UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS. BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Bruno Moreira Fernandes

Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita sobre um Corpo Algebricamente Fechado de Característica Diferente de Dois

Juiz de Fora

2022

Bruno Moreira Fernandes

Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita sobre um Corpo Algebricamente Fechado de Característica Diferente de Dois

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientadora: Drª. Tatiana Aparecida Gouveia

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes, Bruno Moreira.
Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita sobre um Corpo Algebricamente Fechado de Característica Diferente de Dois / Bruno Moreira Fernandes. – 2022.
67 f.

Orientadora: Tatiana Aparecida Gouveia
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Bacharelado em Matemática. , 2022.

1. Superálgebras simples. 2. PI-álgebras. I. Gouveia, Tatiana Aparecida, orient. II. Título.

Bruno Moreira Fernandes

Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita sobre um Corpo Algebricamente Fechado de Característica Diferente de Dois

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovada em 19 de agosto de 2022

BANCA EXAMINADORA

Dr$^{\underline{a}}$. Tatiana Aparecida Gouveia - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr$^{\underline{a}}$. Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Ronald Ismael Quispe Urure
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar força e sabedoria para não desistir nos momentos mais difíceis da minha trajetória.

À minha mãe, Dilcinéia, pela dedicação e cuidado de sempre ao me apoiar na conquista dos meus objetivos.

À minha amiga, Helena, por não medir esforços para ajudar na concluisão dos meus estudos.

À minha avó, Sebastiana, e ao meu amigo, Ademir, por todo incentivo e carinho.

À minha companheira, Mariana, pelo carinho e incentivo nos momentos finais da preparação deste trabalho.

À professora Tatiana Aparecida Gouveia, por toda a paciência e dedicação ao me orientar durante este trabalho e por todos os ensinamentos relativos à Matemática.

À professora Joana Darc Antonia Santos da Cruz e ao professor Ronald Ismael Quispe Urure, pela disponibilidade para participar da banca, pelas sugestões de melhorias do trabalho e pelos incentivos dados para a continuação dos estudos.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma classificação das superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de dois. Adicionalmente, apresentaremos uma extensão do *Teorema de Wedderburn-Malcev* para superálgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Além disso, vamos estudar os aspectos básicos da *PI-teoria* e discutir a relação existente entre essa classificação e o estudo de identidades polinomiais, T-ideais e variedades de álgebras.

Palavras-chave: Superálgebras simples. PI-álgebras. T-ideal. Variedade de álgebras.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present a classification of the finite dimensional simple superalgebras over an algebraically closed field of characteristic different from two. Additionally, we will present an extension of the *Wedderburn-Malcev Theorem* for finite dimensional superalgebras over an algebraically closed field of zero characteristic. Furthermore, we will study the basic aspects of *PI-theory* and discuss the relationship between this classification and the study of polynomial identities, T-ideals and varieties of algebras.

Keywords: Simple superalgebras. PI-algebras. T-ideal. Variety of algebras.

LISTA DE SÍMBOLOS

$I \trianglelefteq_\ell R$	Ideal à esquerda de um anel R.
$\mathcal{I}$	Conjunto qualquer de índices.
$\mathrm{char}(F)$	Característica do corpo F.
$\vert X \vert$	Cardinalidade de um conjunto X qualquer.
$span_F X$	Subespaço vetorial gerado pelo conjunto X sobre o corpo F.
$aut(T, \lambda)$	Autoespaço de uma transformação linear T associado ao autovalor λ.
S_n	Grupo simétrico de grau n.
$sgn(\sigma)$	Sinal da permutação $\sigma \in S_n$.
id_A	Aplicação identidade do conjunto A.
$Aut_F(M_n(F))$	Conjunto dos autormorfismos da F-álgebra $M_n(F)$ das matrizes de ordem n.

SUMÁRIO

1 Introdução

A busca por determinar polinômios não nulos em variáveis não comutativas que se anulam sob qualquer avaliação por elementos de uma álgebra teve início em meados do século XX, basicamente, nos trabalhos de *Dehn* [6] e *Wagner* [29]. Com o desenvolvimento da *PI-teoria*, os polinômios com esta propriedade viriam a se chamar *identidades polinomiais*, ou simplesmente *identidades*, dessa álgebra. Em linguagem atual, essas identidades são denominadas *ordinárias*, quando não se considera nenhum tipo de estrutura adicional sobre essa álgebra. No ano de 1948, *Kaplansky* [18] estudou as identidades ordinárias de *álgebras simples* de dimensão finita, partindo de uma investigação sobre *álgebras primitivas*. Mais tarde, nas décadas de 60 e 70, outros autores, como *Jacobson* [17], *Procesi* [23] e *Rowen* [27], contribuíram para essa investigação com a obtenção de resultados estruturais. Ainda ao longo do século passado, pode-se dizer que o estudo das *PI-álgebras* ou *Álgebras com Identidades Polinomiais*, foi intensificado pelo interesse de vários outros matemáticos, devido ao surgimento de novos problemas e conjecturas, formulados tanto para classes de álgebras e identidades específicas, quanto para álgebras e identidades mais gerais. Levando em consideração as possíveis estruturas que uma álgebra possa ter, diversos pesquisadores da área desenvolveram ferramentas e técnicas de análise combinatória, teoria de grupos, cálculos computacionais, entre outros, para a resolução desses problemas e conjecturas.

É de interesse central da *PI-teoria* determinar o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma dada álgebra associativa A sobre um corpo qualquer F. Chamamos este conjunto de *T-ideal das identidades* desta álgebra e denotamos por $\mathrm{Id}(A)$. A razão pela qual damos esta denominação a este conjunto será discutida e esclarecida ao longo deste trabalho.

Seja $F\langle X\rangle$ a álgebra de polinômios em variáveis não comutativas com coeficientes sobre o corpo F, chamada *álgebra associativa livre*. Veremos que $\mathrm{Id}(A)$ possui diversas propriedades interessantes, dentre elas, a invariância sob a ação de qualquer endormorfismo de $F\langle X\rangle$. Um dos problemas de interesse da *PI-teoria* é o chamado *Problema da Base Finita de Specht*, que sugere duas questões:

1) Garantir a existência de um conjunto gerador finito para um dado T-ideal próprio da álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$;

2) Determinar este conjunto, caso ele exista.

Desse modo, uma conjectura foi estabelecida por *Specht* [28], em 1950. Ele afirmava que, sobre um corpo F de característica zero, todo T-ideal próprio da álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado como T-ideal. Uma demonstração desta conjectura foi dada por *Kemer* em 1978 (veja [20]). Para essa demonstração, *Kemer* desenvolveu ferramentas que envolviam os conceitos de *multilinearização de polinômios* de $F\langle X\rangle$, *superálgebras* e *identidades graduadas*, conceitos esses que serão definidos e discutidos ao longo do texto.

Também é de interesse da *PI-teoria* determinar a classe de todas as álgebras para as quais os polinômios de um dado subconjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$ são identidades. Chamamos esta classe de *variedade*. Em 1991, *Kemer* mostrou em [19] que toda variedade de álgebras sobre um corpo de característica zero é, a grosso modo, determinada por uma álgebra que envolve o produto tensorial entre a *álgebra de Grassmann* (um tipo especial de superálgebra que ainda vamos definir) e uma superálgebra de dimensão finita. Aqui, denominamos este resultado como o *Teorema de Kemer das Variedades não Triviais sobre um Corpo de Característica Zero*.

Nesse sentido, esses dois problemas de interesse também foram considerados para álgebras com estruturas adicionais como, por exemplo, as superálgebras. *Giambruno*, *La Mattina* e *Misso* em [12] exploraram e classificaram as identidades graduadas de superálgebras. Em [14], *Giambruno*, *Mishchenko* e *Zaicev* caracterizaram as *supervariedades*, isto é, variedades de superálgebras, através de ferramentas analíticas, como as denominadas *sequência de codimensões* de álgebras e a *sequência de codimensões graduada* de superálgebras. Particularmente, a utilização destas sequências se mostra eficaz para o problema de descrever as identidades de uma álgebra, já que, em geral, a descrição explícita dessas identidades parece ser inviável, como veremos ao longo do texto. Especialmente, a sequência de codimensões de uma dada álgebra A foi definida por *Regev* [25] e, em certo sentido, ela é um parâmetro que mede a taxa de crescimento das identidades de A. Mas, só na década de 90 é que os estudos acerca do comportamento assintótico das sequências de codimensões graduadas de uma superálgebra começaram a se intensificar, para isso foi necessário definir e estudar, de forma similar, as sequências de codimensões graduadas. Ressalta-se ainda que o estudo desses dois tipos de sequências é marcado pela relação intrínseca entre o comportamento assintótico de uma e outra. Assim, faz parte da maioria das investigações e pesquisas da *PI-teoria* estudar as identidades ordinárias e graduadas, simultâneamente, através de técnicas e ferramentas analíticas.

Um tipo especial de superálgebra é a *superálgebra simples* de dimensão finita. Assim como para as álgebras de dimensão finita, para as quais valem dois principais teoremas estruturais de decomposição, existem resultados que permitem, sob certas condições, classificar e descrever completamente uma superálgebra simples de dimensão finita e, consequentemente, estudar, de forma mais eficiente, suas identidades, T-ideal e variedade correspondente.

O objetivo principal deste trabalho é enunciar e demonstrar o *Teorema de Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita sobre um Corpo de Característica Diferente de Dois e Algebricamente Fechado*.

No Capítulo 2, apresentaremos definições e propriedades básicas de módulos e álgebras. Para estas estruturas básicas, estudaremos dois teoremas estruturais de decomposição, a saber, o *Teorema de Wedderburn-Artin* e o *Teorema de Wedderburn-Malcev*. Em especial, o segundo deles garante, em certas condições, que toda álgebra A de dimensão finita pode ser decomposta como a soma direta de dois espaços vetorias, onde um deles é uma *subálgebra semissimples* e o outro é o *radical de Jacobson* dessa álgebra.

No Capítulo 3, daremos início ao estudo de álgebras com identidades polinomiais, apresentando os principais resultados sobre identidades, T-ideais e variedades de álgebras. Vamos discutir algumas das ideias principais que *Kemer* utilizou para responder satisfatoriamente ao *Problema da Base Finita de Specht* para T-ideais de álgebras sobre corpos de característica zero. Adicionalmente, vamos determinar e correlacionar T-ideais e variedades de algumas PI-álgebras, como álgebras de matrizes e a *álgebra de Grassmann*.

No Capítulo 4, definiremos e estudaremos propriedades básicas das superálgebras. Além disso, daremos uma demonstração do principal resultado, o Teorema 4.2.2: Se A é uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F de característica diferente de 2 e algebricamente fechado, então A é isomorfa a uma, e somente uma, das superálgebras de matrizes $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$, com $k \geq l \geq 1$ e $k + l = n$, ou $M_n(F \oplus cF)$, onde $c \in F$ e $c^2 = 1$, para algum $n \geq 1$. Ainda, apresentaremos uma generalização do *Teorema de Wedderburn-Malcev* para as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e algebricamente fechado e correlacionaremos o Teorema 4.2.2 com o *Teorema de Kemer das Variedades não Triviais sobre um Corpo de Característica Zero*.

Finalmente, nas Considerações Finais, faremos uma breve discussão mostrando como o Teorema 4.2.2 é importante para determinar identidades e T-ideais de álgebras e superálgebras simples de dimensão finita. Além disso, finalizaremos o trabalho apresentando uma generalização deste teorema para superálgebras com estrutura adicional obtida por uma *involução*, isto é, para as chamadas $*$-*superálgebras*.

2 Estruturas Básicas

Neste capítulo, vamos introduzir os conceitos de módulos e álgebras, explorar suas propriedades básicas e dar destaque a dois teoremas de decomposição para estas estruturas, que são o *Teorema de Wedderburn-Artin* e o *Teorema de Wedderburn-Malcev*. Estes teoremas são fundamentais para a compreensão de outros resultados que provaremos mais adiante neste trabalho.

2.1 Módulos

Esta seção é dedicada ao estudo de módulos, apresentaremos algumas definições, propriedades, caracterizações de módulos e anéis semissimples, bem como um teorema estrutural para anéis semissimples, mais especificamente, o *Teorema de Wedderburn-Artin*. Todos os anéis serão considerados com unidade, salvo menção contrária.

Definição 2.1.1. *Seja R um anel. Um R-**módulo** (à esquerda) é um grupo aditivo abeliano $(M, +)$ munido de uma **multiplicação por escalar** $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ que, a cada $r \in R$ e a cada $m \in M$, associa um elemento $rm \in M$, de tal modo que são válidas as seguintes condições para todos $r_1, r_2 \in R$ e $m_1, m_2 \in M$:*
1) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$;
2) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$;
3) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 r_2) \cdot m$;
Se R é um anel com unidade, então defini-se $1 \cdot m := m$, para todo $m \in M$.

Para simplificar, escrevemos $rm := r \cdot m$, para todos $r \in R$ e $m \in M$.

Também é possível definir, de forma análoga, um R-**módulo à direita**.

Se R e S são anéis e $(M, +)$ um grupo aditivo abeliano, dizemos que M é um (R, S)-**bimódulo**, se M é simultâneamente um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direita e $(rm)s = r(ms)$, para todos $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$. Se $R = S$, dizemos simplesmente que M é um R-**bimódulo**.

A partir de agora, usaremos o termo R-**módulo** para fazer referência aos R-módulos à esquerda.

Se F é um corpo, então todo F-espaço vetorial é um F-módulo. Além disso, é claro que todo anel R é um R-módulo sobre si próprio.

Sejam R um anel, M e N dois R-módulos e $f : M \longrightarrow N$ uma função. Dizemos que f é um R-**homomorfismo** (ou simplesmente **homomorfismo**) se f preserva a soma e o produto por escalar, similarmente como é definida transformações lineares para espaços vetoriais. Caso se tenha $M = N$, dizemos que f é um R-**endomorfismo** (ou simplesmente, **endomorfismo**). Se f é um homomorfismo injetor, dizemos que f é um **monomorfismo**.

Se f for um homomorfismo sobrejetor, dizemos que f é um **epimorfismo**. Dizemos que f é um R-**isomorfismo** (ou simplesmente **isomorfismo**) se f é um homomorfismo bijetor e, neste caso, usamos a notação $M \cong N$ para dizer que M é **isomorfo** a N. A notação para o conjunto de todos os R-homomorfismos de M em N é $Hom_R(M, N)$ e $End_R(M)$ para o conjunto de todos os R-endomorfismos de M. Podemos ver $Hom_R(M, N)$ e $End_R(M)$ naturalmente como um R-módulos.

Se M é um R-módulo e N é um subconjunto não vazio de M, então N é chamado de R-**submódulo** (ou simplesmente **submódulo**) de M, se N é um subgrupo aditivo de M fechado em relação à multiplicação por escalar. Chamamos $\{0\}$ e M de R-**submódulos triviais** de M e um R-submódulo de M, diferente de M, é chamado **próprio**.

Note que a interseção de dois submódulos de M é um submódulo de M. Mais geralmente, a interseção de uma família arbitrária de submódulos de M é um submódulo de M. Se N é um submódulo de M, então também podemos considerar o **módulo quociente** M/N, analogamente ao caso de anéis. Tal quociente também tem estrutura de R-módulo. Ressaltamos que vale o *1º Teorema do Isomorfismo* para R-módulos, como versão análoga ao caso de anéis e espaços vetoriais.

Seja X um subconjunto não vazio de um R-módulo M. O R-**submódulo gerado por** X, denotado por $\langle X \rangle$, é definido como sendo a interseção de todos os submódulos de M que contêm X. Se X é finito, dizemos que o R-submódulo gerado por X é **finitamente gerado**. Se X tem um único elemento, digamos m, então chamamos o R-submódulo gerado por X de **cíclico** e o denotamos por Rm. Analogamente ao caso de anéis com unidade, podemos mostrar que

$$\langle X \rangle := RX = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i m_i : \ m_i \in X, \, r_i \in R, \, s \geq 1 \right\},$$

se R tem unidade.

Um anel R é chamado **simples** se $R^2 \neq \{0\}$ e os únicos ideais de R são os triviais. Os R-módulos que definiremos a seguir são, de certa forma, uma generalização do conceito de anéis simples e serão muito importantes no decorrer deste trabalho.

Definição 2.1.2. *Um R-módulo M é dito **simples** se $RM \neq \{0\}$, e se os únicos submódulos de M são os triviais, ou seja, M não possui submódulos próprios não nulos.*

Um ideal não nulo (à esquerda, à direita, bilateral) I de um anel R é dito **minimal** se para todo ideal J (à esquerda, à direita, bilateral) de R tal que $J \subseteq I$, tem-se $I = J$. Observe que se I, visto como um anel, é simples, então I é um ideal minimal. Note também que se R é um R-módulo simples, então R é um anel simples. De fato, os ideais de R são R-módulos de R. A recíproca não é verdadeira, isto é, existem anéis R simples que não são R-módulos simples. Por exemplo, o anel das matrizes $n \times n$ sobre um anel de divisão D, denotado por $M_n(D)$, é simples, mas não é um $M_n(D)$-módulo simples. A prova de que $M_n(D)$ é um anel simples pode ser consultada em [8], Proposição 1.1.37. Agora, para cada $k = 1, \ldots, n$, definamos o seguinte conjunto

$$C_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};\ x_{ik} \in D,\ \forall\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Os conjuntos C_k são ideais à esquerda minimais de $M_n(D)$, pois são seus $M_n(D)$-submódulos simples. Logo, $M_n(D)$ não é um $M_n(D)$-módulo simples.

Um ideal à esquerda I de um anel R é **regular** (à esquerda) se existe $s \in R$ tal que $r - sr \in I$ para todo $r \in R$. De modo análogo, definimos ideal à direita regular e ideal bilateral regular. Se R é um anel com unidade $1_R \in R$, então todo ideal (à esquerda, à direita, bilateral) de R é regular, pois basta tomar $s = 1_R$.

Agora, vamos caracterizar os R-módulos simples.

Teorema 2.1.1. *([8], Proposição 1.2.17) Seja M um R-módulo. São equivalentes:*
1) *M é simples;*
2) *M é cíclico e todo elemento não nulo gera M;*
3) *$M \cong R/I$, para algum ideal à esquerda maximal regular de R.*

Demonstração. Faremos somente a demonstração da implicação (2) $\Rightarrow$ (1). Suponha que M é cíclico e que todo elemento não nulo gera M. Seja N um submódulo não nulo de M. Então, existe $m \in N$, $m \neq 0$, tal que $M = Rm$. É claro que $RM \neq \{0\}$, pois $m \neq 0$. Além disso, dado $m' \in M$ qualquer, existe $r \in R$ tal que $m' = rm$. Como N é um submódulo de M, segue que $m' \in N$ e $M \subseteq N$. Isso mostra que M é simples. □

Lema 2.1.1. *(Schur, [8], Lema 1.2.19) Sejam M e N dois R-módulos simples. Então:*
1) *Todo R-homomorfismo não nulo $f : M \longrightarrow N$ é um isomorfismo;*
2) *$End_R(M)$ é um anel de divisão.*

Sejam M_1 e M_2 submódulos de um R-módulo M. A **soma** de M_1 e M_2 é o conjunto definido por

$$M_1 + M_2 := \{m_1 + m_2;\ m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}.$$

Note que $M_1 + M_2$ é um submódulo de M. Analogamente, definimos a soma de $M_1, \ldots, M_k$ submódulos de M e a denotamos por $M_1 + \cdots + M_k$.

Sejam M um R-módulo e $M_1, \ldots, M_k$ submódulos de M tais que:
1) $M = M_1 + \cdots + M_k$,
2) $m_1 + \cdots + m_k = 0$, com $m_i \in M_i$, implica $m_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots k$.

Neste caso, dizemos que M é **soma direta** (de R-módulos) de $M_1, \ldots, M_k$ e escrevemos $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$.

Lema 2.1.2. *([8], Lema 1.2.27) Sejam M um R-módulo, N_1 e N_2 R-submódulos de M. Se $M = N_1 \oplus N_2$, então $N_2 \cong M/N_1$.*

Agora, queremos obter condições gerais para que um R-módulo qualquer possa ser escrito como soma direta de submódulos simples.

A seguir, definiremos os R-módulos e anéis semissimples, apresentaremos algumas de suas propriedades, bem como algumas caracterizações destas estruturas.

Definição 2.1.3. *Seja R um anel e M um R-módulo. Dizemos que M é **semissimples** se, para todo submódulo N de M, existir um submódulo N' tal que $M = N \oplus N'$. Nestas condições, chamamos N' de **somando direto** de N. Dizemos que o anel R é **semissimples** se o R-módulo R é semissimples.*

Note que se R é um anel simples, então R é um anel semissimples. Em particular, todo anel de divisão D é um anel semissimples. Um exemplo também conhecido é o seguinte: se V é um F-espaço vetorial de dimensão finita n, então V é um F-módulo semissimples. De fato, todo subespaço U de V pode ser complementado, isto é, existe um subespaço W de V tal que $V = U \dot{+} W$, onde $\dot{+}$ denota a soma direta de espaços vetorias.

Proposição 2.1.1. *([8], Lema 1.3.24) Sejam M um R-módulo semissimples e N um submódulo não nulo de M. Então N é um R-módulo semissimples e possui um submódulo simples.*

Teorema 2.1.2. *([8], Teorema 1.3.27) Seja M um R-módulo. São equivalentes:*
1) *M é semissimples;*
2) *M é soma direta de R-módulos simples;*
3) *M é soma de R-módulos simples.*

Exemplo 2.1.1. *Se D é um anel de divisão, então $M_n(D)$ é um anel semissimples, para todo $n \geq 1$. De fato, temos $M_n(D) = C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$, onde C_k, $k = 1, \ldots, n$, é dado por*

$$C_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};\ x_{ik} \in D,\ \forall\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Seja M um R-módulo. O **anulador** de M, denotado por $ann(M)$, é o conjunto

$$ann(M) := \{r \in R;\ rm = 0,\ \forall\ m \in M\}.$$

Observe que o anulador de um R-módulo M é um ideal à esquerda de R. Mais ainda, $ann(R)$ é um ideal à esquerda maximal regular de R. De fato, dado $m \in M$, $m \neq 0$, considere o homomorfismo de módulos $f : R \longrightarrow M$, definido por $f(r) = rm$. Note que $ann(m)$ é o núcleo deste homomorfismo. Assim, pelo *1º Teorema do Isomorfismo*, temos $R/ann(m) \cong Im(f) = Rm$.

Definição 2.1.4. *Seja R um anel. O* ***radical de Jacobson*** *de R, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os anuladores de todos os R-módulos simples, isto é,*

$$J(R) = \bigcap_{M \, simples} ann(M).$$

Se R é um anel com unidade, então $J(R) \neq R$. Neste caso, é possível mostrar que o radical de Jacobson é igual a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R, ou seja,

$$J(R) = \bigcap_{I \trianglelefteq_\ell R \, max} I,$$

pois qualquer ideal à esquerda maximal I de R é o anulador do R-módulo simples R/I.

Se R é um anel sem unidade, não é possível garantir a existência R-módulos simples, assim, definimos $J(R) = R$. Daqui em diante, todos os anéis serão considerados com unidade, salvo menção contrária.

Para um anel simples R, temos $J(R) = \{0\}$. Além disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.2. *Se R é um anel semissimples, então $J(R) = \{0\}$.*

Demonstração. Com efeito, se R é semissimples, então pelo Teorema 2.1.2, temos a decomposição $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, onde cada ideal à esquerda I_k, $k = 1, \ldots, n$, é minimal. Em particular, cada um desses ideais I_k é um anel simples. Daí, temos $J(I_k) = \{0\}$ para todo k. Sabendo que $J(R) = J(I_1) \oplus \cdots \oplus J(I_n)$, concluímos o resultado. □

Lema 2.1.3. *Sejam R um anel e $x \in R$. Então $x \in J(R)$ se, e somente se, $1 + rx$ possui inverso à esquerda, para todo $r \in R$.*

Demonstração. Dados $x \in J(R)$ e $r \in R$ quaisquer, temos $rx \in J(R)$, pois $J(R)$ é um ideal à esquerda de R. Desse modo, rx pertence a todo ideal maximal à esquerda de R. Assim, $1+rx$ não pertence a nenhum ideal maximal à esquerda de R. Logo, $R(1+rx) = R$ e, portanto, existe $s \in R$ tal que $s(1+rx) = 1$. Reciprocamente, se $x \notin J(R)$, então existe $I \trianglelefteq_\ell R$ maximal tal que $x \notin I$. Como I é maximal e $I \subset I + Rx$, temos $R = I + Rx$. Em particular, existem $s \in I$, $r \in R$ tais que $1 = s + rx$. Daí, vemos que $1 - rx = s \in I$ não possui inverso à esquerda, pois se possuísse, então teríamos $1 = r's \in I$, para algum $r' \in R$, contrariando a maximalidade de I. □

Lema 2.1.4. *Sejam R um anel e $x \in R$. Se $x \in J(R)$, então $1 + x$ é invertível. Além disso, $J(R)$ é o maior ideal de R com essa propriedade.*

Demonstração. Pelo lema anterior, se $x \in J(R)$, então $1 + x$ possui inverso à esquerda, digamos, y. Assim, temos $y + yx = 1$, ou ainda, $y = 1 - yx$. Como $yx \in J(R)$, então, novamente pelo lema anterior, $y = 1 - yx$ possui inverso à esquerda. Como $1 + x$ é inverso à direita de y, então y é invertível e, consequentemente, $1 + x$ é invertível. Agora, seja

$I \trianglelefteq_\ell R$ tal que $1+x$ é invertível, para todo $x \in I$. Então, $1+rx$ é invertível para todos $x \in I$ e $r \in R$. Pelo lema anterior, temos $x \in J(R)$ e, portanto, $I \subseteq J(R)$. □

Dizemos que um R-módulo M é **artiniano** (à esquerda) se toda cadeia descendente de R-submódulos de M é estacionária, isto é, se

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$$

é uma cadeia de R-submódulos de M, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_i = M_n$ para todo $i \geq n$. Dizemos que um anel R é **artiniano** se R é artiniano (à esquerda) como R-módulo. Analogamente, defini-se R-módulos e anéis artinianos à direita, bem como R-módulos e anéis noetherianos à esquerda e à direita. Observe que todo R-módulo M simples é artiniano e noetheriano.

Teorema 2.1.3. *([8], Teorema 1.3.75) Todo ideal nilpotente de um anel R está contido em $J(R)$. Se R é artiniano, então $J(R)$ é nilpotente e, assim, é o maior ideal nilpotente de R.*

Lema 2.1.5. *([8], Lema 1.3.15) Sejam M um R-módulo e N um submódulo de M. Então M é noetheriano (artiniano) se, e somente se, N e M/N são noetherianos (artinianos).*

Teorema 2.1.4. *Seja M um R-módulo tal que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, onde cada M_i é um submódulo de M, $i = 1, \ldots, n$. Então M é noetheriano (artiniano) se, e somente se, cada M_i, $i = 1, \ldots, n$, é noetheriano (artiniano).*

Demonstração. Se M é noetheriano (artiniano), então pelo Lema 2.1.5, cada submódulo M_i, $i = 1, \ldots, n$ é noetheriano (artiniano). Reciprocamente, sejam M_1 e M_2 submódulos noetherianos (artinianos) de M tais que $M = M_1 \oplus M_2$. Pelo Lema 2.1.2, $M/M_1 \cong M_2$ é noetheriano (artiniano). Logo, pelo Lema 2.1.5, tem-se M noetheriano (artiniano). O caso geral é provado usando indução sobre n. □

Corolário 2.1.1. *Se M é um R-módulo semissimples, então M é noetheriano e artiniano.*

Lema 2.1.6. *([8], Lema 1.3.78) Se R é um anel artiniano, então existe uma família finita $\{L_1, \ldots, L_n\}$ de ideais maximais à esquerda de R tal que $J(R) = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$.*

As definições a seguir serão apresentadas para construírmos um tipo especial de R-módulo e para provarmos dois importantes resultados para os anéis semissimples, sendo um deles o *Teorema de Wedderburn-Artin*.

Vamos começar considerando dois R-módulos quaisquer, M e N. Sobre o produto cartesiano $M \times N$, podemos definir a soma e a multiplicação por escalar da seguinte forma:
1) $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$,
2) $r(m, n) = (rm, rn)$,

para todos $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ e $r \in R$. Com estas operações, $M \times N$ é um R-módulo, o qual chamamos **produto direto** (externo) de M por N.

Analogamente, dada uma família arbitrária de R-módulos $\{M_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ e elementos $(m_i)_{i\in\mathcal{I}}, (m'_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ e $r \in R$, podemos definir a soma e a multiplicação por escalar sobre o produto cartesiano $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ da seguinte forma:

1) $(m_i)_{i\in\mathcal{I}} + (m'_i)_{i\in\mathcal{I}} = (m_i + m'_i)_{i\in\mathcal{I}}$,
2) $r(m_i)_{i\in\mathcal{I}} = (rm_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Com estas operações, $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ é um R-módulo, o qual chamamos **produto direto** (externo) da família $\{M_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. A aplicação $\pi_i : \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i \longrightarrow M_i$ definida por $\pi((m_i)_{i\in\mathcal{I}}) = m_i$ é chamada de **projeção canônica** de $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ sobre o i-ésimo somando M_i e a aplicação $\eta_i : M_i \longrightarrow \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ definida por $\eta_i(m_i) = ((m_j)_{j\in\mathcal{I}})$, com $m_j = m_i$ se $j = i$, e $m_j = 0_{M_j}$ se $j \neq i$, é chamada **imersão canônica** do i-ésimo somando M_i em $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$. Naturalmente, estas aplicações são R-homomorfismos.

Agora, considere uma família arbitrária de R-módulos $\{M_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ e seja $M = \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$. A **soma direta** (externa) da família $\{M_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, é definida como o conjunto de todas as sequências $(m_i)_{i\in\mathcal{I}}$ tais que $m_i = 0$, exceto para um número finito de índices em $\mathcal{I}$. Este conjunto é denotado por $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ e um elemento qualquer $(m_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ é chamado **sequência quase-nula**. Note que a soma direta $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} M_i$ é um submódulo do produto direto M. Além disso, podemos ver que, quando $\mathcal{I} = \{1, \dots k\}$ é um conjunto finito, a soma e o produto direto da família $\{M_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ são o mesmo R-módulo. Assim, como fizemos para a soma direta interna, escrevemos $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. No caso em que todos os módulos M_i são iguais a um módulo N, denotaremos $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ por $N^{(n)}$.

Sejam M e N R-módulos, considere o R-submódulo L de $M \oplus N$ gerado pelo conjunto

$$\{(m, n) \in M \oplus N;\ m \in M, n \in N\}$$

e J o submódulo de L gerado pelo conjunto dos elementos

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$$

$$(rm, n) - r(m, n)$$

$$(m, nr) - r(m, n),$$

onde $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$. O quociente L/J é chamado **produto tensorial** entre M e N e é denotado por $M \otimes_R N$, ou simplesmente $M \otimes N$ quando não houver ambiguidade sobre o anel R em questão. Denotamos os elementos $(m, n) + J$ deste produto tensorial por $m \otimes n$. A partir desta definição de produto tensorial, vemos que a aplicação

$$\varphi : (M, N) \longrightarrow M \otimes_R N$$

$$(m, n) \mapsto m \otimes n$$

é bilinear. Logo, $M \otimes N$ é um R-módulo.

Teorema 2.1.5. *([8], Teorema* 1.3.34*) Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*
1) *Todo R-módulo é semissimples;*
2) *R é um anel semissimples;*
3) *R é soma direta de R-submódulos simples (ideias minimais à esquerda).*

Teorema 2.1.6. *Seja R um anel. Então R é semissimples se, e somente se, R é artiniano e $J(R) = \{0\}$.*

Demonstração. O Corolário 2.1.1 e a Proposição 2.1.2 garantem que se R é um anel semissimples, então R é artiniano e $J(R) = \{0\}$.

Reciprocamente, suponha que R é artiniano e que $J(R) = \{0\}$. Pelo Lema 2.1.6, existe uma família finita de ideais maximais à esquerda $\{L_1, \ldots, L_n\}$ de R tal que $J(R) = \bigcap_{i=1}^{n} L_i = \{0\}$. Observe que cada um destes ideias L_i é regular. De fato, como todo ideal à esquerda de R/L_i é da forma J/L_i, onde J é um ideal à esquerda de R contendo L_i, e como L_i é maximal, então temos $J = L_i$ ou $J = R$. Isso implica que os ideais à esquerda de R/L_i só podem ser os triviais. Daí, cada R/L_i é um R-módulo simples e, portanto, segue do Teorema 2.1.1 que cada L_i é um ideal regular. Agora, pelo Teorema 2.1.5, a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n} R/L_i$ é um anel semissimples. Como temos a imersão $R \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/L_i$ por meio do monomorfismo $f : R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/L_i$ definido por $f(r) = (r + L_1, \ldots, r + L_n)$ para todo $r \in R$, então R é R-isomorfo ao submódulo $f(R)$ de $\bigoplus_{i=1}^{n} R/L_i$. Pela Proposição 2.1.1, R é semissimples. □

Proposição 2.1.3. *Dados um R-módulo M e quaisquer naturais m e n, temos um isomorfismo de grupos aditivos entre $Hom_R(M^{(m)}, M^{(n)})$ e $M_{n\times m}(End_R(M))$. Em particular, $End_R(M^{(n)}) \cong M_n(End_R(M))$.*

Demonstração. Começamos definindo a aplicação

$$\psi : Hom_R(M^{(m)}, M^{(n)}) \longrightarrow M_{n\times m}(End_R(M))$$

$$f \longmapsto [\pi_i \circ f \circ \eta_j],$$

onde π_i é a projeção de $M^{(m)}$ sobre o i-ésimo somando M, $i = 1, \ldots, n$, e η_j é a imersão do j-ésimo somando M em $M^{(n)}$, $j = 1, \ldots, m$. Note que ψ está bem definida, pois $\pi_i \circ f \circ \eta_j \in End_R(M)$. Observe que ψ é um homomorfismo de grupos, pois $f \in Hom_R(M^{(m)}, M^{(n)})$. Para ver que ψ é injetiva, considere $\psi(f) = 0$, então $\pi_i \circ f \circ \eta_j = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ e, logo, $f = 0$. A aplicação ψ também é sobrejetiva. De fato, dada qualquer matriz $[\beta_{ij}] \in M_{n \times m}(End_R(M))$, podemos definir uma aplicação $f : M^{(m)} \longrightarrow M^{(n)}$ por

$$f(u_1, \ldots, u_m) = (w_1, \ldots, w_n),$$

para todo $(u_1, \ldots, u_m) \in M^{(m)}$, com $w_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}(u_j)$. Assim, se $x \in M$, então

$$(\pi_i \circ f \circ \eta_j)(x) = (\pi_i \circ f)(0, \ldots, \overbrace{x}^{posição\, j}, 0, \ldots, 0) = \pi_i(\beta_{1j}(x), \ldots, \beta_{ij}(x), \ldots, \beta_{nj}(x)) = \beta_{ij}(x),$$

ou seja, $\psi(f) = [\beta_{ij}]$. $\square$

Seja R um anel. O **anel oposto** de R, o qual denotamos por R^{op}, é definido como sendo o mesmo grupo aditivo R, mas com a operação de multiplicação dada por $r \cdot s := sr$, onde $r, s \in R$. Obviamente, se $R \cong S$, então $R^{op} \cong S^{op}$. Além disso, R^{op} é um R-módulo e $(M_n(R))^{op} \cong M_n(R^{op})$. Vale o R-isomorfismo $R^{op} \cong End_R(R)$ e, para ver isto, basta definir a aplicação $f : R^{op} \longrightarrow End_R(R)$ que, a cada $r \in R^{op}$, associa um R-endomorfismo $f(r) = \varphi_r : R \longrightarrow R$, definido por $\varphi_r(s) = sr$, para todo $s \in R$.

Seja M um R-módulo semissimples. Dizemos que M tem **comprimento finito** se M é soma direta de um número finito de R-submódulos simples.

Lema 2.1.7. *([8], Proposição 1.3.41) Seja M um R-módulo semissimples de comprimento finito. Então $End_R(M)$ é isomorfo a uma soma direta finita de anéis de matrizes sobre anéis de divisão.*

Como consequência da demonstração deste último resultado, é possível escrever $End_R(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i)$, onde $D_i = End_R(M_i)$ é um anel de divisão, sempre que $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ for um R-módulo semissimples de comprimento finito.

As considerações feitas sobre o anel oposto de um anel R e sobre o Lema 2.1.7 são suficientes para provar o *Teorema de Wedderburn-Artin.*

Teorema 2.1.7. *(Wedderburn-Artin, [8], Teorema 1.3.47). Se R é um anel semissimples, então R é isomorfo a uma soma direta de um número finito de anéis de matrizes sobre anéis de divisão, ou seja,*

$$R \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i),$$

onde cada D_i é um anel de divisão.

2.2 Álgebras e Teoremas de Decomposição

As estruturas que definiremos a seguir serão a base do restante deste trabalho. Vamos definir o conceito de álgebra sobre um corpo F e exibir alguns exemplos de álgebras de dimensão finita e infinita. Além disso, vamos apresentar uma extensão natural do *Teorema de Wedderburn-Artin* para álgebras e demonstrar o *Teorema de Wedderburn-Malcev* para álgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero.

Definição 2.2.1. *Um F-espaço vetorial A é dito uma **álgebra associativa sobre** F (ou uma F-**álgebra associativa**) se A está munido de uma operação binária $* : A \times A \longrightarrow A$ associativa, chamada **produto**, que satisfaz as seguintes condições para todos $a, b, c \in A$ e para todo $\alpha \in F$:*
1) $(a + b) * c = a * c + b * c$;
2) $a * (b + c) = a * b + a * c$;
3) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Definimos ainda $a^1 = a$, $a^2 = a * a$ e, recursivamente, $a^n = a^{n-1} * a$, para todo $a \in A$.

Definição 2.2.2. *Seja A uma F-álgebra. Dizemos que A é:*
*1) **unitária**, se existe um elemento $1 = 1_A \in A$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in A$;*
*2) **de divisão**, se para todo $a \in A$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in A$ tal que $a^{-1} * a = 1 = a * a^{-1}$;*
*3) **comutativa**, se $a * b = b * a$, para todos $a, b \in A$;*
*4) **nil de expoente limitado** n, se $a^n = 0$, para todo $a \in A$;*
*5) **nilpotente**, se existe um número natural m tal que $A^m = \{0\}$. O menor número natural m satisfazendo esta condição é chamado de **índice de nilpotência** de A;*
*6) **de Lie**, se $a^2 = 0$ e $(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$, para todos $a, b, c \in A$;*
*7) **de Jordan**, se A é comutativa e $(a^2 * b) * a = a^2 * (b * a)$, para todos $a, b \in A$.*

Exemplo 2.2.1. *Sejam A e B F-álgebras unitárias. É possível definir o produto tensorial $A \otimes_F B$ e, sobre o F-módulo $A \otimes_F B$, definir o seguinte produto*

$$(a \otimes b) * (a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb').$$

Com este produto, $A \otimes_F B$ é uma F-álgebra unitária, cuja unidade é $1_A \otimes 1_B$.

Definição 2.2.3. *Uma aplicação $\varphi : A \longrightarrow B$ entre duas álgebras A e B é um **homomorfismo** de álgebras, se φ satisfaz as seguintes condições para todos $x, y \in A$ e $\alpha \in F$:*
1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;
3) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Uma F-álgebra associativa é um F-espaço vetorial e também um anel associativo, considerando a operação de produto definida acima. Usaremos o termo **álgebra** para mencionar as F-álgebras associativas, embora se possa definir mais geralmente as álgebras (não necessariamente associativas) sobre um anel R qualquer. Sempre que não houver ambiguidades, omitiremos o símbolo do produto de uma álgebra na operação entre dois ou mais de seus elementos.

Definição 2.2.4. *Um subespaço vetorial $S \neq \varnothing$ de uma álgebra A é chamado de **subálgebra**, se é fechado em relação a operação do produto de A, ou seja, se $x, y \in S$, então $xy \in S$. As subálgebras $\{0\}$ e A são chamadas **subálgebras triviais** de A. Uma subálgebra I de A é um **ideal à esquerda**, se I é um ideal à esquerda do anel A. Analogamente, definimos **ideal à direita** e **ideal bilateral** da álgebra A.*

Daqui em diante, chamaremos um ideal bilateral de uma álgebra simplesmente de **ideal**. Sejam A um álgebra e I um ideal de A. Observe que o quociente A/I, que é definido de modo similar ao caso de anéis e módulos, é uma F-álgebra. Além disso, qualquer subálgebra de A/I é da forma S/I, onde S é uma subálgebra de A.

O **centro** de uma álgebra A, denotado por $Z(A)$, é definido como o conjunto dos elementos de A que comutam com todos os elementos de A, ou seja,

$$Z(A) = \{a \in A \ / \ ab = ba, \ \forall \ b \in A\}.$$

Observe que $Z(A)$ é uma subálgebra (comutativa) de A.

A **dimensão** de uma álgebra A é a sua dimensão como F-espaço vetorial. Dizemos que A é **gerada como álgebra** por um subconjunto S de A, se todo elemento de A pode ser escrito como combinação linear de produtos da forma $s_1 s_2 \cdots s_{i_t}$, com $s_{i_k} \in S$. Neste caso, escrevemos $A = \langle S \rangle$.

Feitas estas considerações, exibimos a seguir alguns exemplos bem conhecidos de álgebras.

Exemplo 2.2.2. *Toda extensão finita K de um corpo F é uma F-álgebra de dimensão finita.*

Exemplo 2.2.3. *O F-espaço vetorial $F[x]$ dos polinômios em uma variável com coeficientes em F e o F-espaço vetorial $F[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios em várias variáveis (comutativas) com coeficientes em F são F-álgebras de dimensão infinita.*

Exemplo 2.2.4. *O espaço vetorial $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ sobre o corpo F, com as operações usuais, é uma F-álgebra. Denotando por e_{ij} a matriz elementar de $M_n(F)$ que tem 1 na ij-ésima entrada e 0 nas demais, vemos que o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{e_{ij}; 1 \leq i, j \leq n\}$$

é a F-base canônica de $M_n(F)$. Logo, $M_n(F)$ é uma álgebra de dimensão n^2.

Exemplo 2.2.5. *O conjunto $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F é um subálgebra de $M_n(F)$. Esta subálgebra tem dimensão $\dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 2$.*

Exemplo 2.2.6. *Para uma F-álgebra A, defini-se o* ***comutador de Lie de peso 2*** *dos elementos $a_1, a_2 \in A$ por*

$$[a_1, a_2] := a_1a_2 - a_2a_1.$$

Também é possível definir recursivamente o ***comutador de Lie normado à esquerda de peso*** *$n \geq 3$ da seguinte forma:*

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] := [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n].$$

Assim, é possível que A tenha uma estrutura de álgebra de Lie e, para isto, basta considerar sobre A um novo produto $a * b := [a, b]$, para todos $a, b \in A$. Em particular, o conjunto $sl_n(F)$ das matrizes $n \times n$ sobre o corpo F com traço zero, munida deste produto, é uma álgebra de Lie.

Exemplo 2.2.7. *Para uma F-álgebra A, com $char(F) \neq 2$, podemos definir um novo produto $a \circ b := \dfrac{1}{2}(ab + ba)$ para todos $a, b \in A$, fornecendo para A uma estrutura de álgebra de Jordan. Em particular, o conjunto $Sym_n(F)$ das matrizes simétricas $n \times n$ sobre o corpo F, munida deste produto, é uma álgebra de Jordan.*

Daqui em diante, denotaremos por S^φ a imagem de S por φ, para qualquer conjunto $S \subseteq A$. Se φ é bijetora, dizemos que φ é um **isomorfismo**. Neste caso, dizemos que A e B são **isomorfas** e denotamos por $A \cong B$. Se $B = A$, dizemos que φ é um **endomorfismo**. A aplicação φ é um **automorfismo**, se φ é um endomorfismo bijetor. Se φ é um automorfismo, dizemos que φ tem **ordem** n, se n é o menor inteiro positivo tal que $\varphi^n = id_A$. Se φ é um automorfismo e existe um elemento invertível $a \in A$ tal que $\varphi(x) = axa^{-1}$, para todo $x \in A$, então φ é chamado **automorfismo interno** de A.

Também é válido o *1º Teorema do Isomorfismo* para álgebras, analogamente ao caso de anéis e módulos. Os dois próximos resultados envolvendo automorfismo de álgebras serão importantes para discutirmos os principais teoremas do Capítulo 4 sobre superálgebras.

Proposição 2.2.1. *Sejam A uma F-álgebra com $char(F) = 0$ e $\varphi : A \longrightarrow A$ um automorfismo de ordem 2. Então, os autovalores de φ são 1 e -1. Além disso, A pode ser escrito como a soma direta dos autoespaços $A^{(0)} = aut(\varphi, 1)$ e $A^{(1)} = aut(\varphi, -1)$.*

Demonstração. Como φ tem ordem 2, então existe $a \in A$, $a \neq 0$, tal que $\varphi(a) \neq a$. Através das igualdades

$$\varphi(a - \varphi(a)) = \varphi(a) - \varphi^2(a) = \varphi(a) - a = -(a - \varphi(a))$$

e

$$\varphi(a+\varphi(a)) = \varphi(a) + \varphi^2(a) = \varphi(a) + a = a + \varphi(a)$$

garantimos que os subespaços $aut(\varphi, 1) = A^{(0)}$ e $aut(\varphi, -1) = A^{(1)}$ são não triviais. Além disso, é claro que $A^{(0)} \cap A^{(1)} = \{0\}$, pois se $a = \varphi(a) = -a$, então $a = 0$, já que $\text{char}(F) = 0$. Finalmente, note que todo elemento $a \in A$ pode ser escrito como

$$a = \frac{a+\varphi(a)}{2} + \frac{a-\varphi(a)}{2}$$

com $\dfrac{a+\varphi(a)}{2} \in A^{(0)}$ e $\dfrac{a-\varphi(a)}{2} \in A^{(1)}$. Isso conclui a prova. □

Proposição 2.2.2. *([8], Corolário* 1.4.41*). Todo automorfismo de $M_n(F)$ é interno.*

Abaixo, veremos alguns exemplos de álgebras de dimensão infinita, as quais serão de muita relevância para todo o restante deste trabalho.

Começamos com um conjunto $X = \{x_i : i \in \mathcal{I}\}$. Chamaremos **variáveis** os elementos de X. A justaposição de n variáveis $x_{i_j} \in X$, $j = 1, \ldots, n$, denotada por $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, é chamada **palavra** em X. Denotamos por 1 a **palavra vazia** (quando fazemos $n = 0$). Podemos obter uma álgebra a partir do conjunto X somente considerando o espaço vetorial sobre F de dimensão infinita gerado por todas as palavras de X, o qual denotaremos por, $F\langle X\rangle$, munido do produto de duas palavras definido pela justaposição, ou seja,

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m} \in F\langle X\rangle .$$

Chamaremos $F\langle X\rangle$ de **álgebra livre associativa, livremente gerada por X sobre o corpo F**. O **posto** de $F\langle X\rangle$ é definido como a cardinalidade de X. Um elemento desta álgebra será chamado **polinômio**. Note que um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é uma combinação linear de palavras em X, isto é, $f = \sum\limits_h \alpha_h h$, onde $\alpha_h \in F$ e h é uma palavra em X. Neste caso, α_h é chamado **coeficiente** de h. Se $\alpha_h \neq 0$, então $m_h := \alpha_h h$ é chamado **monômio** de f. Se em f aparecem somente as variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então escrevemos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Observe que $F\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa unitária, cuja dimensão (finita ou infinita) depende do seu posto. Eventualmente consideraremos a álgebra livre não unitária $F^*\langle X\rangle$, que é a álgebra de todos os polinômios sem termo constante.

Sejam A uma álgebra unitária e $\varphi_0 : X \longrightarrow A$ uma função. Então, existe um único homomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \longrightarrow A$ que estende φ_0, ou seja, $\varphi|_X = \varphi_0$. Esta é a chamada **propriedade universal**, que equivale a dizer que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & F\langle X\rangle \arrow[d, "\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $\varphi_0 = \varphi \circ i$, onde i é a aplicação inclusão X em $F\langle X\rangle$. Particularmente, qualquer endomorfismo φ da álgebra livre $F\langle X\rangle$ é único e completamente determinado pela sua ação nas variáveis em X. De fato, basta considerar a restrição $\varphi_0 = \varphi|_X$ e ver que φ é o único endomorfismo de $F\langle X\rangle$ que estende φ_0.

É importante notar que podemos utilizar um outro conjunto de variáveis Y para representar a álgebra livre $F\langle X\rangle$, desde que X e Y tenham a mesma cardinalidade. Neste caso, devemos ter $F\langle X\rangle \cong F\langle Y\rangle$ se, e somente se, $|X| = |Y|$. Por isso, ao longo do texto, nos permitiremos usar outros símbolos para denotar os elementos de X, de acordo com o que for mais conveniente. A partir de agora, consideraremos o conjunto infinito enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de variáveis não comutativas.

Exemplo 2.2.8. *Considere o ideal $I = \langle x_ix_j + x_jx_i : i, j \geq 1\rangle$ da álgebra livre $F\langle X\rangle$. A álgebra $\mathcal{G} = F\langle X\rangle / I$ é chamada **álgebra de Grassmann** de dimensão infinita sobre F. É natural representar esta álgebra da seguinte forma:*

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots : e_i = x_i + I,\ \forall\ i \geq 1,\ e_ie_j = -e_je_i\rangle .$$

Note que

$$e_{\sigma(i_1)} \cdots e_{\sigma(i_n)} = sgn(\sigma) e_{i_1} \cdots e_{i_n},$$

*para todo $\sigma \in S_n$, onde S_n denota o **grupo simétrico de grau** n. Além disso, se $char(F) \neq 2$, então $e_i^2 = 0$, para todo $i \geq 1$. Desse modo, conseguimos representar $\mathcal{G}$ como*

$$\mathcal{G} = span_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n,\ n \geq 0\}.$$

Seja $\mathcal{B} = \{e_{i_1} \cdots e_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n,\ n \geq 0\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Considere o conjunto

$$N = \{n \in \mathbb{N} :\ \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = 0,\ \alpha_i \in F \setminus \{0\},\ e\ b_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Afirmamos que $N = \varnothing$. De fato, se $N \neq \varnothing$, então N admite um menor elemento, digamos m. Assim, existem $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in F \setminus \{0\}$ e $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$ tais que $\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m = 0$. Mas, se e_j aparece, digamos em b_1, porém não aparece em b_2, então $\alpha_2 e_j b_2 + \cdots + \alpha_n e_j b_m = 0$, pois $e_j^2 = 0$. Daí, temos $m - 1 \in N$, contrariando a minimalidade de m. Logo $N = \varnothing$. Isso mostra que B é linearmente independente. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{G}$ sobre F.

Agora, será interessante considerar os seguintes subespaços da álgebra de Grassmann $\mathcal{G}^{(0)} = span_F\, \mathcal{B}_0$ e $\mathcal{G}^{(1)} = span_F\, \mathcal{B}_1$, onde

$$\mathcal{B}_0 = \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k},\ k \geq 0\} \quad e$$

$$\mathcal{B}_1 = \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1},\ k \geq 0\}.$$

Observe que $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \dot{+} \mathcal{G}^{(1)}$. Por outro lado, $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}$, pois $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$, mas $\mathcal{G}^{(1)}$ não é uma subálgebra de $\mathcal{G}$, pois $\mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(0)} \cap \mathcal{G}^{(1)} = \{0\}$. Logo, $\mathcal{G}$ não é soma direta de $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$ como álgebras. Além disso,

$$\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)} \quad e \quad \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)}.$$

Agora vamos definir, caracterizar e estabelecer teoremas de decomposição para álgebras semissimples. Começamos com a seguinte definição.

Definição 2.2.5. *Uma álgebra A é **simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos ideais de A são os triviais.*

Se uma álgebra A é simples como anel, então A é uma álgebra simples. Em particular, $M_n(F)$ é uma álgebra simples. Cabe destacar que o *Lema de Schur* (Lema 2.1.1) tem um versão análoga para álgebras simples.

Sejam A uma F-álgebra e $A_1, \ldots, A_k$ subálgebras de A. Dizemos que A é **soma direta** das álgebras $A_1, \ldots, A_k$, se são válidas as seguintes condições:
1) $A = A_1 + \cdots + A_k$;
2) $a_1 + \cdots + a_k = 0$, com $a_i \in A_i$, implica $a_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$;
3) $A_iA_j = \{0\}$, para todos $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$.

Satisfeitas estas condições, escrevemos $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$. Observe que tal decomposição é única, a menos da ordem em que aparecem os somandos $A_1, \ldots, A_k$.

O **produto direto** (externo), bem como a **soma direta** (externa), de uma família $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ de F-álgebras são definidos analogamente ao caso de módulos, como foi feito na Seção 2.1 deste capítulo, com a diferença que ainda é preciso considerar um produto para que estes conjuntos tenham estrutura de F-álgebras.

Sabendo que toda álgebra A é um A-bimódulo, também é possível definir, de forma natural, uma **álgebra artiniana** (ou **álgebra noetheriana**) A, para a qual toda cadeia descendente (ascendente) de ideais (à esquerda, à direita, bilaterais) da álgebra A é estacionária. Note que álgebras de dimensão finita são artinianas e noetherianas. À luz do Teorema 2.1.3, definimos então o **radical de Jacobson de uma álgebra** A de dimensão finita como sendo o maior ideal nilpotente de A, denotado por $J(A)$. Assim, é claro que o radical de Jacobson da álgebra A e do anel A coincidem.

Exemplo 2.2.9. *Considere $A = UT_n$. Então $J(A)$ é exatamente o conjunto das matrizes estritamente triangulares superiores.*

Definição 2.2.6. *Uma álgebra A é dita **semissimples** se A é um A-módulo semissimples.*

Desse modo, vemos que toda álgebra semissimples é um anel semissimples e, portanto, os Teoremas 2.1.5 e 2.1.6 também são válidos para álgebras semissimples. Com isso, temos o seguinte resultado de caracterização das álgebras semissimples de dimensão finita.

Proposição 2.2.3. *Para uma álgebra A de dimensão finita são equivalentes as seguintes afirmações:*
1) *A é semissimples;*

2) $J(A) = \{0\}$;
3) A *é soma direta finita de ideais simples.*

Observamos assim que uma álgebra semissimples A sempre é uma soma direta de álgebras simples. Além disso, o *Teorema de Wedderburn-Artin* para anéis semissimples pode ser estendido para álgebras semissimples, e a sua demonstração pode ser feita utilizando-se das mesmas linhas de argumentação usadas no Teorema 2.1.7.

Teorema 2.2.1. *([22], Teorema* 2.6.8*, Wedderburn-Artin). Se A é uma F-álgebra semissimples de dimensão finita, então A é isomorfa a uma soma direta finita de álgebras de matrizes sobre F-álgebras de divisão, ou seja,*

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k).$$

Pelo *Teorema de Wedderburn-Artin*, se A é uma F-álgebra simples de dimensão finita, então $A \cong M_n(D)$ para algum $n \geq 1$, onde $D = End_F(A)$ é uma álgebra de divisão. Além disso, se F é algebricamente fechado, então cada endomorfismo φ de A possui autovalor. Desse modo, se λ_φ é um autovalor de φ, podemos definir uma aplicação $\psi : End_F(A) \longrightarrow Z(M_n(F))$ por $\psi(\varphi) = \lambda_\varphi I_n$. Note que ψ é um isomorfismo de álgebras. Logo, $D = End_F(A) \cong Z(M_n(F))$.

Nosso último objetivo antes de finalizar este capítulo é provar mais um teorema de decomposição para álgebras, desta vez, álgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Para isso, vamos definir previamente alguns conceitos e estabelecer alguns resultados.

Seja $p(x) \in F[x]$ um polinômio. Dizemos que $p(x)$ **cinde** sobre F se $p(x)$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = u_0(x - u_1) \cdots (x - u_n),$$

onde cada $u_i \in F$, $i = 0, \ldots, n$. Dizemos que $p(x)$ é **separável** sobre F se cada raiz u_i, $i = 1, \ldots, n$, é simples. Uma extensão K de F é um **corpo de decomposição** de $p(x)$ se K é o menor corpo tal que $p(x)$ cinde sobre K. Seja K uma extensão do corpo F e $u \in K$. Dizemos que u é um **elemento algébrico** sobre F se u é raiz de algum polinômio com coeficientes em F. Se $u \in K$ é algébrico sobre F, então existe um polinômio mônico e irredutível $m(x) \in F[x]$, do qual u é raiz. Tal polinômio é chamado **polinômio minimal** de u. Dizemos que u é **separável** sobre F se seu polinômio minimal é separável sobre K. Dizemos que K é uma **extensão separável** se todo elemento de K é separável sobre F.

Agora, seja A uma F-álgebra semissimples de dimensão finita. Pelo *Teorema de Wedderburn-Artin*, temos $A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k)$, onde cada D_i é uma F-álgebra de divisão. Sabendo que o centro de $M_{n_i}(D_i)$ é precisamente o conjunto das matrizes escalares e considerando naturalmente o isomorfismo de álgebras $\zeta : Z(D_i) \longrightarrow Z(M_{n_i}(D_i))$, definido por $\zeta(\alpha) = \alpha I_{n_i}$, obtemos o isomorfismo $Z(A) \cong Z(D_1) \oplus \cdots \oplus Z(D_k)$. Além disso, cada

$Z(D_i)$ é uma extensão de F. Assim, dizemos que A é uma F-**álgebra separável** se cada $Z(D_i)$ é uma extensão separável de F.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.2.2. *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita. Se A é separável, então para alguma F-base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A, existem elementos $a'_1, \ldots, a'_n \in A$ com as seguintes propriedades:*
1) $\sum_{i=1}^{n} a'_i a_i = 1$;
2) *para todo $a \in A$, $a_i a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j$, com $\alpha_{ij} \in F$, implica $aa_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a'_j$.*

Sejam A e B F-álgebras, $\dim_F B < \infty$. Se existe um epimorfismo de álgebras $f : B \longrightarrow A$ com núcleo N, dizemos que B ou f é uma **extensão de A com núcleo** N, ou simplesmente, **extensão de** A. Se $f : B \longrightarrow A$ é uma extensão de A com núcleo N, pelo *1º Teorema do Isomorfismo*, existe um único isomorfismo de álgebras $\overline{f} : B/N \longrightarrow A$ tal que $f = id_A \circ \overline{f} \circ \pi$, onde $\pi : B \longrightarrow B/N$ é a projeção canônica de B sobre B/N. Como B tem dimensão finita, então B/N tem dimensão finita e, consequentemente, A tem dimensão finita.

Denominamos **aplicação associada a extensão** f toda aplicação F-linear

$$g : A \longrightarrow B \ \text{ tal que } \ f \circ g = id_A.$$

O próximo resultado garante que toda extensão $f : B \longrightarrow A$ com núcleo N admite uma aplicação associada.

Proposição 2.2.4. *Sejam A e B F-álgebras, $dim_F B < \infty$ e $f : B \longrightarrow A$ uma extensão de A com núcleo N. Então existem um subespaço vetorial U de B e um isomorfismo de F-espaços vetoriais $g : A \longrightarrow U$ tal que $f \circ g = id_A$.*

Demonstração. Com efeito, existe um subespaço vetorial U de B tal que $B = U \dot{+} N$, pois B tem dimensão finita. Note que, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim_F U = \dim_F Im(f) = \dim_F A.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1.2, existe um isomorfismo de F-espaços vetoriais $\phi : U \longrightarrow B/N$ tal que $\phi = \pi|_U$, onde π é a projeção canônica de B sobre B/N. Com isso,

$$g := \phi^{-1} \circ \overline{f}^{-1} : A \longrightarrow U$$

é um isomorfismo de F-espaçoes vetoriais tal que $f \circ g = id_A$. $\square$

Dizemos que uma extensão $f : B \longrightarrow A$ **cinde** se existe um homomorfismo de álgebras $g : A \longrightarrow B$ tal que $f \circ g = id_A$. Observe que tal homomorfismo g é um monomorfismo.

Lema 2.2.1. *([8], Lema* 1.4.50*). Seja $f : B \longrightarrow A$ uma extensão de A com núcleo N. Então a extensão cinde se, e somente se, existe uma subálgebra B' de B tal que $B = B' \dot{+} N$.*

Sejam A uma F-álgebra e B um A-bimódulo, uma aplicação F-bilinear

$$h : A \times A \longrightarrow B$$

é chamada **fator** de A se, para todos $a, b, c \in A$,

$$h(ab, c) - h(a, bc) + h(a, b)c - ah(b, c) = 0.$$

Dizemos que o fator h **cinde** se existe uma aplicação F-linear $g : A \longrightarrow B$ tal que

$$h(a, b) - ag(b) + g(ab) - g(a)b = 0,$$

para todos $a, b \in A$.

Lema 2.2.2. *Sejam $f : B \longrightarrow A$ uma extensão de A com núcleo N tal que $N^2 = \{0\}$, associada a uma aplicação F-linear $g : A \longrightarrow B$ tal que $f \circ g = id_A$. Se $h : A \times A \longrightarrow N$ é a aplicação definida por*

$$h(a, b) = g(ab) - g(a)g(b),$$

para todos $a, b \in A$, então são válidas as seguintes afirmações:
1) *N é um A-bimódulo, se os produtos por escalar à esquerda e à direita forem definidos respectivamente por $an := g(a)n$ e $na := ng(a)$, para todos $a \in A$ e $n \in N$;*
2) *h está bem definida e é F-bilinear;*
3) *h é um fator de A;*
4) *h cinde se, e somente se, a extensão f cinde.*

Demonstração. Vamos demonstrar somente a afirmação (4). Suponha que o fator h cinde. Então, existe uma aplicação F-linear $\overline{g} : A \longrightarrow N$ tal que

$$h(a, b) = a\overline{g}(b) - \overline{g}(ab) + \overline{g}(a)b = g(a)\overline{g}(b) - \overline{g}(ab) + \overline{g}(a)g(b),$$

para todos $a, b \in A$. Definindo $g' : A \longrightarrow B$ por $g'(a) = g(a) + \overline{g}(a)$, vemos que g' é claramente F-linear e que $f \circ g' = f \circ g + f \circ \overline{g} = id_A$, pois $Im(\overline{g}) \subseteq N$. Para mostrar que f cinde, basta mostrar que g' preserva o produto de A. Então, dados $a, b \in A$, temos

$$g'(ab) = g(ab) + \overline{g}(ab) = h(a, b) + g(a)g(b) + \overline{g}(ab) = g(a)\overline{g}(b) + \overline{g}(a)g(b) + g(a)g(b).$$

Por outro lado, como $N^2 = \{0\}$, $\overline{g}(a)\overline{g}(b) = 0$ e, assim,

$$g'(a)g'(b) = (g(a) + \overline{g}(a))(g(b) + \overline{g}(b)) = g(a)g(b) + g(a)\overline{g}(b) + \overline{g}(a)g(b).$$

Logo, f cinde.

Reciprocamente, suponha que f cinde. Então, existe um homomorfismo de álgebras $\overline{g} : A \longrightarrow B$ tal que $f \circ \overline{g} = id_A$. Vamos definir a aplicação $g' : A \longrightarrow B$ por

$$g'(a) = \overline{g}(a) - g(a).$$

Observe que g' é F-linear, e como $f \circ \overline{g} = id_A$, então $f \circ g' = 0$, ou seja, $Im(g') \subseteq N$. □

Sejam A uma F-álgebra e B um A-bimódulo. Uma aplicação F-linear $f : A \longrightarrow B$ é chamada **derivação generalizada** se, para todos $a, b \in A$,

$$f(ab) = f(a)b + af(b).$$

Fixado $b \in B$, a aplicação $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(a) = [a, b]$ é uma derivação generalizada. Tal aplicação é chamada **derivação interna**.

Teorema 2.2.3. *([8], Teorema 1.4.57). Seja A uma F-álgebra separável de dimensão finita. Então todo fator de A cinde e toda derivação generalizada é interna.*

Demonstração. Vamos mostrar que toda derivação generalizada de A é interna. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma F-base de A. Como A é separável, então pelo item 1) do Teorema 2.2.2, existem $a'_1, \ldots, a'_n \in A$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a'_i a_i = 1$. Além disso, dado qualquer $a \in A$, podemos escrever $a_i a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) a_j$ e, pelo item 2) do Teorema 2.2.2, temos $aa'_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}(a) a'_j$. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma derivação generalizada. Pela linearidade de f, temos

$$f(a_i a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) f(a_j).$$

Assim, reorganizando os termos dos somatórios, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} aa'_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}(a) a'_j \right) f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} a'_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) f(a_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} a'_i f(a_i a).$$

Agora, fixemos $b = \sum_{i=1}^{n} a'_i f(a_i)$. Então, para todo $a \in A$, temos

$$ab - ba = \sum_{i=1}^{n} aa'_i f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} a'_i f(a_i) a =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} aa'_i f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} a'_i f(a_i a) + \sum_{i=1}^{n} a'_i a_i f(a) = f(a).$$

Logo, f é uma derivação interna. □

Teorema 2.2.4. *(Wedderburn-Malcev). Seja A uma F-álgebra de dimensão finita tal que $A/J(A)$ é separável. Então existe uma subálgebra semissimples B de A tal que*

$$A = B \dot{+} J(A).$$

Além disso, se B e B' são subálgebras semissimples de A tais que

$$B \dot{+} J(A) = A = B' \dot{+} J(A),$$

então existe $j \in J(A)$ tal que $B' = (1+j)B(1+j)^{-1}$.

Demonstração. Comecemos escrevendo $J(A) = J$ para simplificar a notação. Como A tem dimensão finita, A é semissimples se, e somente se, $J = \{0\}$. Assim, se $dim_F A = 1$, então A é simples (semissimples). Logo, $J = \{0\}$, e o resultado segue trivialmente. Agora, suponha que $dim_F A > 1$ e que $J \neq \{0\}$. Pelo Teorema 2.1.4, J é o maior ideal nilpotente de A. Se $J^2 = \{0\}$, então o Teorema 2.2.3 garante que todo fator de A/J cinde, pois A/J é separável, por hipótese. Considerando a projeção canônica $\pi : A \longrightarrow A/J$, que é uma extensão de A com núcleo J, vemos que o fator h de A/J, definido como no Lema 2.2.2, cinde. Assim, pelo Lema 2.2.1, existe uma subálgebra B de A tal que $A = B \dot{+} J$. Para ver que B é semissimples, devemos notar que $J(B) = \{0\}$. De fato, observe que

$$J(B) = \bigcap_{I' \trianglelefteq_\ell B\, max} I' = \bigcap_{I \trianglelefteq_\ell A\, max} B \cap I = B \cap J = \{0\}.$$

Logo, B é semissimples e o resultado segue para este caso.

Suponha agora que $J^2 \neq \{0\}$. Então, $dim_F(A/J^2) < dim_F(A)$. Note que $J(A/J^2) = J/J^2$. De fato,

$$J(A/J^2) = \bigcap_{I/J^2 \trianglelefteq_\ell A/J^2\, max} I/J^2 = \frac{\bigcap_{I \trianglelefteq_\ell A\, max} I}{J^2} = J/J^2.$$

Além disso, vemos que $(A/J^2)/(J/J^2) \cong A/J$ é separável, por hipótese. O restante da prova segue por indução sobre a dimensão de A, mais precisamente, suponha que o resultado seja válido para qualquer F-álgebra com dimensão menor do que a dimensão de A. Logo, existe uma subálgebra semissimples B_1' de A/J^2 tal que $A/J^2 = B_1' \dot{+} J/J^2$. Portanto, existe uma subálgebra B_1 de A tal que $A = B_1 + J$, com $J^2 = B_1 \cap J = J(B_1)$. De fato,

$$x \in B_1 \cap J \Longleftrightarrow \overline{x} \in B_1/J^2 \cap J/J^2 = \{\overline{0}\} \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{0} \Longleftrightarrow x \in J^2.$$

Note ainda que $B_1 \cap J$ é o maior ideal nilpotente de B_1. Com efeito, $B_1 \cap J$ é um ideal nilpotente de B_1, pois $B_1(B_1 \cap J)B_1 \subseteq B_1 \cap J$ e $B_1 \cap J \subset J$. Além disso, seja K é um ideal nilpotente de B_1 tal que $B_1 \cap J \subseteq K$. Se essa inclusão fosse estrita, existiria $x \in K$ tal que $x \notin B_1 \cap J$. Como, $K \subseteq B_1$, então teríamos $x \notin J$, assim $J \subsetneq J + \langle x \rangle$. Observe que $J + \langle x \rangle$ é um ideal nilpotente de A, pois é a soma de dois ideais nilpotentes de A. Ora, mas isto contraria a maximalidade de J. Logo, temos $B_1 \cap J = K$ e, portanto, $B_1 \cap J$ é o maior ideal nilpotente de B_1, ou seja, $J(B_1) = B_1 \cap J$.

Agora, como $J^2 \neq J$, então $B_1 \neq A$. Além disso, temos

$$A/J = (B_1 + J)/J \cong B_1/(B_1 \cap J) = B_1/J^2.$$

Aplicando a hipótese de indução sobre B_1, existe uma subálgebra semissimples B de B_1 e, portanto, de A tal que $B_1 = B \dot{+} J^2$. Como $B_1 \cap J = J^2$ e $B \cap J^2 = \{0\}$, $A = B_1 + J = (B \dot{+} J^2) + J = B \dot{+} J$. Isso prova a primeira parte do resultado.

Para provar a segunda parte, vamos considerar B e B' subálgebras de A tais que $B \dot{+} J = A = B' \dot{+} J$. O Lema 2.2.1 garante que existem homomorfismos de álgebras $g : A/J \longrightarrow A$ e $g' : A/J \longrightarrow A$ tais que $\pi \circ g = id_A = \pi \circ g'$. Note que $Im(g) = B$ e $Im(g') = B'$. De fato, como pelo Lema 2.1.2, temos $B \cong A/J$ e como g e g' são monomorfismos, então pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, obtemos

$$\dim_F(B) = \dim_F(A/J) = \dim_F(Im(g)) \text{ e } \dim_F(B') = \dim_F(A/J) = \dim_F(Im(g')).$$

Assim, $Im(g) = B$ e $Im(g') = B'$. Além disso, J é um (A/J)-bimódulo se definirmos os produtos à esquerda e à direita, respectivamente, por $\overline{a}j = g(\overline{a})j$ e $j\overline{a} = jg'(\overline{a})$, para todos $j \in J$ e $\overline{a} \in A/J$. Considere a função $f : A/J \longrightarrow J$ definida por $f(\overline{a}) = g(\overline{a}) - g'(\overline{a})$. Como $\pi \circ g = id_A = \pi \circ g'$, então $\pi \circ f = 0$, logo $Im(f) \subseteq Ker(\pi) = J$. Ainda, temos

$$\begin{aligned} f(\overline{a}\overline{b}) &= g(\overline{a}\overline{b}) - g'(\overline{a}\overline{b}) \\ &= g(\overline{a})(g(\overline{b}) - g'(\overline{b})) + (g(\overline{a}) - g'(\overline{a}))g'(\overline{b}) \\ &= \overline{a}f(\overline{b}) + f(\overline{a})\overline{b}. \end{aligned}$$

Logo, f é uma derivação generalizada. Como A/J é separável, pelo Teorema 2.2.3, f é uma derivação interna e existe $j \in J$ tal que

$$f(\overline{a}) = [\overline{a}, j] = \overline{a}j - j\overline{a} \overset{*}{=} g(\overline{a})j - jg'(\overline{a}),$$

para todo $\overline{a} \in A/J$. Da equação $*$, obtemos $g(\overline{a})(1 - j) = (1 - j)g'(\overline{a})$. Como $j \in J$ é nilpotente, então pelo Lema 2.1.3, $1 - j$ é invertível. Portanto, concluímos que

$$B = (1 - j)B'(1 - j)^{-1},$$

o que demonstra o teorema. $\square$

Exemplo 2.2.10. *Considere a álgebra* $B = \begin{pmatrix} F + cF & F + cF \\ 0 & F \end{pmatrix}$. *Uma decomposição de Wedderburn-Malcev para* B *é dada por*

$$B = \left(\frac{1+c}{2}\right)\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \left(\frac{1-c}{2}\right)\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & F + cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Aspectos da PI-teoria

O objetivo principal neste capítulo é estudar as álgebras com identidades polinomiais, bem como o T-ideal de identidades dessas álgebras e, mais geralmente, as variedades de álgebras. Para tanto, precisamos examinar algumas propriedades de certos tipos de polinômios na álgebra livre $F\langle X\rangle$.

3.1 Definições e propriedades de polinômios

Seja $m = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um monômio. O **grau da variável** x_j em m, denotado por $deg_{x_j}(m)$, é definido como o número de ocorrências de x_j em m. O **grau do monômio** m, denotado por $deg(m)$, é definido como a soma de todos os respectivos graus das variáveis $x_1, x_2, \dots x_n$ em m.

Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio. O **grau da variável** x_j em f, denotado por $deg_{x_j}(f)$, é definido como o maior grau da variável x_j nos monômios de f. O **grau do polinômio** f, denotado por $deg(f)$, é o maior grau obtido considerando o grau de todos os seus monômios.

Agora que já apresentamos as definições acima, vamos considerar uma classe muito importante de polinômios para a *PI-teoria*, que são os chamados **polinômios multi-homogêneos** e, de particular interesse, os **polinômios multilineares**. A partir da Seção 3.2, estaremos interessados em polinômios não nulos que se anulam sob quaisquer avaliações de elementos de uma álgebra. Assim, descartamos os polinômios com termo constante, e consideremos a álgebra livre $F_n = F\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ de posto $n \geq 1$ sobre F. Para cada $j \geq 1$, seja F_n^j o subespaço vetorial de F_n gerado por todos os monômios em F_n de grau j. Então, todo polinômio $f \in F_n$ de grau k pode ser escrito como $f = f^{(1)} + \cdots + f^{(k)}$, onde $f^{(j)} \in F_n^j$ para todo $j = 1, \dots, k$. Os polinômios não nulos $f^{(j)}$ são chamados **componentes homogêneas** de f na decomposição acima. Neste caso, temos a decomposição para o espaço vetorial F_n como $F_n = \sum_{j\geq 1}^{k} F_n^{(j)}$. Note que esta é uma soma direta de espaços vetoriais. É possível ainda decompor cada espaço F_n^j como soma dos subespaços $F_n^{(i_1,\dots,i_n)}$, onde $F_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ denota o subespaço gerado por todos os monômios de F_n de grau i_1 em x_1,..., de grau i_n em x_n, com $i_1 + \cdots + i_n = j$. Assim, um polinômio $f^{(j)} \in F_n^j$ pode ser escrito como

$$f^{(j)} = \sum_{i_1,\dots,i_n \geq 0} f^{(i_1,\dots,i_n)},$$

onde $f^{(i_1,\dots,i_n)} \in F_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ é a soma de todos os monômios em $f^{(j)}$ em que x_1 tem grau i_1, x_2 tem grau i_2, ..., e x_n tem grau i_n, com $i_1 + \cdots + i_n = j$. Desse modo, os polinômios não nulos $f^{(i_1,\dots,i_n)} \in F_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ em f são chamados **componentes multi-homogêneas** de f de **multigrau** $(i_1, \dots, i_n)$.

Dizemos que o polinômio $f \in F_n$ é **homogêneo na variável** x_i se o grau de x_i é o mesmo em todos os monômios de f. Dizemos que f é **multi-homogêneo** se f for homogêneo em cada uma de suas variáveis.

Observe que um polinômio $f \in F_n$ de grau k é multi-homogêneo se, e somente se, f é a sua única componente multi-homogênea, neste caso, de multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$, com $i_1 + \cdots + i_n = k$.

Um polinômio multi-homogêneo $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é **linear na variável** x_i, se x_i tem grau 1 em cada monômio de f. Se f é linear em cada uma de suas variáveis, então dizemos que f é **multilinear**.

Todo polinômio multilinear f é a sua própria componente multi-homogênea de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$. Neste caso, sempre se pode escrever f como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in F$ e $\sigma \in S_n$, o grupo simétrico de grau n.

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in F\langle X \rangle$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que f é **alternado nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$ se para todos $1 \leq i < j \leq n$, f se anula quando a variável x_j é substituída pela variável x_i. Se f é alternado em todas as suas variáveis, dizemos simplesmente que f é **alternado**.

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in F\langle X \rangle$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Se

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_m) = sgn(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

para todo $\sigma \in S_n$, então f é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Se $\mathrm{char}(F) \neq 2$, vale a recíproca.

Abaixo, definimos alguns tipos de polinômios multilineares.

O **comutador de peso** 2 (ou comutador duplo) nas variáveis x_1 e x_2 é o polinômio

$$[x_1, x_2] := x_1 x_2 - x_2 x_1.$$

Indutivamente, definimos o **comutador normado à esquerda de peso** $n \geq 3$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ como sendo o polinômio

$$[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

De modo análogo, definimos o **comutador de peso** 2 de dois polinômios $f, g \in F\langle X \rangle$ e o **comutador normado à esquerda de peso** $n \geq 3$ dos polinômios $f_1, \ldots, f_n \in F\langle X \rangle$.

Para os comutadores de peso 2 vale a propriedade da anticomutatividade, isto é, $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$. Já para os comutadores de peso 3 vale a chamada **identidade de Jacobi**, dada por $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0$.

O **produto de Jordan** de duas variáveis x_1 e x_2 é o polinômio

$$x_1 \circ x_2 := x_1x_2 + x_2x_1.$$

Analogamente, definimos o **produto de Jordan** $f \circ g$ de dois polinômios $f, g \in F\langle X\rangle$.

O **polinômio standard de grau** n é definido por

$$St_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $sgn(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$. Observe que este polinômio é alternado.

Pela definição acima, é fácil ver que $St_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$.

Além disso,

$$St_3(x_1, x_2, x_3) = x_1[x_2, x_3] - x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2].$$

Mais geralmente, vale

$$St_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \, St_n(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1})$$

onde $\widehat{x_i}$ denota a omissão da variável x_i.

Se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é um polinômio multilinear de grau n, então

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

com $\alpha_\sigma \in F$.

Proposição 3.1.1. *([10], Proposição 4.3.3, item (i)). Qualquer polinômio multilinear de grau n pode ser escrito como combinação linear de polinômios do tipo*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k} c_1 \cdots c_l,$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$, $c_1, \dots, c_l$ são comutadores de pesos arbitrários (eventualmente vazios) nas demais variáveis distintas de $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$.

Por exemplo, considere o polinômio standard de grau 4, $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Podemos reescrevê-lo como

$$St_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1St_3(x_2,x_3,x_4) - x_2St_3(x_1,x_3,x_4) + x_3St_3(x_1,x_2,x_4) - x_4St_3(x_1,x_2,x_3) =$$

$$= x_1(x_2[x_3,x_4] - x_3[x_2,x_4] + x_4[x_2,x_3]) - x_2(x_1[x_3,x_4] - x_3[x_1,x_4] + x_4[x_1,x_3]) +$$

$$+ x_3(x_1[x_2,x_4] - x_2[x_1,x_4] + x_4[x_1,x_2]) - x_4(x_1[x_2,x_3] - x_2[x_1,x_3] + x_3[x_1,x_2]) =$$

$$= x_1x_2[x_3,x_4] - x_1x_3[x_2,x_4] + x_1x_4[x_2,x_3] - x_2x_1[x_3,x_4] + x_2x_3[x_1,x_4] - x_2x_4[x_1,x_3] +$$

$$+ x_3x_1[x_2,x_4] - x_3x_2[x_1,x_4] + x_3x_4[x_1,x_2] - x_4x_1[x_2,x_3] + x_4x_2[x_1,x_3] - x_4x_3[x_1,x_2] =$$

$$= [x_1,x_2][x_3,x_4] - [x_1,x_3][x_2,x_4] + [x_1,x_4][x_2,x_3] + [x_2,x_3][x_1,x_4] - [x_2,x_4][x_1,x_3] + [x_3,x_4][x_1,x_2].$$

3.2 Álgebras com Identidades Polinomiais

Dedicaremos esta seção ao conhecimento das álgebras com identidades polinomiais, as quais são a base fundamental do nosso estudo. Para isto, dados uma álgebra A, um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ e elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, denotaremos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ o elemento de A que se obtém substituindo a variável x_i por a_i, para $i = 1, \ldots, n$. Neste caso, dizemos que o polinômio f está sendo **avaliado** por elementos de A. Desse modo, passamos a seguinte definição.

Definição 3.2.1. *Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é uma **identidade polinomial** para uma álgebra A se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ \textit{para todos} \ a_1, \ldots, a_n \in A.$$

*Neste caso, dizemos que A **satisfaz** f ou, simplesmente, que f é uma **identidade** de A e denotamos isto por $f \equiv_A 0$.*

Observe que um polinômio $f \in F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial de uma álgebra A se, e somente se, f pertence ao núcleo de todo homomorfismo de álgebras $F\langle X \rangle \longrightarrow A$.

Pela definição que acabamos de apresentar, fica claro que o polinômio nulo em $F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra A. Isto torna necessária a seguinte definição.

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma álgebra A é uma **PI-álgebra**[1] se A satisfaz uma identidade polinomial não nula.*

A álgebra livre $F\langle X \rangle$ é um exemplo de uma álgebra que não é uma PI-álgebra, pois se f é uma identidade de $F\langle X \rangle$, então f é o polinômio nulo.

Nos exemplos a seguir, exibimos algumas classes de PI-álgebras para as quais se pode obter identidades polinomiais somente a partir das suas propriedades básicas.

[1] PI, uma terminologia para *Polynomial Identity.*

Exemplo 3.2.1. *Uma álgebra A é comutativa se, e somente se, $[x_1, x_2]$ é uma identidade de A. Neste caso, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 3.2.2. *Se uma álgebra A é nil de expoente limitado n, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz x^n. Se A é nilpotente de índice N, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz $x_1 \cdots x_N$.*

Exemplo 3.2.3. *A álgebra UT_n das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre um corpo F é uma PI-álgebra. De fato, a matriz $[a_i, a_j]$ é triangular superior com diagonal nula, para quaisquer $a_i, a_j \in UT_n$. Assim, tem-se*

$$[a_1, a_2][a_3, a_4] \cdots [a_{2n-1}, a_{2n}] = 0,$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_{2n} \in UT_n$. Desse modo, UT_n satisfaz o polinômio

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Exemplo 3.2.4. *Consideremos a álgebra $M_2(F)$ das matrizes de ordem 2 sobre um corpo F. Não é difícil mostrar que para quaisquer $a, b \in M_2(F)$, a matriz $[a, b]^2$ é uma matriz escalar, ou seja, $[a, b]^2 = \alpha\, I_2$, onde $\alpha \in F$ e $I_2 \in M_2(F)$ é a matriz identidade. Assim, temos $[a, b]^2 \in Z(M_2(F))$, ou seja, $[a, b]^2$ comuta com todo elemento $c \in M_2(F)$ Logo, $M_2(F)$ satisfaz o polinômio $h = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ chamado **identidade de Hall**.*

Exemplo 3.2.5. *Considere a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$. Todo elemento da subálgebra $\mathcal{G}^{(0)}$, a qual chamaremos **componente par** de $\mathcal{G}$, comuta com todo elemento de $\mathcal{G}$, isto é, $\mathcal{G}^{(0)} \subset Z(\mathcal{G})$. Além disso, os elementos da **componente ímpar** $\mathcal{G}^{(1)}$ de $\mathcal{G}$ anticomutam, ou seja, $g_1 g_2 = -g_2 g_1$, para todos $g_1, g_2 \in \mathcal{G}^{(1)}$. Desse modo, para todos $a = a_0 + a_1$ e $b = b_0 + b_1$, com $a_0, b_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $a_1, b_1 \in \mathcal{G}^{(1)}$, vemos que*

$$[a, b] = [a_0, b_0] + [a_0, b_1] + [a_1, b_0] + [a_1, b_1] = 2\, a_1 b_1 \in \mathcal{G}^{(0)}.$$

Isso nos diz que o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade de $\mathcal{G}$.

Para ampliar nosso conhecimento sobre PI-álgebras, é interessante começar investigando as álgebras de dimensão finita. Neste caso, os polinômios multilineares são de grande importância.

Proposição 3.2.1. *([8], Proposição 3.2.9). Sejam A uma álgebra sobre um corpo F e $\mathcal{B}$ uma base de A sobre F. Se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é um polinômio multilinear que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de $\mathcal{B}$, então f é uma identidade polinomial de A.*

Proposição 3.2.2. *Sejam A uma F-álgebra, $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in F\langle X \rangle$ um polinômio multilinear e alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ são* *linearmente dependentes sobre F, então $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$, para quaisquer $b_1, \ldots, b_m \in A$. Em particular, se A tem dimensão n, então A satisfaz o polinômio multilinear e alternado $f = f(x_1, \ldots, x_{n+1})$.*

Demonstração. Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ são linearmente dependentes, então podemos supor sem perda de generalidade, que a_1 é combinação linear de $a_2, \ldots, a_n$. Como f é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Sendo f multilinear, consequentemente vemos que f se anula quando avaliado em $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_m \in A$, quaisquer que sejam $b_1, \ldots b_m \in A$. O caso particular do enunciado segue trivialmente. $\square$

Usaremos também a notação St_n para denotar o polinômio standard de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Como consequência destes dois últimos resultados, observamos que a álgebra de matrizes $M_2(F)$ satisfaz St_5. $M_2(F)$ também satisfaz St_4. De fato, note que St_4 se anula na base $\{e_{11} + e_{22}, e_{11}, e_{12}, e_{21}\}$, pois quando St_4 é avaliado nos elementos desta base, $e_{11} + e_{22}$ só aparece dentro dos comutadores de peso 2 e $[e_{11} + e_{22}, e_{12}] = [e_{11} + e_{22}, e_{21}] = 0$. Além disso, St_3 não é identidade de $M_2(F)$, pois $St_3(e_{11} + e_{22}, e_{11}, e_{12}) = e_{12} \neq 0$.

3.3 T-ideais e Variedades

Um dos objetos centrais de estudo na *PI-teoria* é o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma dada álgebra A, o qual denotamos por

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle;\ f \equiv_A 0\}.$$

Obviamente, A é uma PI-álgebra se, e somente se, $\mathrm{Id}(A) \neq \{0\}$. Vemos que $\mathrm{Id}(A)$ é um ideal de A.

Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um T-**ideal** se $I^\varphi \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$.

Se A é uma álgebra, então $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$. De fato, sejam $f \in \mathrm{Id}(A)$ e $g = \varphi(f)$. Como f pertence ao núcleo de todos os homomorfismos $F\langle X\rangle \longrightarrow A$ e φ é um endomorfismo, então g se anula sob qualquer avaliação de elementos de A. Assim, vemos que $\mathrm{Id}(A)^\varphi \subseteq \mathrm{Id}(A)$.

Seja S um subconjunto qualquer da álgebra livre $F\langle X\rangle$. Definimos o T-**ideal gerado por** S, denotado por $\langle S\rangle_T$, como a interseção de todos os T-ideais de $F\langle X\rangle$ que contém S.

Se S é um subconjunto qualquer da álgebra livre $F\langle X\rangle$, então

$$\langle S\rangle_T = span_F\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2;\ f \in S,\ h_1, g_1, \ldots, g_n, h_2 \in F\langle X\rangle\}.$$

Dizemos que um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é **consequência** dos polinômios de um subconjunto S de $F\langle X\rangle$ se $f \in \langle S\rangle_T$. Particularmente, dados $f, g \in F\langle X\rangle$, dizemos que g

é **consequência** de f, e denotamos por $f \rightsquigarrow g$ se $g \in \langle f \rangle_T$. Caso g não seja consequência de f, escrevemos $f \not\rightsquigarrow g$.

O próximo resultado nos permite dizer, como um abuso de linguagem, que $\mathrm{Id}(A)$ é o T-ideal da álgebra A, em vez de dizer que $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Veremos agora que todo T-ideal de $F\langle X \rangle$ é o T-ideal das identidades polinomiais de uma álgebra.

Proposição 3.3.1. *([8], Proposição 3.3.8). Se I é um T-ideal de $F\langle X \rangle$, então*

$$I = Id(F\langle X \rangle / I).$$

Para conhecer o T-ideal de uma PI-álgebra A é necessário determinar um conjunto de identidades polinomias de A que permita descrever todas as outras. Existem duas questões importantes a respeito do T-ideal de uma dada PI-álgebra A. A primeira é sobre a existência ou não de um conjunto finito S de $F\langle X \rangle$ tal que $\mathrm{Id}(A) = \langle S \rangle_T$. A segunda é determinar tal conjunto S, caso ele exista.

A primeira questão foi levantada em 1950 por *Specht* (veja [28]). Assim, dizemos que uma álgebra A possui **propriedade de Specht** se existe um conjunto gerador finito S em $F\langle X \rangle$ para $\mathrm{Id}(A)$. Neste caso, S é chamado **base de Specht**.

Uma resposta positiva a esta questão foi dada por *Kemer* [20], em 1978, para o caso em que A é uma F-álgebra associativa, sendo F um corpo de característica zero.

Teorema 3.3.1. *([16], Corolário 1.3.9). Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero. Então, $Id(A)$ é gerado, como T-ideal, por um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Uma parte da demonstração do *Teorema de Kemer* decorre do **processo de multilinearização** de polinômios que apresentaremos agora.

Como motivação, considere, por exemplo, o polinômio $f = f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]x_1$. Observe que f é linear na variável x_2, mas não o é na variável x_1. Em primeiro lugar, queremos obter um polinômio $g = g(x_1, x_2, x_3)$ multilinear, a partir de f. Então, podemos definir o polinômio

$$h = h(y_1, y_2, x_2) := f(y_1 + y_2, x_2) - f(y_1, x_2) - f(y_2, x_2).$$

Observe que h, assim definido, se escreve como

$$h(y_1, y_2, x_2) = [y_1 + y_2, x_2](y_1 + y_2) - [y_1, x_2]y_1 - [y_2, x_2]y_2 = [y_1, x_2]y_2 + [y_2, x_2]y_1,$$

e é multilinear. Renomeando as variáveis y_1, y_2 e x_2 por um endomorfismo $y_1 \mapsto x_1$, $y_2 \mapsto x_2$ e $x_2 \mapsto x_3$, obtemos um polinômio multilinear $g = g(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_3]x_2 + [x_2, x_3]x_1$. Em segundo lugar, supondo que $f \in \mathrm{Id}(A)$, para alguma álgebra A, vemos que $g \in \mathrm{Id}(A)$, já que $f \rightsquigarrow g$.

Mais geralmente, seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$ de grau k. Suponhamos inicialmente que $deg_{x_i}(f) \leq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Considerando as componentes homogêneas $f^{(j)}$ de f, a partir da decomposição

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f^{(j)},$$

onde $\alpha_j \in F$ para todo $j = 1, \ldots, m$, vemos que f é multilinear se $deg_{x_i}(f^{(j)}) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e todo $j = 1, \ldots, m$. Se f não é multilinear, existem $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ e $j_1 \in \{1, \ldots, m\}$ tais que $deg_{x_{i_1}}(f^{(j_1)}) = 0$. Assim, consideramos o endomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1} : F\langle X \rangle &\longrightarrow F\langle X \rangle \\ x_{i_1} &\longmapsto 0 \\ x_j &\longmapsto x_j, \ \ se\ j \neq i_1. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal, então $\varphi_{i_1}(f)$ ainda é uma identidade de A de grau menor que k em que não há ocorrência da variável x_{i_1}. Se $\varphi_{i_1}(f)$ for multilinear, então obtemos uma identidade multilinear de A de grau menor que k. Caso contrário, repetimos este processo, para uma variável x_{i_2} com a mesma propriedade de x_{i_1}. Neste caso, o processo termina, obtendo-se uma identidade multilinear de grau menor que k, em um número finito de repetições, já que o número de variáveis é finito.

Falta ainda considerar o caso em que $deg_{x_i}(f) = d > 1$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para simplificar, suponha que $deg_{x_1}(f) = d > 1$. Consideremos o polinômio

$$h = h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Note que $h \in \mathrm{Id}(A)$. Sobre um monômio $x_1^d x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$ de f, substituindo $y_1 + y_2$ no lugar de x_1, obtemos:

$$(y_1 + y_2)^d x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n} = \left(\sum_{t=0}^{d} \binom{d}{t} y_1^t y_2^{d-t} \right) x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n} =$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{d-1} \binom{d-1}{t} y_1^t y_2^{d-t} \right) x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n} + y_1^d x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n} + y_2^d x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}.$$

Desse modo, vemos que $deg_{y_1}(h) = deg_{y_2}(h) = d - 1$ e $deg_{x_i}(h) = deg_{x_i}(f)$, para todo $i = 2, \ldots, n$.

Observe que h é uma identidade não nula de A. Com efeito, substituindo y_1 e y_2 por x_1 em h, obtemos a equação

$$h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(2x_1, \ldots, x_n) - 2f(x_1, \ldots, x_n).$$

Sendo f_j a componente de f tal que $deg_{x_1}(f_j) = j$, $j = 0, \ldots, d$, obtemos

$$f(2x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{d} 2^j f_j.$$

Assim, se tivéssemos $h = 0$, então

$$\sum_{j=0}^{d} 2^j f_j = 2f(x_1, \ldots, x_n)$$

e, consequentemente,

$$f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_d,$$

o que é um absurdo, pois $deg_{x_1} f_0 = 0$ e $deg_{x_1}((2^2-2)f_2 + \cdots + (2^d-2)f_d) = d > 1$. Logo, $h \in \operatorname{Id}(A) \neq \{0\}$ e $deg_{y_i}(h) = d - 1 < deg_{x_1}(f)$.

Note que se $d = 2$, então obtemos uma identidade de A de grau menor que k, que é linear na variável x_1. Se $d > 2$, repetimos este mesmo processo mais $d - 2$ vezes, até obtermos uma identidade de A de grau menor que k que é linear na variável x_1. Aplicamos este processo para todas as outras variáveis x_i que possam eventualmente ter grau $d > 1$ em f. Como o número de variáveis é finito, finalizamos o processo obtendo uma identidade multilinear de A de grau menor ou igual a k.

Uma outra parte da demonstração do *Teorema de Kemer* se deve aos seguintes resultados.

Proposição 3.3.2. *([8], Corolário 3.3.11). Sejam F um corpo infinito e f uma identidade de uma F-álgebra A. Então qualquer componente multi-homogênea de f é uma identidade de A.*

Proposição 3.3.3. *Sejam F um corpo de característica zero e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Então f é consequência de um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Vamos começar considerando o T-ideal $I = \langle f \rangle_T$. Pela Proposição 3.1.1, sabemos que existe uma F-álgebra A tal que $\operatorname{Id}(A) = I$. Pela Proposição 3.2.2, podemos supor que f é multi-homogêneo. Se f é multilinear, não há nada mais a mostrar. Caso contrário, existe uma variável, digamos x_1, tal que $deg_{x_1}(f) = d > 1$. Aplicando o processo de multilinearização sobre f, obtemos um polinômio

$$h = h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Podemos reescrever h como

$$h = \sum_{j=1}^{d-1} h^{(j)},$$

onde os polinômios $h^{(j)}$ são as componentes multi-homogêneas de h. Observe que $deg_{y_1}(h^{(j)}) = j$, $deg_{y_2}(h^{(j)}) = d - j$ e $deg_{x_i}(h^{(j)}) = deg_{x_i}(f)$. Como $h \in \operatorname{Id}(A)$, então novamente pela Proposição 3.2.2, concluímos que cada uma das componentes $h^{(j)}$ pertence a $\operatorname{Id}(A)$. Assim, temos $\left\langle h^{(1)}, \ldots h^{(d-1)} \right\rangle_T \subseteq \langle f \rangle_T$. Por outro lado, notemos que

$$h^{(j)}(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d-1}{j} f(y_1, x_2, \ldots, x_n),$$

para todo $j = 1, \ldots, d-1$. Como $\mathrm{char}(F) = 0$, então $\binom{d-1}{j} \neq 0$, para todo $j = 1, \ldots, d-1$. Assim, obtemos $\langle f \rangle_T = \left\langle h^{(1)}, \ldots, h^{(d-1)} \right\rangle_T$. Aplicando, se necessário, o processo de multilinearização sobre cada componente multi-homogênea $h^{(j)}$, concluímos o resultado. □

No caso em que F tem característica diferente de zero, existem exemplos de PI-álgebras que não possuem a *propriedade de Specht*, isto é, cujos T-ideais não são finitamente gerados como T-ideais. Alguns exemplos foram dados por *Belov* em [2].

A segunda questão, em geral, é mais difícil de ser respondida. Por exemplo, ainda não conhecemos o T-ideal da álgebra $M_n(F)$ para $n \geq 3$. Em 1950, *Amitsur* e *Levitzki* começaram investigando o grau das possíveis identidades de $M_n(F)$, mostrando que todo polinômio standard que é identidade de $M_n(F)$ não pode ter grau menor que $2k$ e que toda identidade f de $M_n(F)$ de grau $2k$ é múltiplo escalar de um polinômio standard St_{2k} (veja [1]). Mais tarde, em 1973, *Razmyslov* determinou $\mathrm{Id}(M_2(F))$ com 9 identidades de graus $4, 5$ e 6 quando F tem característica zero (veja [24]). Em 1981, outros autores determinaram $\mathrm{Id}(M_2(F))$ com um número menor de identidades, mas foi *Drensky*, neste mesmo ano, quem mostrou que as identidades $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ e $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ formam uma base de Specht para $\mathrm{Id}(M_2(F))$ (veja [9]). *Colombo* e *Koshlukov*, em 2004, mostraram que estas duas identidades ainda formam uma base de Specht para $\mathrm{Id}(M_2(F))$, no caso em que F é um corpo infinito de característica diferente de 2 e 3 (veja [3]). Para o caso em que F é um corpo finito de característica diferente de 2, *Malcev* e *Kuzmin* já haviam mostrado anteriormente, em 1978, que estas duas identidades formam uma base de Specht para $\mathrm{Id}(M_2(F))$ (veja [21]). Ainda não é conhecido o T-ideal de $M_2(F)$ quando F tem característica 2.

Para a classe das álgebras comutativas unitárias sobre um corpo de característica zero, a propriedade de Specth pode ser mostrada sem muitas dificuldades.

Seja A uma F-álgebra comutativa unitária, onde $\mathrm{char}(F) = 0$. Já sabemos que $[x_1, x_2] \equiv 0$ em A. Afirmamos que $\mathrm{Id}(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$. De fato, se $I = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$,então $I \subseteq \mathrm{Id}(A)$. Vamos mostrar a inclusão inversa. Seja $f \in \mathrm{Id}(A)$. Para demonstrar a afirmação, basta mostrarmos que $f \equiv 0 \pmod{I}$. Pela Proposição 3.3.3, podemos supor que f é um polinômio multilinear de grau n. Além disso, pela Proposição 3.1.1, f pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k} c_1 \cdots c_m,$$

onde $i_1 < \cdots < i_k$ e cada c_j é um comutador de peso arbitrário (eventualmente de vazio), $j = 1, \ldots, m$. Agora, como $[x_1, x_2] \equiv 0$ em A, então para todo $k > 2$, $[x_1, x_2, \ldots, x_k] \equiv 0$ em A. Logo, módulo I , temos

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \alpha x_1 \cdots x_n,$$

para algum $\alpha \in F$. Com isso, para mostrarmos que $f \in I$, basta mostrarmos que $\alpha = 0$. Como $f \in \mathrm{Id}(A)$, fazendo a avaliação $x_i = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$, obtemos

$$0 = f(1, \ldots, 1) \equiv \alpha\, 1.$$

Portanto, $\alpha = 0$, concluindo que $\mathrm{Id}(A) = I$.

Particularmente, se A é uma álgebra nilpotente de índice de nilpotência 2, então A é comutativa. De fato, note que $x_1x_2 \rightsquigarrow [x_1, x_2]$. Desse modo, $\mathrm{Id}(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$.

Isso nos motiva a dizer que duas F-álgebras A e B, tais que $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(B)$, são **PI-equivalentes**, e denotamos por $A \sim_{PI} B$. Assim, álgebras comutativas e nilpotentes de índice de nilpotência 2 são PI-equivalentes. A seguir, veremos mais um caso de álgebras PI-equivalentes.

Considere a seguinte subálgebra da álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}_2 = \langle 1, e_1, e_2;\ e_ie_j = -e_je_i \rangle\,.$$

Proposição 3.3.4. *Id*$(\mathcal{G}_2) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Demonstração. Observe que $[x_1, x_2, x_3] \in \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)$, pois $[x_1, x_2, x_3] \in \mathrm{Id}(\mathcal{G})$ e $\mathcal{G}_2$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}$. Além disso, o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ se anula quando avaliado por quaisquer elementos da base $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ de $\mathcal{G}_2$. De fato, se um destes elementos for 1, então um dos comutadores $[x_1, x_2]$ ou $[x_3, x_4]$ se anula. Se todos são diferentes de 1, então as possíveis avaliações são do tipo $[e_{l_1}, e_{l_2}][e_{l_3}, e_{l_4}]$, ou $[e_{s_1}e_{s_2}, e_{s_3}][e_{s_4}, e_{s_5}]$, ou $[e_{r_1}e_{r_2}, e_{r_3}e_{r_4}][e_{r_5}e_{r_6}, e_{r_7}e_{r_8}]$, onde $l_1, \ldots, l_4, s_1, \ldots, s_5, r_1, \ldots, r_8 \in \{1, 2\}$, que claramente se anulam, pois $e_1e_2 = -e_2e_1$ e $e_k^2 = 0$, para $k \in \{1, 2\}$. Pela Proposição 3.2.1, vemos que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)$.

Agora, considere o T-ideal $I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$. Pelo que acabamos de mostrar, temos $I \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)$. Por outro lado, seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade de $\mathcal{G}_2$, pela Proposição 3.3.3, podemos assumir f multilinear. Como $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$, podemos considerar $i < j$ e, pela Proposição 3.1.1, escrever

$$f \equiv \alpha\, x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \beta_{ij}\, x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_i, x_j] \ (\mathrm{mod}\, I),$$

onde $\alpha, \beta_{ij} \in F$, com $1 \leq i < j \leq n$ e $i_1 < \cdots < i_{n-2}$. Como $f \in \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)$, então f se anula ao avaliarmos por elementos de $\mathcal{G}_2$. Fazendo $x_k = 1$, para todo $k = 1, \ldots, n$, e substituindo na equação anterior, obtemos $\alpha = 0$. De forma similar, para cada i e j fixados, fazemos a avaliação $x_i = e_1$, $x_j = e_2$ e $x_k = 1$, para todo $k \notin \{i, j\}$, assim $\beta_{ij} = 0$. Obtemos $\beta_{ij} = 0$, fazendo isto para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Logo, $f \in I$ e, portanto, $\mathrm{Id}(\mathcal{G}_2) = I$. □

Agora, considere a seguinte subálgebra de UT_3, definida por *Giambruno*, *La Mattina* e *Petrogradsky* em [13]:

$$N_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} ;\ a, b, c, d \in F \right\}.$$

Esses autores mostraram que $\mathrm{Id}(N_3) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$. Portanto, concluímos que $\mathcal{G}_2 \sim_{PI} N_3$.

Como vimos anteriormente, determinar o T-ideal das identidades de uma álgebra pode ser uma tarefa difícil, bem como dizer se duas álgebras são PI-equivalentes. Porém, veremos abaixo algumas propriedades do T-ideal que podem ajudar a resolver estes problemas em alguns casos.

Proposição 3.3.5. *([8], Lema 4.1.2). Se A é uma F-álgebra, então:*
1) *Se B é uma subálgebra de A, então Id$(A) \subseteq$ Id(B);*
2) *Se I é um ideal de A, então Id$(A) \subseteq$ Id(A/I);*
3) *Se B for isomorfa a uma subálgebra de A, então Id$(A) \subseteq$ Id(B).*

Observação 3.3.1. *Segue desta última proposição que se B é uma F-álgebra isomorfa a A, então Id$(A) =$ Id(B).*

Proposição 3.3.6. *Se $A = A_1 \oplus A_2$, então Id$(A) =$ Id$(A_1) \cap$ Id(A_2). Mais geralmente, se $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, então Id$(A) =$ Id$(A_1) \cap \cdots \cap$ Id(A_k).*

Demonstração. Seja $A = A_1 \oplus A_2$. Como esta soma é direta, então $A_1A_2 = \{0\}$. Assim, se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$, então

$$f(a_{11} + a_{12}, \ldots, a_{n1} + a_{n2}) = f(a_{11}, \ldots, a_{n1}) + f(a_{12}, \ldots, a_{n2}),$$

para todos $a_{i1} \in A_1$ e $a_{i2} \in A_2$, $i = 1, \ldots, n$. Desse modo, se $f \in \mathrm{Id}(A)$, então

$$0 = f(a_{11} + a_{12}, \ldots, a_{n1} + a_{n2}) = f(a_{11}, \ldots, a_{n1}) + f(a_{12}, \ldots, a_{n2}),$$

para todos $a_{i1} \in A_1$ e $a_{i2} \in A_2$, $i = 1, \ldots, n$. Como $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, temos

$$f \in \mathrm{Id}(A_1) \cap \mathrm{Id}(A_2).$$

Reciprocamente, se $f \in \mathrm{Id}(A_1) \cap \mathrm{Id}(A_2)$, então

$$f(a_{11} + a_{12}, \ldots, a_{n1} + a_{n2}) = f(a_{11}, \ldots, a_{n1}) + f(a_{12}, \ldots, a_{n2}) = 0,$$

para todos $a_{i1} \in A_1$ e $a_{i2} \in A_2$, $i = 1, \ldots, n$, ou seja, $f \in \mathrm{Id}(A)$. Logo,

$$\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(A_1) \cap \mathrm{Id}(A_2).$$

O caso geral mostra-se por indução sobre k. $\square$

Corolário 3.3.1. *Se A é uma F-álgebra simples, então $A \sim_{PI} M_n(F)$, para algum $n \geq 1$.*

Demonstração. Segue do Teorema de Wedderburn-Artin (Teorema 2.2.1) e da Observação 3.3.1. □

Dizemos que uma identidade $f \in F\langle X\rangle$ de uma F-álgebra A é **estável** se f for uma identidade de $A \otimes C$, para qualquer F-álgebra comutativa C.

Proposição 3.3.7. *Se A é uma F-álgebra e C é uma F-álgebra comutativa, onde F é um corpo de característica zero, então $A \sim_{PI} A \otimes C$.*

Demonstração. A inclusão $\mathrm{Id}(A \otimes C) \subseteq \mathrm{Id}(A)$ segue da Proposição 3.3.5, já que temos o mapa de inclusão $i : A \longrightarrow A \otimes C$ dado por $i(a) = a \otimes 1_c$, que é um monomorfismo de álgebras. Para provar a outra inclusão, seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade de A. Como $char(F) = 0$, podemos supor que f é multilinear, isto é,

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

com $\alpha_\sigma \in F$. Para quaisquer $a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n$, com $a_i \in A$ e $c_i \in C$, $i = 1, \ldots, n$, temos

$$f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \, a_{\sigma(1)} \otimes c_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes c_{\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) \otimes (c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) \otimes (c_1 \cdots c_n) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1 \cdots c_n = 0.$$

Logo, $f \in \mathrm{Id}(A \otimes C)$, e o resultado está provado. □

Corolário 3.3.2. *As F-álgebras $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^{(0)}$ são PI-equivalentes, isto é, $\mathcal{G} \sim_{PI} \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^{(0)}$.*

Definimos a **variedade determinada pelo conjunto** $S \subset F\langle X\rangle$, denotada por $\mathcal{V}(S)$, como a classe de todas as álgebras que satisfazem todas as identidades de S. Dizemos que uma variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ é **não trivial** se $S \neq \{0\}$. A variedade $\mathcal{V}$ é dita ser **própria** quando é não trivial e contém uma álgebra não nula.

Observe que se $S = \{0\}$, então $\mathcal{V}(0)$ é a classe de todas as álgebras. Se $S = F\langle X\rangle$, então $\mathcal{V}(F\langle X\rangle)$ consiste apenas de $\{0\}$.

Além disso, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ se, e somente se, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$. De fato, note que

$$\langle S\rangle_T = \bigcap_{A \in \mathcal{V}} \mathrm{Id}(A).$$

Isso nos diz que a cada variedade $\mathcal{V}$ corresponde um T-ideal $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \langle S\rangle_T$ de $F\langle X\rangle$. Reciprocamente, dado um T-ideal I de $F\langle X\rangle$, podemos considerar a classe de todas as álgebras satisfazendo os polinômios em I, ou seja, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$. Essa correspondência é biunívoca. De fato, se I_1 e I_2 são dois T-ideais de $F\langle X\rangle$ distintos, então, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $f \in I_1$ tal que $f \notin I_2$ e, assim, $A = F\langle X\rangle / I_2 \in \mathcal{V}(I_2)$ não satisfaz f, isto é, $\mathcal{V}(I_1) \neq \mathcal{V}(I_2)$. Por outro lado, se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são duas variedades distintas, então, sem perda de generalidade, podemos supor que existe uma álgebra $A \in \mathcal{V}_1$ tal que $A \notin \mathcal{V}_2$. Consequentemente, existe $f \in \mathrm{Id}(\mathcal{V}_2)$ tal que $f \notin \mathrm{Id}(A)$. Sabendo que $\mathrm{Id}(\mathcal{V}_1) \subset \mathrm{Id}(A)$, então $\mathrm{Id}(\mathcal{V}_1) \neq \mathrm{Id}(\mathcal{V}_2)$.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Para uma F-álgebra A tal que $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(\mathcal{V})$, diremos que A **gera a variedade** $\mathcal{V}$, e escreveremos $\mathcal{V} = var(A)$. Pela Proposição 3.3.1, sempre existe uma álgebra A tal que $\mathcal{V} = var(A)$, a saber, $A = F\langle X\rangle / \mathrm{Id}(\mathcal{V})$. Além disso, para uma uma álgebra B, temos $B \in var(A)$ se, e somente se, vale a inclusão $\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}(B)$. É claro que $var(A) = var(B)$ se, e somente se, $A \sim_{PI} B$.

Exemplo 3.3.1. *As álgebras $\mathcal{G}_2$ e N_3 geram a mesma variedade, isto é, $var(\mathcal{G}_2) = var(N_3)$, pois $\mathcal{G}_2 \sim_{PI} N_3$.*

Uma **subvariedade** $\mathcal{V}'$ de uma variedade $\mathcal{V}$ é um subconjunto de $\mathcal{V}$ que ainda é uma variedade. Desse modo, $\mathcal{V}'$ é uma subvariedade de uma variedade $\mathcal{V}$ se, e somente se, existem $S', S \subset F\langle X\rangle$ tais que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}'(\langle S'\rangle_T)$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$ e $\langle S'\rangle_T \supseteq \langle S\rangle_T$.

Um exemplo de um subconjunto da variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\langle [x_1, x_2]\rangle_T)$ (ou seja, a classe de todas as álgebras comutativas) que não é uma subvariedade é o conjunto $\mathcal{V}'$ de todas as álgebras comutativas unitárias. Note que as álgebras unitárias não satifazem o polinômio x_1x_2, apesar que $\langle x_1x_2\rangle_T \subset \langle [x_1, x_2]\rangle_T$. Assim, não pode existir um subconjunto $S' \subset F\langle X\rangle$ tal que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}'(\langle S'\rangle_T)$ e $\langle S'\rangle_T \supseteq \langle [x_1, x_2]\rangle_T$.

Agora, vamos ver o comportamento de variedades e subvariedades das álgebras de Grassmann $\mathcal{G}$ e das álgebras de matrizes $M_k(F)$.

Começamos considerando a subálgebra $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}$. Então, pela Proposição 3.3.5, $\mathrm{Id}(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)$. Como $\mathcal{G}$ não satisfaz $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ (faça a avaliação $x_i = e_i$, para todo $i = 1, \ldots, 4$), então $var(\mathcal{G}_2) \subsetneq var(\mathcal{G})$. Mais geralmente, considere as subálgebras

$$\mathcal{G}_{2k} = \langle 1, e_1, \ldots, e_{2k} : e_ie_j = -e_je_i\rangle$$

de $\mathcal{G}$, com $k \geq 1$. Os autores *Giambruno*, *La Mattina* e *Petrogradsky* mostraram em [13] que

$$\mathrm{Id}(\mathcal{G}_{2k}) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}]\rangle_T .$$

Desse modo, vemos que, para todo $k \geq 2$, $\mathcal{G}_{2k}$ não satisfaz $[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}]$. Logo,

$$\mathrm{Id}(\mathcal{G}_2) \supsetneq \mathrm{Id}(\mathcal{G}_4) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Id}(\mathcal{G}_{2k}) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Id}(\mathcal{G})$$

e, assim, obtemos a cadeia de variedades

$$var(\mathcal{G}_2) \subsetneq var(\mathcal{G}_4) \subsetneq \cdots \subsetneq var(\mathcal{G}_{2k}) \subsetneq \cdots \subsetneq var(\mathcal{G}).$$

Além disso, sabemos que $\mathrm{Id}(M_k(F)) \supset \mathrm{Id}(M_{k+1}(F))$ para todo $k \geq 1$, já que $M_{k+1}(F)$ contém uma subálgebra isomorfa a $M_k(F)$. Retornando ao resultado de Amitsur-Levitzki [1], que dizem que $M_k(F)$ satisfaz identidades de grau $2k$, mas não satisfaz identidades de grau menor que $2k$, obtemos a seguinte cadeia de variedades

$$var(F) \subsetneq var(M_2(F)) \subsetneq \cdots \subsetneq var(M_k(F)) \subsetneq \cdots$$

3.4 A Sequência de Codimensões

Como visto nas seções anteriores, determinar o T-ideal de uma dada PI-álgebra A pode não ser uma tarefa fácil. Porém, vimos no Teorema 3.3.1, que se A é uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero, então $\mathrm{Id}(A)$ é gerado, como T-ideal, por um conjunto finito de polinômios multilineares. Desse modo, quando consideramos o F**-espaço vetorial dos polinômios multilineares** nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, isto é,

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n\}$$

e observamos que

$$\mathrm{Id}(A) = (P_1 \cap \mathrm{Id}(A)) \dot{+} (P_2 \cap \mathrm{Id}(A)) \dot{+} \cdots \dot{+} (P_n \cap \mathrm{Id}(A)) \dot{+} \cdots$$

Para cada $n \geq 1$, seja $P_n(A)$ o F-espaço vetorial

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

Assim, estudar a **sequência de codimensões** de uma PI-álgebra A, definida por $c_n(A) := \dim_F P_n(A)$, é uma forma de estudar o crescimento das identidades de A. Essa sequência foi definida por *Regev* em 1972 (veja [25]) e através do estudo do comportamento assintótico dela, podemos obter informações sobre as identidades de A.

Para algumas álgebras, é possível determinar completamente, ou quase completamente, os termos da sua sequência de codimensões. Por exemplo, se A é uma F-álgebra comutativa unitária, onde $\mathrm{char}(F) = 0$, sabemos que $\mathrm{Id}(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$. Isso nos diz que qualquer polinômio em P_n pode ser escrito, módulo $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$, como múltiplo escalar do polinômio $x_1 \cdots x_n$. Logo, vemos que $c_n(A) = \dim_F P_n(A) = 1$, para todo $n \geq 1$. Quando A é uma F-álgebra nilpotente de índice de nilpotência m. Note que qualquer polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ é uma identidade de A, se $n \geq m$. Assim, obtemos $c_n(A) = \dim_F P_n(A) = 0$, para todo $n \geq m$.

No próximo resultado, também determinamos a sequência de codimensões da álgebra $\mathcal{G}_2$.

Proposição 3.4.1. *$c_n(\mathcal{G}_2) = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Vamos mostrar que o espaço quociente $P_n(\mathcal{G}_2) = \dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)}$ possui uma base com $\dfrac{n^2 - n + 2}{2}$ elementos. Pela demonstração da Proposição 3.3.4, vimos que qualquer polinômio $f \in P_n$ pode ser escrito, módulo $P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{G}_2)$, como combinação linear dos polinômios linearmente independentes $x_1 \cdots x_n$ e $x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_{j_1}, x_{j_2}]$, com $i_1 < \cdots < i_{n-2}$ e $j_1 > j_2$. Assim,

$$\mathcal{B} = \{x_1 \cdots x_n,\, x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_{j_1}, x_{j_2}] : i_1 < \cdots < i_{n-2} \text{ e } j_1 > j_2\}$$

é uma base para $P_n(\mathcal{G}_2)$. Agora, para concluir o resultado, basta notar que existem $\binom{n}{2}$ polinômios do tipo $x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_{j_1}, x_{j_2}]$, com $i_1 < \cdots < i_{n-2}$ e $j_1 > j_2$, em $\mathcal{B}$. □

Como consequência da Proposição 3.4.1 e do Exemplo 3.3.1, vemos que $c_n(N_3) = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$, para todo $n \geq 1$.

Em 1972, *Regev* mostrou que para uma PI-álgebra A sobre um corpo F de característica zero, a sequência de codimensões $c_n(A)$ é **limitada exponencialmente**, ou seja, existem constantes $a, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$, para todo $n \geq 1$. Neste caso, dizemos que A tem **crescimento exponencial** e que $\mathcal{V} = var(A)$ é uma **variedade de crescimento exponencial**. No entanto, as álgebras $\mathcal{G}_2$ e N_3 são exemplos de álgebras de **crescimento polinomial** e a variedade gerada por elas é de **crescimento polinomial**, visto que $c_n(\mathcal{G}_2) = c_n(N_3)$ é **limitada polinomialmente**, ou seja, existem constantes positivas a e k tais que $c_n(\mathcal{G}_2) = c_n(N_3) \leq an^k$, para todo n arbitrariamente grande.

Podemos dizer então que, a medida em que cresce o grau das identidades de uma PI-álgebra A, o crescimento (mais rápido ou mais lento) do número de geradores para essas identidades é determinado pelo comportamento assintótico da sequência de codimensões $c_n(A)$.

Finalizamos este capítulo apresentando o seguinte resultado.

Teorema 3.4.1. *([8], Proposição 4.2.9). Se A é uma F-álgebra de dimensão d, então $c_n(A) \leq d^n$, para todo $n \geq 1$.*

4 Superálgebras

No Capítulo 2, vimos o exemplo da álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ que, dentre outras propriedades, satisfaz:
1) $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \dot{+} \mathcal{G}^{(1)}$,
2) $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$,
3) $\mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$,
onde $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$ são subespaços de $\mathcal{G}$, chamados componente par e componente ímpar, respectivamente.

Agora, vamos dar uma definição geral de álgebras que compartilham destas mesmas propriedades da álgebra de Grassmann, isto é, as chamadas **superálgebras**. Além disso, vamos estabelecer um teorema de classificação para as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2. Também vamos estender o *Teorema de Wedderburn-Malcev* para a classe das superálgebras de dimensão finita sobre um corpo de característica zero.

4.1 Definições e Exemplos

Definição 4.1.1. *Dizemos que uma álgebra A é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-**graduada**, ou uma **superálgebra**, se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ de A, satisfazendo as seguintes condições:*
1) $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$,
2) $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$,
3) $A^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)}A^{(1)} \subseteq A^{(1)}$.

Se A é uma superálgebra, muitas vezes é conveniente escrever $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ para dizer que o par $(A^{(0)}, A^{(1)})$ é uma $\mathbb{Z}_2$-**graduação**, ou simplesmente uma **graduação**, de A. É comum chamar os elementos de $A^{(0)}$ de **elementos homogêneos de grau** 0 (ou **elementos pares**) e os elementos de $A^{(1)}$ de **elementos homogêneos de grau** 1 (ou **elementos ímpares**). Os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamados **componente par** e **componente ímpar** de A, respectivamente.

Algumas observações podem ser feitas acerca da definição de superálgebra que acabamos de apresentar. A primeira é que toda álgebra A é uma superálgebra, considerando A com a **graduação trivial** $(A, \{0\})$. A segunda é que o subespaço $A^{(0)}$ é uma subálgebra de A, mas não se pode dizer o mesmo do subespaço $A^{(1)}$ sempre. Na verdade, o que falta para $A^{(1)}$ ser uma subálgebra de A é ser fechado em relação ao produto de A, e isto ocorre se, e somente se, $(A^{(1)})^2 = \{0\}$.

O próximo teorema fornece uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra possua uma graduação não trivial.

Teorema 4.1.1. *Uma álgebra A é uma superálgebra com graduação não trivial se, e somente se, existe um automorfismo φ de A de ordem 2.*

Demonstração. Suponha que $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ é uma graduação não trivial de A. Vamos definir a aplicação $\varphi : A \longrightarrow A$ por $\varphi(a) = \varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1 \in A$, para todo $a = a_0 + a_1$, com $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$. Observe que φ está bem definida e é um automorfismo de A. Além disso, φ tem ordem 2, pois $\varphi(a_1) = -a_1$ para todo $a_1 \in A^{(1)}$, $a_1 \neq 0$, e para todo $a \in A$,

$$\varphi^2(a) = \varphi^2(a_0 + a_1) = \varphi(\varphi(a_0 + a_1)) = \varphi(a_0 - a_1) = a_0 + a_1 = a.$$

Reciprocamente, se existe um automorfismo φ de A de ordem 2, então pela Proposição 2.2.1, A pode ser escrita como soma direta dos subespaços não triviais $A^{(0)} = aut(\varphi, 1)$ e $A^{(1)} = aut(\varphi, -1)$. Além disso, como φ é um automorfismo, temos $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)}A^{(1)} \subseteq A^{(1)}$. Isso demonstra o resultado. □

Exemplo 4.1.1. *A álgebra de matrizes $M_n(F)$ com a graduação trivial é uma superálgebra.*

Exemplo 4.1.2. *Sejam $A = M_n(F)$ e $g = (g_1, \dots g_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, onde $\mathbb{Z}_2$ denota o grupo aditivo $\{0, 1\}$. Considere os seguintes subespaços:*

$$A^{(0)} = span_F\{e_{ij}\,;\ g_i + g_j = 0\} \quad e \quad A^{(1)} = span_F\{e_{ij}\,;\ g_i + g_j = 1\}.$$

*Então, $(A^{(0)}, A^{(1)})$ é uma graduação de $M_n(F)$. Tal graduação é chamada **graduação elementar induzida pelo elemento** g, ou simplesmente, **graduação elementar**. Note que os elementos $g = (g_1, \dots g_n)$ e $h = (h_1, \dots, h_n)$ em $\mathbb{Z}_2$, onde $h_1 = 0$ e $h_i = g_1 + g_i$ para todo $i = 2, \dots, n$, induzem a mesma graduação elementar em $M_n(F)$.*

Exemplo 4.1.3. *Dados os inteiros $k \geq l \geq 0$ tais que $k + l = n$, considere os seguintes subespaços da álgebra $M_n(F)$:*

$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix};\ A \in M_k(F),\ D \in M_l(F) \right\}$$

e

$$A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix};\ B \in M_{k \times l}(F),\ C \in M_{l \times k}(F) \right\}.$$

Então, $(A^{(0)}, A^{(1)})$ é uma graduação elementar de $M_n(F)$. A álgebra de matrizes $M_n(F)$ munida desta graduação é denotada por $M_{k,l}(F)$. Observe que se $l = 0$, temos a graduação trivial.

Exemplo 4.1.4. *Seja $c \in F$ tal que $c^2 = 1$. Então a álgebra de matrizes $A = M_n(F \oplus cF)$ é uma superálgebra, considerando a graduação $(M_n(F), cM_n(F))$.*

Sejam $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ uma superálgebra e B um subespaço de A. Observe que $B = (B \cap A^{(0)}) \dot{+} (B \cap A^{(1)})$. As condições 2) e 3) da Definição 4.1.1 para $(B \cap A^{(0)}, B \cap A^{(1)})$ serão satisfeitas se, e somente se, B for uma subálgebra de A. Assim, dizemos que um subespaço $B \subseteq A$ possui **graduação induzida** de A se $B = (B \cap A^{(0)}, B \cap A^{(1)})$ é uma graduação de B. Neste caso, dizemos que B é um **subespaço graduado** (ou uma **subálgebra graduada**) de A. Um ideal I de A é chamado **ideal graduado** se I possui graduação induzida de A. Note que um subespaço graduado B é sempre uma subálgebra graduada, mas não necessariamente um ideal graduado.

Relembre que o automorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ induzido pela graduação de A é dado por $\varphi(a) = \varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, para todo $a = a_0 + a_1 \in A$, com $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$, e que se tal graduação é não trivial, então φ tem ordem 2. Por outro lado, se a graduação é trivial, então o único automorfismo induzido por esta graduação é a aplicação identidade $\varphi = id_A$.

Seja B um subespaço de $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$. Então $B \subseteq B^\varphi$, pois $b = b_0 + b_1 = \varphi(b_0 - b_1)$, com $b_0 \in B \cap A^{(0)}$ e $b_1 \in B \cap A^{(1)}$, para todo $b \in B$. Por outro lado, B é chamado **φ-invariante** se $B^\varphi \subseteq B$. Já vimos, por meio do Teorema 4.1.1, que se a graduação de A for trivial, então $\varphi = id_A$ e, assim, B é trivialmente φ-invariante. Suponha que $(A^{(0)}, A^{(1)})$ é não trivial e que $B = (B \cap A^{(0)}, B \cap A^{(1)})$ seja um subespaço graduado de A. Para todo $b = b_0 + b_1 \in B$, com $b_0 \in B \cap A^{(0)}$ e $b_1 \in B \cap A^{(1)}$, temos $\varphi(b) = \varphi(b_0 + b_1) = b_0 - b_1 \in B$. Logo, $B^\varphi \subseteq B$, isto é, B é φ-invariante. Isso nos diz então que todo subespaço graduado B de $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ é φ-invariante. Mais ainda, $B = B^\varphi$. Reciprocamente, se B é um subespaço de $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ φ-invariante, então B é fechado em relação ao produto de A, pois $B^\varphi = B$ e, assim, B é um subespaço graduado de A.

Exemplo 4.1.5. *A álgebra UT_2 é uma subálgebra graduada de $M_{1,1}(F)$, considerando a graduação induzida $(Fe_{11} + Fe_{22}, Fe_{12})$.*

Exemplo 4.1.6. *A álgebra de Grassmann $\mathcal{G}_2$ de dimensão finita, com a graduação $(F + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2)$, é uma subálgebra graduada da álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$.*

O próximo resultado nos apresenta um importante ideal graduado de superálgebras de dimensão finita.

Lema 4.1.1. *Se A é uma superálgebra de dimensão finita, então o seu radical de Jacobson $J(A)$ é um ideal graduado de A. Mais ainda, $J(A)^n$ é um ideal graduado de A para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja A uma superálgebra de dimensão finita e φ o automorfismo induzido pela graduação de A. Então, pelo Teorema 2.1.4, $J(A)$ é o maior ideal nilpotente de A, e como $J(A)^\varphi$ também é nilpotente, segue que $J(A)^\varphi \subseteq J(A)$, ou seja, $J(A)$ é φ-invariante.

Logo, $J(A)$ é um ideal graduado de A. Além disso, como φ é um automorfismo e $J(A)$ é φ-invariante, então

$$(J(A)^n)^\varphi = (J(A)^\varphi)^n \subseteq J(A)^n,$$

para todo $n \geq 1$. Assim, $J(A)^n$ é φ-invariante e, portanto, um ideal graduado de A. $\square$

Sejam $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ e $B = (B^{(0)}, B^{(1)})$ superálgebras. Dizemos que A e B são **isomorfas como superálgebras** se existe um isomorfismo de álgebras $\psi : A \longrightarrow B$ que **preserva a graduação** de A em B, ou seja, ψ satisfaz $\psi(A^{(0)}) \subseteq B^{(0)}$ e $\psi(A^{(1)}) \subseteq B^{(1)}$.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de superálgebras isomorfas.

Exemplo 4.1.7. *Considere a aplicação $\psi : UT_2 \longrightarrow M_{k,l}(F)$, definida nos elementos homogêneos de UT_2, por*

$$\psi(e_{ij}) = \begin{cases} e_{11}, & se\ i = j = 1, \\ e_{k+l,k+l}, & se\ i = j = 2, \\ e_{1,k+l}, & se\ i = 1\ e\ j = 2. \end{cases}$$

É possível mostrar que ψ é um monomorfismo de álgebras, que preserva a graduação de UT_2 em $M_{k,l}(F)$. Assim, ψ é um isomorfismo sobre a sua imagem, o que nos diz que $M_{k,l}(F)$ possui uma subálgebra graduada isomorfa a UT_2.

Exemplo 4.1.8. *As álgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$, com as graduações dadas, respectivamente, nos Exemplos 4.1.1, 4.1.3 e 4.1.4, não são isomorfas como superálgebras. De fato, $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$ não são isomorfas como superálgebras, pois $M_n(F)$ tem graduação trivial e $M_{k,l}(F)$ não. Já $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$ não são isomorfas como álgebras, uma vez que não têm a mesma dimensão, o mesmo ocorre para $M_n(F \oplus cF)$ e $M_n(F)$.*

4.2 Teorema de Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita

Como vimos anteriormente, um subespaço B de uma superálgebra A é um ideal graduado se, e somente se, é um ideal de A, φ-invariante.

Definição 4.2.1. *Seja A uma superálgebra. Dizemos que A é uma **superálgebra simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos ideais graduados de A são $\{0\}$ e A.*

As álgebras simples são claramente superálgebras simples. Em particular, isso implica que as álgebras de matrizes $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$, com as graduações dadas pelos Exemplos 4.1.1 e 4.1.3 são superálgebras simples.

Denotemos por D^{gr} a álgebra $D = F \oplus F$, com a graduação $(F(1,1), F(1,-1))$. Então, D^{gr} é uma superálgebra simples. De fato, escrevendo $1 = (1,1)$ e $c = (1,-1)$, vemos que $F \oplus F = \left(\frac{1+c}{2}\right) F \oplus \left(\frac{1-c}{2}\right) F$ e, assim, os únicos ideais não triviais de D^{gr} são

são $I_1 = \left(\frac{1+c}{2}\right) F$ e $I_2 = \left(\frac{1-c}{2}\right) F$, os quais não são φ-invariantes, onde φ é o automorfismo induzido pela graduação de D^{gr}.

A álgebra $A = M_n(F \oplus cF)$ com a graduação dada no Exemplo 4.1.4 é uma superálgebra simples. Para ver isto, observe que como $F \oplus F = \left(\frac{1+c}{2}\right) F \oplus \left(\frac{1-c}{2}\right) F$ e $F \oplus cF \subset F \oplus F$, então A é uma álgebra semissimples, que se decompõe como soma direta de álgebras simples, da seguinte forma:

$$A = \left(\frac{1+c}{2}\right) M_n(F) \oplus \left(\frac{1-c}{2}\right) M_n(F).$$

Note que $\left(\frac{1+c}{2}\right) M_n(F)$ e $\left(\frac{1-c}{2}\right) M_n(F)$ são os únicos ideais não triviais de A. Além disso, se φ é o automorfismo induzido pela graduação de A então

$$\varphi\left(\left(\frac{1+c}{2}\right) M_n(F)\right) = \left(\frac{1-c}{2}\right) M_n(F) \ \ e \ \ \varphi\left(\left(\frac{1-c}{2}\right) M_n(F)\right) = \left(\frac{1+c}{2}\right) M_n(F),$$

ou seja, $\left(\frac{1+c}{2}\right) M_n(F)$ e $\left(\frac{1-c}{2}\right) M_n(F)$ não são φ-invariantes.

Por outro lado, vejamos agora que as superágebras simples de dimensão finita carregam a semissimplicidade como propriedade.

Lema 4.2.1. *Se A é uma superálgebra simples de dimensão finita, então A é uma álgebra semissimples.*

Demonstração. A hipótese de A ser uma superálgebra de dimensão finita e o Lema 4.1.1 garantem que $J(A)$ é um ideal graduado de A. Como, também por hipótese, A é uma superálgebra simples, então devemos ter $J(A) = \{0\}$ ou $J(A) = A$. Afirmamos que $J(A) = \{0\}$. De fato, suponha, por absurdo, que $J(A) \neq \{0\}$. Como $J(A)$ é nilpotente, existe um inteiro positivo m tal que $J(A)^m \neq \{0\}$ e $J(A)^{m+1} = \{0\}$. Novamente pelo Lema 4.1.1, vemos que $J(A)^m$ é um ideal graduado de A. Mas, como $J(A)^m \neq \{0\}$ e A é uma superálgebra simples, então obtemos $A = J(A)^m$. Isso implica que $A^2 = J(A)^{2m} = \{0\}$, um absurdo, pois A é uma superálgebra simples, por hipótese. Desse modo, vemos que $J(A) = \{0\}$. Agora, como A tem dimensão finita, então pela Proposição 2.2.4, concluímos que A é semissimples. $\square$

O resultado anterior nos permite dizer que uma superálgebra A de dimensão finita é sempre uma álgebra semissimples, mas ele não diz se é possível e nem nos fornece uma forma de expressar A como soma direta de superálgebras simples. Isso torna necessário o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1. *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica diferente de dois e φ o automorfismo induzido pela graduação. Então:*
1) *Se A é uma superálgebra simples, então ou A é simples ou $A = B \oplus B^{\varphi}$, para alguma subálgebra simples B de A;*

2) *Se A é semissimples, então A se escreve como uma soma direta finita de superálgebras simples.*

Demonstração. Vamos começar demonstrando a afirmação 1). Supondo que A é uma superálgebra simples, então pelo Lema 4.2.1, A é semissimples. Se A é simples, não há nada mais a mostrar. Agora, supondo que A não é simples, então pela Proposição 2.2.4, A possui um ideal próprio simples B. Observe que B não é um ideal graduado de A. De fato, se fosse, então teríamos $A = B$ (já que A é uma superálgebra simples), o que é uma contradição. Além disso, φ tem ordem 2, pois $B^\varphi \neq B$. Agora, definindo o ideal $C = B^\varphi \oplus B$, vemos que C é φ-invariante, ou seja, C é um ideal graduado de A. Novamente, como A é uma superálgebra simples, segue que $A = B^\varphi \oplus B$.

Agora, para provar a afirmação 2), note que se A é semissimples, então $A = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i$, onde cada B_i, $i = 1, \ldots, m$, é uma subálgebra simples de A. Como φ é um automorfismo, vemos que B_i^φ é uma álgebra simples, para todo $i = 1, \ldots, m$. Pela unicidade da decomposição de $A = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i$, vemos que $B_i^\varphi = B_j$, para algum $1 \leq j \leq m$. Vamos renomear as álgebras $B_1, \ldots, B_m$ como $C_{s_i} = B_i$, se $B_i^\varphi = B_i$, e $C_{s_i} = B_i \oplus B_j$, se $B_i^\varphi = B_j$, com $j \neq i$. Assim, A pode ser reescrita como $A = C_{s_1} \oplus \cdots \oplus C_{s_k}$, onde $C_{s_i} = B_i$ é álgebra simples e, portanto, uma superálgebra simples. Para ver que $C_{s_i} = B_i \oplus B_j$ é uma superálgebra simples, note que os seus únicos ideais não triviais são B_i e B_j, que não são φ-invariantes, como provado na primeira parte da demonstração. □

Finalmente, estamos preparados para provarmos o *Teorema de Classificação das Superálgebras Simples de Dimensão Finita sobre um Corpo de Característica Diferente de Dois e Algebricamente Fechado.*

Teorema 4.2.2. *Seja A uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica diferente de 2. Então A é isomorfa a uma, e somente uma, das seguintes superálgebras: $M_n(F)$, com a graduação trivial, $M_{k,l}(F)$, onde $k \geq l \geq 1$, $k + l = n$, ou $M_n(F \oplus cF)$, com a graduação $(M_n(F), c\, M_n(F))$ e $c^2 = 1$, para algum $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.1, se φ é o automorfismo induzido pela graduação de $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$, então A é simples ou $A = B \oplus B^\varphi$, onde B é uma subálgebra simples de A. Se A é simples, então pelo Teorema de Wedderburn-Artin e como F é algebricamente fechado, temos

$$A \cong M_n(End_F(A)) \cong M_n(Z(M_n(F))) \cong M_n(Z(F)) = M_n(F),$$

para algum $n \geq 1$. Se $\varphi = id_A$, então a graduação de A é trivial e, portanto, A é isomorfa a $M_n(F)$ com a graduação trivial. Se $\varphi \neq id_A$, então φ tem ordem 2 e, pelo Teorema

4.1.1, a graduação de A é não trivial. Como $A \cong M_n(F)$, então pela Proposição 2.2.2, φ é um automorfismo interno, isto é, existe $a \in A$ invertível tal que $\varphi(x) = axa^{-1}$, para todo $x \in A$. Como φ tem ordem 2, então

$$xa^2 = \varphi^2(x)a^2 = \varphi(\varphi(x))a^2 = \varphi(axa^{-1})a^2 = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a^{-1})a^2 =$$

$$= a(axa^{-1})a^{-1}a^2 = a^2x(a^{-2}a^2) = a^2x,$$

para todo $x \in A$, ou seja, $a^2 \in Z(A)$. Como $Z(A) \cong Z(M_n(F))$ por um isomorfismo de álgebras θ, existe uma matriz invertível $Y \in M_n(F)$ tal que $Y^2 = \theta(a^2)$ e temos $Y^2 = \alpha I_n$, para algum $\alpha \in F^*$. Como F é algebricamente fechado, existe $\beta \in F^*$ tal que $(\pm\beta)^2 = \alpha$. Isso nos diz que β e $-\beta$ são os autovalores de Y e que Y é semelhante a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \beta I_k & 0 \\ 0 & -\beta I_l \end{pmatrix}.$$

Para toda matriz $X \in M_n(F)$, podemos escrever

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

onde $A \in M_k(F)$, $D \in M_l(F)$, $B \in M_{k\times l}$ e $C \in M_{l\times k}(F)$. Definindo a aplicação $\eta : M_{k,l}(F) \longrightarrow M_{k,l}(F)$ por $\eta(X) := YXY^{-1}$, vemos que η é um automorfismo conjugado ao automorfismo $\tilde{\varphi}$ induzido pela graduação de $M_{k,l}(F)$. De fato, escreva

$$Y \sim \beta \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix}.$$

Então,

$$Y^{-1} \sim \beta^{-1} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix}.$$

Se $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, temos

$$YXY^{-1} \sim \beta \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \beta^{-1} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}.$$

Desse modo, $\tilde{\varphi} = \zeta \circ \eta \circ \zeta^{-1}$, com $\zeta \in Aut_F(M_{k,l}(F))$. Agora, considere o isomorfismo de álgebras $\omega : A \longrightarrow M_{k,l}(F)$. Também podemos mostrar que η é conjugado ao automorfismo $\kappa := \omega \circ \varphi \circ \omega^{-1} : M_{k,l}(F) \longrightarrow M_{k,l}(F)$. De fato, como κ é um automorfismo interno, então existe uma matriz invertível $Z \in M_{k,l}(F)$ tal que $\kappa(X) = ZXZ^{-1}$, para todo $X \in M_{k,l}(F)$. Assim, $\kappa(X) = Z(Y^{-1}\eta(X)Y)Z^{-1}$, para todo $X \in M_{k,l}(F)$, ou seja, η é conjugado a κ. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\eta = \kappa$. Definindo o isomorfismo de álgebras $\psi := \zeta \circ \omega \circ \varphi : A \longrightarrow M_{k,l}(F)$ e sabendo que $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 de φ, observamos que

$$\tilde{\varphi}(\psi(a_0)) = (\zeta \circ (\omega \circ \varphi \circ \omega^{-1}) \circ \zeta^{-1})(\zeta \circ \omega \circ \varphi)(a_0) = (\zeta \circ \omega \circ \varphi)(a_0) = \psi(a_0),$$

isto é, $\psi(a_0) \in M_{k,l}(F)^{(0)}$, para todo $a_0 \in A^{(0)}$ e, analogamente, mostramos que $\psi(a_1) \in M_{k,l}(F)^{(1)}$, para todo $a_1 \in A^{(1)}$. Isso nos diz que ψ preserva a graduação de A em $M_{k,l}(F)$, logo, A é isomorfa a $M_{k,l}(F)$ como superálgebra.

Finalmente, suponha que A não é simples. Então, $A = B \oplus B^{\varphi}$, onde B é uma subálgebra simples de A. Como F é algebricamente fechado, temos $B \cong M_n(F)$, para algum $n \geq 1$, por um isomorfismo de álgebras μ. Assim, $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{\overline{\varphi}}$, onde $\overline{\varphi} = \mu \circ \varphi \circ \mu^{-1}$. Considere os seguintes subespaços:

$$M_1 = \{(X, X);\, X \in M_n(F)\} \ \ e \ \ M_{-1} = \{(Y, -Y);\, Y \in M_n(F)\}$$

de $M_n(F) \oplus M_n(F)^{\overline{\varphi}}$. Para cada par $(X, Y) \in M_n(F) \oplus M_n(F)$, podemos escrever

$$(X, \overline{\varphi}(Y)) = \underbrace{\left(\frac{X + \overline{\varphi}(Y)}{2}, \frac{X + \overline{\varphi}(Y)}{2}\right)}_{\in M_1} + \underbrace{\left(\frac{X - \overline{\varphi}(Y)}{2}, \frac{-X + \overline{\varphi}(Y)}{2}\right)}_{\in M_{-1}}.$$

Como $M_1 \cap M_{-1} = \{0\}$, então $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{\overline{\varphi}} = M_1 \dot{+} M_{-1}$. Mais ainda, note que $M_1 \dot{+} M_{-1}$ é uma F-álgebra graduada, com graduação (M_1, M_{-1}). Agora, seja $c = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix}$ e considere a aplicação $\xi : (M_1, M_{-1}) \longrightarrow (M_n(F), cM_n(F))$ definida por

$$\Big(\big(X, X\big), \big(Y, -Y\big)\Big) \longmapsto X + cY.$$

Temos que ξ é um isomorfismo de superálgebras. Logo, A é isomorfa a $M_n(F \oplus cF)$ como superálgebra. $\square$

Para finalizar este capítulo, vamos mostrar que o *Teorema de Wedderburn-Malcev* pode ser estendido para a classe das superálgebras de dimensão finita. Isso nos permitirá conhecer completamente a estrutura de superálgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero, algebricamente fechado, em termos do seu radical de Jacobson e de superálgebras de matrizes. Antes, porém, vamos ao seguinte resultado.

Teorema 4.2.3. *Seja A uma superálgebra unitária de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero tal que $A/J(A)$ é separável, e φ o automorfismo induzido pela graduação. Então existe uma subálgebra semissimples B de A que é φ-invariante.*

Demonstração. Começamos supondo que $J = J(A) = \{0\}$. Neste caso, como A tem dimensão finita, então A é semissimples. Daí, pelo Teorema 4.2.1, A se escreve como soma direta finita de superálgebras simples $C_{s_i} = B_i$, se $B_i^\varphi = B_i$, e $C_{s_i} = B_i \oplus B_j$, se $B_i^\varphi = B_j$, com $j \neq i$, que, claramente, são subálgebras φ-invariantes. Agora, suponha que $J \neq \{0\}$ e que $J^2 = \{0\}$. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 2.2.4), existe uma subálgebra semissimples B de A tal que $A = B \dot{+} J$. Suponha que B não é φ-invariante. Como φ é um automorfismo, então B^φ também é uma álgebra semissimples tal que $A = B^\varphi \dot{+} J$. Novamente pelo Teorema de Wedderburn-Malcev, existe $x \in J$ tal que

$$B = (1+x)^{-1} B^\varphi (1+x).$$

Como $J^2 = \{0\}$, temos $(1+x)^{-1} = 1 - x$ e, assim, a aplicação $\gamma : B \longrightarrow B$, definida por $\gamma(b) = (1-x)\varphi(b)(1+x)$, é um automorfismo de B. Além disso, é possível mostrar que $\varphi(b) = (1+x)\gamma(b)(1-x)$. Como φ tem ordem 2, então

$$\begin{aligned} b &= \varphi((1+x)\gamma(b)(1-x)) \\ &= \varphi(1+x)\varphi(\gamma(b))\varphi(1-x) \\ &= (1+\varphi(x))(1+x)\gamma^2(b)(1-x)(1-\varphi(x)) \\ &= (1+(x+\varphi(x)))\gamma^2(b)(1-(x+\varphi(x)) \\ &= \gamma^2(b) - \gamma^2(b)(x+\varphi(x)) + (x+\varphi(x))\gamma^2(b). \end{aligned}$$

Sabendo que $B \cap J = \{0\}$, então devemos ter $\gamma^2(b) = b$ e, consequentemente, obtemos $b(x+\varphi(x)) = (x+\varphi(x))b$. Sejam $x^+ = \dfrac{x+\varphi(x)}{2}$, $x^- = \dfrac{x-\varphi(x)}{2}$ e observe que $\varphi(x^+) = x^+$, $\varphi(x^-) = -x^-$ e $bx^+ = x^+b$. Além disso, $x = x^+ + x^-$, com $x^+, x^- \in J$, pois $x \in J$ e J é um ideal φ-invariante. Note ainda que $xx^+ = x^+x = (x^+)^2 = 0$, pois $J^2 = \{0\}$. Mais ainda,

$$(1+x^-)b(1-x^-) = (1+x-x+x^-)b(1-x+x-x^-) =$$
$$= ((1+x)-x^+)b((1-x)+x^+) = (1+x)b(1-x) + (1+x)bx^+ - x^+b(1-x) - x^+bx^+ =$$
$$= (1+x)b(1-x).$$

Agora, considere a subálgebra semissimples $B' = (1+\frac{x^-}{2})B(1-\frac{x^-}{2})$. Dado qualquer

$$b' = \left(1+\frac{x^-}{2}\right)b\left(1-\frac{x^-}{2}\right) \in B'$$

temos

$$\varphi(b') = \varphi\left(\left(1+\frac{x^-}{2}\right)b\left(1-\frac{x^-}{2}\right)\right) =$$
$$= \left(1-\frac{x^-}{2}\right)(1+x^-)\gamma(b)(1-x^-)\left(1+\frac{x^-}{2}\right) = \left(1+\frac{x^-}{2}\right)\gamma(b)\left(1-\frac{x^-}{2}\right) \in B',$$

ou seja, B' é uma subálgebra de A φ-invariante tal que $A = B' \dot{+} J$, o que demonstra o caso $J^2 = \{0\}$.

O caso geral é provado usando indução sobre o índice de nilpotência $q \geq 2$ de J. Com efeito, já mostramos o resultado para $q = 2$ e, agora, suponha que o resultado seja válido para qualquer álgebra condicionada as mesmas hipóteses do teorema, cujo índice de nilpotência do seu radical de Jacobson seja menor que q. Como $J^{q-1} \neq \{0\}$, então pelo Lema 4.1.1, J^{q-1} é um ideal graduado de A. Desse modo, a F-álgebra $\bar{A} = A/J^{q-1}$ é uma superálgebra unitária de dimensão finita, com a sua graduação induzida pela graduação de A. Além disso, como $J(\bar{A}) = J/J^{q-1}$, então $J(\bar{A})^{q-1} = \{\bar{0}\}$. Assim, usando a hipótese de indução, $\bar{A}$ possui uma subálgebra semissimples $\bar{B}$ que é $\bar{\varphi}$-invariante, onde $\bar{\varphi}$ é o automorfismo induzido pela graduação de $\bar{A}$.

Considere a projeção canônica $\pi : A \longrightarrow \bar{A}$ e seja B uma subálgebra de A tal que $\pi(B) = \bar{B}$. Então, temos $J^{q-1} \subset B$ e $\bar{B} = B/J^{q-1}$. Como $\bar{B}$ é semissimples, então $J(\bar{B}) = \{\bar{0}\}$ e, assim, $J(B) = J^{q-1}$. Observe que B é φ-invariante, mas não é semissimples, pois $J^{q-1} \neq \{0\}$. Como B é uma subálgebra graduada, com graduação induzida pela graduação de A, e $J(B)^2 = (J^{q-1})^2 = \{0\}$, então recorremos ao caso demonstrado na primeira parte para mostrar que existe uma subálgebra seemissimples B' de B que é φ-invariante. Isso conclui a prova. □

Teorema 4.2.4. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então existe uma subálgebra graduada semissimples B de A tal que*

$$A = B \dot{+} J(A).$$

Além disso, B é uma soma direta finita de superálgebras simples isomorfas, ou a $M_n(F)$ com a graduação trivial, ou a $M_{k,l}(F)$, com $k \geq l \geq 1$, ou a $M_n(F \oplus cF)$, com a graduação $(M_n(F), c\,M_n(F))$, onde $c^2 = 1$.

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 4.2.2 e 4.2.3. □

Exemplo 4.2.1. *Considere a álgebra $B = \begin{pmatrix} F + cF & F + cF \\ 0 & F \end{pmatrix}$. Observe que B é uma superálgebra. Uma decomposção de Wedderburn-Malcev para B, como superálgebra, é dada por*

$$B = \begin{pmatrix} F + cF & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & F + cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dada uma superálgebra $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$, definimos a **envolvente de Grassmann de** A por

$$G(A) := (A^{(0)} \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \dot{+} (A^{(1)} \otimes \mathcal{G}^{(1)}),$$

onde a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ é considerada com a graduação canônica, apresentada no Exemplo 2.2.8.

Em [19], *Kemer* mostrou que para toda variedade não trivial $\mathcal{V}$, sobre um corpo de característica zero, existe uma superálgebra A de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var(G(A))$.

Observe que se a superálgebra A assim obtida é uma superálgebra simples, então $\mathcal{V}$ é determinada pela variedade gerada pela envolvente de Grassmann de uma das superálgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$ do Teorema 4.2.2.

Veremos ainda uma outra importância do Teorema 4.2.2 para determinar T-ideais e variedades de álgebras. Vamos começar construindo uma superálgebra a partir da álgebra livre $F\langle X\rangle$. Considere X como a união disjunta de dois conjuntos $X = Y \cup Z$, onde $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$. Em seguida, munimos $F\langle X\rangle$ de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, com a condição de que as variáveis de Y sejam homogêneas de grau par e que as variáveis de Z sejam homogêneas de grau ímpar. Daqui em diante, vamos usar a notação $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$ quando estivermos considerando uma graduação sobre $F\langle X\rangle$. Diremos que $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$ é uma **$\mathbb{Z}_2$-álgebra livre**. Os polinômios em $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$ são chamados **$\mathbb{Z}_2$-polinômios**. Podemos ver $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$ como a álgebra livre gerada pelo conjunto $\{y_i + z_i : i \geq 1\}$. Agora, dada uma superálgebra $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$, dizemos que um polinômio

$$f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$$

é uma **$\mathbb{Z}_2$-identidade graduada** de A se

$$f(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 0$$

para quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_m \in A^{(0)}$, $b_1, \ldots, b_n \in A^{(1)}$, onde $m, n \geq 1$. O conjunto

$$\mathrm{Id}^{gr}(A) = \{f \in F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle : f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

é um ideal de $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$ chamado **ideal das $\mathbb{Z}_2$-identidades graduadas de** A. Observe que $\mathrm{Id}^{gr}(A)$ é um ideal invariante pelos endomorfismos de $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$. Assim, dizemos que $\mathrm{Id}^{gr}(A)$ é um **T_2-ideal** de $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$. Chamamos a atenção para a inclusão $\mathrm{Id}(A) \subset \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Consequentemente, obtemos um critério para testar se um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ pode ser uma identidade ordinária de uma álgebra A, munida de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, bastando verificar se tal polinômio é uma $\mathbb{Z}_2$-identidade graduada de A. Se ainda A é uma superálgebra nas condições do Teorema 4.2.2, então isso é feito somente para polinômios $f \in F\langle X\rangle$ para os quais se queira mostrar serem $\mathbb{Z}_2$-identidades graduadas de uma das superálgebras de matrizes $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ ou $M_n(F \oplus cF)$.

Como no caso ordinário, se F tem característica zero, então $\mathrm{Id}^{gr}(A)$ é gerado, como T_2-ideal, por um conjunto finito de $\mathbb{Z}_2$-identidades graduadas de A, multilineares (veja [19], Corolário 2.5). Dessa forma, para cada $n \geq 1$, consideramos o **espaço vetorial dos $\mathbb{Z}_2$-polinômios multilineares**

$$P_n^{gr} = span_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n,\ x_i = y_i \text{ ou } x_i = z_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$, e estudamos o comportamento das $\mathbb{Z}_2$-identidades de A ao considerarmos o espaço quociente

$$P_n^{gr}(A) := \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap \mathrm{Id}^{gr}(A)}$$

e a **sequência de codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduada** definida por $c_n^{gr}(A) :=\dim_F P_n^{gr}(A)$, para $n \geq 1$. Em [15], *Giambruno* e *Regev* mostraram que

$$c_n(A) \leq c_n^{gr}(A) \leq 2^n c_n(A),$$

para todo $n \geq 1$. Assim, estudar o comportamento das identidades de uma superálgebra simples A de dimensão finita sobre um corpo F de característica diferente de 2 e algebricamente fechado, corresponde a estudar o comportamento das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de uma das superálgebras de matrizes $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ ou $M_n(F \oplus cF)$ do Teorema 4.2.2.

5 Considerações Finais

Vimos a importância do *Teorema de Classificação das Superálgebras Simples* (Teorema 4.2.2) no que diz respeito a determinar o T-ideal das identidades destas álgebras.

É possível que uma álgebra seja munida de outras estruturas. Aqui, apresentaremos as **$*$-superálgebras** e, além disso, um teorema de classificação das $*$-superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, algebricamente fechado. Tal resultado é importante para determinar o T-ideal das identidades destas álgebras.

5.1 $*$-Superálgebras

No Capítulo 4 vimos que se A é uma álgebra munida de um automorfismo φ de ordem no máximo 2, então A tem estrutura de superálgebra ao considerarmos os subespaços $A^{(0)} = aut(\varphi, 1)$ e $A^{(1)} = aut(\varphi, -1)$.

Agora, também podemos considerar álgebras com um outro tipo de estrutura.

Uma **involução** sobre uma F-álgebra A é uma aplicação F-linear $* : A \longrightarrow A$ tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todos $a, b \in A$. Similarmente ao caso de superálgebras, podemos considerar os subespaços

$$A_+ = \{a \in A : \, a^* = a\} \quad e \quad A_- = \{a \in A : \, a^* = -a\},$$

chamados respectivamente, **espaço dos elementos simétricos** e **espaço dos elementos antissimétricos** de A. Além disso, considerando $\operatorname{char}(F) \neq 2$ e

$$a = \frac{a + a^*}{2} + \frac{a - a^*}{2}, \quad \text{onde} \quad \frac{a + a^*}{2} \in A_+ \quad \text{e} \quad \frac{a - a^*}{2} \in A_- \, ,$$

temos $A = A_+ \dot{+} A_-$.

Uma álgebra A munida de uma involução $*$ é chamada **$*$-álgebra**.

Sejam A uma $*$-álgebra e I um ideal de A. Dizemos que I é um $*$-ideal se $I^* = I$. Dizemos também que A é uma **$*$-álgebra simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos $*$-ideais de A são os triviais.

É possível que uma F-álgebra A seja uma superálgebra e uma $*$-álgebra simultâneamente e, neste cenário, que a involução $*$ preserve a graduação de $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$, ou seja, $(A^{(0)})^* = A^{(0)}$ e $(A^{(1)})^* = A^{(1)}$. Assim, neste caso, A é chamada **$*$-superálgebra** com **involução graduada** $*$.

Uma forma simples de se obter uma $*$-superálgebra, com involução graduada $*$, é considerar uma superálgebra comutativa A e a aplicação identidade id_A de A. Note que $* = id_A$ é uma involução graduada, a qual chamamos **involução trivial**. Observamos ainda que, qualquer $*$-álgebra A é uma $*$-superálgebra com involução graduada $*$, desde que A seja considerada com a graduação trivial.

Agora, veremos um exemplo menos trivial. Considere a F-álgebra comutativa $D = F \oplus F$, com $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Podemos munir esta álgebra com a **involução troca**, isto é, a involução definida por $(a,b)^* = (b,a)$, para todo $(a,b) \in D$.

A álgebra D munida da graduação trivial e da involução troca é uma $*$-superálgebra, denotada por D_*. Também podemos considerar D com a graduação $D = (F(1,1), F(1,-1))$ e a involução trivial, tal $*$-superálgebra é denotada por D^{gr}. Usamos a notação D^{gri}, para a $*$-superálgebra D com a graduação $D = (F(1,1), F(1,-1))$ e a involução troca.

Um outro exemplo, é quando consideramos a **involução transposta**

$$* : M_n(F) \longrightarrow M_n(F)$$

$$(a_{ij}) \longmapsto (a_{ij})^* = (a_{ij})^t = (a_{ji})$$

sobre $M_n(F)$. A involução $*$ é claramente graduada se $M_n(F)$ for considerada com a graduação trivial.

Também sobre $M_n(F)$, agora supondo que $n = 2k$, para algum $k \geq 1$, podemos considerar a **involução simplética**

$$* : M_{2k}(F) \longrightarrow M_{2k}(F)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}.$$

Observe que a involução simplética $*$ definida acima é uma involução graduada, considerando $M_{2k}(F) = M_{k,k}(F)$ com a graduação dada no Exemplo 4.1.3.

Já se considerarmos a graduação $M_{k,l}(F)$, com $k \geq l \geq 1$ e $k + l = n$, dada no Exemplo 4.1.3, F um corpo algebricamente fechado, em [11] os autores provaram que as únicas involuções graduadas que podem ser definidas, a menos de isomorfismo, nas superálgebras de matrizes $M_{k,l}(F)$ são a involução transposta e a involução simplética, onde a involução simplética ocorre somente quando $k = l$ e $l \neq 0$ ou quando $l = 0$ e k é par.

Nos próximos dois resultados, vamos caracterizar, a menos de isomorfismo, as $*$-álgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero.

Teorema 5.1.1. *([26], Teorema 3.1.61). Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $*$ uma involução sobre $M_n(F)$. Então, $(M_n(F), *) \cong (M_n(F), t)$ ou $(M_n(F), *) \cong (M_n(F), s)$ (com n par), onde t e s denotam a involução transposta e simplética, respectivamente.*

Teorema 5.1.2. *([4], Teorema 2.3.14). Seja A uma $*$-álgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A é isomorfa a*

uma das seguintes $*$-álgebras:
1) $(M_n(F), t)$;
2) $(M_n(F), s)$, *onde* $n \geq 2$ *é par;*
3) $(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, *)$, *onde* $*$ *é a involução troca.*

Retomando nossa discussão sobre $*$-superálgebras, temos ainda o seguinte resultado de caracterização.

Lema 5.1.1. *([7], Lema 1.4) Sejam A uma superálgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2, munida de uma involução $*$ e φ o automorfismo induzido pela graduação de A. Então, A é uma $*$-superálgebra se, e somente se, $* \circ \varphi = \varphi \circ *$.*

Proposição 5.1.1. *([7], Corolário 1.5). Seja $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$ uma superálgebra sobre um corpo de característica diferente de 2, munida com uma involução $*$. Então, A é uma $*$-superálgebra se, e somente se, os subespaços A_+ e A_- são subespaços graduados. Consequentemente, qualquer $*$-superálgebra pode ser escrita como soma direta de 4 subespaços, ou seja,*

$$A = A_+^{(0)} \dot{+} A_+^{(1)} \dot{+} A_-^{(0)} \dot{+} A_-^{(1)}.$$

Também podemos construir uma $*$-superálgebra a partir da álgebra livre $F\langle X\rangle$. Começamos considerando X como a união disjunta de quatro conjuntos $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, onde $Y_0 = \{y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots\}$, $Z_0 = \{z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots\}$ e $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots\}$. Em seguida, munimos $F\langle X\rangle$ de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, com a condição de que as variáveis de $Y_0 \cup Z_0$ sejam homogêneas de grau par e que as variáveis de $Y_1 \cup Z_1$ sejam homogêneas de grau ímpar. Depois, definimos uma involução $*$ sobre $F\langle X\rangle$ de tal forma que as variáveis de $Y_0 \cup Y_1$ sejam simétricas e as variáveis de $Z_0 \cup Z_1$ sejam antissimétricas. Denotando por $\mathcal{F}$ a álgebra livre $F\langle X, \mathbb{Z}_2, *\rangle$ assim obtida, podemos considerar o subespaço vetorial $\mathcal{F}^{(0)}$ gerado por todos os monômios nas variáveis em X, os quais têm um número par de variáveis homogêneas de grau 1 e o subespaço vetorial $\mathcal{F}^{(1)}$ gerado por todos os monômios nas variáveis em X, os quais têm um número ímpar de variáveis homogêneas de grau 1. Finalmente, observamos que $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{F}^{(1)})$ é uma graduação de $\mathcal{F}$ e que os subespaços simétrico $\mathcal{F}_+$ e antissimétrico $\mathcal{F}_-$ são graduados. Logo, pela Proposição 5.1.1, vemos que $\mathcal{F} = F\langle X, \mathbb{Z}_2, *\rangle$ é uma $*$-superálgebra. Como $\mathrm{char}(F) \neq 2$, vemos que

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+^{(0)} \dot{+} \mathcal{F}_+^{(1)} \dot{+} \mathcal{F}_-^{(0)} \dot{+} \mathcal{F}_-^{(1)}.$$

Além disso, notamos que $*$ é uma involução graduada, já que $(\mathcal{F}^{(0)})^* = \mathcal{F}^{(0)}$ e $(\mathcal{F}^{(1)})^* = \mathcal{F}^{(1)}$.

Os polinômios em $\mathcal{F}$ são chamados $(\mathbb{Z}_2, *)$-**polinômios**. Também podemos definir os $*$-**polinômios** em $F\langle X, *\rangle$. Observamos que todo $\mathbb{Z}_2$-polinômio e todo $*$-polinômio é um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio. De fato, $F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle$ é a $\mathbb{Z}_2$-álgebra livre e $F\langle X, *\rangle$ é a $*$-álgebra livre.

Como $\mathcal{F}$ é a $*$-superálgebra livre gerada pelo conjunto $\{y_{i,0} + y_{i,1} + z_{i,0} + z_{i,1} : \ i \geq 1\}$, então obtemos as inclusões

$$F\langle X\rangle \subset F\langle X, \mathbb{Z}_2\rangle \subset \mathcal{F} \ \text{ e } \ F\langle X\rangle \subset F\langle X, *\rangle \subset \mathcal{F}.$$

5.2 Álgebras e $*$-identidades graduadas

Seja A uma $*$-superálgebra. Dizemos que um polinômio

$$f = f(y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{p,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{q,1}) \in \mathcal{F}$$

é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-**identidade graduada** de A se

$$f(a^+_{1,0}, \ldots, a^+_{m,0}, a^+_{1,1}, \ldots, a^+_{n,1}, b^-_{1,0}, \ldots, b^-_{p,0}, b^-_{1,1}, \ldots, b^-_{q,1}) = 0,$$

para quaisquer elementos $a^+_{1,0}, \ldots, a^+_{m,0} \in A^{(0)}_+$, $a^+_{1,1}, \ldots, a^+_{n,1} \in A^{(1)}_+$, $b^-_{1,0}, \ldots, b^-_{p,0} \in A^{(0)}_-$ e $b^-_{1,1}, \ldots, b^-_{q,1} \in A^{(1)}_-$, onde $m, n, p, q \geq 1$.

O conjunto

$$\mathrm{Id}^{gri}(A) = \{f \in \mathcal{F} : \ f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

é um ideal de $\mathcal{F}$ chamado **ideal das** $(\mathbb{Z}_2, *)$-**identidades de** A. Observe que $\mathrm{Id}^{gri}(A)$ é um ideal invariante por todos endomorfismos de $\mathcal{F}$ que preservam a superestrutura e comutam com a involução. Assim, dizemos que $\mathrm{Id}^{gri}(A)$ é um T_2^*-**ideal** de $\mathcal{F}$.

Análogo ao caso ordinário, se F tem característica zero, então $\mathrm{Id}^{gri}(A)$ é gerado, como T_2^*-ideal, por um conjunto finito de $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades graduadas de A, multilineares. Definindo similarmente as $*$-**identidades** para uma $*$-álgebra A, temos que sobre um corpo F de característica zero, o T^*-**ideal** das $*$-identidades de A (em $F\langle X, *\rangle$), denotado por $\mathrm{Id}^*(A)$, é gerado como T^*-ideal por um conjunto finito de $*$-identidades multilineares.

Chamamos a atenção para as inclusões

$$\mathrm{Id}(A) \subset \mathrm{Id}^{gr}(A) \subset \mathrm{Id}^{gri}(A) \ \text{ e } \ \mathrm{Id}(A) \subset \mathrm{Id}^*(A) \subset \mathrm{Id}^{gri}(A).$$

Além disso, existem duas situações especiais em que podemos determinar $\mathrm{Id}^{gr}(A)$ e $\mathrm{Id}^*(A)$:

1) Quando a graduação de A é a trivial, ou seja, $(A, \{0\})$. Neste caso, as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da superálgebra A que não são identidades ordinárias de A são consequência do polinômio $f(z) = z$, com $z \in Z_1 \cup Z_2$. Logo, temos

$$\mathrm{Id}^{gr}(A) = \langle \mathrm{Id}(A), z\rangle_{T_2}.$$

2) Se a involução de A é a trivial, A é comutativa. Assim, as $*$-identidades da $*$-álgebra A são identidades ordinárias de A. Portanto,

$$\mathrm{Id}^*(A) = \langle \mathrm{Id}(A)\rangle_{T^*}.$$

5.3 Teorema de classificação das $*$-superálgebras simples de dimensão finita

Seja A uma $*$-superálgebra e I um ideal de A. Dizemos que I é um **ideal $*$-graduado** se I é um ideal graduado de A e $I^* = I$. Dessa forma, se φ é o automorfismo induzido pela graduação de A, então I é $*$-graduado se, e somente se, I é φ-invariante e $I^* = I$.

Definição 5.3.1. *Uma $*$-superálgebra A é dita **simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos ideais $*$-graduados de A são $\{0\}$ e A.*

Seja A uma $*$-superálgebra. Observamos que se A é uma álgebra simples ou $*$-álgebra simples, então A é uma $*$-superálgebra simples.

Nosso próximo e último resultado é uma generalização do Teorema 4.2.2, que de forma semelhante, permite determinar T_2^*-ideais de $*$-superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, mas, dessa vez, de característica zero.

Teorema 5.3.1. *([7], Teorema 1.12). Seja A uma $*$-superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e algebricamente fechado. Então, A é isomorfa a uma das seguintes $*$-superálgebras:*

1) *$M_{k,l}(F)$, $k \geq 1$, $k \geq l \geq 0$, com a involução transposta ou com a involução simplética. O último caso ocorre apenas quando $k = l$ ou quando $l = 0$ e k é par;*

2) *$M_{k,l}(F) \oplus M_{k,l}(F)^{op}$, $k \geq 1$, $k \geq l \geq 0$, com a graduação induzida e com a involução troca;*

3) *$M_n(F) \dot{+} cM_n(F)$, com a involução dada por $(A + cB)^\dagger = A^* - cB^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou a involução simplética;*

4) *$M_n(F) \dot{+} cM_n(F)$, com a involução dada por $(A + cB)^\dagger = A^* + cB^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou a involução simplética;*

5) *$(M_n(F) \dot{+} cM_n(F)) \oplus (M_n(F) \dot{+} cM_n(F))^{op}$ com a graduação*

$$(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, c(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}))$$

e a involução troca.

Vimos no Capítulo 4 que a simplicidade de uma álgebra A é preservada quando A é munida de uma graduação, ou seja, se A é uma álgebra simples, então A é uma superálgebra simples. Sendo A uma superálgebra simples, se A é munida de uma involução graduada $*$, então A é uma $*$-superálgebra simples, como vimos neste capítulo. Isso nos diz que a simplicidade de uma álgebra é preservada quando esta é munida de estruturas adicionais. Agora, veremos que a recíproca não é verdadeira, isto é, quando retiramos estruturas de uma álgebra, a sua simplicidade pode não ser preservada.

Por exemplo, considere a $*$-superálgebra $M_n(F) \dot{+} cM_n(F)$, com a graduação $(M_n(F), cM_n(F))$ e a involução dada por $(A+cB)^\dagger = A^* - cB^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou a involução simplética. Pelo Teorema 5.3.1, sabemos que esta é uma $*$-superálgebra simples. Vimos também no Capítulo 4 que $\left(\dfrac{1+c}{2}\right)M_n(F)$ e $\left(\dfrac{1-c}{2}\right)M_n(F)$ são os únicos ideais não triviais desta álgebra. Note ainda que nenhum destes ideais é um $*$-ideal. Portanto, $M_n(F) \dot{+} cM_n(F)$ não é uma álgebra simples, apesar de ser uma $*$-álgebra simples.

Referências

1 AMITSUR, A. and LEVITZKY, J. **Minimal identities for algebras**. Proc. American Mathematical Society. pp.449-463. 1950. DOI: `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9`. (ver p.147).

2 BELOV, A. Y. **Counterexamples to the Specht problem**. Mat. Sb. **191.3**, pp. 13-24. 2000. DOI: `https://doi.org/10.1070/SM2000v191n03ABEH000460`. (ver p.139).

3 COLOMBO, J. and KOSHLUKOV, P. **Central polynomials in the matrix algebra of order two**. Linear Algebra Appl. **377**, pp. 53–67. 2004. (ver p. 140).

4 COTA, W. Q. **Álgebras com estruturas adicionais de crescimento polinomial**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. 2021.

5 CURTIS, C. W. and REINER, I. **Representation theory of finite groups and associative algebras**. Vol **356**. American Mathematical Society. 1996. (ver pp. 77,115).

6 DEHN, M. **Über die Grundlager der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlasysteme**. (German). Math, Ann. **85**. pp.184-194. 1922.

7 DOS SANTOS, R. B. **On superalgebras with graded involution**. Tese de Doutorado. Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2016. Disponível em `http://hdl.handle.net/1843/EABA-A9EKFF`.

8 DOS SANTOS, R. B. and VIEIRA, A. C. **PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria**. 1° ed. Estrada Dona Castorina, 110, Jardim Botânico 22460-320, Rio de Janeiro RJ: Impa, julho de 2021.

9 DRENSKY, V. **A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0**. Algebra i Logika 20.3, pp. 282–290, **361**. 1981. (ver p. 139).

10 DRENSKY, V. **Free Algebras and PI-Algebras**. Universidade de Michigan: Springer, 2000. (ver pp. 42-43).

11 GIAMBRUNO, A.; DOS SANTOS, R. B. and VIEIRA, A. C. **Identities of $*$-superalgebras and almost polynomial growth**. Linear and Multilinear Algebra. 64 (2016) 484-501.

12 GIAMBRUNO, A.; LA MATTINA, D. and MISSO, P. **Polynomial identities on superalgebras: Classifying linear growth**. J. Pure Appl. Algebra. **207**. pp. 215-240. 2006.

13 GIAMBRUNO, A.; LA MATTINA, D. and PETROGRADSKY, V. M. **Matrix algebras of polynomial codimension growth**. Israel J. Math. **158**, pp. 367–378. 2007. (ver pp. 164–166, 172, 257).

14 GIAMBRUNO, A.; MISHCHENKO, S. and ZAICEV, M. **Polynomial identities on superalgebras: Classifying linear growth**. J. Pure Appl. Algebra. **207**. pp. 215-240. 2006.

15 GIAMBRUNO, A. and REGEV, A. **Wreath products and P.I. algebras**. J. Pure Appl. Algebra **35.2**, pp. 133–149. 1985. (ver p. 247).

16 GIAMBRUNO, A. and ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. J. T. Stanford, Chair: American Mathematical Society, 2005.

17 JACOBSON, N. **PI-álgebras. An introduction**. Lecture Notes in Mathematics. Vol **441**. Spring-Verlag, Berlin-New York, 1975.

18 KAPLANSKY, I. **Rings with a polynomial identity**. Bull. Amer. Math. Soc. **54**. pp. 496-500. 1948.

19 KEMER, A. R. **Ideals of identities of associatives algebras**. Vol 87.Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Russian by C. W. Kohls. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. vi+81. 1991. (ver pp. vii, 195, 214).

20 KEMER, A. R. **The Spechtian nature of T-ideals whose condimensions have power growth**. Sibirsk. Mat. Ž. **19.1**, pp. 54–69, 237. 1978. (ver pp. iv, 139, 145).

21 MALCEV, J. N. and KUZMIN, E. N. **A basis for identities of the algebra of second-order matrices over a finite field**. Algebra i Logika **17.1**, pp. 28–32, 121. 1978. (ver p. 140).

22 MILIES, C. P. and SEHGAL, S. K. **An introduction to group rings**. Academic Publish-ers, 2002.

23 PROCESI, C. **Rings with polynomial identities**. Pure and Applied Mathematics. **17**. Marcel Dekker, Inc, New York. 1973.

24 RAZMYSLOV, J. P. **A certain problem of Kaplansky**. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **37**. pp. 483–501. 1973. (ver pp. 139, 156).

25 REGEV, A. **Existence of identities in** $A \otimes B$. Israel J. Math. **11**. pp. 131-152. 1972. (ver pp. iv, 158, 167, 169).

26 ROWEN, L. H. **Polynomial identities in ring theory**. Academic press, INC. London. 1980.

27 ROWEN, L. H. **Some results of a ring with polynomial identity**. Bull. Amer. Math. Soc. **79**. pp. 219-223. 1973.

28 SPECHT, W. **Gesetze in Ringen. I**. Math. Z. **52**, pp.557-589. 1950. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF02230710`. (ver 139).

29 WAGNER, W. **Über die Grundlager der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlasysteme**. (German). Math, Ann. **113**. pp.528-567. 1936.