au) = \phi(a) - \phi(a)\phi(u) = 0$$

e

$$\phi(a - ua) = \phi(a) - \phi(u)\phi(a) = 0,$$

donde segue que $A(1 - u) \subset \ker(\phi)$ e $(1 - u)A \subset \ker(\phi)$. Portanto, u é unidade modular para $\ker(\phi)$ e segue que $\ker(\phi)$ é um bi-ideal modular maximal de codimensão 1 em A.

Seja agora M um bi-ideal modular maximal com codimensão 1 de A. Seja j uma unidade modular para M. Afirmamos que $A/M = \mathbb{C}j'$. De fato, como $j \notin M$ pela Proposição 4.2(ii) e a codimensão de M é 1, então $A = M \bigoplus [j]$. Daí, dado $x \in A$ qualquer, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ e $m \in M$ tal que $x = m + \lambda j$, donde $x' = \lambda j'$. Isto prova o afirmado. Vejamos ainda que dado $x \in A$ qualquer, temos que $xj - x \in M$ e $jx - x \in M$, pois j é uma unidade modular. Isto é, $x'j' = x' = j'x'$ para todo $x' \in A/M$, donde j' é a unidade para A/M.

Como $A/M = \mathbb{C}j'$, dado $a \in A$, existe um número complexo $\phi(a)$ tal que $a' = \phi(a)j'$. Consideramos então a função $\phi : A \to \mathbb{C}$. Vejamos que $\phi(j) = 1$, donde ϕ é não nula.

Além disso, como a aplicação $a \to a'$ é um homomorfismo, temos dados $x, y \in A$ quaisquer e $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\phi(xy)j' = (xy)' = x'y' = \phi(x)j'\phi(y)j' = \phi(x)\phi(y)j'$$

e

$$\phi(\lambda x + y)j' = (\lambda x + y)' = \lambda x' + y' = \lambda\phi(x)j' + \phi(y)j' = (\lambda\phi(x) + \phi(y))j'.$$

Como $j' \neq 0'$, então $\alpha j' = \beta j' \iff \alpha = \beta$. Ou seja, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ e $\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y)$. Segue que ϕ é um funcional linear multiplicativo. Além disso, pela construção da ϕ, temos $\phi(x) = 0 \iff x' = 0' \iff x \in M$. Isto é, $\ker(\phi) = M$. Isto prova que todo bi-ideal modular maximal de codimensão 1 em A é o núcleo de um funcional linear multiplicativo. □

Proposição 5.3. Uma álgebra módulo a interseção dos núcleos dos funcionais lineares multiplicativos é sempre comutativa.

Demonstração. Seja $M = \{\phi_\lambda\}_{\lambda \in I}$ o conjunto de todos os funcionais lineares multiplicativos de B, uma álgebra normada dada. Seja $J_\lambda = \ker(\phi_\lambda)$ e $J = \bigcap_{\lambda \in I} J_\lambda$. Vamos mostrar que B/J é uma álgebra normada comutativa. Inicialmente, lembremos que os núcleos dos funcionais lineares (em particular os multiplicativos) são sempre fechados, então cada J_λ é fechado e, por consequência, J é fechado. Além disso, dado $x \in J_\lambda$ e $b \in B$ qualquer, temos $\phi_\lambda(xb) = \phi_\lambda(x)\phi_\lambda(b) = 0 = \phi_\lambda(b)\phi_\lambda(x) = \phi_\lambda(bx)$. Ou seja, $bx, xb \in J_\lambda$, donde J_λ é um bi-ideal. Como a interseção de bi-ideais é um bi-ideal, segue que J é um bi-ideal fechado de B. Pela Proposição 4.8 segue que B/J é de fato uma álgebra normada. Sejam agora $x, y \in B$ quaisquer. Vamos mostrar que $x'y' = y'x'$, o que é equivalente a $xy - yx \in J$ ou ainda $xy - yx \in J_\lambda$ para todo $\lambda \in I$. E de fato, temos $\phi_\lambda(xy - yx) = \phi_\lambda(x)\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(y)\phi_\lambda(x) = 0$, pois $\mathbb{C}$ é comutativo. Daí $xy - yx \in \ker(\phi_\lambda)$ para todo $\lambda \in I$ e segue que B/J é comutativa. □

Quando A é comutativa, não existe distinção entre bi-ideais, ideais à esquerda e ideais à direita e usaremos simplesmente a palavra "ideal" sem qualificadores.

Teorema 5.1. Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Então, os ideais modulares maximais de A são os núcleos dos funcionais lineares multiplicativos.

Demonstração. Pela Proposição 5.2 é suficiente provar que cada ideal modular maximal de A tem codimensão 1. Seja M um ideal modular maximal de A com unidade modular j. Então, pelo Corolário 4.1, M é fechado. Portanto a álgebra quociente $B = A/M$ é uma álgebra de Banach complexa (pois A é uma álgebra de Banach por hipótese) e B herda a comutatividade de A. Além disso, B tem unidade. De fato, dado $a \in A$ qualquer, temos $aj - a \in M$ e $ja - a \in M$ pela definição de unidade modular. Isto implica que $a'j' = j' = j'a'$ e isto faz j' unidade para B por definição.

Pela Proposição 4.9, os ideais de B são da forma L/M, onde L é um ideal de A com $M \subset L$, isto é, os ideais de B são $M/M = \{0'\}$ e $A/M = B$. Com isto, mostraremos que B é uma álgebra de divisão. Seja dado $a' \in B$. Suponhamos que $a' \in \mathrm{Sing}(B)$. Então o conjunto $J := \{a'x'; x \in A\}$ não possui a unidade j'. Além disso, dados $a'x', a'y' \in J$, $z' \in B$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos:

$$(a'x')z' = a'(x'z') = a'(xz)' \in J \Rightarrow (a'x')z' \in J$$

e

$$\lambda a'x' + a'y' = a'(\lambda x' + y') = a'(\lambda x + y)' \in J \Rightarrow \lambda a'x' + a'y' \in J.$$

Como J é subespaço vetorial pela segunda linha, da primeira e da comutatividade segue que J é ideal de B. Como J é próprio, então $J = \{0'\}$. E, como $a'j' = a' \in J$, temos $a' = 0'$. Isto é, $\mathrm{Sing}(B) = \{0'\}$. Sendo B uma álgebra de divisão complexa, segue do Teorema de Gelfand-Mazur que $B = \mathbb{C}j'$.

Como $j \notin M$ temos $M \cap [j] = \{0\}$ e, dado $x \in a$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x' = \lambda j'$, isto é, $x - \lambda j = m$ onde $m \in M$. Reescrevendo, $x = m + \lambda j$, ou seja, podemos decompor A na soma direta $A = M \bigoplus [j]$. Isto prova que M tem codimensão 1. □

Corolário 5.1. Seja A uma álgebra comutativa e com unidade. Então, existe uma bijeção entre os ideais maximais de A e os funcionais lineares multiplicativos de A.

Demonstração. Consideremos a aplicação $\phi \to \ker(\phi)$ dos funcionais lineares multiplicativos em A nos ideais maximais de A. Vejamos que, como A tem unidade, então os ideais modulares maximais e os ideais maximais coincidem, pois todo ideal de A tem unidade modular e. Segue do Teorema 5.1 que a aplicação acima está bem definida e é sobrejetora, pois todo ideal maximal de A é o núcleo de algum funcional linear multiplicativo em A. Resta mostrarmos que a aplicação é injetora. Para isto, sejam ϕ e ψ funcionais lineares multiplicativos em A tais que $\ker(\phi) = \ker(\psi)$. Pela demonstração do Teorema 5.1, temos que $A = \ker(\phi) \bigoplus [e] = \ker(\psi) \bigoplus [e]$. Pela igualdade entre os núcleos, dado $x \in A$ temos que $x = a + \lambda e$, com $a \in \ker(\phi) = \ker(\psi)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo único. Desse modo

$$\phi(x) = \phi(a) + \lambda\phi(e) = 0 + \lambda = \psi(a) + \lambda\psi(e) = \psi(a + \lambda e) = \psi(x)$$

para todo $x \in A$. Logo, temos $\phi = \psi$ e isto prova que a aplicação $\phi \to \ker(\phi)$ é injetora. Como já havíamos provado que era sobrejetora, temos uma bijeção entre ideais maximais de A e os funcionais lineares multiplicativos em A. □

Exemplo 5.2. Uma questão relevante que pode surgir analisando a Proposição 5.2 e o Teorema 5.1 é se existem bi-ideais modulares maximais cuja codimensão não é 1, no caso em que A não é comutativa. A resposta é afirmativa.

De fato, seja $\mathbb{C}$ considerado como álgebra. Como $\mathbb{C}$ é um corpo, o único bi-ideal próprio de $\mathbb{C}$ é $\{0\}$. Como $\mathbb{C}$ tem unidade, pelo Teorema 4.2, o único bi-ideal de $M_2(\mathbb{C})$, diferente do próprio $M_2(\mathbb{C})$, é $M_2(\{0\})$. Portanto, o conjunto contendo apenas a matriz nula é um bi-ideal maximal de $M_2(\mathbb{C})$. Como $M_2(\mathbb{C})$ tem unidade, então $\{0\}$ é um bi-ideal modular maximal. Entretanto, o complemento ortogonal de $\{0\}$ é o $M_2(\mathbb{C})$ que tem dimensão 4.

Em geral, não é difícil encontrar bi-ideais modulares maximais que não possuem codimensão 1 em espaços da forma $M_n(A)$.

Vamos agora estabelecer as bases para enunciar e provar o Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko. Suponhamos que A possui unidade e seja ϕ um funcional linear multiplicativo em A. Vejamos que $\ker(\phi) \subset \text{Sing}(A)$, pois dado $x \in \ker(\phi)$, se $x \in \text{Inv}(A)$, então $1 = \phi(e) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = 0$, o que é uma contradição.

Como $a - \phi(a)e \in \ker(\phi) \subset \text{Sing}(A)$, temos $\phi(a) \in \text{Sp}(a)$ para todo $a \in A$.

Vamos mostrar que a condição $\phi(a) \in \text{Sp}(a)$ distingue os funcionais lineares multiplicativos entre os funcionais lineares de A. Antes de mostrarmos isto, precisamos de mais uma definição e uma proposição.

Definição 5.2. Um **funcional de Jordan** em A é um funcional linear não nulo ϕ em A tal que $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ para todo $a \in A$.

Proposição 5.4. Todo funcional de Jordan ϕ em A é multiplicativo.

Demonstração. Considerando as identidades, para todo $a, b \in A$

$$\phi((a+b)^2) = \phi(a+b)^2,$$

$$\phi((a+b)^2) = \phi(a^2+ab+ba+b^2) = \phi(a^2)+\phi(ab+ba)+\phi(b^2) = \phi(a)^2+\phi(ab+ba)+\phi(b)^2$$

e

$$\phi(a+b)^2 = (\phi(a)+\phi(b))^2 = \phi(a)^2 + 2\phi(a)\phi(b) + \phi(b)^2,$$

substituindo as duas últimas identidades na primeira, chegamos a

$$\phi(ab+ba) = 2\phi(a)\phi(b)$$

para cada $a, b \in A$.

Para o caso em que A é comutativa, temos $\phi(2ab) = 2\phi(a)\phi(b) \Rightarrow \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Para o caso geral, suponhamos que ϕ não seja multiplicativo. Então, existem $a, b \in A$ tais que $\phi(a) = 0$ e $\phi(ab) = 1$.

De fato, se ϕ não é multiplicativo, existem $x, y \in A$ tais que $\phi(xy) \neq \phi(x)\phi(y)$. Supomos $\phi(y) \neq 0$. Seja $a = \phi(x)y - \phi(y)x$. Então:

$$\phi(a) = \phi(\phi(x)y - \phi(y)x) = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) = 0$$

e

$$\phi(ay) = \phi((\phi(x)y - \phi(y)x)y) = \phi(x)\phi(y^2) - \phi(y)\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)^2 - \phi(y)\phi(xy).$$

Vejamos que

$$\phi(ay) = 0 \iff \phi(x)\phi(y)^2 - \phi(y)\phi(xy) = 0 \iff \phi(x)\phi(y) - \phi(xy) = 0.$$

Mas sabemos que $\phi(x)\phi(y) - \phi(xy) \neq 0$, donde segue $\phi(ay) \neq 0$. Seja então $b = y/\phi(ay)$. Essa escolha nos dá $\phi(ab) = \phi(ay)/\phi(ay) = 1$. Para o caso que $\phi(y) = 0$, vejamos que $\phi(xy + yx) = 2\phi(x)\phi(y) = 0$, isto é, $\phi(yx) = -\phi(xy)$. Daí, como $\phi(xy) \neq \phi(x)\phi(y) = 0$, temos $\phi(yx) \neq 0$. Daí, tomamos $a = y$ e $b = x/\phi(yx)$, donde temos $\phi(a) = 0$ e $\phi(ab) = \phi(yx)/\phi(yx) = 1$.

Com tais $a, b \in A$ fixados, temos $\phi(ab + ba) = 2\phi(a)\phi(b) = 0$, ou seja, $\phi(ba) = -\phi(ab) = -1$. Seja $c = bab$. Então

$$0 = 2\phi(a)\phi(c) = \phi(ac + ca) = \phi(abab + baba) =$$

$$\phi((ab)^2) + \phi((ba)^2) = \phi(ab)^2 + \phi(ba)^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2.$$

Temos então um absurdo. Logo, ϕ é multiplicativo. □

Teorema 5.2 (Gleason, Kahane e Zelazko)**.** Seja A uma álgebra de Banach complexa com unidade e seja ϕ um funcional linear em A. Então as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\phi(e) = 1$ e $\ker(\phi) \subset \text{Sing}(A)$;

(ii) $\phi(a) \in \text{Sp}(a)$ para cada $a \in A$;

(iii) ϕ é multiplicativo.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(ii): Seja $a \in A$ e supomos $\phi(e) = 1$ e $\ker(\phi) \subset \text{Sing}(A)$. Então $\phi(a - \phi(a)e) = \phi(a) - \phi(a)\phi(e) = 0$, donde $a - \phi(a)e \in \ker(\phi)$. Pela hipótese, temos $a - \phi(a)e \in \text{Sing}(A)$ e segue que $\phi(a) \in \text{Sp}(a)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Temos $\phi(e) \in \text{Sp}(e)$. Mas, como $\lambda \in \text{Sp}(e) \iff \lambda e - e = (\lambda - 1)e \in \text{Sing}(A) \iff \lambda = 1$, temos que $\text{Sp}(e) = \{1\}$. Disso segue que $\phi(e) = 1$.

Vamos provar que $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ para todo $x \in A$ para depois usar a Proposição 5.4. Para isto, seja $x \in A$ fixado e $n \geq 2$ e consideremos o polinômio de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$

$$p(\lambda) := \phi((\lambda e - x)^n) = \phi\left(\lambda^n e - nx\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}x^2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n x^n\right) =$$

$$\lambda^n - n\phi(x)\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\phi(x^2)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n\phi(x^n). \tag{5.1}$$

Para escrever a expansão do polinômio usamos que ϕ é linear, que as potências de x e e comutam e que $\phi(e) = 1$. Como p tem grau n e $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, então existem raízes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de p. Assim, para cada i de 1 a n, temos

$$0 = p(\lambda_i) = \phi((\lambda_i e - x)^n) \in \mathrm{Sp}((\lambda_i e - x)^n)$$

pela hipótese da validade da condição (ii). A condição $0 \in \mathrm{Sp}((\lambda_i e - x)^n)$ implica que $(\lambda_i e - x)^n \in \mathrm{Sing}(A)$. Portanto, como toda potência de invertível é invertível, devemos ter $\lambda_i e - x \in \mathrm{Sing}(A)$, isto é, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(x)$. Pelo Teorema 3.3, isto implica que $|\lambda_i| \leq r(x)$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Vejamos que

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = p(\lambda).$$

Como a igualdade acima vale para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, então os coeficientes dessa expansão devem coincidir com os coeficientes da expansão em (5.1). Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\phi(x) \text{ e } \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \binom{n}{2}\phi(x^2).$$

Pela segunda equação, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n(n-1)\phi(x^2).$$

Combinando as fórmulas, chegamos a

$$n^2\phi(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n(n-1)\phi(x^2) \Rightarrow n^2\phi(x)^2 - n^2\phi(x^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - n\phi(x^2).$$

Disso, temos que

$$n^2|\phi(x)^2 - \phi(x^2)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - n\phi(x^2)\right| \leq n|\phi(x^2)| + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq n|\phi(x^2)| + n\mathrm{r}(x)^2.$$

Isto é, para todo $n \geq 2$, temos

$$|\phi(x)^2 - \phi(x^2)| \leq \frac{1}{n}K$$

onde K é a constante $|\phi(x^2)| + \mathrm{r}(x)^2$. Disso segue que a única possibilidade é que $|\phi(x)^2 - \phi(x^2)| = 0$, isto é, $\phi(x^2) = \phi(x)^2$. Segue ϕ é um funcional de Jordan e, portanto, multiplicativo.

(iii)$\Rightarrow$(i): Pela Proposição 5.1, se ϕ é um funcional linear multiplicativo, então $\phi(e) = 1$. Além disso, argumentamos antes da Definição 5.2 que $\ker(\phi) \subset \mathrm{Sing}(A)$. Isto conclui a validade de (i). $\square$

A condição (i) do Teorema 5.2 não faz sentido para álgebras sem unidade. Mas ainda podemos verificar a equivalência entre $\phi(a) \in \mathrm{Sp}(a)$ para todo $a \in A$ e ϕ ser multiplicativo para álgebras sem unidade.

Corolário 5.2. Seja A uma álgebra de Banach complexa sem unidade e ϕ um funcional linear em A. Então as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\phi(a) \in \mathrm{Sp}(a)$ para todo $a \in A$;

(ii) ϕ é multiplicativo.

Demonstração. A ideia será considerar a unitização $B = A + \mathbb{C}$ de A e estender o funcional ϕ para B de forma conveniente para aplicarmos o Teorema anterior. Notemos que, como A é álgebra de Banach por hipótese, $\mathbb{C}$ também é um espaço de Banach e tomamos em $A + \mathbb{C}$ a norma da soma, então $A + \mathbb{C}$ é uma álgebra de Banach complexa com unidade.

Seja dado $\phi : A \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Definimos $\psi : B \to \mathbb{C}$ por $\psi((a, \lambda)) = \phi(a) + \lambda$ para cada par $(a, \lambda) \in B$. Vamos verificar que ψ é linear:

$$\psi(\alpha(a_1, \lambda_1) + (a_2, \lambda_2)) = \psi((\alpha a_1, \alpha\lambda_1) + (a_2, \lambda_2)) = \psi((\alpha a_1 + a_2, \alpha\lambda_1 + \lambda_2)) =$$

$$\phi(\alpha a_1 + a_2) + \alpha\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha\phi(a_1) + \phi(a_2) + \alpha\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha\psi((a_1, \lambda_1)) + \psi((a_2, \lambda_2)),$$

para todos $(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2) \in B$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i)$\Rightarrow$(ii): Supomos que $\phi(a) \in \mathrm{Sp}(A, a)$ para todo $a \in A$. Nossa meta é mostrar que $\psi((a, \lambda)) \in \mathrm{Sp}(B, (a, \lambda))$ para todo $(a, \lambda) \in B$.

Como B tem unidade, por definição temos que

$$\psi((a, \lambda)) \in \mathrm{Sp}(B, (a, \lambda)) \iff$$

$$(a, \lambda) - \psi((a, \lambda))(0, 1) \in \mathrm{Sing}(B) \iff$$

$$(a, \lambda) - (\phi(a) + \lambda)(0, 1) \in \mathrm{Sing}(B) \iff$$

$$(a, -\phi(a)) \in \mathrm{Sing}(B).$$

Se $\phi(a) = 0$, é imediato que $(a, 0) \in \mathrm{Sing}(B)$. Supomos então $\phi(a) \neq 0$. Como A não tem unidade e $\phi(a) \in \mathrm{Sp}(A, a)$, então por definição, $\dfrac{1}{\phi(a)} a \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(A)$. Pela Proposição 2.3.3(i),

$$\left(-\frac{1}{\phi(a)} a, 1\right) = (0, 1) - \left(\frac{1}{\phi(a)} a, 0\right) \in \mathrm{Sing}(B).$$

Como ao multiplicar um singular por qualquer constante obtemos outro elemento singular, temos

$$-\phi(a)\left(-\frac{1}{\phi(a)} a, 1\right) = (a, -\phi(a)) \in \mathrm{Sing}(B).$$

Isto prova, pelo argumentado anteriormente, que $\psi((a,\lambda)) \in \mathrm{Sp}(B,(a,\lambda))$ para todo par (a,λ) em B. Pelo Teorema 5.2 segue que ψ é multiplicativo. Então, em particular, para $a, b \in A$ temos $\psi((a,0)(b,0)) = \psi((a,0))\psi((b,0))$. Mas, $(a,0)(b,0) = (ab,0)$ e, pela construção da ψ, temos

$$\phi(ab) = \psi((ab,0)) = \psi((a,0))\psi((b,0)) = \phi(a)\phi(b).$$

Então temos que ϕ é multiplicativo.

(ii)$\Rightarrow$(i): Supomos que ϕ é multiplicativo. Vamos mostrar que, nesse caso, ψ também é multiplicativo. Sejam dados $(a,\alpha),(b,\beta) \in B$ quaisquer. Sabemos $(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)$, então temos

$$\psi((a,\alpha)(b,\beta)) = \psi((ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)) = \phi(ab + \beta a + \alpha b) + \alpha\beta =$$

$$\phi(a)\phi(b) + \beta\phi(a) + \alpha\phi(b) + \alpha\beta = (\phi(a) + \alpha)(\phi(b) + \beta) = \psi((a,\alpha))\psi((b,\beta)).$$

Como ψ é multiplicativo, então pelo Teorema 5.2 sabemos que $\psi((a,\lambda)) \in \mathrm{Sp}(B,(a,\lambda))$ para todo $(a,\lambda) \in B$. Em particular, para $a \in A$ temos $\phi(a) = \psi((a,0)) \in \mathrm{Sp}(B,(a,0))$. Pelo Lema 3.1, como temos $\mathrm{Sp}(B,(a,0)) = \mathrm{Sp}(A,a)$, então $\phi(a) \in \mathrm{Sp}(A,a)$ para todo $a \in A$. □

Proposição 5.5. Seja j uma unidade modular para o núcleo de um funcional linear multiplicativo ϕ em A. Então $\phi(j) = 1$.

Demonstração. Como j é unidade modular para o núcleo, então para todo $a \in A$, temos $0 = \phi(a - aj) = \phi(a) - \phi(a)\phi(j)$. Como ϕ é não nula, então existe algum $b \in A$ tal que $\phi(b) \neq 0$. Daí, como $\phi(b) - \phi(b)\phi(j) = 0$, segue que $\phi(j) = 1$. □

Para álgebras comutativas, podemos refinar o resultado $\phi(a) \in \mathrm{Sp}(a)$ para funcionais lineares multiplicativos.

Proposição 5.6. Seja A uma álgebra comutativa. Seja λ um número complexo não-nulo e seja $a \in A$. Então $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ se, e somente se, $\lambda = \phi(a)$ para algum funcional linear multiplicativo ϕ. Se A possui unidade, isto também vale para $\lambda = 0$.

Demonstração. Tomemos $a \in A$ qualquer e seja $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$, com λ não nulo. Pela Proposição 3.1, como $\lambda \neq 0$ então, sendo A com ou sem unidade, temos $\lambda^{-1}a \in \mathrm{q} - \mathrm{Sing}(A)$. Seja $J := \{\lambda^{-1}ax - x; x \in A\}$. Vamos mostrar que J é um ideal modular com unidade modular $\lambda^{-1}a$ e $J \neq A$.

(i) J é subespaço vetorial: Sejam dados $\lambda^{-1}ax - x, \lambda^{-1}ay - y$ elementos quaisquer de J e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então

$$\alpha(\lambda^{-1}ax - x) + \lambda^{-1}ay - y = \lambda^{-1}a(\alpha x + y) - (\alpha x + y) \in J.$$

(ii) J é um ideal: Seja $\lambda^{-1}ax - x \in J$ qualquer e $b \in A$ qualquer. Então
$$b(\lambda^{-1}ax - x) = \lambda^{-1}abx - bx \in J.$$
A operação acima é permitida pela comutatividade de A. Também pela comutatividade, temos $(\lambda^{-1}ax - x)b \in J$. Disso segue que J é um ideal.

(iii) J é um ideal modular: pela construção de J e pela comutatividade de A, temos $\lambda^{-1}a$ unidade modular para J

(iv) $J \neq A$: Vejamos que se $\lambda^{-1}a \in J$, então existiria $x \in A$ tal que $\lambda^{-1}a = \lambda^{-1}ax - x$, ou seja, $\lambda^{-1}a \circ x = \lambda^{-1}a + x - \lambda^{-1}ax = 0$. Pela comutatividade, isto implicaria que x é quasi-inversa para $\lambda^{-1}a$. Como $\lambda^{-1}a \in \mathrm{q-Sing}$, então $\lambda^{-1}a \notin J$ e segue $J \neq A$.

Pela Proposição 4.2(iv), existe I um ideal modular maximal de A com $J \subset I$. Pelo Teorema 5.1, existe um funcional linear multiplicativo ϕ tal que $\ker(\phi) = I$. Em outras palavras, J está contido no núcleo do funcional ϕ e, como $\lambda^{-1}a$ também é unidade modular para $\ker(\phi)$, $\phi(\lambda^{-1}a) = 1$ pela proposição anterior. Disso temos $\phi(a) = \lambda$.

Provamos então que, se $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ e $\lambda \neq 0$, então $\lambda = \phi(a)$ para algum funcional linear multiplicativo. Reciprocamente, se $\lambda = \phi(a)$, então $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ pelo Teorema 5.2 (se A possui unidade) ou pelo Corolário 5.2 (se A não possui unidade). Isto completa a primeira parte da prova.

Supomos agora que A possui unidade e vamos provar o resultado para $\lambda = 0$. Seja $a \in A$ e $L := \{ax; x \in A\}$. Vamos provar que L é um ideal de A:

(i) L é um subespaço vetorial: sejam $ax, ay \in L$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{C}$. Temos
$$\alpha ax + ay = a(\alpha x + y) \in L.$$

(ii) L é um ideal: Sejam $ax \in L$ qualquer e $y \in A$ qualquer. Então
$$y(ax) = (ax)y = a(xy) \in L.$$

Como e é unidade modular para todo ideal em A, então L é um ideal modular. Vejamos que se $a \in \mathrm{Sing}(a)$, então $e \notin L$ (do contrário a teria inversa) e temos L um ideal próprio. Temos também que, se L é próprio, então está contido em um ideal modular maximal e, pelo Teorema 5.1, L está contido no núcleo de um funcional linear multiplicativo. Em particular, como $ae = a \in L$, então $a \in \ker(\phi)$ para algum funcional linear multiplicativo ϕ. Reciprocamente, se ϕ é um funcional linear multiplicativo e $a \in \ker(\phi)$ então $a \in \mathrm{Sing}(a)$ pelo Teorema 5.2.

Com esses fatos estabelecidos, segue que: $0 \in \mathrm{Sp}(a) \iff a \in \mathrm{Sing}(A) \iff a \in \ker(\phi)$ para algum funcional linear multiplicativo $\phi \iff \phi(a) = 0$ para algum funcional linear multiplicativo.

Assim provamos que o resultado vale para $\lambda = 0$. $\square$

REFERÊNCIAS

1 BONSALL, Frank; DUNCAN, John. **Complete Normed Algebras**. Berlin: Springer-Verlag, 1973.

2 BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

3 KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

4 EBENHARD, Kaniuth. **A course in Commutative Banach Algebras**. New York: Springer, 2009.

5 PALMER, Theodore. **Banach Algebras and The General Theory of *-Algebras**. Volume I: Algebras and Banach Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

6 GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

7 LIMA, Elon. **Espaços Métricos**. 3ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

8 BROWN, James; CHURCHILL, Ruel. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 9ª edição. Porto Alegre: AMGH Editora, 2015.

9 PETRAKIS, Sifis. **Introduction to Banach Algebras and the Gelfand-Naimark Theorems** . Salônica: Aristotle University of Thessaloniki, 2008.

10 RICKART, Charles. **General Theory of Banach Algebras**. Nova York: Litton Educational Publishing, 1960.