

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE MATEMÁTICA**

**Larissa Mariane dos Reis**

**A Ferradura De Smale**

Juiz de Fora

2022

Larissa Mariane dos Reis

## A Ferradura De Smale

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Reis, Larissa Mariane.

A Ferradura De Smale / Larissa Mariane dos Reis. – 2022.

81 f. : il.

Orientador: Regis Castijos Alves Soares Junior

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Curso de Matemática, 2022.

1. Ferradura de Smale. 2. Dinâmica simbólica. 3. Caos. I. Soares, Régis, orient. II. Título.

Larissa Mariane dos Reis

A Ferradura De Smale

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior -  
Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Reginaldo Braz Batista  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Rogério Casagrande  
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho à mamãe e ao papai.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais, Marlene e João, por todo amparo, incentivo e amor. Por diversas vezes vocês abriram mão dos próprios sonhos e vontades para que eu pudesse realizar os meus sonhos e não há palavras no mundo que expresse o tamanho da minha gratidão. Aproveito para agradecer a todos os meus familiares que de alguma forma contribuíram para a concretização deste sonho.

Agradeço a cada um dos meus amigos e colegas por todo apoio e por deixarem os meus dias mais leves. De forma especial, agradeço às minhas amigas do grupo “LEÃO”, por serem meu esteio, minha segunda família e por estarem comigo desde o primeiro dia de UFJF, e aos meus amigos do grupo “O chumbo vem” por todo apoio e horas de estudos compartilhadas. Em particular, gostaria de destacar dois nomes: Júlia, por ser meu principal amparo durante todos esses anos e também o meu colo quando o mundo estava pesado demais, e Sheucier, por ser minha “gêmea” de curso e por nunca ter me deixado desistir. Sou eternamente grata a cada um de vocês.

Agradeço ao meu orientador Régis por todos esses anos de orientação, tanto de Iniciação Científica quanto na elaboração deste trabalho, por me apresentar o encantador mundo da dinâmica e por sempre me motivar e acolher. Aproveito para agradecer aos professores Reginaldo e Rogério por terem aceitado o convite para participarem da minha banca.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação e pela qualidade de ensino oferecida. Em particular, gostaria de agradecer à professora Flaviana, carinhosamente chamada de Mãe Flavis, por me orientar durante os últimos quatro anos no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), por sempre acreditar em mim e por me ouvir todas as vezes que pensei em desistir, me fazendo mudar de ideia em seguida. Este trabalho não existiria sem o seu apoio, muito obrigada.

Agradeço ao Instituto TIM e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante a minha formação.

Agradeço a Universidade Federal de Juiz de Fora pelo ensino público, gratuito e de qualidade e por todos os profissionais que aqui atuam pelo excelente serviço prestado.

## RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar a Ferradura de Smale e as suas principais características, ressaltando a sua importância no estudo de sistemas dinâmicos caóticos e a relevância da dinâmica simbólica para a sua compreensão. Para isso, primeiramente, serão apresentados conceitos básicos de sistemas dinâmicos e um exemplo unidimensional de uma dinâmica caótica ilustrando como a dinâmica simbólica pode contribuir para o seu estudo. Depois, enunciaremos e provaremos o Teorema da Variedade Instável e introduziremos o conceito de Conjuntos Hiperbólicos. Por fim, será apresentado a Ferradura de Smale.

Palavras-chave: Ferradura de Smale. Dinâmica simbólica.

## **ABSTRACT**

The main objective of this work is to present the Smale Horseshoe and its main characteristics, emphasizing its importance in the study of chaotic dynamical systems and the relevance of symbolic dynamics for its understanding. For this, firstly, basic concepts of dynamical systems will be presented and a one-dimensional example of a chaotic dynamics will be presented, illustrating how symbolic dynamics can contribute to its study. Then, we will state and prove the Unstable Manifold Theorem and introduce the concept of Hyperbolic Sets. Finally, the Smale Horseshoe will be presented.

Keywords: Smale Horseshoe. Symbolic dynamics.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Análise gráfica da função $f(x) = \bar{x}$ . . . . .	19
Figura 2	– Análise gráfica da função $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ . . . . .	19
Figura 3	– Retrato de fase da função $f(x) = \frac{x}{x}$ . . . . .	20
Figura 4	– Retrato de fase da função $f(x) = -x$ . . . . .	20
Figura 5	– Análise gráfica da função $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$ . . . . .	22
Figura 6	– Análise gráfica da função $f(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + x)$ . . . . .	22
Figura 7	– Retrato de fase da função $f(x) = x + x^3$ . . . . .	25
Figura 8	– Retrato de fase da função $g(x) = x - x^3$ . . . . .	25
Figura 9	– Retrato de fase da função $h(x) = x + x^2$ . . . . .	26
Figura 10	– Análise gráfica da função $Q_c(x) = x^2 + c$ quando $c < \frac{1}{4}$ . . . . .	26
Figura 11	– Análise gráfica da função $Q_c(x) = x^2 + c$ quando $c = \frac{1}{4}$ . . . . .	27
Figura 12	– Análise gráfica da função $Q_c(x) = x^2 + c$ quando $c > \frac{1}{4}$ . . . . .	27
Figura 13	– Análise gráfica da função $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ quando $1 < \mu < 2$ . . . . .	29
Figura 14	– Análise gráfica da função $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ quando $2 < \mu < 3$ . . . . .	30
Figura 15	– Análise gráfica da função $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ quando $\mu = 2$ . . . . .	31
Figura 16	– Intervalos $I_0$ e $I_1$ . . . . .	33
Figura 17	– Gráfico da função $F^2(x)$ . . . . .	34
Figura 18	– Pré-imagem de um intervalo fechado $J \subset I$ . . . . .	40
Figura 19	– Retrato de fase da transformação linear $L_1$ . . . . .	47
Figura 20	– Retrato de fase da transformação linear $L_3$ . . . . .	48
Figura 21	– Retrato de fase da transformação linear $L_4$ . . . . .	49
Figura 22	– Retrato de fase da transformação linear $L$ . . . . .	53
Figura 23	– Retrato de fase da transformação linear $L_a$ . . . . .	54
Figura 24	– Retrato de fase da transformação linear $L_b$ . . . . .	54
Figura 25	– Retrato de fase da transformação linear $L_c$ . . . . .	55
Figura 26	– Retrato de fase da função $F$ . . . . .	61
Figura 27	– $S^u(q)$ . . . . .	63
Figura 28	– $S^s(q)$ . . . . .	63
Figura 29	– Região em forma de cone . . . . .	65
Figura 30	– Retrato de fase do difeomorfismo $F$ . . . . .	69
Figura 31	– Retrato de fase do difeomorfismo $\hat{F}$ . . . . .	70
Figura 32	– Representação da região “ $D$ ” . . . . .	73
Figura 33	– Ação de $F$ em $D$ . . . . .	74
Figura 34	– Componentes horizontais e verticais de $S$ . . . . .	75
Figura 35	– Variedades Instável e Estável de $p$ . . . . .	78

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS INICIAIS . . . . .</b>	<b>12</b>
2.1	PRELIMINARES . . . . .	12
<b>2.1.1</b>	Análise Real e Espaços Métricos . . . . .	12
<b>2.1.2</b>	Álgebra Linear . . . . .	13
2.2	SISTEMA DINÂMICO . . . . .	14
<b>2.2.1</b>	Análise gráfica . . . . .	18
<b>2.2.2</b>	Retrato de fase . . . . .	19
<b>3</b>	<b>DINÂMICA UNIDIMENSIONAL . . . . .</b>	<b>21</b>
3.1	HIPERBOLICIDADE . . . . .	21
3.2	FAMÍLIA QUADRÁTICA . . . . .	28
<b>3.2.1</b>	Dinâmica simbólica . . . . .	35
3.3	CAOS . . . . .	42
<b>4</b>	<b>DINÂMICA EM DIMENSÕES SUPERIORES . . . . .</b>	<b>46</b>
4.1	TRANSFORMAÇÕES LINEARES . . . . .	46
4.2	TEOREMA DA VARIEDADE INSTÁVEL E ESTÁVEL . . . . .	55
4.3	CONJUNTOS HIPERBÓLICOS . . . . .	67
<b>5</b>	<b>A FERRADURA DE SMALE . . . . .</b>	<b>73</b>
5.1	A FERRADURA . . . . .	73
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>80</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O matemático norte-americano Steve Smale (1930) é amplamente conhecido pelas suas contribuições no estudo de Sistemas Dinâmicos e Topologia. Depois de finalizar o seu doutorado na Universidade de Michigan em 1957, ele passou os anos de 1958 à 1960 no Instituto de Estudos Avançados de Princeton com uma bolsa de pós-doutorado concedida pela National Science Foundation (NSF), dedicando os últimos seis meses de sua bolsa em estudos no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) no Rio de Janeiro, convidado pelos matemáticos Elon Lages Lima e Maurício Peixoto. Apesar de receber algumas críticas, pois estava utilizando uma bolsa de estudos norte-americana para financiar os seus estudos em um outro país, foi neste curto espaço de tempo que ele descobriu a Ferradura, principal tema deste trabalho.

A principal área de pesquisa de Smale era, até então, a topologia. Porém, depois de conhecer Maurício Peixoto em uma conferência e o mesmo apresentar alguns resultados de sistemas dinâmicos, ele passou a estudar temas envolvendo dinâmica. Depois de chegar na cidade do Rio de Janeiro, Smale dedicou o seu tempo para a pesquisa matemática, passando grande parte do dia no IMPA, consultando livros e artigos e discutindo assuntos matemáticos. Além disso, ele aproveitou as manhãs na praia de Copacabana para trabalhar em matemática.

Depois de publicar um artigo na área de sistemas dinâmicos afirmando, basicamente, que o caos não existia (15), Smale recebeu uma carta do matemático Norman Levinson afirmando que o seu artigo estava errado e que um contra-exemplo estava em um trabalho desenvolvido por ele (12), onde o assunto principal foi uma elucidação do trabalho dos matemáticos britânicos Mary Cartwright e John Edensor Littlewood (5) realizado durante a Segunda Guerra Mundial, enquanto estudavam as ondas de rádio. Durante o estudo, os matemáticos encontraram um comportamento inesperado e incomum de soluções dessas equações que descrevem as ondas de rádio, sendo esse um sinal de caos. Durante o processo de compreensão dos argumentos analíticos utilizados por Levinson em seu trabalho, Smale utilizou de métodos geométricos. Foi durante esse processo de compreensão do trabalho de Levinson e nas praias do Rio de Janeiro que nasceu a Ferradura (17), (16), ou seja, a Ferradura é uma consequência de uma maneira geométrica de olhar para as equações de Cartwright-Littlewood e Levinson. Em síntese, a dinâmica da Ferradura ajuda a entender o caos e explica a imprevisibilidade generalizada da dinâmica. A sua dinâmica será melhor explicada ao decorrer do texto.

Ressaltamos aqui que, apesar do estudo de sistemas dinâmicos caóticos ser algo mais aprofundado durante o século XX, Henri Poincaré (13) (1854-1912) já havia encontrado indícios de uma dinâmica caótica estudando a mecânica celeste. Depois de achar ter encontrado a solução para esse problema, Poincaré não só descobriu que a sua solução não

era válida, mas também mostrou a impossibilidade de resolver as equações que descreviam o movimento de corpos celestes até mesmo para três corpos. Ele batizou essa descoberta de ponto homoclínico, que será definido no decorrer do texto. Previamente, afirmamos que o ponto homoclínico é encontrado em todo sistema dinâmico caótico. Porém, o conceito de ponto homoclínico, depois de abordado pelo matemático americano George David Birkhoff (1884-1944) durante as décadas de 1920 e 1930, onde o mesmo descreveu as suas propriedades, (3), (4), não foi comentado novamente pela comunidade matemática. Somente depois, lendo as obras de Birkhoff presentes na biblioteca do IMPA, Steve Smale pode conhecer esse conceito, e mais, relacionar ele com a Ferradura, provando que se uma dinâmica possui um ponto homoclínico, então ela também contém uma ferradura. Mencionamos ainda que Steve Smale ganhou a medalha Fields em 1966 por seu trabalho e resolução da Conjectura de Poincaré para dimensões maiores que 4.

A principal inspiração para a elaboração deste trabalho é o artigo “Finding a horseshoe on the beaches of Rio” (19). O principal livro texto utilizado para o estudo dos temas abordados está referenciado em (6).

O presente trabalho está dividido em 4 capítulos. O primeiro deles, intitulado “Conceitos iniciais” tem como principal objetivo estabelecer uma base teórica necessária para a compreensão do restante do texto. Para tal, primeiramente serão apresentados conceitos e resultados das teorias de Análise Real, Espaços Métricos e Álgebra Linear. Depois, abordaremos as principais definições utilizadas no estudo de sistemas dinâmicos discretos, bem como alguns resultados relevantes. As principais definições estão ilustradas por exemplos. Por fim, apresentaremos duas ferramentas úteis na compreensão da dinâmica de alguns sistemas, a análise gráfica e o retrato de fase.

O Capítulo 3, intitulado “Dinâmica unidimensional”, tem como principal objetivo tratar sistemas dinâmicos discretos definidos no conjunto dos números reais. Inicialmente, definiremos um ponto hiperbólico e compreenderemos como o comportamento da função derivada influencia no comportamento da função primitiva. Em seguida, estudaremos a dinâmica da família de funções quadráticas, onde, para cada  $\mu \in \mathbb{R}$ , definimos uma função  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ . Analisaremos como alterações no parâmetro  $\mu$  pode influenciar na dinâmica da função  $F_\mu$ . Além disso, introduziremos a dinâmica simbólica e o conceito de um sistema dinâmico caótico.

No Capítulo 4, intitulado “Dinâmica em dimensões superiores”, vamos estudar sistemas dinâmicos definidos em conjuntos bidimensionais e tridimensionais. Inicialmente, estudaremos o comportamento de transformações lineares definidas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , pois as mesmas são de mais fácil compreensão. Posteriormente, enunciaremos e provaremos o Teorema da Variedade Instável, que, em síntese, nos garante um comportamento semelhante ao observado em sistemas dinâmicos lineares, em sistemas dinâmicos não lineares nas proximidades de pontos periódicos. Por fim, introduziremos o conceito de conjuntos

hiperbólicos.

O último capítulo tem como principal objetivo apresentar a Ferradura de Smale. Para tal, descreveremos a sua dinâmica geometricamente. Assim como feito na dinâmica de funções da família quadrática, vamos utilizar a dinâmica simbólica para compreender a dinâmica da Ferradura de Smale e para perceber a presença de caos nesta aplicação.

## 2 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo inicial apresentaremos algumas definições, resultados iniciais e exemplos necessários para o entendimento do texto. Depois introduziremos conceitos e resultados primordiais no estudo de sistemas dinâmicos, além de abordarmos alguns exemplos e ferramentas necessárias ao longo do texto.

### 2.1 PRELIMINARES

Nesta seção abordaremos os conceitos e resultados presentes nas teorias de Análise Real, Espaços Métricos e Álgebra Linear necessários para a compreensão do texto. As demonstrações serão omitidas, mas estão devidamente referenciadas para consultas futuras.

#### 2.1.1 Análise Real e Espaços Métricos

As principais referências aqui utilizadas foram (10), (9), (6) e (8).

Segundo a referência (6), definimos um conjunto de Cantor como segue.

**Definição 2.1.1.** Um conjunto  $\Lambda$  é um **Conjunto de Cantor** se for um subconjunto fechado, totalmente desconexo e perfeito em  $I$ . Um conjunto é totalmente desconexo se não contiver intervalos; um conjunto é perfeito se cada ponto nele for um ponto de acumulação ou ponto limite de outros pontos do conjunto.

Além disso, segundo (8):

**Definição 2.1.2.** Um espaço métrico  $X$  é dito **separável** se  $X$  possui uma base enumerável de abertos, ou seja, se existe uma família de abertos  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = X$  e para todo aberto  $A \subset X$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $B_{n_0} \subset A$ .

Para dinâmicas unidimensionais, utilizaremos com frequência o seguinte resultado.

**Teorema 2.1.3** (Teorema do Valor Médio de Lagrange). Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em (10), Capítulo 8, Teorema 7.  $\square$

A seguinte definição será útil no estudo de sistemas dinâmicos em dimensões superiores. Ela pode ser encontrada em (9), Capítulo 5.

**Definição 2.1.4.** Sejam  $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $F_i$  as funções coordenadas de  $F$ . A matriz  $J_F(a) = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right] \in M(n \times m)$  chama-se a **matriz Jacobiana** de  $F$  no ponto  $a \in U$ .

### 2.1.2 Álgebra Linear

A referência aqui utilizada foi (6).

**Definição 2.1.5.** Uma **transformação linear em**  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

Neste presente trabalho teremos transformações lineares somente em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Podemos escrever uma transformação linear por meio de uma **matriz associada**  $A$ , onde, dada a transformação linear  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma matriz associada  $A$  é de ordem  $n \times n$ . Neste caso, a matriz  $A$  depende da base ordenada do espaço vetorial. Em síntese,  $A$  é tal que  $L(x) = Ax$ , para  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.1.6.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Dizemos que  $\lambda$  é um **autovalor** de  $A$  se  $\lambda$  é uma raiz do **polinômio característico** dado por  $p(x) = \det(A - xI)$ , onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Um **autovetor** de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$  é um vetor  $v$  diferente do vetor nulo tal que  $Av = \lambda v$ .

Agora apresentaremos três importantes resultados que serão cruciais no desenvolvimento do Capítulo 4 deste texto.

**Teorema 2.1.7.** Seja  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que  $L(x) = Ax$ . Então existe uma matriz  $3 \times 3$  com entradas reais  $G$  tal que  $G^{-1}AG$  assume uma das quatro formas a seguir:

$$1. \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

onde todas as entradas são reais e  $\beta = 0$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em (6), Capítulo 2, Teorema 1.10.  $\square$

**Corolário 2.1.8.** *Seja  $A$  uma matriz  $2 \times 2$ . Então existe uma matriz  $G$   $2 \times 2$  tal que  $G^{-1}AG$  assume umas das três formas a seguir:*

1.  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};$
2.  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$
3.  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix};$

onde todas as entradas são reais e  $\beta = 0$ .

**Proposição 2.1.9.** *A transformação linear  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$L(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*é linearmente conjugada a transformação linear*

$$L_\epsilon(x) = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

*ou seja, existe uma transformação linear invertível  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $L = P^{-1} L_\epsilon P$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em (6), Capítulo 2, Proposição 1.12. □

## 2.2 SISTEMA DINÂMICO

Nesta seção introduziremos o conceito de sistemas dinâmicos e algumas definições básicas que envolvem o seu estudo. Além disso, apresentaremos alguns resultados importantes e alguns recursos que facilitarão a compreensão do texto. As referências utilizadas na construção dessa seção foram (6), (7), (2), (11) e (1).

**Definição 2.2.1.** *Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  é um **sistema dinâmico com tempo discreto** ou simplesmente um **sistema dinâmico**.*

Normalmente a aplicação  $f$  é contínua e o conjunto  $X$  é um espaço topológico. Particularmente neste trabalho nos dedicaremos no estudo de aplicações em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Essencialmente nos dedicaremos ao estudo de uma aplicação e as suas compostas, que denotaremos por iterações. Para facilitar a notação, definimos:



- $f^{n+1} = f \circ f^n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $f^0$  como a transformação identidade.

Notemos que  $f^{m+n} = f^m \circ f^n$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ . Além disso, se a aplicação  $f : X \rightarrow X$  é invertível, definimos  $f^{-n} = (f^{-1})^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso,  $f^{m+n} = f^m \circ f^n$  é válida para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Definimos agora os conceitos de órbita, ponto fixo e ponto periódico.

**Definição 2.2.2.** Consideremos a aplicação  $f : X \rightarrow X$ . A **órbita** de um ponto  $x \in X$ ,  $O_f(x)$ , é dada pela sequência formado pelas iterações de  $f$  aplicada ao ponto  $x$ , ou seja,

$$O_f(x) = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots).$$

Se  $f$  for uma função invertível, a órbita de um ponto  $x \in X$  é dada por:

$$O_f(x) = (\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots).$$

**Definição 2.2.3.** Consideremos a aplicação  $f : X \rightarrow X$ . Um ponto  $x \in X$  é um **ponto periódico de período  $n$**  para  $f$  se  $f^n(x) = x$  e  $f^k(x) \neq x$  para todo  $0 < k < n$ . Em particular, chamamos de **ponto fixo** o ponto periódico de período 1, ou seja, o ponto  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

O conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denotado por  $Per(f)$ .

**Exemplo 2.2.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ . Observemos que o único ponto fixo de  $f(x)$  é dado por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ -\frac{1}{2}x^3 &= x \\ x \left( -\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Ademais, temos que

$$f^2(x) = f(f(x)) = -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}x^3 \right)^3 = \frac{1}{16}x^9.$$

Com isso, para encontrar os pontos periódicos de período 2 de  $f$ , basta encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f^2(x) = x$ , como segue:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x \\ \frac{1}{16}x^9 &= x \\ x \left( \frac{1}{16}x^8 - 1 \right) &= 0 \\ x_0 = 0, \quad x_1 &= \sqrt[8]{16}, \quad x_2 = -\sqrt[8]{16}. \end{aligned}$$

Como  $x_0 = 0$  é um ponto fixo, concluímos que os pontos periódicos de período 2 para  $f$  são  $x_1 = \sqrt{2}$  e  $x_2 = -\sqrt{2}$ .

Notemos que encontrar os pontos periódicos de períodos superiores exige grande esforço, pois precisaríamos realizar as compostas de todos os períodos inferiores e igualar cada uma a  $x$ .

Observemos que um ponto  $x_0$  é fixo quando a sua órbita é dada por uma sequência constante, pois  $f^n(x_0) = x_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ademais, um ponto  $x_k$  é periódico de período  $k$  quando a sua órbita é uma sequência periódica, ou seja,

$$O_f(x_k) = (x_k, f(x_k), f^2(x_k), \dots, f^{k-1}(x_k), x_k, \dots).$$

Observações análogas podem ser feitas para as órbitas de funções invertíveis.

Além disso, podemos definir a órbita de um ponto  $x \in X$  com relação a aplicação  $f : X \rightarrow X$  como um conjunto e não uma sequência. Neste caso, a órbita de  $x$  é dada por:

$$O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}.$$

Análogo para o caso em que  $f$  é invertível. Diante disso, um ponto  $x_0$  possui órbita periódica se o conjunto  $O_f(x)$  é finito.

Tratando a órbita de um ponto como um conjunto, podemos definir quando uma órbita é densa analogamente ao conceito de conjunto denso visto em estudos topológicos.

**Definição 2.2.5.** Consideremos a aplicação  $f : X \rightarrow X$ . Dizemos que  $f$  possui uma **órbita densa** se existe um ponto  $x \in X$  tal que para todo aberto  $A \subset X$  existe  $n_A \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_A}(x) \in A$ .

**Definição 2.2.6.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  é considerada **transitiva** se para qualquer par de conjuntos abertos  $A, B \subset X$  existir  $n > 0$  tal que  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ .

Conseqüentemente, um sistema dinâmico que é topologicamente transitivo não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos disjuntos que são invariantes. Além disso, temos uma importante proposição envolvendo as duas definições anteriores.

**Proposição 2.2.7.** Seja  $X$  um espaço métrico separável e consideremos a aplicação  $f : X \rightarrow X$ .  $f$  é transitiva se, e somente se,  $f$  possui uma órbita densa.

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que  $f$  possui uma órbita densa. Assim, existe  $x \in X$  cuja órbita é densa. Dados dois conjuntos abertos quaisquer  $A, B \subset X$ , sabemos que existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $f^{n_1}(x) \in A$  e  $f^{n_2}(x) \in B$ . Sem perda de generalidade, suponhamos  $n_1 > n_2$ . Seja  $n_0 = n_1 - n_2$ . Temos

$$f^{n_0}(f^{n_2}(x)) = f^{n_1 - n_2}(f^{n_2}(x)) = f^{n_1}(x) \in A.$$

Assim,  $f^{n_0}(B) \cap A = \emptyset$ . Portanto,  $f$  é transitiva.

Por outro lado, suponhamos que  $f : X \rightarrow X$  é transitiva. Vamos provar que  $f$  possui órbita densa. Seja  $\{B_1, B_2, \dots\}$  base enumerável de abertos de  $X$ . Como  $f$  é transitiva, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ . Seja  $U_1$  uma bola aberta de raio  $r_1$  menor que  $\frac{1}{2}$  tal que

$$\overline{U_1} \subset (B_1 \cap f^{-n_1}(B_2)).$$

Novamente, como  $f$  é transitiva, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_2}(U_1) \cap B_3 \neq \emptyset$ . Seja  $U_2$  uma bola aberta de raio  $r_2$  menor que  $\frac{1}{4}$  tal que

$$\overline{U_2} \subset U_1 \cap f^{-n_2}(B_3).$$

Repetindo esse processo, obtemos

$$\overline{U_1} \subset U_1 \cap \overline{U_2} \subset U_2 \cap \overline{U_3} \subset U_3 \cap \dots$$

Como  $\overline{U_i}$  é compacto para cada  $i \in \mathbb{N}$ , então  $(\overline{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de compactos encaixados. Assim, existe  $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \emptyset$ . Como  $X$  possui uma base enumerável de abertos, dado aberto  $A \subset X$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $B_{n_0} \subset A$ . Por construção,  $z \in \overline{U_{n_0-1}}$ , ou seja,  $f^{n_0-1}(z) \in B_{n_0}$ . Logo,  $f^{n_0-1}(z) \in A$ . Portanto, pela arbitrariedade de  $A$ ,  $O_f(z)$  é densa.  $\square$

Agora, vamos definir conjugação topológica, que será uma importante ferramenta ao longo do texto.

**Definição 2.2.8.** *Seja  $f : A \rightarrow A$  e  $g : B \rightarrow B$  duas aplicações.  $f$  e  $g$  são **topologicamente conjugadas** se existe um homeomorfismo  $h : A \rightarrow B$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ . O homeomorfismo  $h$  é chamado de **conjugação topológica**.*

Aplicações que são topologicamente conjugadas são completamente equivalentes em termos de dinâmica. Por exemplo, se  $f$  é topologicamente conjugado com  $g$  via  $h$  e  $p$  é um ponto fixo para  $f$ , então  $h(p)$  é um ponto fixo para  $g$ . Em síntese, a conjugação topológica leva cada órbita de  $f$  em uma órbita de  $g$ , ou seja, leva ponto periódico em ponto periódico, órbita densa em órbita densa, dentre outras propriedades.

Como mencionado no exemplo 2.2.4, encontrar os pontos fixos e periódicos de uma aplicação utilizando somente a definição direta dos mesmos pode ser algo exaustivo. Para descrever uma órbita de um determinado ponto também pode-se encontrar certa dificuldade. Para auxiliar na procura por pontos periódicos e na construção das órbitas de um ponto, recorreremos à análise dos gráficos e ao retrato de fase dessas aplicações, que serão os assuntos das próximas subseções.

### 2.2.1 Análise gráfica

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Observemos que para encontrar os pontos fixos da função  $f$  basta achar quais são os  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x$ . Graficamente, conseguimos visualizar esses pontos como sendo aqueles em que a imagem intersecta a reta identidade dada por  $y = x$ .

Além disso, podemos utilizar o gráfico da função  $f$  juntamente com a identidade  $y = x$  para encontrar a órbita de um ponto  $x$  da seguinte maneira:

- Inicialmente, marcamos o ponto  $(x, x)$ , que estará sobre a reta identidade  $y = x$ . Quando olhamos para qualquer uma das coordenadas temos o ponto  $f^0(x) = x$ .
- Depois traçamos um segmento vertical de  $(x, x)$  até que esse segmento encontre o gráfico da função  $f$ . Esse ponto será o ponto  $(x, f(x))$ . Nesse caso, a segunda coordenada nos dará o segundo elemento da órbita de  $x$ , ou seja, a imagem de  $x$  pela função  $f$ .
- Em seguida, traçamos um seguimento horizontal do ponto  $(x, f(x))$  até que o mesmo encontre a reta identidade. Esse ponto terá como coordenada  $(f(x), f(x))$ . Posteriormente, traçamos um seguimento vertical até que o ponto  $(f(x), f(x))$  encontre o gráfico de  $f$ . Esse ponto será dado por  $(f(x), f^2(x))$ . Assim, a segunda coordenada será o próximo elemento da órbita. Os demais pontos da órbita são encontrados de maneira análoga.

Repetindo esse processo, conseguimos construir a órbita de um ponto  $x$  apenas analisando o seu gráfico. Esse processo é comumente conhecido como “**teia de aranha**”. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.2.9.** *Seja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{x}$ . A análise gráfica dessa função está presente na Figura 1.*

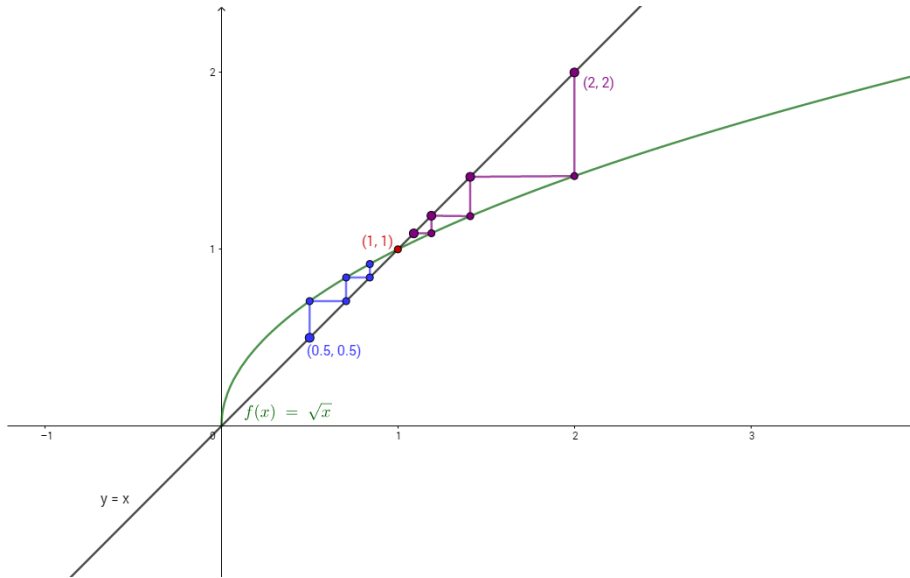
*Neste caso, podemos perceber que 1 é um ponto fixo de  $f$  pois é a interseção do gráfico de  $f$  e a reta identidade  $y = x$ . Além disso, conseguimos compreender a órbita dos pontos 0,5 e 2.*

**Exemplo 2.2.10.** *Vejamos agora a análise gráfica da função  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ , dada na Figura 3. Comprovando o que foi visto no Exemplo 2.2.4, destacamos o ponto fixo  $x_0 = 0$  e os pontos periódicos de período 2,  $x_1 = \sqrt[3]{2}$  e  $x_2 = f(\sqrt[3]{2}) = -\sqrt[3]{2}$ .*

*Podemos perceber aqui que a análise gráfica é um método mais simples de encontrar os pontos fixos e periódicos de uma função definida no conjunto dos números reais do que utilizar o cálculo pela definição.*

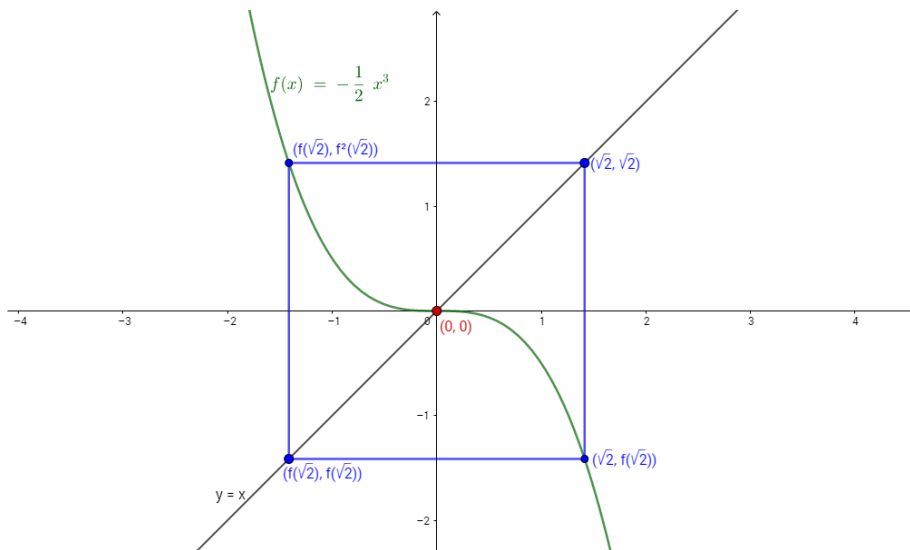
Observemos que se  $x$  é um ponto periódico, então os segmentos gerados na análise gráfica em determinado momento retornam para o ponto  $(x, x)$ . Em síntese, o circuito

– Figura 1 - Análise gráfica da função  $f(x) = \sqrt{x}$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

– Figura 2 - Análise gráfica da função  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

gerado pela análise gráfica será “fechado”. Para saber qual o período desse ponto, basta analisar qual é a primeira iteração em que ele retornou para o ponto  $(x, x)$ .

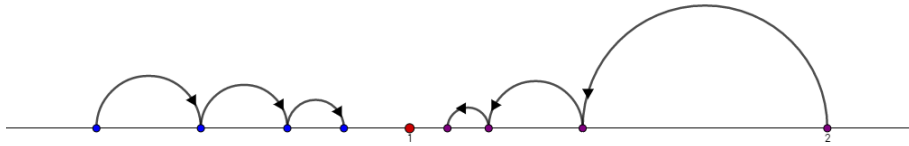
### 2.2.2 Retrato de fase

Além da análise gráfica, podemos recorrer a um outro recurso para compreender a órbita de um ponto  $x \in \mathbb{R}$ : o **retrato de fase**. Em síntese, representamos na reta real as órbitas de um sistema. Neste caso, as órbitas dos pontos são representadas por setas.

Vamos ver alguns exemplos.

**Exemplo 2.2.11.** Vamos apresentar o retrato de fase da função  $f(x) = \bar{x}$ , onde a análise gráfica se encontra no Exemplo 2.2.9.

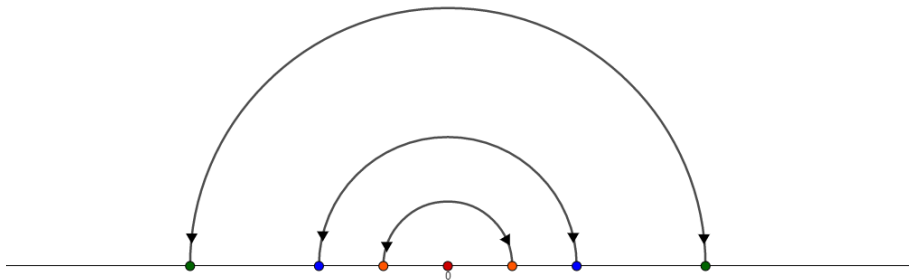
– Figura 3 - Retrato de fase da função  $f(x) = \bar{x}$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

**Exemplo 2.2.12.** Vejamos agora o retrato de fase da função  $f(x) = -x$ , representada na Figura 4.

– Figura 4 - Retrato de fase da função  $f(x) = -x$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

*Observemos que, neste caso, temos apenas um ponto fixo  $x = 0$  e os demais pontos são periódicos de período 2. Essas conclusões podem ser vistas facilmente pelo retrato de fase, por isso a sua importância no estudo de sistemas dinâmicos.*

Como podemos observar nos exemplos acima, o retrato de fase não oferece um maior número de informações que a análise gráfica. Porém, diferentemente da análise gráfica, o retrato de fase nos permite analisar a órbita de sistemas dinâmicos definidos no  $\mathbb{R}^2$  e será uma importante ferramenta mais adiante.

### 3 DINÂMICA UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo trataremos de sistemas dinâmicos definidos em  $\mathbb{R}$ . Introduziremos o conceito de hiperbolicidade, caos e trabalharemos com um importante sistema dinâmico necessário para compreender diversos fenômenos importantes em sistemas dinâmicos. As principais referências utilizadas foram (6) e (7).

#### 3.1 HIPERBOLICIDADE

Nesta seção apresentaremos um importante tipo de ponto periódico: os pontos hiperbólicos. Além disso, mostraremos como é possível compreender o comportamento de uma aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em vizinhanças próximas de pontos periódicos hiperbólicos. Para isso, trabalharemos com funções de classe  $C^2$ .

**Definição 3.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$ . O ponto  $p$  é dito **hiperbólico** se  $|(f^n)'(p)| \neq 1$ . O número  $(f^n)'(p)$  é chamado de **multiplicador do ponto periódico**  $p$ .*

As aplicações com pontos periódicos hiperbólicos são as que ocorrem tipicamente em muitos sistemas dinâmicos e, além disso, fornecem os tipos mais simples de comportamento periódico para analisar.

**Exemplo 3.1.2.** *Consideremos o difeomorfismo  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$ . Vamos encontrar os pontos fixos de  $f$  através da análise gráfica vista no capítulo anterior. Observemos a Figura 5. Como os pontos fixos de uma aplicação são os pontos tais que a imagem intersecta a reta identidade  $y = x$ , temos que os pontos fixos de  $f$  são  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 1$ .*

*Vamos agora verificar se esses pontos são hiperbólicos ou não. Sabemos que  $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)$ . Assim,*

$$\begin{aligned} f'(x_1) = f'(-1) &= \frac{1}{2}(3(-1)^2 + 1) = 2 \neq 1; \\ f'(x_2) = f'(0) &= \frac{1}{2}(3 \cdot 0^2 + 1) = \frac{1}{2} \neq 1; \\ f'(x_3) = f'(1) &= \frac{1}{2}(3 \cdot 1^2 + 1) = 2 \neq 1. \end{aligned}$$

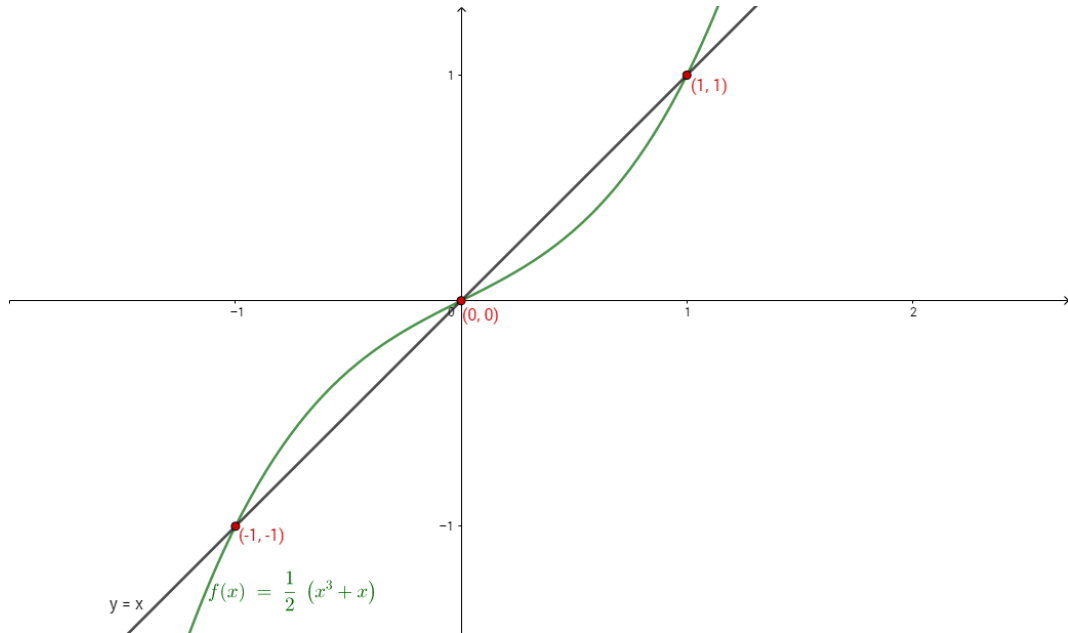
*Logo todos os pontos fixos desse difeomorfismo são hiperbólicos.*

**Exemplo 3.1.3.** *Seja  $f(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + x)$ . Observemos a análise gráfica da função  $f$ , presente na Figura 6.*

*O único ponto fixo de  $f(x)$  é  $x_0 = 0$ . Além disso,  $f'(x) = -\frac{1}{2}(3x^2 + 1)$ . Assim,*

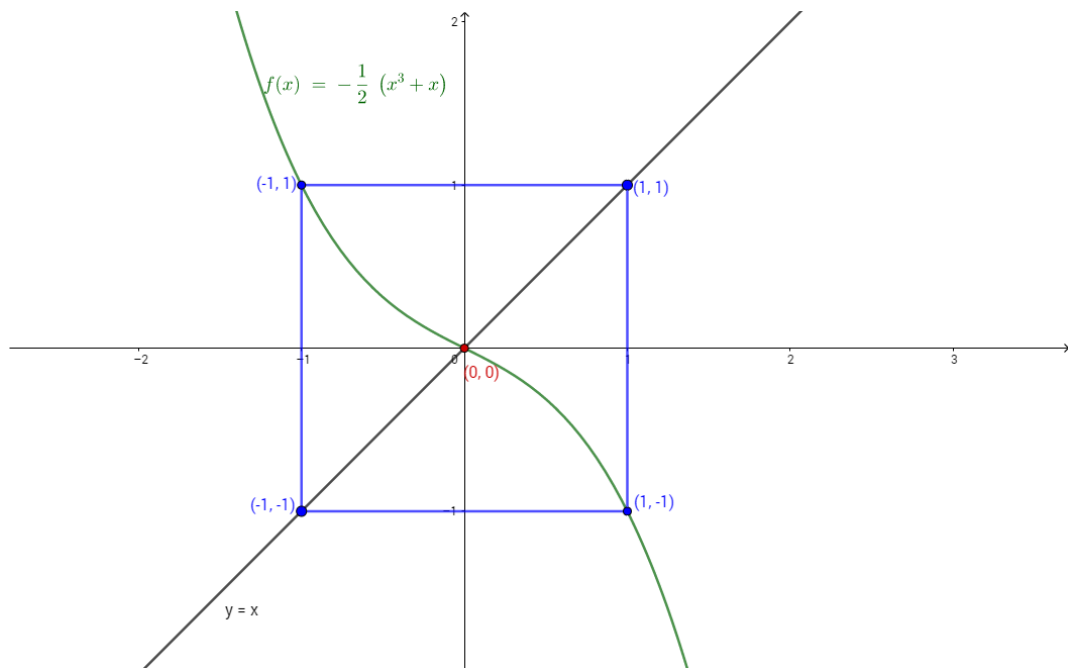
$$f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{2}(3 \cdot 0^2 + 1) = -\frac{1}{2} \neq 1,$$

– Figura 5 - Análise gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

– Figura 6 - Análise gráfica da função  $f(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + x)$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

garantindo que o ponto fixo  $x_0 = 0$  é hiperbólico. Além disso, temos que  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 1$  são pontos periódicos de período 2. Como  $(f^2(x)) = f(f(x)) \cdot f(x)$ , segue que,

$$(f^2(x_1)) = (f^2(-1)) = f(f(-1)) \cdot f(-1) = f(1) \cdot f(-1) = (-2) \cdot (-2) = 4 = 1;$$



$$(f^2(x_2)) = (f^2(1)) = f(f(1)) \cdot f(1) = f(-1) \cdot f(1) = (-2) \cdot (-2) = 4 = 1.$$

Logo, os pontos periódicos  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 1$ , ambos de período 2, são hiperbólicos.

Agora vamos apresentar uma importante Proposição que mostra o comportamento da aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em vizinhanças de um ponto fixo hiperbólico  $p$  em que  $|f'(p)| < 1$ . Posteriormente, vamos fazer uma análise parecida para o comportamento da função  $f$  na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico  $q$  onde  $|f'(q)| > 1$ .

**Proposição 3.1.4.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico com  $|f'(p)| < 1$ . Então existe um intervalo aberto  $U$  ao redor de  $p$  tal que se  $x \in U$ , então*

$$\lim_n f^n(x) = p.$$

*Demonstração.* Como  $f$  é de classe  $C^1$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$|f'(x)| < A < 1, \quad x \in [p - \epsilon, p + \epsilon].$$

Pelo Teorema do Valor Médio (Teorema 2.1.3),

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \quad \epsilon.$$

Logo,  $f(x)$  está contido em  $[p - \epsilon, p + \epsilon]$  para todo  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$  e, de fato, está mais próximo de  $p$  do que de  $x$ . Repetindo o processo com  $f(x)$ , obtemos

$$|f^2(x) - p| \leq A|f(x) - p| \leq A^2|x - p| < |x - p| \quad \epsilon.$$

Podemos repetir esse processo para  $f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$ , encontramos que

$$|f^n(x) - p| \leq A^n|x - p|.$$

Como  $\lim_n A^n = 0$ , então,

$$\lim_n |f^n(x) - p| = 0$$

Logo,

$$\lim_n f^n(x) = p$$

para todo  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ , como queríamos.  $\square$

**Observação 3.1.5.** *Um resultado semelhante é válido para pontos periódicos hiperbólicos de período  $n$ . Nesse caso, temos um intervalo aberto  $U$  ao redor de  $p$  que é levado dentro e si mesmo por  $f^n$  e assumimos que  $|f^n'(p)| < 1$ .*

Devido ao comportamento da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  na vizinhança de um ponto periódico hiperbólico  $p$  tal que  $|f'(p)| < 1$ , esses pontos são denominados como segue.

**Definição 3.1.6.** *Seja  $p$  um ponto periódico hiperbólico de período  $n$  com  $|f^n(p)| < 1$ . O ponto  $p$  é chamado de um **ponto periódico de atração** (um **atrator**) ou um **poço**.*

Em síntese, um ponto periódico atrator de período  $n$  tem vizinhanças que são levadas dentro de si por  $f^n$ . Esta vizinhança é chamada de **conjunto estável local** e é denotada por  $W_{loc}^s$ .

**Exemplo 3.1.7.** *Consideremos a função  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x}{2+x}$ , ilustrada no exemplo 2.2.9. A análise gráfica dessa função é dada na Figura 1. Como podemos observar na análise gráfica,  $x = 1$  é um ponto fixo de  $f$ . Além disso,  $f'(x) = \frac{1}{2+x^2}$ . Assim,*

$$|f'(1)| = \left| \frac{1}{2+1} \right| = \frac{1}{3},$$

garantindo que  $x = 1$  é um ponto fixo hiperbólico atrator.

Assim, pela Proposição 3.1.4, existe um intervalo aberto  $U$  que contém 1 tal que se  $x \in U$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1.$$

Assim, os pontos tendem a se aproximar de 1. Podemos observar graficamente que isso acontece com os pontos  $x_1 = 0,5$  e  $x_2 = 2$ , pela análise gráfica da função  $f$  que se encontra na Figura 1.

Veremos a seguir como o comportamento próximo a pontos periódicos onde a derivada é maior que 1 em módulo é bastante diferente de pontos atratores.

**Proposição 3.1.8.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico com  $|f'(p)| > 1$ . Então existe um intervalo aberto  $U$  em torno de  $p$  tal que, se  $x \in U$ ,  $x \neq p$ , então existe  $k > 0$  tal que  $f^k(x) \in U$ .*

*Demonstração.* Observemos que, neste caso, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f'(x)| > A > 1$  para todo  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ . Fazendo uma construção análoga da demonstração da Proposição 3.1.4, garantimos que  $|f^n(x) - p| \geq A^n|x - p|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = +\infty$ , existe  $k > 0$  tal que  $|f^k(x) - p| > \epsilon$ , ou seja, existe uma vizinhança  $U = [p - \epsilon, p + \epsilon]$  de  $p$ ,  $f^k(x) \notin U$ , como queríamos.  $\square$

Devido ao comportamento da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  na vizinhança de um ponto periódico hiperbólico  $p$  tal que  $|f'(p)| > 1$ , esses pontos são denominados como segue.

**Definição 3.1.9.** Um ponto fixo  $p$  com  $|f'(p)| > 1$  é chamado de um **ponto fixo de repulsão** (um **repulsor**) ou uma **fonte**. O conjunto descrito na Proposição é chamado de **conjunto instável local** e é denotado por  $W_{loc}^u$ .

Em síntese, podemos afirmar que pontos hiperbólicos têm comportamento local governado pela derivada no ponto periódico. Essa afirmação não é válida quando o ponto é indiferente ou não hiperbólico, como podemos observar nos exemplos abaixo.

**Exemplo 3.1.10.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:  $f(x) = x + x^3$ ,  $g(x) = x - x^3$  e  $h(x) = x + x^2$ . Observemos

$$f(0) = g(0) = h(0) = 0,$$

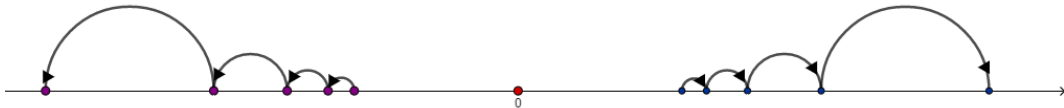
garantindo que 0 é um ponto fixo de todas as funções. Além disso,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 3x^2 & f'(0) &= 1 \\ g'(x) &= 1 - 3x^2 & g'(0) &= 1 \\ h'(x) &= 1 + 2x & h'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Assim, o 0 é um ponto fixo não hiperbólico.

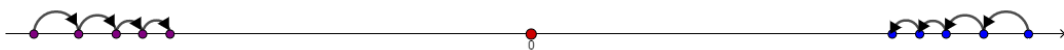
Examinemos o retrato de fase das funções  $f$  (Figura 7),  $g$  (Figura 8) e  $h$  (Figura 9) nas proximidades de 0.

– Figura 7 - Retrato de fase da função  $f(x) = x + x^3$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

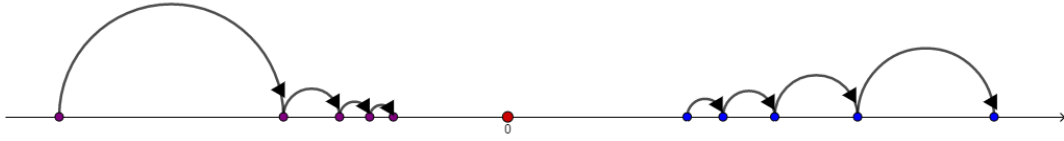
– Figura 8 - Retrato de fase da função  $g(x) = x - x^3$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Podemos observar que a aplicação  $f(x) = x + x^3$  tem um ponto fixo de repulsão “fraco” em 0, pois os pontos próximos de 0 tendem a se afastar de 0, mas com uma velocidade menor do que observado anteriormente nos pontos hiperbólicos. Por outro lado,

– Figura 9 - Retrato de fase da função  $h(x) = x + x^2$

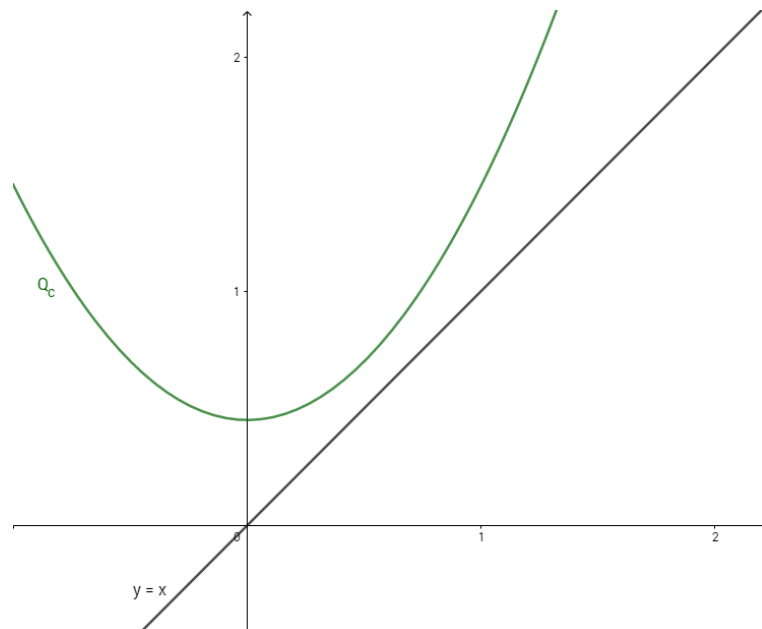


Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

a aplicação  $g(x) = x - x^3$ , tem um ponto fixo de atração “fraco” em 0. E mais, a aplicação  $h(x) = x + x^2$  tem um repulsor “fraco” para a direita mas um atrator “fraco” para a esquerda. Portanto, quando um ponto periódico não é hiperbólico, não podemos garantir nada sobre o comportamento da função próximo aos pontos.

**Exemplo 3.1.11.** Consideremos a família de funções quadráticas  $Q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $Q_c(x) = x^2 + c$ , onde  $c$  é um parâmetro. Primeiramente, temos que  $Q_c(x) = 2x$ . O gráfico de  $Q_c$  assume três posições diferentes em relação à diagonal dependendo se  $c > \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{4}$  ou  $c < \frac{1}{4}$ , como podemos observar nas Figuras 10, 11 e 12.

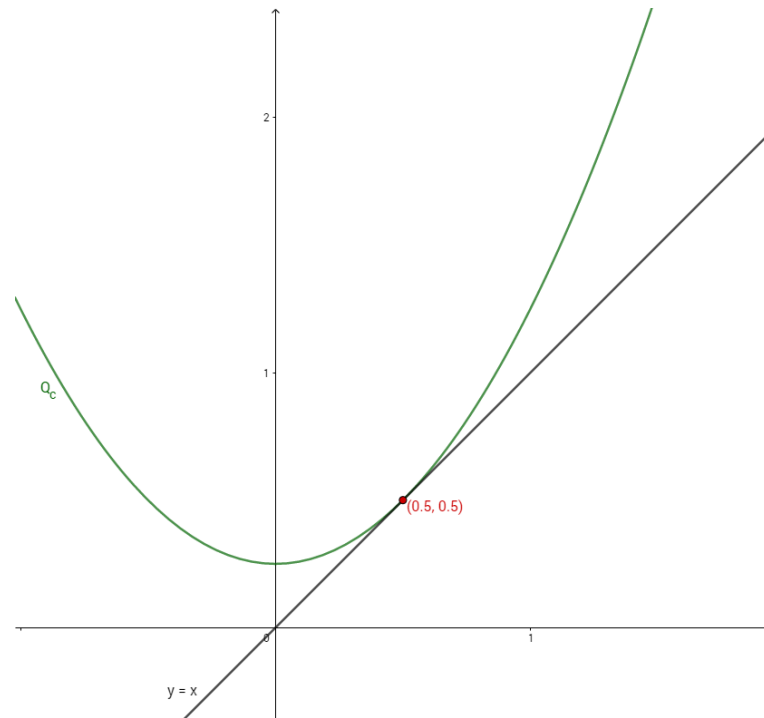
– Figura 10 - Análise gráfica da função  $Q_c(x) = x^2 + c$  quando  $c > \frac{1}{4}$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

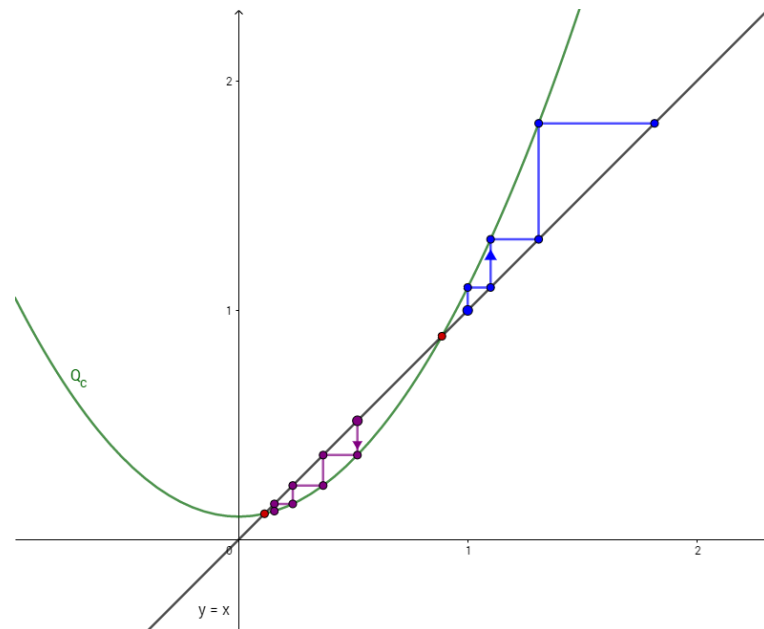
Observemos que  $Q_c$  não possui pontos fixos para  $c > \frac{1}{4}$ . Quando  $c = \frac{1}{4}$ ,  $Q_c$  tem um único ponto fixo que não é hiperbólico em  $x = \frac{1}{2}$ , pois  $Q_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}) = 1$ . E quando  $c < \frac{1}{4}$ ,  $Q_c$  tem um par de pontos fixos, um atrator e o outro repulsor.

– Figura 11 - Análise gráfica da função  $Q_c(x) = x^2 + c$  quando  $c = \frac{1}{4}$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

– Figura 12 - Análise gráfica da função  $Q_c(x) = x^2 + c$  quando  $c < \frac{1}{4}$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Assim, o retrato de fase de  $Q_c$  muda conforme  $c$  decresce através de  $\frac{1}{4}$ . Esta mudança é chamada de bifurcação.

**Exemplo 3.1.12.** Seja  $F_\mu(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F_\mu = \mu x(1 - x)$ , com um parâmetro  $\mu > 1$ . Observemos que  $F_\mu$  tem dois pontos fixos: um é dado por  $x = 0$  e o outro é dado por  $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$ . Como  $F_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ , então  $F_\mu(0) = \mu$  e  $F_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$ . Logo, 0 é um ponto fixo repulsor para todo  $\mu > 1$  e  $p_\mu$  é atrator para  $1 < \mu < 3$ . Quando  $\mu = 3$ ,  $F_\mu(p_\mu) = -1$ .

A família quadrática apresentada no Exemplo 3.1.12 possui uma grande importância no desenvolvimento dos temas subsequentes e será mais detalhada separadamente na próxima seção.

## 3.2 FAMÍLIA QUADRÁTICA

Nesta seção trabalharemos com a família quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ . Este exemplo ilustra vários fenômenos importantes em sistemas dinâmicos que serão abordados adiante.

**Proposição 3.2.1.** 1.  $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$  e  $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ , onde  $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$ .

2.  $0 < p_\mu < 1$  se  $\mu > 1$ .

*Demonstração.* De fato,

1.
  - $F_\mu(0) = \mu \cdot 0(1 - 0) = 0$ ;
  - $F_\mu(1) = \mu \cdot 1(1 - 1) = 0$ ;
  - $F_\mu(p_\mu) = \mu \left( \frac{\mu - 1}{\mu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\mu - 1}{\mu} \right) \right] = (\mu - 1) \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu}$ .

2. Suponhamos que  $\mu > 1$ . Assim,  $0 < \mu - 1 < \mu$ , garantindo que  $0 < \frac{\mu - 1}{\mu} = p_\mu < 1$ , como queríamos.

□

**Proposição 3.2.2.** Suponhamos que  $\mu > 1$ . Se  $x < 0$ , então  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Similarmente, se  $x > 1$ , então  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Primeiramente suponhamos que  $x < 0$ . Nesse caso,  $\mu x < x$  e  $1 - x > 1$ , garantindo que  $\mu x(1 - x) < x$ , ou seja,  $F_\mu(x) < x$ . De forma análogo, obtemos que  $\mu x < F_\mu(x)$  e  $1 - F_\mu(x) > 1$ , garantindo que  $F_\mu^2(x) < F_\mu(x) < x$ . Similarmente, obtemos que  $F_\mu(x)^3 < F_\mu^2(x) < F_\mu(x) < x$ , e assim sucessivamente, garantindo que  $F_\mu^n(x)$  é uma sequência decrescente de pontos. Observemos ainda que esta sequência não pode convergir para um ponto  $p$ , pois nesse caso teríamos  $F_\mu^{n+1}(x) = F_\mu(p) < p$  enquanto que  $F_\mu^n(x) = p$ . Então  $F_\mu^n(p) = p$ , como queríamos.

Suponhamos agora que  $x > 1$ . Nesse caso,  $\mu x > 0$  e  $(1 - x) < 0$ , garantindo que  $\mu x(1 - x) < 0 < x$ , ou seja,  $F_\mu(x) < 0 < x$ . Por uma construção análoga à anterior,  $F_\mu^n(x) \rightarrow 0$ , como queríamos.  $\square$

Pela Proposição anterior podemos afirmar que as dinâmicas interessantes de serem estudadas da família quadrática ocorrem no intervalo  $I = \{x; 0 < x < 1\}$ , onde vamos concentrar os nossos estudos daqui em diante.

**Proposição 3.2.3.** *Seja  $1 < \mu < 3$ .*

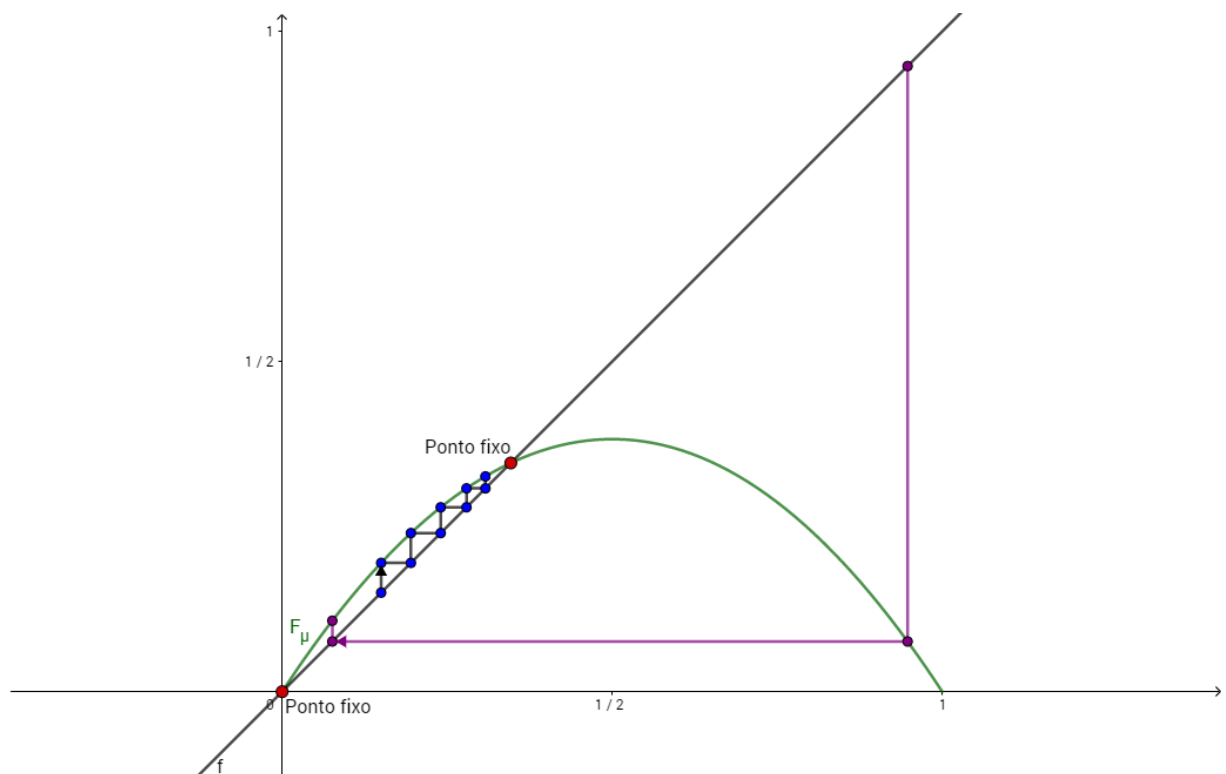
1.  $F_\mu$  tem um ponto fixo atrator em  $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$  e um ponto fixo repulsor em 0.
2. Se  $0 < x < 1$ , então

$$\lim_n F_\mu^n(x) = p_\mu.$$

*Demonstração.* 1. Essa afirmação já foi provada no Exemplo 3.1.12.

2. Primeiramente, consideremos o caso  $1 < \mu < 2$ . Suponhamos que  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ .

– Figura 13 - Análise gráfica da função  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  quando  $1 < \mu < 2$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Temos, pela análise gráfica presente na Figura 13,

$$|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$$

se  $x = p_\mu$ . Analogamente, podemos ver que

$$|F_\mu^2(x) - p_\mu| < |F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|.$$

Conseqüentemente  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

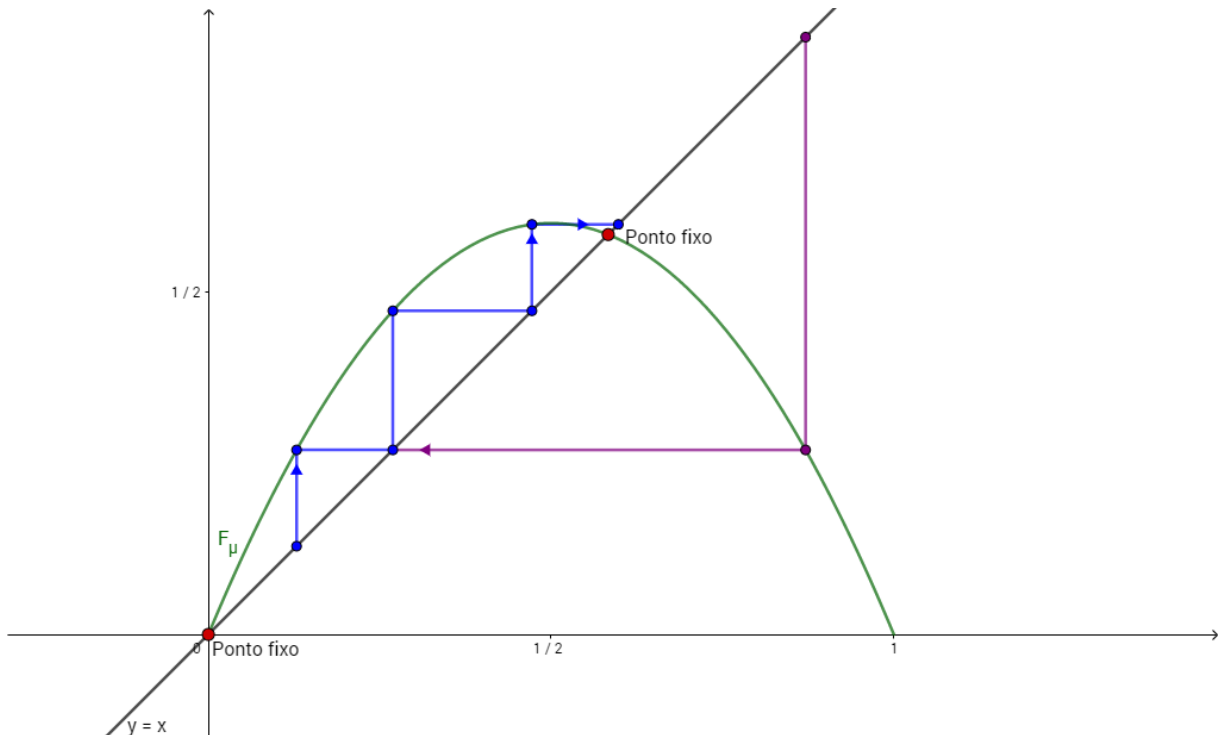
Novamente pela análise gráfica presente na Figura 13, se  $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , então  $F_\mu(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , ou seja,  $F_\mu(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Assim,

$$F_\mu^n(x) = F_\mu^{n-1}(F_\mu(x)) \rightarrow p_\mu$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Agora consideremos o caso em que  $2 < \mu < 3$ .

– Figura 14 - Análise gráfica da função  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  quando  $2 < \mu < 3$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

A análise gráfica presente na Figura 14 mostra o que é diferente neste caso. Observemos que, neste caso,  $\frac{1}{2} < \frac{\mu - 1}{\mu} < 1$ . Seja  $\tilde{p}_\mu$  o único ponto no intervalo  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$



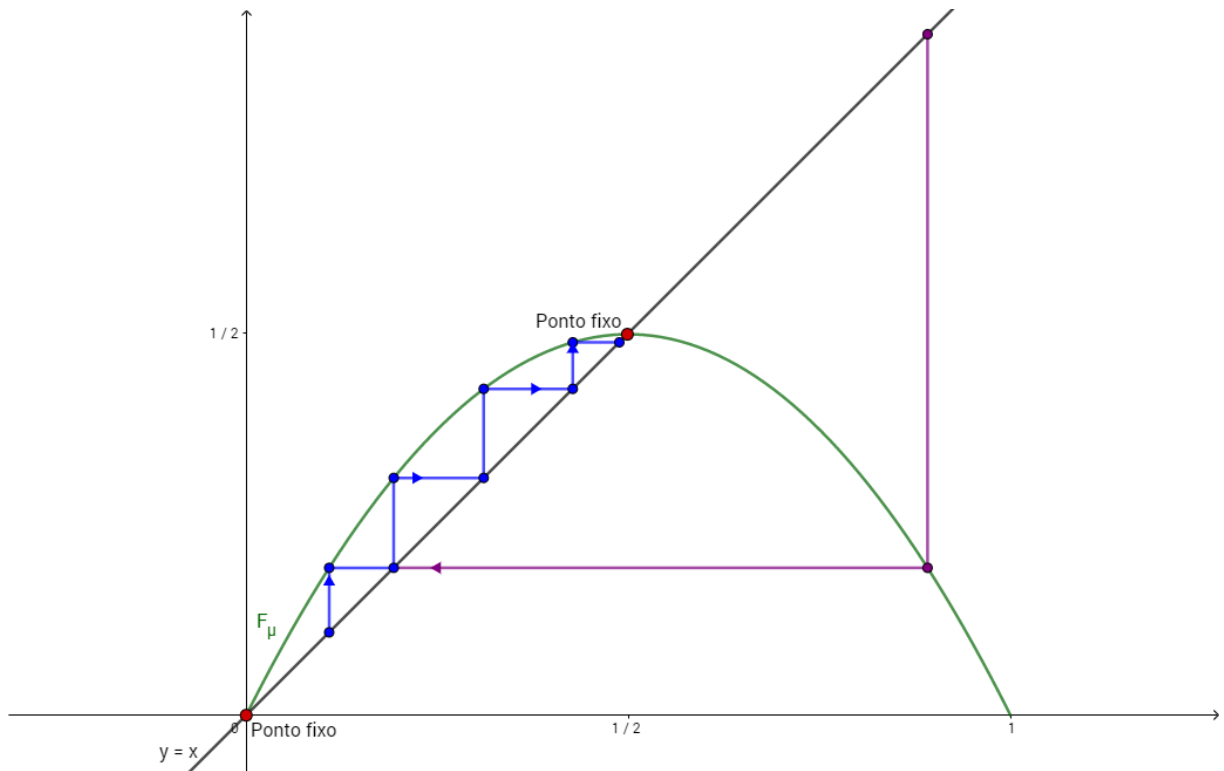
que é levado em  $p_\mu$  por  $F_\mu$ . Então  $F_\mu^2$  leva o intervalo  $[\tilde{p}_\mu, p_\mu]$  em  $[\frac{1}{2}, p_\mu]$ . Segue que  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in [\tilde{p}_\mu, p_\mu]$ . Agora, suponhamos que  $x < \tilde{p}_\mu$ . Novamente a análise gráfica mostra que existe  $k > 0$  tal que  $F_\mu^k(x) \in [\tilde{p}_\mu, p_\mu]$ . Assim,  $F_\mu^{k+n}(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$  nesse caso também. Finalmente, como antes,  $F_\mu$  leva o intervalo  $(p_\mu, 1)$  em  $(0, p_\mu)$ , então o resultado vale aqui também, visto que  $(0, 1) = (0, \tilde{p}_\mu) \cup [\tilde{p}_\mu, p_\mu] \cup (p_\mu, 1)$ , a demonstração está finalizada para  $2 < \mu < 3$ .

Por fim, vamos estudar o caso em que  $\mu = 2$ . Aqui, temos:

$$F_2(x) = 2x(1 - x) \text{ e } p_2 = \frac{1}{2}.$$

e a análise gráfica está representada na Figura 15.

– Figura 15 - Análise gráfica da função  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  quando  $\mu = 2$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Neste caso, se  $x \in (0, \frac{1}{2})$ , então, pela análise gráfica,

$$\left| F_2(x) - \frac{1}{2} \right| < \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

Repetindo esse processo, temos  $F_2^n(x) \rightarrow \frac{1}{2}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, se  $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , então  $F_2(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , caindo no caso anterior, onde  $F_2^n(x) \rightarrow \frac{1}{2}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu,$$

como queríamos. □

Consequentemente, para  $1 < \mu < 3$ ,  $F_\mu$  tem apenas dois pontos fixos, a saber, 0 e  $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$  e todos os outros pontos em  $I = [0, 1]$  são assintóticos para  $p_\mu$ . Quando  $\mu > 3$ , a dinâmica de  $F_\mu$  torna-se mais complicada, tendo um novo ponto periódico de período 2. E conforme aumentamos o valor de  $\mu$  a dinâmica torna-se cada vez mais complexa.

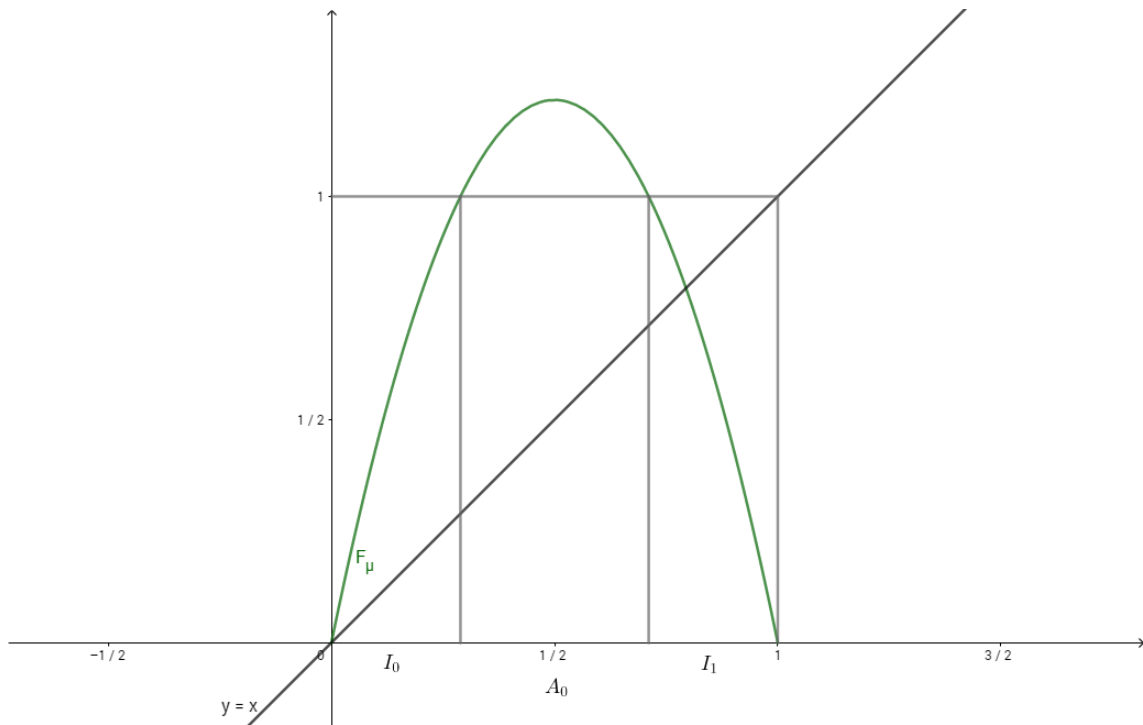
Vamos nos concentrar agora no estudo do caso onde  $\mu > 4$ . Para facilitar a notação, chamaremos  $F_\mu$  somente de  $F$ . Como já demonstrado, toda dinâmica interessante de  $F$  ocorre no intervalo unitário  $I = [0, 1]$ . Notemos que, quando  $\mu > 4$ , o valor máximo de  $F$ , dado por  $\frac{\mu}{4}$ , é maior que 1. Consequentemente, certos pontos de  $I$  deixam  $I$  depois de algumas interações de  $F$ . Denotemos o conjunto de tais pontos de  $A_0$ . Temos que  $A_0$  é um intervalo aberto centrado em  $\frac{1}{2}$ , pois  $F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$ , e tem a propriedade de que, se  $x \in A_0$ , então  $F(x) > 1$  e assim,  $(1 - F(x)) < 0$  enquanto que  $\mu F(x) > 0$ , garantindo que  $F^2(x) = \mu F(x)(1 - F(x)) < 0$ . Pela Proposição 3.2.2,  $F^n(x) \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, os pontos do conjunto  $A_0$  escapam de  $I$ . Todos os demais pontos de  $I$  permanecem em  $I$  após uma interação de  $F$ .

Seja  $A_1 = \{x \in I \mid F(x) \in A_0\}$ . Se  $x \in A_1$ , então  $F^2(x) > 1$  e, com isso,  $F^3(x) < 0$ . Novamente pela Proposição 3.2.2,  $F^n(x) \rightarrow -\infty$ . Indutivamente, seja  $A_n = \{x \in I \mid F^n(x) \in A_0\}$ . Como já justificado, se  $z \in A_n$ , então a órbita de  $z$  tende a  $-\infty$ . Com isso, resta apenas analisar o que acontece com os pontos que nunca escapam de  $I$ , isto é o conjunto de pontos que estão em

$$\Lambda = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Como  $A_0$  é um intervalo aberto centrado em  $\frac{1}{2}$ ,  $I - A_0$  consiste em dois intervalos fechados,  $I_0$  à esquerda e  $I_1$  à direita, como podemos ver na Figura 16. Observemos que  $F$  leva os intervalos  $I_0$  e  $I_1$  monotonicamente para  $I$ , sendo crescente em  $I_0$  e decrescente em  $I_1$ , pela definição de  $F$ . Como  $F(I_0) = F(I_1) = I$ , temos, pela continuidade da função  $F$ , que há um par de intervalos abertos, um em  $I_0$  e outro em  $I_1$  que são levados em  $A_0$  por  $F$ . Mais precisamente, a união desses intervalos é o conjunto  $A_1$ .

Agora consideremos o conjunto  $I - (A_0 \cup A_1)$ . Este conjunto consiste de 4 intervalos e  $F$  leva cada um monotonicamente em  $I_0$  ou  $I_1$ . Consequentemente,  $F^2$  leva cada um

– Figura 16 - Intervalos  $I_0$  e  $I_1$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

deles em  $I$ . Logo, cada um dos quatro intervalos em  $I - (A_0 \cup A_1)$  contém um subintervalo aberto que é levado por  $F$  em  $A_0$ . Portanto, os pontos nestes intervalos escapam de  $I$  na terceira iteração de  $F$ . O conjunto desses pontos chamamos de  $A_2$ . Observemos ainda que  $F^2$  está aumentando e diminuindo alternadamente nesses quatro intervalos, como mostrado na Figura 17.

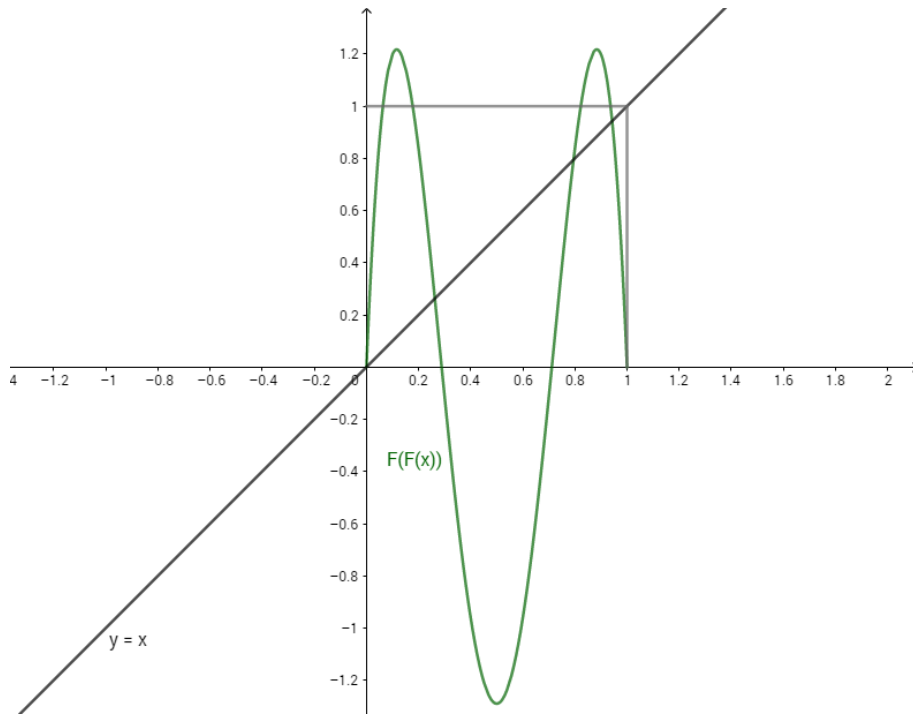
Continuando desta maneira, podemos observar dois fatos:

- $A_n$  consiste de  $2^n$  intervalos abertos disjuntos. Com isso,  $I - (A_0 \cup \dots \cup A_n)$  consiste de  $2^{n+1}$  intervalos fechados, já que  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .
- $F^{n+1}$  leva cada um desses intervalos monotonicamente em  $I$ . Na verdade, o gráfico de  $F^{n+1}$  tem exatamente  $2^n$  saliências em  $I$  e o gráfico de  $F^n$  cruza a identidade  $y = x$  pelo menos  $2^n$  vezes. Isto implica que  $F^n$  tem pelo menos  $2^n$  pontos fixos em  $I$ .

A construção de  $\Lambda$  é semelhante à construção do conjunto dos terços médios de Cantor:  $\Lambda$  é obtido removendo sucessivamente os intervalos abertos dos “meios” em um conjunto de intervalos fechados.

Pela definição 2.1.1, para conseguirmos garantir que  $\Lambda$  é de fato um Conjunto de Cantor precisamos adicionar uma hipótese sobre  $\mu$ . Vamos supor que  $\mu$  é grande o suficiente para que  $|F'(x)| > 1$  para todo  $x \in I_0 \cup I_1$ .  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  é suficiente. Logo, para

– Figura 17 - Gráfico da função  $F^2(x)$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

$\mu > 2 + \sqrt{5}$  existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda$ . Pela Regra da Cadeia, segue que  $|(F^n)(x)| > \lambda^n$ .

**Teorema 3.2.4.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.*

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que, pela construção de  $\Lambda$ , o conjunto é uma interseção de intervalos fechados próximos, logo  $\Lambda$  é fechado e não vazio.

Agora vamos mostrar que  $\Lambda$  não contém intervalos, ou seja, que  $\Lambda$  é totalmente desconexo. De fato, se  $\Lambda$  tivesse intervalos, existiria  $x, y \in \Lambda$ ,  $x < y$ , tal que o intervalo fechado  $[x, y] \subset \Lambda$ . Como já observado acima,  $|(F^n)(\alpha)| > \lambda^n$  para todo  $\alpha \in [x, y]$ . Escolhemos  $n$  tal que  $\lambda^n / (y - x) > 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|F^n(y) - F^n(x)| > |y - x| > 1$$

garantindo que pelo menos um,  $F^n(y)$  ou  $F^n(x)$ , não se encontra em  $I$ , o que é uma contradição. Logo,  $\Lambda$  é totalmente desconexo.

Por fim, falta mostrar que  $\Lambda$  é perfeito, ou seja, que cada ponto no conjunto é um ponto de acumulação ou ponto de fronteira de outros pontos do conjunto. Primeiramente, observemos que todo ponto de fronteira de  $A_k$  está em  $\Lambda$ : na verdade esses pontos são sempre levados para o ponto fixo 0 e assim eles permanecem em  $I$  sob iteração de  $F$ . Agora, se  $p \in \Lambda$  fosse isolado, todo ponto próximo deve deixar  $I$  sob iteração e assim tais pontos devem pertencer a algum  $A_k$ . Com isso, ou existe uma sequência de pontos limites de

$A_k$  convergindo para  $p$  ou então todas as vizinhanças de  $p$  são levados em  $I$  por alguma potência de  $F$ . No primeiro caso, temos que os pontos de fronteira de  $A_k$  são levados em  $0$  e estão em  $\Lambda$ . No outro caso, podemos assumir que  $F^n$  leva  $p$  para  $0$  e todos os outros pontos em uma vizinhança de  $p$  para o eixo negativo. Assim  $F^n$  tem um ponto máximo em  $p$  tal que  $(F^n)'(p) = 0$ . Pela Regra da Cadeia, temos  $F'(F^i(p)) = 0$  para algum  $i < n$ . Conseqüentemente,  $F^i(p) = \frac{1}{2}$ . Porém  $F^{i+1}(p) \in I$  e então  $F^n(p) \in I$ , contradizendo o fato de que  $F^n(p) = 0$ . Logo  $\Lambda$  é perfeito.

Portanto,  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor, como queríamos demonstrar. □

**Observação 3.2.5.** *O Teorema acima é verdadeiro para  $\mu > 4$ , mas a prova é mais delicada.*

Em síntese, compreendemos o comportamento bruto das órbitas de  $F_\mu$  quando  $\mu > 4$ . Ou um ponto tende a  $-\infty$  sob a iteração de  $F_\mu$  ou então toda a sua órbita está em  $\Lambda$ .

**Definição 3.2.6.** *Um conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  é **hiperbólico repulsor** (respectivamente **hiperbólico atrator**) para  $f$  se  $\Gamma$  é fechado, limitado, invariante sob  $f$  e existe um  $N > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| > 1$  (respectivamente  $|(f^n)'(x)| < 1$ ) para todo  $n \geq N$  e para todo  $x \in \Gamma$ .*

### 3.2.1 Dinâmica simbólica

Vamos fornecer um modelo para a estrutura dinâmica da aplicação quadrática no conjunto de Cantor  $\Lambda$  construindo um modelo que é completamente equivalente. Para que isso seja possível, vamos definir um “espaço” no qual esse modelo atuará, onde os pontos nesse espaço serão seqüências de  $0$  e  $1$ .

**Definição 3.2.7.** *Seja  $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0 \text{ ou } 1\}$ . Esse espaço é chamado de **espaço de seqüências** nos dois símbolos  $0$  e  $1$ .*

Mais genericamente, podemos considerar o espaço  $\Sigma_n$ , consistindo em seqüências infinitas de inteiros entre  $0$  e  $n - 1$ . Os elementos de  $\Sigma_2$  são seqüências infinitas de inteiros, como  $(000\dots)$  ou  $(0101\dots)$ .

Dados  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  e  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ , definimos

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Como  $|s_i - t_i|$  é igual a  $0$  ou  $1$ , esta série infinita é delimitada inferiormente por  $0$  e superiormente pela série geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

e, portanto, converge.

**Exemplo 3.2.8.** Se  $s = (0000 \dots)$ ,  $r = (1010 \dots)$  e  $t = (1111 \dots)$ , temos:

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d[s, r] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i|}{2^i} \\ &= 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Proposição 3.2.9.**  $d$  é uma métrica em  $\Sigma_2$ .

*Demonstração.* Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ ,  $r = (r_0 r_1 r_2 \dots)$  e  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$  seqüências em  $\Sigma_2$ . Vamos provar as quatro propriedades necessárias para garantir que  $d$  é uma métrica.

$$1. \quad d[s, s] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0}{2^i} = 0;$$

2. Suponhamos que  $s = r$ . Assim, existe pelo menos um  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $s_j = r_j$ . Com isso,  $|s_j - r_j| = 1$ , garantindo,

$$d[s, r] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i|}{2^i} > 0.$$

$$3. \quad d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} = d[t, s].$$

4. Pela desigualdade triangular, temos:

$$|s_i - t_i| = |(s_i - r_i) + (r_i - t_i)| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i| + |r_i - t_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{2^i} \\ &= d[s, r] + d[r, t]. \end{aligned}$$

Portanto,  $d$  é uma métrica.  $\square$

Logo,  $\Sigma_2$  munido da métrica  $d$  é um espaço métrico. E mais, a métrica  $d$  nos permite decidir quais subconjuntos de  $\Sigma_2$  são abertos e quais são fechados, além de dizer quais sequências estão próximas das outras.

**Proposição 3.2.10.** *Sejam  $s, t \in \Sigma_2$ . Suponhamos que  $s_i = t_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Então  $d[s, t] = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Por outro lado, se  $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$ , então  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n$ . Temos:

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

garantindo a prova da primeira afirmação.

Por outro lado, se  $s_j = t_j$  para todo  $j \leq n$ , temos:

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{|s_j - t_j|}{2^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Logo, se  $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$ , então  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n$ , como queríamos.  $\square$

Este resultado é importante pois podemos decidir rapidamente se duas sequências estão ou não próximas. Intuitivamente, este resultado nos diz que duas sequências em  $\Sigma_2$  são próximas desde que suas primeiras entradas coincidam.

**Definição 3.2.11.** *A aplicação **shift**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  é dado por:*

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots).$$

Em síntese, a aplicação *shift* “esquece” a primeira entrada da sequência e desloca todas as outras entradas para a esquerda. Claramente,  $\sigma$  é sobrejetora mas não é injetora.

**Proposição 3.2.12.**  *$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  é contínua.*

*Demonstração.* Sejam  $\epsilon > 0$  e  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ . Tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ . Seja  $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ .

Seja  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$  satisfazendo  $d[s, t] < \delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Pela Proposição 3.2.10, temos  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n + 1$ . Então a  $i$ -ésima coordenada de  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  coincidem para  $i \leq n$ . Portanto, novamente pela Proposição 3.2.10,  $d[\sigma(s), \sigma(t)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon$ , garantindo que  $\sigma$  é contínua.  $\square$

Veremos agora que a dinâmica de  $\sigma$  pode ser compreendida completamente. Por exemplo, pontos periódicos correspondem exatamente à sequências repetidas, isto é, sequências da forma  $s = (s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1} \dots)$ . Consequentemente há  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$  para  $\sigma$ , cada uma gerada por uma das sequências finitas de 0s e 1s de comprimento  $n$ . Assim, os pontos periódicos são igualmente abundantes e fáceis de reconhecer. Por exemplo, uma sequência da forma  $(s_0 \dots s_n 1111 \dots)$  é eventualmente fixa, enquanto qualquer sequência repetida é periódica para  $\sigma$ .

Ademais, os pontos periódicos de  $\sigma$  formam um conjunto denso em  $\Sigma_2$ . De fato, definimos  $\tau_n$  como uma sequência de pontos periódicos em  $\Sigma_2$ . Vamos mostrar que  $\tau_n$  converge para um ponto arbitrário  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ . Para isso, definimos  $\tau_n = (s_0 \dots s_n, s_0 \dots s_n, \dots)$ , ou seja,  $\tau_n$  é uma sequência de repetição cujas entradas coincidem com  $s$  até a  $n$ -ésima entrada. Pela Proposição 3.2.10,  $d[\tau_n, s] < \frac{1}{2^n}$ , garantindo que  $\tau_n \rightarrow s$ , como queríamos.

Além disso, nem todos os pontos de  $\Sigma_2$  são periódicos ou eventualmente periódicos. Qualquer sequência não repetida é não-periódica. E mais, as sequências não-periódicas superam as sequências periódicas em  $\Sigma_2$ . Além disso, existem órbitas não-periódicas em  $\Sigma_2$  que “se enrolam” densamente em torno de  $\Sigma_2$ , isto é, o fecho da órbita é o próprio  $\Sigma_2$ . Para justificar isso, consideremos

$$s = \left( \overbrace{01}^{\text{1º bloco}} / \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{2º bloco}} / \underbrace{000\ 001\ \dots}_{\text{3º bloco}} / \underbrace{\dots}_{\text{4º bloco}} \right),$$

onde  $s$  é construído listando sucessivamente todos os blocos de 0s e 1s de comprimento  $n$ , depois de comprimento  $n + 1$ , etc. Claramente, alguma iteração de  $\sigma$  aplicado a  $s$  produz uma sequência que coincide com qualquer sequência dada em um número arbitrariamente grande de lugares. Como já provada na Proposição 2.2.7, a aplicação  $\sigma$  é transitiva.

Em síntese:

**Proposição 3.2.13.** 1. A cardinalidade de  $Per_n(\sigma)$  é  $2^n$ .

2.  $Per(\sigma)$  é denso em  $\Sigma_2$ .

3. Existe uma órbita densa por  $\sigma$  em  $\Sigma_2$ .



Agora, vamos relacionar a função *shift*, discutida anteriormente, com a aplicação quadrática  $F_\mu = \mu x(1 - x)$  quando  $\mu$  é suficientemente grande. Já vimos que todos os pontos em  $\mathbb{R}$  tendem a  $\frac{1}{2}$  sob a iteração de  $F_\mu$  com exceção daqueles pontos do conjunto de Cantor  $\Lambda$ . Assim, para entender de fato a dinâmica de  $F_\mu$ , falta entender a dinâmica no conjunto  $\Lambda$ .

Lembremos, pela construção de  $\Lambda$ ,  $\Lambda = I_0 \cup I_1$ . Assim, se  $x \in \Lambda$ , então todos os pontos da órbita de  $x$  estão em um desses dois intervalos. Podemos então ter uma ideia aproximada do comportamento da órbita observando em qual desses intervalos as várias iterações de  $x$  caem.

**Definição 3.2.14.** O *itinerário* de  $x$  é a sequência  $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$ , onde  $s_j = 0$  se  $F_\mu^j(x) \in I_0$  e  $s_j = 1$  se  $F_\mu^j(x) \in I_1$ .

Assim, o itinerário de  $x$  é uma sequência infinita de 0's e 1's, ou seja,  $S(x)$  é um ponto do espaço de sequências  $\Sigma_2$ .

**Teorema 3.2.15.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que  $S$  é injetora. Sejam  $x, y \in \Lambda$  tal que  $S(x) = S(y)$ . Suponhamos que  $x \neq y$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_\mu^n(x)$  e  $F_\mu^n(y)$  ficam do mesmo lado de  $\frac{1}{2}$ . Isto implica que  $F_\mu$  é monótona no intervalo entre  $F_\mu^n(x)$  e  $F_\mu^n(y)$ . Consequentemente, todos os pontos neste intervalo permanecem em  $I_0 \cup I_1$ . Isto contradiz o fato de que  $\Lambda$  é totalmente desconexo. Logo,  $x = y$ , garantindo que  $S$  é injetora.

Para mostrarmos que  $S$  é sobrejetora, vamos introduzir a seguinte notação. Seja  $J \subset I$  um intervalo fechado. Seja

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in J\}.$$

Em particular,  $F_\mu^{-1}(J)$  denota a pré-imagem de  $J$ . Observemos que, se  $J \subset I$  é um intervalo fechado, então  $F_\mu^{-1}(J)$  consiste em dois subintervalos, um em  $I_0$  e o outro em  $I_1$ , como mostrado na Figura 18.

Seja  $s = s_0 s_1 s_2 \dots \in \Sigma_2$ . Vamos produzir  $x \in \Lambda$  com  $S(x) = s$ . Para isso, definimos

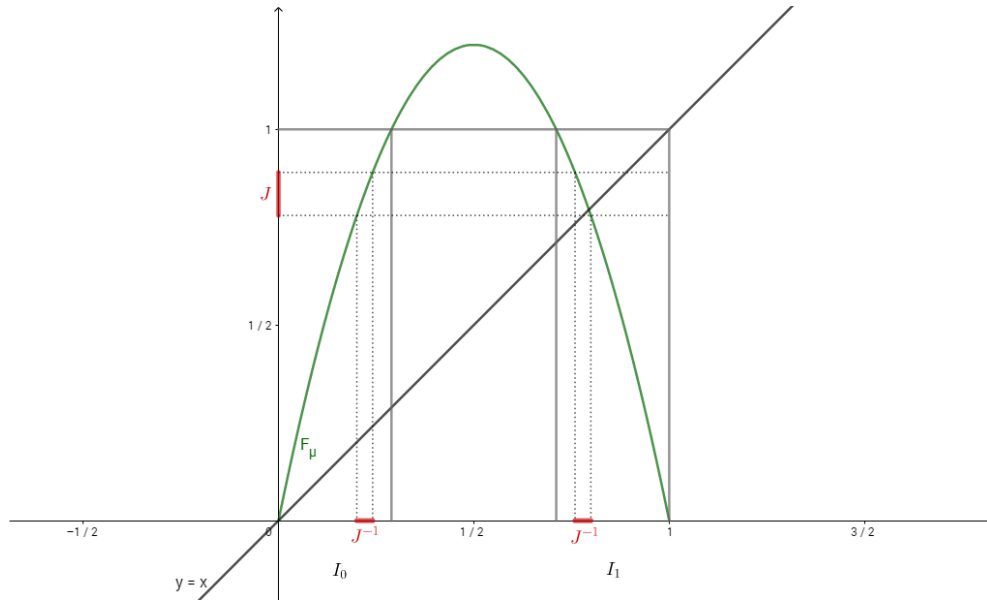
$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Afirmamos que os  $I_{s_0 \dots s_n}$  formam uma sequência ordenada de intervalos fechados não-vazios quando  $n \rightarrow \infty$ . Note que

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}).$$

Por indução, podemos assumir que  $I_{s_1 \dots s_n}$  é um subintervalo não-vazio, de modo que, pela observação anterior,  $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$  consiste de dois intervalos fechados, um em  $I_0$  e o outro em  $I_1$ . Portanto,  $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$  é um único intervalo fechado.

– Figura 18 - Pré-imagem de um intervalo fechado  $J \subset I$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Além disso, esses intervalos são encaixados, pois

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}.$$

Logo,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

é não-vazio. Note que se  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ , então  $x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}$ , e assim sucessivamente. Portanto,  $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$ , provando que  $S$  é sobrejetora.

Observemos que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  consiste em um único ponto. Isso decorre diretamente do fato de  $S$  ser injetora. Em particular, temos que o diâmetro de  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  tende para 0 quando  $n$  tende para  $\infty$ .

Finalmente, para provarmos a continuidade de  $S$ , escolhamos  $x \in \Lambda$  e suponhamos que  $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$ . Seja  $\epsilon > 0$ . Tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ . Consideremos os subintervalos fechados  $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$  definidos acima para todas as combinações possíveis  $t_0 t_1 \dots t_n$ . Esses intervalos fechados são todos disjuntos e  $\Lambda$  está contido na união desses intervalos. E mais, existem  $2^{n+1}$  desses subintervalos, e  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  é um deles. Então, nós podemos escolher  $\delta$  tal que  $|x - y| < \delta$  e  $y \in \Lambda$  implica que  $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ . Assim,  $S(y)$  coincide com  $S(x)$  nos primeiros  $n + 1$  termos. Logo, pela Proposição 3.2.10,

$$d[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon,$$

provando a continuidade de  $S$ . Além disso,  $S^{-1}$  também é contínua.

Portanto,  $S$  é um homeomorfismo, como queríamos.  $\square$

O Teorema acima nos garante que  $\Lambda$  e  $\Sigma_2$  são “iguais”. E mais,  $S$  fornece uma equivalência entre a dinâmica de  $F_\mu$  em  $\Lambda$  e  $\sigma$  em  $\Sigma_2$ .

**Teorema 3.2.16.**  $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \Lambda$ . Como já mencionado anteriormente, podemos definir  $x$  pela sequência de intervalos encaixados

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

determinados pelos itinerários  $S(x)$ . E mais,

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

de modo que  $F_\mu(I_{s_0 s_1 \dots s_n})$  pode ser escrito como

$$I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \dots s_n},$$

já que  $F_\mu(I_{s_0}) = I$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F_\mu(x) &= S \circ F_\mu \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n} \right) \\ &= S \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n} \right) \\ &= s_1 s_2 \dots \\ &= \sigma \circ S(x), \end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

Pela Definição 2.2.8,  $F_\mu$  em  $\Lambda$  é topologicamente conjugada a função *shift* em  $\Sigma_2$  e assim,  $F_\mu$  goza das propriedades provadas para *shift* anteriormente. Ou seja, garantimos as propriedades enunciadas no Teorema abaixo diretamente dessa propriedade.

**Teorema 3.2.17.** *Seja  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  com  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . Então*

1. *A cardinalidade de  $Per_n(F_\mu)$  é  $2^n$ .*
2.  *$Per(F_\mu)$  é denso em  $\Lambda$ .*
3.  *$F_\mu$  tem uma órbita densa em  $\Lambda$ .*

Este Teorema mostra o poder da dinâmica simbólica e da conjugação topológica. Por exemplo, é difícil encontrar os  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$  para  $F_\mu$ , mas a conjugação topológica nos garante a existência desses pontos, e mais, a dinâmica simbólica fornece uma medida aproximada da complexidade das órbitas em  $\Lambda$ . Portanto, podemos afirmar que a função *shift* é um modelo preciso para a função quadrática restrita ao conjunto  $\Lambda$ .

### 3.3 CAOS

Nesta seção apresentaremos um fenômeno que ainda é parcialmente compreendido no estudo de sistemas dinâmicos: o comportamento caótico das órbitas de um sistema dinâmico. Um exemplo de um comportamento caótico é o fenômeno que acabamos de perceber na Família Quadrática na seção anterior. Ressaltamos aqui que existem muitas definições possíveis de caos, desde a aleatoriedade na teoria ergódica até a abordagem topológica, que adotaremos neste texto.

Antes de definirmos de fato o que é o caos, precisamos de mais alguns conceitos que serão apresentados agora.

**Definição 3.3.1.** *Seja  $J$  um intervalo da reta.  $f : J \rightarrow J$  tem **dependência sensível das condições iniciais** se existe  $\delta > 0$  tal que, para qualquer  $x \in J$  e qualquer vizinhança  $U$  de  $x$ , existem  $y \in U$  e  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .*

No caso de um sistema dinâmico possuir dependência sensível das condições iniciais, nem todos os pontos próximos de  $x$  precisam eventualmente se afastar de  $x$  na iteração, mas deve haver pelo menos um desses pontos em cada vizinhança de  $x$ . Se uma aplicação possui dependência sensível das condições iniciais, então a dinâmica desafia a computação, ou seja, pequenos erros de cálculo que ocorrem por arredondamento podem ser aumentados na iteração. Em síntese, os resultados do cálculo numérico de uma órbita, por mais precisos que sejam, podem não ter nenhuma semelhança com a órbita real.

**Exemplo 3.3.2.** *A função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  possui dependência sensível das condições iniciais em  $\Lambda$ .*

*De fato, tomemos  $\delta$  menor que o diâmetro de  $A_0$ , onde  $A_0$  é o conjunto que está entre  $I_0$  e  $I_1$ , como já mencionado. Sejam  $x, y \in \Lambda$ . Se  $x = y$ , então  $S(x) = S(y)$ , pois  $S$  é injetora. Assim, os itinerários de  $x$  e  $y$  devem divergir em pelo menos um ponto, digamos que isso ocorre no  $n$ -ésimo termo. Mas isso significa que  $F_\mu^n(x)$  e  $F_\mu^n(y)$  estão em lados opostos de  $A_0$ , de modo que*

$$|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta,$$

*como queríamos.*

Como já mencionado, existem diversas definições possíveis para caos em um sistema dinâmico. Neste texto utilizaremos a seguinte definição, pois ela se aplica a um grande número de exemplos importantes e porque, em muitos casos, é de fácil verificação.

**Definição 3.3.3.** *Seja  $V$  um intervalo da reta. Dizemos que  $f : V \rightarrow V$  é **caótico** em  $V$  se:*

1.  *$f$  tem dependência sensível das condições iniciais;*
2.  *$f$  é topologicamente transitivo;*
3. *os pontos periódicos são densos em  $V$ .*

Em síntese, uma aplicação caótica possui três ingredientes: imprevisibilidade, indecomponibilidade e um elemento de regularidade.

**Exemplo 3.3.4.** *Seja  $S^1$  o círculo unitário.  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dado por  $f(\theta) = 2\theta$  é caótico.*

*Por definição, a distância angular entre dois pontos é duplicada na iteração de  $f$ . Logo,  $f$  é sensível as condições iniciais.*

*A transitividade topológica também segue dessa observação, pois qualquer pequeno arco em  $S^1$  é expandido por algum  $f^k$  para cobrir todo  $S^1$  e, em particular qualquer outro arco em  $S^1$ . Garantimos a transitividade por meio da Proposição 2.2.7.*

*Falta mostrar que o conjunto dos pontos periódicos é denso em  $S^1$ . Primeiramente, observemos que um ponto em  $S^1$  é determinado por um ângulo da forma  $\theta + 2k\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim, um ponto  $\theta \in S^1$  é periódico de período  $n$  se  $f^n(\theta) = \theta + 2k\pi$ . Como  $f^n(\theta) = 2^n\theta$ , temos que um ponto  $\theta \in S^1$  é periódico de período  $n$  se*

$$2^n\theta = \theta + 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}$$

*isto é, se, e somente se,*

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1} \text{ onde } 1 \leq k < 2^n.$$

*Então os pontos periódicos de período  $n$  para  $f$  são as  $(2^n - 1)$ -ésima raiz da unidade. Logo, o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $S^1$ .*

*Portanto,  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dado por  $f(\theta) = 2\theta$  é caótico.*

**Definição 3.3.5.** *Seja  $J$  um intervalo da reta. Uma aplicação  $f : J \rightarrow J$  é dita **expansiva** se existe  $\nu > 0$  tal que, para qualquer  $x, y \in J$ ,  $x \neq y$ , existe  $n$  tal que*

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \nu.$$

Observemos que a expansividade se difere da dependência sensível pois todos os pontos próximos sempre se afastam pelo menos  $\nu$ , enquanto na dependência sensível das condições iniciais deve haver pelo menos um desses pontos que se afastam de  $x$  em cada vizinhança de  $x$ .

**Exemplo 3.3.6.** A função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  é caótica em  $\Lambda$  quando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . Já provamos na seção anterior.

**Exemplo 3.3.7.**  $F_4(x) = 4x(1-x)$  é caótico no intervalo  $I = [0, 1]$ .

*Demonstração.* Seja  $g : S^1 \rightarrow S^1$  dado por  $g(\theta) = 2\theta$ . Definimos  $h_1 : S^1 \rightarrow [-1, 1]$  por  $h_1(\theta) = \cos(\theta)$ . Ou seja,  $h_1$  é apenas uma projeção de  $S^1$  para o eixo  $x$ . Seja  $q(x) = 2x^2 - 1$ . Temos:

$$\begin{aligned} h_1 \circ g(\theta) &= h_1(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) - 1 \\ &= q(\cos \theta) \\ &= q \circ h_1(\theta). \end{aligned}$$

garantindo que  $h_1$  conjugua  $g$  em  $q$ . Agora  $q$  também é topologicamente conjugado a  $F_4$ . De fato, se  $h_2(t) = \frac{1}{2}(1-t)$ , então

$$\begin{aligned} F_4 \circ h_2(t) &= F_4 \left( \frac{1}{2}(1-t) \right) \\ &= 4 \left[ \frac{1}{2}(1-t) \right] \left[ 1 - \frac{1}{2}(1-t) \right] \\ &= 1 - t^2 \\ &= \frac{1}{2}[1 - (2t^2 - 1)] \\ &= h_2(2t^2 - 1) \\ &= h_2 \circ q(t). \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ [-1, 1] & \xrightarrow{q} & [-1, 1] \\ h_2 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ [0, 1] & \xrightarrow{F_4} & [0, 1] \end{array}$$

garantindo que  $F_4$  é topologicamente transitivo, pois se  $U$  e  $V$  são dois abertos em  $I$ , podemos escolher arcos abertos  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  em  $S^1$  que se projetam em  $U$  e  $V$  sob  $h_2 \circ h_1$ . Visto que existe  $k$  tal que  $g^k(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \emptyset$ , temos que  $F_4^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Para provarmos a dependência sensível das condições iniciais, observemos que qualquer vizinhança  $U$  de  $x \in I$  “se eleva” para  $\hat{U}$  em  $S^1$ . Existe  $n$  tal que  $g^n(\hat{U})$  cobre  $S^1$ , então  $F_4^n(U)$  cobre  $I$  também. Logo, há pontos em  $U$  que se movem pelo menos  $\delta = \frac{1}{2}$  para longe de  $x$ .

Finalmente, a densidade dos pontos periódicos de  $g$  implica que existe um ponto  $g$ -periódico em  $U$ . A projeção deste ponto em  $U$  é  $F_4$ -periódico.

□

## 4 DINÂMICA EM DIMENSÕES SUPERIORES

Neste capítulo trabalharemos com sistemas dinâmicos em dimensões superiores. Introduziremos com exemplos mais simples envolvendo transformações lineares bidimensionais e tridimensionais, depois abordaremos o Teorema da variedade instável e estável e, por fim, o conceito de conjuntos hiperbólicos. A principal referência utilizada foi (6).

### 4.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesta seção abordaremos a dinâmica de transformações lineares nas dimensões dois e três para facilitar a compreensão dos passos futuros.

Primeiramente, assim como definimos um ponto periódico hiperbólico no Capítulo 3, podemos fazer algo análogo para transformações lineares, como segue.

**Definição 4.1.1.** *Uma transformação linear invertível é **hiperbólica** se nenhum dos autovalores da matriz associada à transformação tiver módulo 1.*

Vejamos alguns exemplos simples de transformações lineares hiperbólicas. Notemos que a origem sempre será um ponto fixo de uma transformação linear.

**Exemplo 4.1.2.** *Consideremos a transformação linear  $L_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:*

$$L_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x$$

Ou seja, se  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , então

$$L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.1)$$

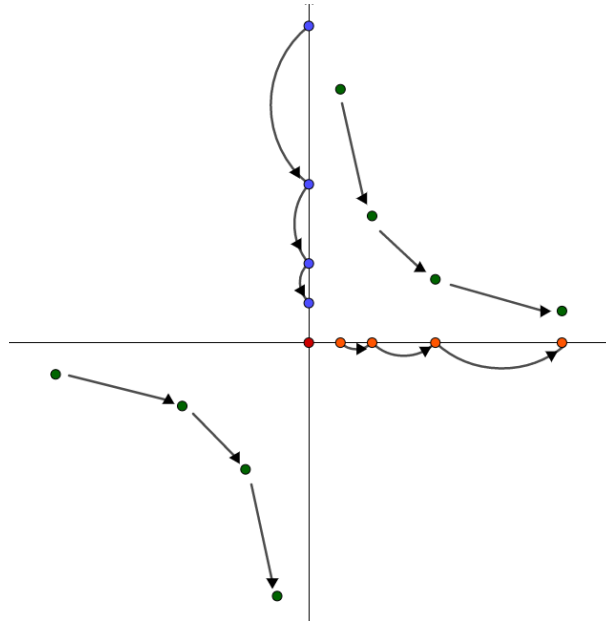
Assim, por 4.1, os pontos no eixo  $x$  se afastam da origem na iteração de  $L_1$ , enquanto os pontos no eixo  $y$  convergem para 0 na iteração. Os demais pontos tendem para 0 sob iteração de  $L_1$ . As iterações mencionadas acima estão representadas no retrato de fase (Figura 19).

Observemos que os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

associada à transformação linear  $L_1$ , são 2 e  $\frac{1}{2}$ , garantindo que a transformação linear  $L_1$  é hiperbólica.



– Figura 19 - Retrato de fase da transformação linear  $L_1$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

**Exemplo 4.1.3.** Seja  $L_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L_2(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x.$$

Neste caso, os pontos do eixo  $x$  também se afastam da origem, e os pontos do eixo  $y$  também se aproximam, mas desta vez os pontos saltam de um lado da origem para o outro sob a iteração de  $L_2$ . Os autovalores aqui são  $2$  e  $-\frac{1}{2}$ , garantindo que a transformação linear é hiperbólica.

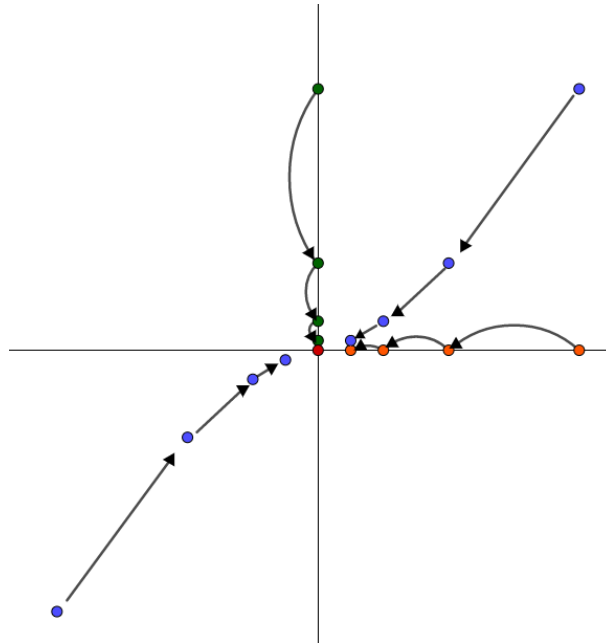
**Exemplo 4.1.4.** Seja  $L_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x.$$

Neste caso, todos os pontos tendem para a origem sob a iteração de  $L_3$ , porém, na direção  $y$  os pontos se aproximam mais rapidamente. O retrato de fase dessa transformação linear está representado na Figura 20. Observemos que os autovalores são  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$ , garantindo que a transformação linear  $L_3$  é hiperbólica.

**Exemplo 4.1.5.** Seja  $L_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L_4(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x.$$

– Figura 20 - Retrato de fase da transformação linear  $L_3$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Observemos que, dado  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

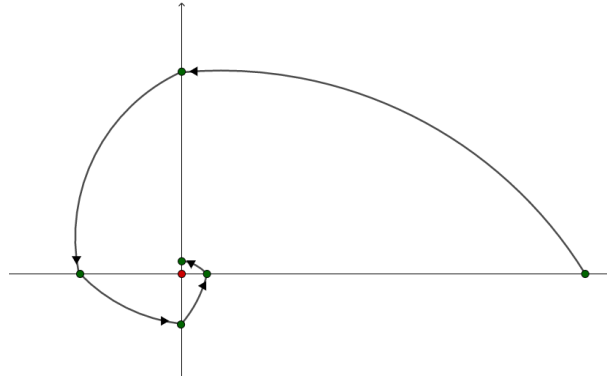
$$L_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Novamente, todos os pontos se movem em direção à origem sob a iteração de  $L_4$ . Em síntese, cada vetor em  $\mathbb{R}^2$  é contraído por um fator de  $\frac{1}{2}$  por cada iteração de  $L_4$ , porém não há linha invariável, o ângulo polar é aumentado em  $\frac{\pi}{2}$  em cada iteração de  $L_4$ , como representado na Figura 21. Conseqüentemente os pontos tendem a espiralar se aproximando da origem.

Neste caso, os autovalores são  $\frac{i}{2}$  e  $-\frac{i}{2}$ , garantindo que a transformação linear é hiperbólica.

**Exemplo 4.1.6.** Seja  $L_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$L_5(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x.$$

– Figura 21 - Retrato de fase da transformação linear  $L_4$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Observemos que, dado  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$L_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x \\ 2z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Neste exemplo, os planos  $x$  e  $y$  são invariantes e  $L_5$  se comporta neste plano exatamente como no exemplo anterior. Pontos fora do plano  $x, y$  tendem a  $\infty$  sob a iteração de  $L_5$ . Note que o eixo  $z$  é invariante e que  $L_5$  expande vetores do eixo  $z$  por um fator 2.

Observemos que os autovetores são  $\frac{i}{2}$ ,  $-\frac{i}{2}$  e 2, ambos diferente de 1 em módulo, garantindo que a transformação linear  $L_5$  é hiperbólica.

Note que sempre que uma transformação linear hiperbólica possui um autovalor de módulo menor que 1, então há uma direção correspondente na qual os pontos são atraídos em direção à origem. Além disso quando temos um par de autovalores conjugados complexos de valor absoluto menor que um, então há um conjunto bidimensional de pontos atraídos para a origem. Isto é um fato geral, como veremos na Proposição seguinte.

**Proposição 4.1.7.** *Sejam  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear e  $A$  a sua matriz associada. Suponhamos que  $A$  tem todos os autovalores menores que 1 em módulo. Então  $L^n(x) \rightarrow 0 = (0, 0, 0)$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .*

*Demonstração.* Sabemos que a matriz  $A$  associada à transformação linear  $L$  pode ser escrita em uma das quatro formas, como mencionado no Teorema 2.1.7 e na Proposição 2.1.9.

$$(i) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$(ii) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix};$$

$$(iii) \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix};$$

$$(iv) \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

onde todas as entradas são reais e  $\beta, \epsilon = 0$ .

Consideremos a função  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Afirmamos que existe  $0 < \nu < 1$  tal que, se  $\epsilon > 0$  é suficientemente pequeno, temos

$$V \leq L(x, y, z) \leq \nu V(x, y, z)$$

Vamos provar que a desigualdade vale para (iv). Para as demais a demonstração é análoga, porém mais simples.. Seja  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned} V \leq L(x, y, z) &= (\lambda x + \epsilon y)^2 + (\lambda y + \epsilon z)^2 + (\lambda z)^2 \\ &= \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + \epsilon^2(y^2 + z^2) + 2\lambda\epsilon(xy + yz) \\ &= (\lambda^2 + \epsilon^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda\epsilon(|xy| + |yz| + |xz|) \\ &= (\lambda^2 + \epsilon^2 + 4\lambda\epsilon/3)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (\lambda^2 + \epsilon^2 + 4\lambda\epsilon/3)V(x, y, z) \end{aligned}$$

visto que  $|xy| \leq x^2 + y^2$ . Consequentemente, escolhemos  $\epsilon$  suficientemente pequeno para que a desigualdade se mantenha com  $\nu = \lambda^2 + \epsilon^2 + 4\lambda\epsilon/3$ . Observemos que a igualdade é válida se, e somente se,  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . De fato, se  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ,  $L(x, y, z) = (0, 0, 0)$  e assim  $L \leq L(x) = 0 = \nu V(0, 0, 0)$ . Por outro lado, se  $V \leq L(x, y, z) = \nu V(x, y, z)$ , então

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + \epsilon^2(y^2 + z^2) + 2\lambda\epsilon(xy + yz) = \nu(x^2 + y^2 + z^2)$$

garantindo que  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned} V \leq L^2(x, y, z) &= V \leq (L \leq L(x, y, z)) \\ &= (V \leq L) \leq L(x, y, z) \\ &= \nu^2 V(x, y, z) \end{aligned}$$

Indutivamente, garantimos que  $V - L^n(x, y, z) - \nu^n V(x, y, z)$ . Como  $0 < \nu < 1$ ,  $\nu^n > 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, garantimos que  $V - L^n(x, y, z) > 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas  $V(x, y, z) = 0$  se  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Assim,  $L^n(x, y, z) > 0$ , como queríamos.

Para os demais casos, chegamos na mesma desigualdade  $V - L^n(x, y, z) - \nu^n V(x, y, z)$ , garantindo que  $L^n(x, y, z) > 0$ .

Portanto,  $L^n(x, y, z) > 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

□

**Definição 4.1.8.** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo.  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função de Lyapunov** para  $F$  centrada em  $p$  se:*

1.  $V(x) > 0$  para  $x \neq p$ .
2.  $V(p) = 0$ .
3.  $V \circ F(x) < V(x)$ , com igualdade somente se  $x = p$ .

**Observação 4.1.9.** 1. *A função  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  construída na demonstração anterior é uma função de Lyapunov.*

2.  *$p$  é necessariamente um ponto fixo para  $F$ , pois*

$$\begin{aligned} V \circ F(p) &= V(p) \\ V \circ F(p) &= 0 \quad F(p) = p. \end{aligned}$$

3. *Se  $V \circ F(x) < V(x)$  para  $x \neq p$ , então segue, como na prova anterior,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x$  em uma vizinhança de  $p$ .*

No caso em que todos os autovalores da matriz associada à transformação linear  $L$  forem maiores do que 1 em módulo, os argumentos acima podem ser alterados para produzir o seguinte resultado.

**Corolário 4.1.10.** *Sejam  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear e  $A$  a sua matriz associada. Suponhamos que  $A$  tem todos os autovalores maiores que 1 em módulo. Então  $L^{-n}(x) \rightarrow 0 = (0, 0, 0)$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .*

Agora, no caso em que temos a matriz associada com autovalores menores que 1 em módulo e autovalores com módulo maior que 1, temos o seguinte resultado.

**Proposição 4.1.11.** *Seja  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com matriz associada  $A$ . Suponhamos que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  com*

- $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ ;

- $|\lambda_3| > 1$ .

Então existe um plano  $W^s$  e uma linha  $W^u$  nos quais:

1. se  $x \in W^s$ , então  $L^n(x) \in W^s$  e  $|L^n(x)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ;
2. se  $x \in W^u$ , então  $L^n(x) \in W^u$  e  $|L^n(x)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow -\infty$ ;
3. se  $x \in W^u \cap W^s$ , então  $|L^n(x)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \pm \infty$ .

*Demonstração.* Sabemos que a matriz  $A$  associada à transformação linear  $L$  pode ser escrita como

$$(i) \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Em (i),  $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ . Em (ii),  $\lambda_1$  é positivo, se  $\lambda_1 = \lambda_2$ , ou 0. Aqui,  $W^s$  é o plano  $x, y$  e  $W^u$  é o eixo  $z$  em ambos os casos. Para garantirmos que se  $x \in W^s$ , então  $L^n(x) \in W^s$  e  $|L^n(x)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , basta aplicar a Proposição 4.1. Analogamente, para afirmarmos que se  $x \in W^u$ , então  $L^n(x) \in W^u$  e  $|L^n(x)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow -\infty$ , basta aplicar o Corolário 4.1.10 ao subespaço  $W^u$ .  $\square$

**Observação 4.1.12.** No caso em que dois autovalores são maiores que 1 em módulo e o outro é menor que 1 em módulo, o resultado acima pode ser adaptado para produzir um plano no qual os pontos tendem para a origem na iteração de  $L^{-1}$  e uma linha na qual os pontos tendem para a origem na iteração de  $L$ .

Os subespaços mencionados na Proposição 4.1.11 são denominados como segue.

**Definição 4.1.13.**  $W^s$  é chamado de **subespaço instável** de  $L$  e  $W^u$  é chamado de **subespaço estável**.

Observemos que nos casos trabalhados até aqui, os subespaços estáveis e instáveis são os planos coordenados e/ou eixos. Porém, isso não é verdade no geral, como podemos ver no próximo exemplo.

**Exemplo 4.1.14.** Consideremos a transformação linear

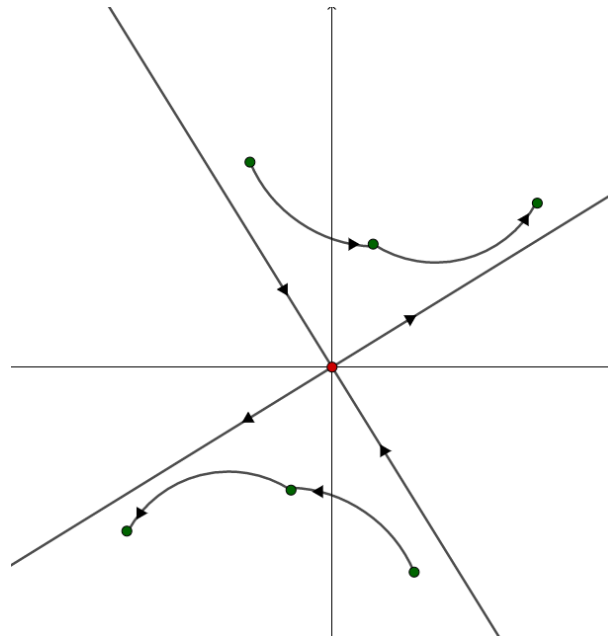
$$L(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Neste caso, os autovalores são  $\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$  e  $0 < \lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 1$ . Os autovetores correspondentes aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são, respectivamente,

$$v_1 = \left( x, \frac{\sqrt{5}-1}{2}x \right) \text{ e } v_2 = \left( x, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x \right).$$

O autovetor  $v_1$  gera o subespaço instável da transformação e o autovetor  $v_2$  o subespaço estável. Observemos o retrato de fase presente na Figura 22.

– Figura 22 - Retrato de fase da transformação linear  $L$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Além disso, quando não temos transformações hiperbólicas, as dinâmicas são diferentes daquelas vistas até aqui, como mostra os exemplos abaixo.

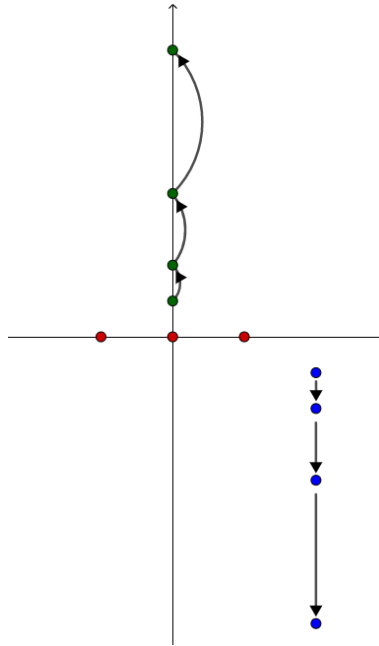
**Exemplo 4.1.15.** *Seja*

$$L_a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Neste caso os autovalores são 1 e 2, ou seja, a transformação não é hiperbólica. Além disso, dado  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$L_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, todos os pontos no eixo  $x$  são fixos e os pontos no eixo  $y$  são expandidos por um fator 2. Com isso, os demais pontos tendem para na coordenada  $y$  e são fixados na coordenada  $x$ . Observemos o retrato de fase na Figura 23.

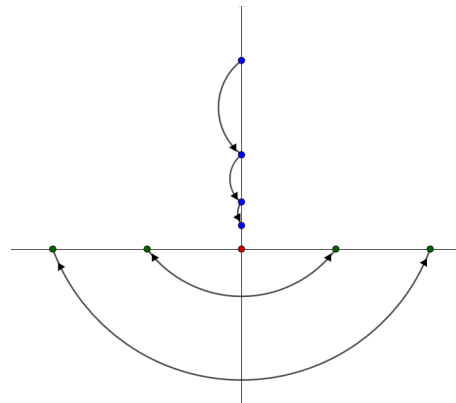
– Figura 23 - Retrato de fase da transformação linear  $L_a$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

**Exemplo 4.1.16.** *Seja*

$$L_b(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x.$$

*Aqui, os autovalores são  $-1$  e  $\frac{1}{2}$  e com isso, a transformação  $L_b$  não é hiperbólica. Além disso,  $(0,0)$  é o único ponto fixo e os pontos no eixo  $x$  tem período 2. Os demais pontos são contraídos em direção ao eixo  $x$ . Observemos a Figura 24.*

– Figura 24 - Retrato de fase da transformação linear  $L_b$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

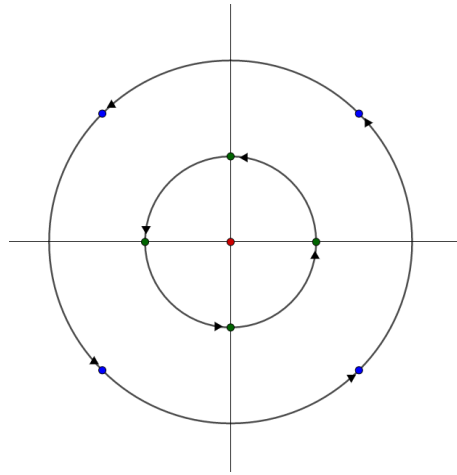


**Exemplo 4.1.17.** *Seja*

$$L_c(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Os autovalores aqui são  $\pm i$  e  $L_c$  rotaciona todos pontos, exceto o  $(0,0)$ , em um ângulo de  $90^\circ$ , garantindo que todos os pontos têm período 4. Observemos o retrato de fase na Figura 25.

– Figura 25 - Retrato de fase da transformação linear  $L_c$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Assim, quando as transformações não são hiperbólicas, não podemos garantir nada sobre a sua dinâmica sem analisar a lei de formação da mesma.

## 4.2 TEOREMA DA VARIEDADE INSTÁVEL E ESTÁVEL

Vimos na seção anterior que se uma transformação linear  $L$  é hiperbólica, conseguimos distinguir dois subespaços invariantes: o subespaço estável ( $W^s$ ), onde os pontos tendem para a origem sob iteração direta de  $L$  e o subespaço instável ( $W^u$ ), onde os pontos tendem para a origem sob iteração inversa da  $L$ . Nesta seção vamos mostrar que sistemas dinâmicos não lineares se comportam da mesma forma, pelo menos perto de certos pontos fixos e periódicos.

**Definição 4.2.1.** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo. Um ponto fixo  $p$  para  $F$  é chamado **hiperbólico** se  $J_F(p)$  não possui autovalores com módulo igual a 1, onde  $J_F(p)$  denota a matriz Jacobiana de  $F$  aplicada no ponto  $p$ . Analogamente, se  $p$  é periódico de período  $n$ , então  $p$  é hiperbólico se  $J_{F^n}(p)$  não possui autovalores de módulo igual a 1*

Observemos que  $F^n \circ F^j = F^j \circ F^n$ . Assim, dado um ponto periódico  $p$  de período  $n$ , temos

$$\begin{aligned} J_{F^n}(F^j(p)) \cdot J_{F^j}(p) &= J_{F^j}(F^n(p)) \cdot J_{F^n}(p) \\ J_{F^n}(F^j(p)) \cdot J_{F^j}(p) &= J_{F^j}(p) \cdot J_{F^n}(p) \\ (J_{F^j}(p))^{-1} \cdot J_{F^n}(F^j(p)) \cdot J_{F^j}(p) &= J_{F^n}(p) \end{aligned}$$

Logo, os autovalores da matriz Jacobiana de  $F^n$  em  $p$  são os mesmos em cada ponto da órbita.

Classificamos os pontos periódicos hiperbólicos como segue.

**Definição 4.2.2.** *Sejam  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $p$  um ponto periódico hiperbólico para  $F$  de período  $n$ .*

1.  $p$  é um **poço** ou um **ponto periódico atrator** se todos os autovalores de  $J_{F^n}(p)$  são menores que 1 em módulo.
2.  $p$  é uma **fonte** ou um **ponto periódico repulsor** se todos os autovalores de  $J_{F^n}(p)$  são maiores que 1 em módulo.
3.  $p$  é uma **sela** caso contrário, ou seja, se alguns dos autovalores de  $J_{F^n}(p)$  são menores que 1 em módulo e outros são maiores que 1 em módulo.

Apesar das definições acima serem para funções definidas em  $\mathbb{R}^n$  e para pontos periódicos de um período geral, os principais resultados que vamos estudar nesta seção serão provados para pontos fixos e funções definidas em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 4.2.3.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $F$  possui um ponto fixo atrator  $p$ . Então existe um conjunto aberto que contém  $p$  no qual todos os pontos tendem a  $p$  sob a iteração direta de  $F$ .*

*Demonstração.* Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x) = x + p$ . Observemos que ao conjugar  $F(x)$ , que possui ponto fixo  $p$ , com  $T(x)$ , podemos assumir  $p = \bar{0}$ , onde  $\bar{0} = (0, 0)$ , . Com isso, pelo Corolário 2.1.8 e pela Proposição 2.1.9, podemos escrever  $J_F(\bar{0})$  em uma das três formas:

1.  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , com  $|\lambda|, |\mu| < 1$ ;
2.  $\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , com  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno e  $\lambda < 1$ ;
3.  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ .

Assim, dado  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $v \neq \bar{0}$ , temos

$$|J_F(\bar{0})v| < |v|.$$

Então, existe uma vizinhança  $U$  de  $\bar{0}$  na qual a desigualdade vale para cada vetor unitário  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$  e assim, para todo  $v \neq 0$ , isto é,

$$|J_F(x)v| < |v|, \text{ se } x \in U.$$

Tomemos  $\delta > 0$  tal que se  $|p| < \delta$ , então  $p \in U$ . Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = tp$ . Pela definição de  $\gamma(t)$ ,  $F(\gamma(0)) = 0$ ,  $F(\gamma(1)) = F(p)$  e  $\gamma(t) \in U$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Logo, se  $p \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^1 (F'(\gamma(t))\gamma'(t)) dt \right| \\ &= \int_0^1 |(F'(\gamma(t))\gamma'(t))| dt \\ &= \int_0^1 |J_F(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\ &< \int_0^1 |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

para todo  $\gamma(t) \in U$ . Portanto,  $|F(p)| < |p|$ .

□

O maior conjunto que contém  $p$  e no qual todos os pontos tendem a  $p$  sob a iteração direta de  $F$  é chamado de **conjunto estável** ou **bacia de atração** de  $p$  e é denotado por  $W^s(p)$ .

Podemos obter um resultado análogo para um ponto fixo repulsor, como vemos no seguinte Corolário.

**Corolário 4.2.4.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $F$  possui um ponto fixo repulsor  $p$ . Então existe um conjunto aberto que contém  $p$  no qual todos os pontos tendem a  $p$  sob a iteração inversa de  $F$ .*

Neste caso, o maior dos conjuntos tal que isso acontece é chamado de **conjunto instável** de  $p$  e é denotado por  $W^u(p)$ .

Agora, falta estudar o que acontece para pontos de sela. É natural pensarmos que, dado  $p$  um ponto de sela, há um conjunto em que os pontos tendem para  $p$  sob iteração de  $F$  e outro em que os pontos se afastam de  $p$ . Porém, diferentemente do que ocorre em transformações lineares, não temos retas que desempenham esse papel, e sim curvas, que chamamos de variedades. A existência e a caracterização dessas variedades são os assuntos dos Teoremas da Variedade Estável e Instável, que veremos a seguir.

**Teorema 4.2.5** (Teorema da Variedade Instável). *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $F$  possui um ponto fixo de sela  $p$ . Então existe  $\epsilon > 0$  e uma curva suave, isto é, uma curva  $C^1$*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

1.  $\gamma(0) = p$ ;
2.  $\gamma'(t) \neq 0$ ;
3.  $\gamma'(0)$  é o autovetor instável para  $J_F(p)$ ;
4.  $\gamma$  é  $F^{-1}$ -invariante;
5.  $F^{-n}(\gamma(t)) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ ;
6. Se  $|F^{-n}(q) - p| < \epsilon$  para todo  $n \geq 0$ , então  $q = \gamma(t)$  para algum  $t$ .

A curva  $\gamma$  é chamada de **variedade instável local** em  $p$ .

- Observação 4.2.6.**
1. A curva  $\gamma$  é chamada de "variedade" pois, em geral,  $\gamma$  não é uma linha reta. Em síntese, a variedade instável local é uma curva que passa pelo ponto fixo  $p$  e os seus pontos são levados para  $p$  sob iteração de  $F^{-1}$ .
  2. Fazendo as adaptações necessárias, o Teorema da Variedade Instável é válido para conjuntos estáveis. Nesse caso, todos os pontos da variedade estável tendem para  $p$  sob iteração de  $F$ .
  3. Em dimensões maiores que 2 a curva  $\gamma$  é substituída por uma "superfície" parametrizada próxima de  $p$  por uma aplicação suave  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^k$ , tal que  $k$  é o número de autovalores maiores que 1 em módulo. Como já citado, a demonstração exige alguns detalhes técnicos adicionais que não serão abordados neste trabalho.

Além disso, as variedades instáveis e estáveis locais têm análogos globais definidos como segue:

**Definição 4.2.7.** *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico para  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja  $\gamma_u$  a variedade instável local para  $p$ . A **variedade instável** em  $p$ , denotada por  $W^u(p)$ , é dado por*

$$W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(\gamma_u).$$

Similarmente, se  $\gamma_s$  é a variedade estável local para  $p$ , então a **variedade estável** é definido por

$$W^s(p) = \bigcup_{n>0} F^{-n}(\gamma_s).$$

Antes de demonstrarmos o Teorema 4.2.5, vamos dar alguns exemplos onde podemos calcular explicitamente as variedades instável e estável, porém, esses exemplos são atípicos no estudo de sistemas dinâmicos. Observemos que o Teorema 4.2.5 garante a existência, mas não dá nenhuma fórmula para encontrar essas curvas.

**Exemplo 4.2.8.** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y - \frac{15}{8}x^3 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - \frac{15}{8} \cdot 0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $(0, 0)$  é um ponto fixo de  $F$ . Vamos calcular a matriz Jacobiana de  $F$  e aplicar no ponto  $(0, 0)$ .

$$J_F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{45}{8}x^2 & 2 \end{pmatrix} \quad J_F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores são  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_2 = 2$ ,  $(0, 0)$  é um ponto sela.

Além disso,

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix},$$

ou seja, o eixo  $y$  serve como variedade instável, pois os pontos tendem no eixo  $y$  tendem a se afastar de  $(0, 0)$ . Ademais,

$$F \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ 2t^3 - \frac{15}{8}t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \left(\frac{1}{2}t\right)^3 \end{pmatrix},$$

ou seja, a curva  $y = x^3$  serve como variedade estável, pois os pontos nessa curva tendem a se aproximar de  $(0, 0)$ .

Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, o eixo  $x$  é o subespaço estável de  $T$ , enquanto o eixo  $y$  é o subespaço instável de  $T$ . Observemos que, dado o difeomorfismo

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^3 - y \end{pmatrix},$$

conseguimos uma conjugação entre a função  $L$  e a transformação linear  $T$ . De fato,

$$\begin{aligned} F h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} x \\ x^3 - y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 2y \end{pmatrix} \\ &= h \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{pmatrix} \\ &= h T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que

$$h \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \quad e \quad h \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix},$$

ou seja,  $h$  leva os subespaços estáveis e instáveis de  $T$  nas variedades estáveis e instáveis de  $F$ .

**Exemplo 4.2.9.** Seja  $T$  o toro parametrizado por  $\theta_1, \theta_2$  no quadrado  $0 \leq |\theta_i| \leq 2\pi$  com lados identificados. Defina:

$$F \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 + \epsilon \sin \theta_1 \\ \theta_2 + \epsilon \sin \theta_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno,  $F$  é um difeomorfismo. Além disso,  $(0, \pi), (\pi, \pi), (\pi, 0)$  e  $(0, 0)$  são quatro pontos fixos de  $F$ . De fato,

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 + \epsilon \sin 0 \\ \pi + \epsilon \sin \pi \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi + \epsilon \sin \pi \\ \pi + \epsilon \sin \pi \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi + \epsilon \sin \pi \\ 0 + \epsilon \sin 0 \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 + \epsilon \sin 0 \\ 0 + \epsilon \sin 0 \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos verificar se esses pontos são hiperbólicos. A matriz Jacobiana de  $F$  é dada por

$$J_F \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cos \theta_1 & 0 \\ -\epsilon \sin \theta_2 \sin \theta_1 & 1 + \epsilon \cos \theta_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\bullet J_F \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cos 0 & 0 \\ -\epsilon \sin \pi \sin 0 & 1 + \epsilon \cos \pi \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon \end{pmatrix}.$$

Neste caso, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 + \epsilon > 1$  e  $\lambda_2 = 1 - \epsilon < 1$ , garantindo que o ponto  $(0, \pi)$  é um ponto de sela.

$$\bullet J_F \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cos \pi & 0 \\ -\epsilon \sin \pi \sin \pi & 1 + \epsilon \cos \pi \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon \end{pmatrix}.$$

Neste caso, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 - \epsilon < 1$  e  $\lambda_2 = 1 + \epsilon > 1$ , garantindo que o ponto  $(\pi, \pi)$  é um ponto de sela.

$$\bullet J_F \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cos \pi & 0 \\ -\epsilon \sin 0 \sin \pi & 1 + \epsilon \cos 0 \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon \end{pmatrix}.$$

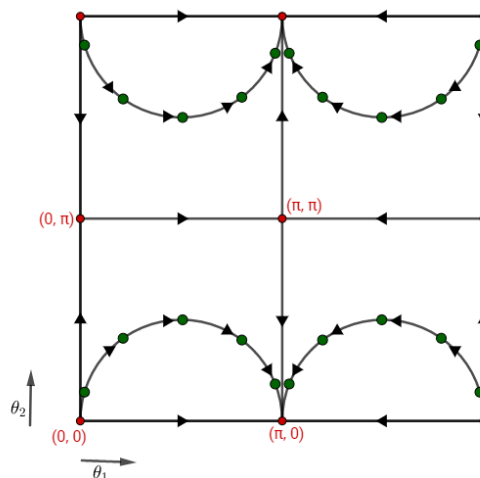
Neste caso, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 - \epsilon < 1$  e  $\lambda_2 = 1 - \epsilon < 1$ , garantindo que o ponto  $(\pi, 0)$  é um ponto atrator.

$$\bullet J_F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cos 0 & 0 \\ -\epsilon \sin 0 \sin 0 & 1 + \epsilon \cos 0 \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon \end{pmatrix}.$$

Neste caso, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 + \epsilon > 1$  e  $\lambda_2 = 1 + \epsilon > 1$ , garantindo que o ponto  $(\pi, 0)$  é um ponto repulsor.

Observemos o retrato de fase de  $F$  na Figura 26.

– Figura 26 - Retrato de fase da função  $F$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Note que a variedade instável de  $(0, \pi)$  coincide com a variedade estável de  $(\pi, \pi)$ . Além disso, a variedade estável de  $(0, \pi)$  emana do ponto fixo repulsor  $(0, 0)$ , enquanto a variedade instável de  $(\pi, \pi)$  fica na bacia de atração do ponto fixo atrator  $(\pi, 0)$ .

Antes de iniciarmos a prova, vamos fazer um processo semelhante, porém mais simples, envolvendo transformação linear. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear dada por  $T(x) = Ax$ , onde  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , com  $0 < \mu < 1 < \lambda$ , garantindo que a transformação  $T$  é hiperbólica. Pela seção anterior, sabemos que o conjunto instável de  $T$  é o eixo  $x$ , no qual os vetores são expandidos por um fator  $\lambda$ .

Consideremos o quadrado  $|x|, |y| \leq \epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$ . Seja  $\gamma(x) = (x, h(x))$  uma curva suave no plano que passa por  $(0, 0)$  e cuja reta tangente sempre tem inclinação entre  $\pm \frac{1}{2}$ , isto é,  $|h'(x)| < \frac{1}{2}$ . Aplicando  $T$  a curva  $\gamma$ , temos:

$$T(\gamma(x)) = T(x, h(x)) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu h(x) \end{pmatrix}.$$

Assim, o resultado é uma nova curva que tem inclinação mais próxima de 0, pois  $0 < \mu < 1$ . Se restringirmos essa nova curva para  $|x|, |y| \leq \epsilon$ , vemos que  $\gamma$  foi transformada em uma nova curva mais próxima do eixo  $x$ . Repetindo esse processo diversas vezes, conseguimos gerar curvas que se aproximam do conjunto instável, neste caso o eixo  $x$ , para  $|x| \leq \epsilon$ . O processo geométrico para demonstrar o Teorema da Variedade Instável será semelhante.

Para demonstrar o Teorema da Variedade Instável, vamos, em síntese, mostrar que o comportamento de uma aplicação não linear perto de um ponto fixo hiperbólico é semelhante ao de uma transformação linear perto do 0. Lembremos que o Teorema da Variedade Estável segue da aplicação do resultado para  $F^{-1}$ .

Vamos fazer algumas simplificações e observações para facilitar a demonstração. Depois demonstraremos três Lemas auxiliares e concluiremos a prova em seguida.

Primeiramente, conjugamos a função  $F$  com a translação  $T(x) = x + p$ . Neste caso, podemos assumir que o ponto fixo é 0 e supor que

$$J_F(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ onde } \lambda > 1 \text{ e } 0 < \mu < 1$$

através de uma conjugação de  $F$  com uma transformação linear que coloca  $J_F(0)$  na forma padrão. Além disso, nós podemos supor que  $\lambda > 2$  e  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ , pois, se para  $F$   $\lambda$  e  $\mu$  não satisfizerem essa condição, existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que para  $F^n$  as desigualdades valem, pois  $\lambda > 1$  e  $0 < \mu < 1$ . Depois que garantirmos a existência de um conjunto instável para  $F^n$ , vamos mostrar que essa curva também é um conjunto instável para  $F$ .



Denotamos um ponto  $q \in \mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(x_0, y_0)$  e  $F(q) = (x_1, y_1)$ . Analogamente,  $F^{-1}(x_0, y_0) = (x_{-1}, y_{-1})$ . Denotamos um vetor tangente em  $q$  por  $(\xi_0, \eta_0)_q$  e sua imagem sob a derivada de  $F$  por  $(\xi_1, \eta_1)_{F(q)}$ . Isto é,

$$J_F(q) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}_{F(q)}.$$

Em coordenadas,

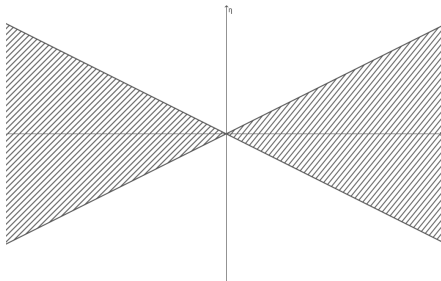
$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(q)\xi_0 + \frac{\partial F_1}{\partial y}(q)\eta_0 \\ \eta_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(q)\xi_0 + \frac{\partial F_2}{\partial y}(q)\eta_0. \end{aligned}$$

Definimos agora a noção de “feixe de setores” como

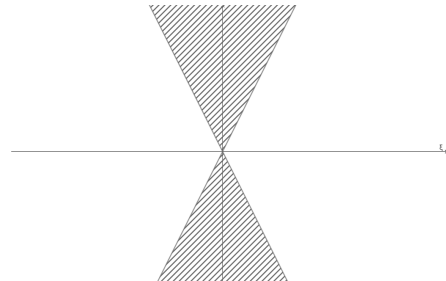
$$\begin{aligned} S^u(q) &= \left\{ (\xi_0, \eta_0)_q; |\eta_0| < \frac{1}{2}|\xi_0| \right\} \\ S^s(q) &= \left\{ (\xi_0, \eta_0)_q; |\xi_0| < \frac{1}{2}|\eta_0| \right\}. \end{aligned}$$

$S^u(q)$  e  $S^s(q)$  estão representados graficamente nas Figuras 27 e 28, respectivamente.

– Figura 27 -  $S^u(q)$



– Figura 28 -  $S^s(q)$



Fonte: Elaboradas pela autora. (2022).

Observemos que, dado  $v \in S^u(0)$ , então  $J_F(0)v \in S^u(0)$ , pois  $\lambda > 2$  e  $0 < \mu < 1$ , ou seja,  $J_F(0)$  preserva  $S^u(0)$ . E mais, se  $v = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$ , observemos que  $|\xi_1| = \lambda|\xi_0| > 2|\xi_0|$ . Similarmente,  $(J_F(0))^{-1}$  preserva  $S^s(0)$  e temos  $|\eta_{-1}| = \mu^{-1}|\eta_0| > 2|\eta_0|$ .

Como  $F$  é pelo menos  $C^1$ , a matriz Jacobiana  $J_F(x)$  varia continuamente com  $x$  e, com isso, deve existir uma vizinhança de 0 na qual as propriedades acima são válidas. Em síntese, existe  $\epsilon > 0$  tal que, se  $|x|, |y| < \epsilon$ , então:

1.  $J_F(x, y)$  preserva  $S^u(x, y)$  e  $(J_F)^{-1}(x, y)$  preserva  $S^s(x, y)$ .
2. Se  $(\xi_0, \eta_0) \in S^u(x, y)$ , então  $|\xi_1| > 2|\xi_0|$ .
3. Se  $(\xi_0, \eta_0) \in S^s(x, y)$ , então  $|\eta_{-1}| > 2|\eta_0|$ .

Vamos nos concentrar no quadrado  $B$  dado por  $|x|, |y| \leq \epsilon$ . Dizemos que a curva  $\gamma(x) = (x, h(x))$  é uma curva horizontal em  $B$  se

1.  $h$  está bem definida e é contínua para  $|x| \leq \epsilon$ ;
2.  $h(0) = 0$ ;
3. Para qualquer  $x_1, x_2$  com  $|x_i| \leq \epsilon$ ,  $|h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ .

Observemos que  $\gamma(x)$  é um gráfico de  $h(x)$  que está em  $B$ .

**Lema 4.2.10.** *Se  $\gamma(x) = (x, h(x))$  é uma curva horizontal, então a imagem  $F(\gamma(x))$  no quadrado  $B$  é uma curva horizontal.*

*Demonstração.* Primeiramente, dado  $(x_1, y_1) = F(\epsilon, h(\epsilon))$ , então  $x_1 \geq 2\epsilon$  pois  $|y_1| > 2|h(\epsilon)|$ . Similarmente, se  $(x_1, y_1) = F(-\epsilon, h(-\epsilon))$ , então  $x_1 \leq -2\epsilon$ . Além disso,  $F(0) = 0$ , garantindo que a imagem passa pela origem.

Suponha agora que  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0, y_0)$  estejam em  $F(x, h(x))$  e que

$$|y_0 - y_0| > \frac{1}{2}|x_0 - x_0|.$$

Tomemos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  de tal modo que  $F(\alpha_1, h(\alpha_1)) = (x_0, y_0)$  e  $F(\alpha_2, h(\alpha_2)) = (x_0, y_0)$ . Seja  $l$  o segmento de reta que conecta  $(\alpha_1, h(\alpha_1))$  e  $(\alpha_2, h(\alpha_2))$ . Observemos que o vetor tangente a  $l$  para cada ponto de  $l$  está nesse segmento. Agora,  $F$  leva  $l$  para uma curva suave conectando  $(x_0, y_0)$ . Pelo Teorema do Valor Médio (Teorema 2.1.3), existe um ponto nesta curva onde o vetor tangente tem inclinação maior que  $\frac{1}{2}$ . Isto contradiz o fato de que  $J_F$  preserva o “feixe de setores”  $S^u$ .

Portanto, a imagem  $F(\gamma(x))$  no quadrado  $B$  é uma curva horizontal, como queríamos.  $\square$

Com isso, para cada curva horizontal  $\gamma$  em  $B$ , definimos uma nova curva horizontal em  $B$  aplicando  $F$ , que denotaremos por  $\Phi_\gamma$ .  $\Phi$  é chamada de **transformada de gráfico**, já que leva o gráfico de  $h(x)$  no gráfico de outra função.

Seja  $H$  o conjunto de todas as curvas horizontais em  $B$ . Seja  $\Phi : H \rightarrow H$ . Observemos que um ponto fixo para  $\Phi$  é uma curva horizontal que é transformada em si mesma por  $\Phi$ . Essa curva é o candidato para variedade instável e chamaremos ela de  $\gamma_u$ .

Dadas as curvas horizontais  $\gamma_1(x) = (x, h_1(x))$  e  $\gamma_2(x) = (x, h_2(x))$ , definimos uma métrica  $d$  em  $H$  dada por:

$$d[\gamma_1, \gamma_2] = \sup_{|x| \leq \epsilon} |h_1(x) - h_2(x)|.$$

Vamos provar que  $d$  é de fato uma métrica. Observemos que, dadas as curvas  $\gamma_1(x) = (x, h_1(x))$  e  $\gamma_2(x) = (x, h_2(x))$ ,  $d[\gamma_1, \gamma_2] = 0$ , pois  $|h_1(x) - h_2(x)| = 0$  para todo  $|x| < \epsilon$ . Em particular, a igualdade somente é válida se  $|h_1(x) - h_2(x)| = 0$  para todo  $|x| < \epsilon$ , ou seja, se  $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ . Além disso,  $\sup_{|x| < \epsilon} |h_1(x) - h_2(x)| = \sup_{|x| < \epsilon} |h_2(x) - h_1(x)|$ , garantindo que  $d[\gamma_1, \gamma_2] = d[\gamma_2, \gamma_1]$ . Por fim, dada a curva  $\gamma_3(x) = (x, h_3(x))$ , temos:

$$\begin{aligned} d[\gamma_1, \gamma_3] &= \sup_{|x| < \epsilon} |h_1(x) - h_3(x)| \\ &= \sup_{|x| < \epsilon} |h_1(x) - h_2(x) + h_2(x) - h_3(x)| \\ &= \sup_{|x| < \epsilon} |h_1(x) - h_2(x)| + \sup_{|x| < \epsilon} |h_2(x) - h_3(x)| \\ &= d[\gamma_1, \gamma_2] + d[\gamma_2, \gamma_3]. \end{aligned}$$

Logo,  $d$  é uma métrica.

**Lema 4.2.11.** *Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são curvas horizontais, então*

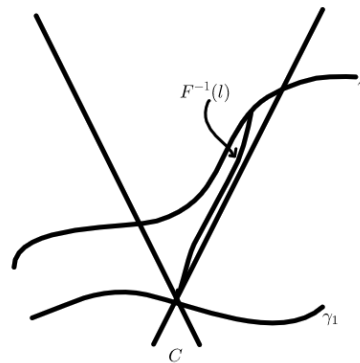
$$d[\Phi_{\gamma_1}, \Phi_{\gamma_2}] < \nu d[\gamma_1, \gamma_2]$$

para algum  $0 < \nu < 1$ .

*Demonstração.* Provaremos geometricamente. Suponhamos que  $|h_2(x) - h_1(x)| = |h_2(z) - h_1(z)|$  para algum  $x$  e para todo  $z$  tal que  $|z| < \epsilon$ .

Seja  $l = P(x)$  uma reta vertical que liga  $\Phi_{\gamma_1}(x)$  a  $\Phi_{\gamma_2}(x)$ . Consideremos a curva  $F^{-1}(l)$  que conecta os pontos  $\gamma_1(z_1) = (z_1, h_1(z_1))$  a  $\gamma_2(z_2) = (z_2, h_2(z_2))$ . Como a matriz Jacobiana preserva o feixe de setores  $S^s$  para todo ponto de  $l$ , segue que o vetor tangente a  $F^{-1}(l)$  sempre se encontra nesse setor. Como consequência,  $F^{-1}(l)$  está na região em forma de cones com vértices em  $(z_1, h_1(z_1))$  e com fronteiras com inclinação  $\pm 2$ , como representado na Figura 29.

– Figura 29 - Região em forma de cone



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Em particular, temos

$$\frac{|h_2(z_2) - h_1(z_1)|}{|z_2 - z_1|} \geq 2. \quad (4.2)$$

Além disso, como  $(J_F)^{-1}$  expande as componentes verticais desses vetores tangentes por um fator de pelo menos 2, temos

$$|h_2(z_2) - h_1(z_1)| \geq 2|\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)|. \quad (4.3)$$

Por suposição, temos

$$|h_2(z_1) - h_1(z_1)| \leq |\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)|. \quad (4.4)$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} |h_2(z_2) - h_2(z_1)| &= |h_2(z_2) - h_1(z_1) - (h_2(z_1) - h_1(z_1))| \\ &\geq |h_2(z_2) - h_1(z_1)| - |h_2(z_1) - h_1(z_1)| \end{aligned} \quad (4.5)$$

De 4.3 e 4.4, temos

$$\frac{1}{2}|h_2(z_2) - h_1(z_1)| \leq |\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)| \leq |h_2(z_1) - h_1(z_1)|,$$

garantindo que

$$-|h_2(z_1) - h_1(z_1)| \leq -\frac{1}{2}|h_2(z_2) - h_1(z_1)|. \quad (4.6)$$

Das expressões 4.3, 4.5 e 4.6, segue que

$$\begin{aligned} |h_2(z_2) - h_2(z_1)| &\geq |h_2(z_2) - h_1(z_1)| - |h_2(z_1) - h_1(z_1)| \\ &\geq |h_2(z_2) - h_1(z_1)| - \frac{1}{2}|h_2(z_2) - h_1(z_1)| \\ &\geq \frac{1}{2}|h_2(z_2) - h_1(z_1)| \\ &\geq |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1.3, existe  $z$  tal que  $|h_2(z)| \leq 1$ . Contradição com o fato de que  $\gamma_2$  é uma curva horizontal. Logo,  $|\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)| < |h_2(z) - h_1(z)|$ , garantindo que existe  $0 < \nu < 1$  tal que  $d[\Phi_{\gamma_1}, \Phi_{\gamma_2}] < \nu d[\gamma_1, \gamma_2]$ .  $\square$

Segue que  $\Phi$  é uma contração para  $H$ . Pode-se provar que  $H$  é um subconjunto fechado do conjunto de todas as aplicações contínuas do intervalo  $|x| \leq \epsilon$  e, além disso, que  $H$  é um espaço métrico completo. Consequentemente,  $\Phi$  tem um único ponto fixo em  $H$ .

Seja  $\gamma_u = (x, h_u(x))$  a curva horizontal fixada por  $\Phi$ . Como é uma curva horizontal,  $h_u(0) = 0$ , garantindo que a curva passa pela origem. Além disso, se  $(x_0, y_0)$  é um ponto em  $\gamma_u$  com  $x_0 = 0$ , temos que  $|x_1| > |x_0|$ , pois  $\lambda > 2$ . Portanto, os pontos em  $\gamma_u$  deixam o quadrado  $B$  sob iteração de  $F$  ou então são levados em  $\gamma_u$  para longe de 0. Logo,  $\gamma_u \subset W^u(0)$ .

**Lema 4.2.12.** *Seja  $(x_0, y_0) \in B$  e suponha que  $(x_0, y_0)$  não está em  $\gamma_u$ . Então existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $F^{-n}(x_0, y_0)$  não está em  $B$ .*

*Demonstração.* Os argumentos utilizados nessa demonstração são análogos aos utilizados na demonstração do Lema 4.2.11. Neste caso, definimos uma reta vertical  $l$  que conecta  $(x_0, y_0)$  a um único ponto em  $\gamma_u$  e aplicamos o argumento do cone, garantindo que a altura vertical de  $F^{-1}(l)$  deve ser dobrada. Continuando esse processo, o resultado segue.  $\square$

Logo, para todo ponto  $(x_0, y_0)$  que está no quadrado  $B$  mas não está na curva  $\gamma_u$ , os pontos tendem a sair de  $B$  para alguma iteração passada de  $F$ . Portanto,  $\gamma_u$  é de fato o conjunto instável para  $F$ .

A prova de que  $\gamma_u$  é uma curva contínua em  $B$  pode ser encontrada na referência (6), capítulo 2, seção 2.6.

### 4.3 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS

Na seção anterior trabalhamos com a noção de ponto periódico hiperbólico. Nesta seção generalizaremos esse conceito para conjuntos hiperbólicos, além de trazer algumas definições importantes para o estudo de sistemas dinâmicos em dimensões superiores. Apesar desse estudo poder ser estendido para dimensões maiores, vamos nos restringir ao estudo de sistemas dinâmicos definidos em  $\mathbb{R}^2$ . A principal referência utilizada foi (6).

**Definição 4.3.1.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo. Um ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  é **recorrente por cadeia** para  $F$  se, para algum  $\epsilon > 0$ , existem pontos  $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = x$  e  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  tais que*

$$|F^{n_i}(x_{i-1}) - x_i| < \epsilon$$

para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

A sequência  $x_0, \dots, x_k$  é chamada de  **$\epsilon$ -cadeia** ou **pseudo-órbita**.

Observemos que uma pseudo-órbita é quase uma órbita, pois ela permite pequenos saltos ou erros nas iterações  $n_1, n_1 + n_2$ , etc. Um ponto  $x$  é recorrente por cadeia se podemos encontrar uma  $\epsilon$ -cadeia com pequenos saltos arbitrários. Definimos o conjunto de pontos que são recorrentes em cadeia de  $F$  por  $\Lambda = \Lambda(F)$ .  $\Lambda$  é chamado de **conjunto recorrente em cadeia**.

**Exemplo 4.3.2.** *Todo ponto periódico é recorrente em cadeia.*

**Definição 4.3.3.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo. Um ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  é **recorrente** para  $F$  se, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $n > 0$  tal que*

$$|F^n(x) - x| < \epsilon.$$

Observemos que a definição de recorrente em cadeia é mais fraca que a definição de recorrente, pois, um ponto recorrente é uma cadeia recorrente com uma  $\epsilon$ -cadeia formada apenas pelo  $x$ . Vamos mostrar agora que existem casos em que um ponto é recorrente em cadeia, mas não é recorrente. Seja  $p$  um ponto periódico hiperbólico e  $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ . Vamos mostrar que  $p$  é recorrente em cadeia, mas não é recorrente. De fato, tanto a órbita futura quanto a órbita passada de  $q$  tendem para  $p$ , então a órbita de  $q$  nunca se acumula sobre si mesma, garantindo que o ponto  $q$  não é recorrente. Porém, é recorrente em cadeia. Pontos como  $q$  recebem uma nomenclatura especial, como vemos a seguir.

**Definição 4.3.4.** Chamamos um ponto  $q$  de **ponto homoclínico** se  $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ , onde  $p$  é um ponto periódico hiperbólico. Se  $q$  tende para pontos de sela distintos, então  $q$  é chamado de **ponto heteroclínico**.

**Definição 4.3.5.** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja  $p_1$  e  $p_2$  dois pontos de sela de  $F$ .  $W^s(p_1)$  e  $W^u(p_2)$  são chamados transversais se

1.  $W^s(p_1) \cap W^u(p_2) = \emptyset$ , ou
2. existe  $q \in W^s(p_1) \cap W^u(p_2)$ , caso em que as tangentes a  $W^s(p_1)$  e  $W^u(p_2)$  em  $q$  não são colineares.

**Exemplo 4.3.6.** Considere o difeomorfismo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$F(x, y) = \left( \frac{1}{2}(x + x^3), y \left( \frac{2}{1 + 2x^2} \right) \right).$$

A matriz Jacobiana de  $F$  é dada por:

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + 3x^2) & 0 \\ -8xy & \frac{2}{1 + 2x^2} \end{pmatrix}.$$

E mais,

- $F(1, 0) = \left( \frac{1}{2}(1 + 1^3), 0 \left( \frac{2}{1 + 2 \cdot 1^2} \right) \right) = (1, 0)$ ;
- $F(-1, 0) = \left( \frac{1}{2}((-1) + (-1)^3), 0 \left( \frac{2}{1 + 2 \cdot (-1)^2} \right) \right) = (-1, 0)$ ;
- $F(0, 0) = \left( \frac{1}{2}(0 + 0^3), 0 \left( \frac{2}{1 + 2 \cdot 0^2} \right) \right) = (0, 0)$ ;

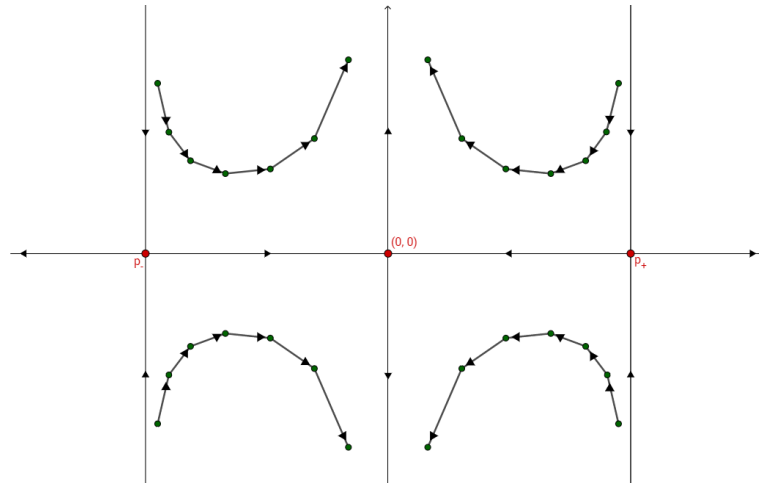
garantindo que  $p_+ = (1, 0)$ ,  $p_- = (-1, 0)$  e  $0 = (0, 0)$  são pontos fixos de  $F$ . Aplicando esses pontos na matriz Jacobiana de  $F$  já calculada, temos:

- $J_F(1, 0) = J_F(-1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ;

$$\bullet J_F(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, os três pontos,  $p_+$ ,  $p_-$  e  $0$  são pontos de sela de  $F$ . O retrato de fase é dado como na Figura 30.

– Figura 30 - Retrato de fase do difeomorfismo  $F$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Pelo retrato de fase, podemos observar que uma das partes de  $W^u(p_{\pm})$  coincide com  $W^s(0)$ . Conseguimos fazer uma perturbação, como vamos mostrar a seguir.

Seja  $\phi$  uma função “bump” definida no intervalo fechado  $[0, 1]$  da seguinte forma:  $\phi(x) = 0$  se  $x \in (0, 1)$  e  $\phi(x) > 0$  se  $x \in (0, 1)$ . Consideremos o difeomorfismo  $G : [-1, 1] \times \mathbb{R}^2$  dado por

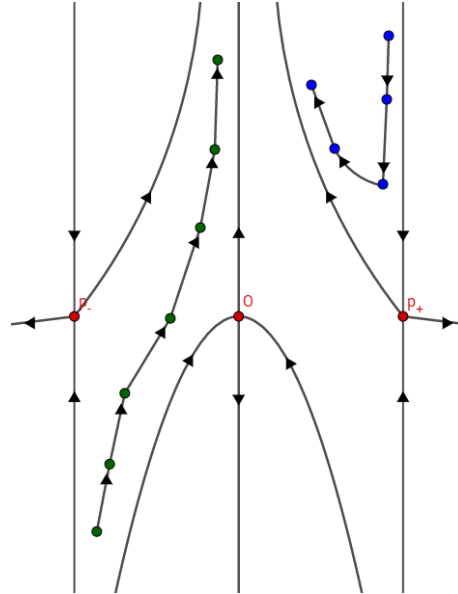
$$G(x, y) = (x, y + \phi(|x|)).$$

Note que  $G$  move os pontos da faixa  $0 < |x| < 1$  em uma direção vertical. De forma elementar,  $G$  dá um pequeno “empurrão” na direção do eixo  $y$  positivo.

Agora, definimos a aplicação perturbação  $\hat{F} = G \circ F$ . Seja  $S = \{(x, y); 0 < x < 1 \text{ e } y = 0\}$ . Para a aplicação não perturbada, a fronteira inferior de  $S$ , dada pelo segmento  $(x, y); 0 < x < 1 \text{ e } y = 0$  é preservada, porém isso não é verdade para  $\hat{F}$ , pois todos os pontos na fronteira de  $S$  são levados para o interior de  $S$ , devido a função “bump”  $\phi$ . Além disso, se  $0 < x < \frac{1}{2}$ , então  $y_1 = y + \phi(x) > y$ . Consequentemente, os pontos nesta região tendem para o interior de  $S$  sob iteração de  $\hat{F}$ . segue que a variedade estável de  $0$  não entra na faixa  $S$ . De forma análoga, percebemos que a variedade instável de  $p_+$  para  $\hat{F}$  está inteiramente em  $S$  e portanto a conexão entre a variedade estável de  $0$  e a variedade instável de  $p_+$  foi interrompida pela perturbação. Um fenômeno semelhante ocorre na faixa

$S = \{(x, y); -1 < x < 0 \text{ e } y = 0\}$ . Observemos o retrato de fase dessa nova aplicação presente na Figura 31.

– Figura 31 - Retrato de fase do difeomorfismo  $\hat{F}$



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Observemos que  $W^u(p_{\pm})$  e  $W^s(0)$  não são transversais e, neste caso, uma pequena perturbação no sistema já alterou a dinâmica da função  $F$ . Assim, dizemos que  $F$  não é estruturalmente estável. Uma classe importante de aplicações que possuem esta propriedade são as aplicações de Morse-Smale, que definiremos agora.

**Definição 4.3.7.** Um difeomorfismo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamado de **Morse-Smale** se

1. O conjunto das cadeias recorrentes é um conjunto finito de pontos periódicos, todos hiperbólicos.
2. Todas as variedades estáveis e instáveis de pontos de sela são transversais.

Antes de definirmos o que é um conjunto hiperbólico, lembremos a situação de um ponto fixo hiperbólico. Basicamente, tínhamos uma taxa de expansão ou contração, dada pelos autovalores da matriz Jacobiana naquele ponto e uma direção de expansão ou contração dada pelo autovetor associado ao autovalor encontrado. Porém, em alguns casos, não apenas os pontos periódicos admitem comportamentos estáveis ou instáveis, como veremos em alguns exemplos posteriormente. Assim, precisamos de um conceito mais abrangente, o de conjunto hiperbólico. Para simplificar, limitaremos a definição à difeomorfismos no plano.



**Definição 4.3.8.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo. Um conjunto  $\Lambda$  compacto e invariante por  $F$  é chamado de **conjunto hiperbólico** para  $F$  se*

- *Para cada ponto  $p \in \Lambda$ , existe um par de subespaços  $E^s(p)$  e  $E^u(p)$  no plano tangente em  $p$  que são preservadas por  $J_F(p)$ .*
- *$E^s(p)$  e  $E^u(p)$  variam continuamente com  $p$ .*
- *Existe uma constante  $\lambda > 1$  tal que  $|J_F(p)(v)| \leq \lambda|v|$  para todo  $v \in E^u(p)$  e  $|J_F^{-1}(p)(v)| \geq \lambda|v|$  para todo  $v \in E^s(p)$ .*

$E^s(p)$  é chamado de **subespaço estável** de  $p$  e  $E^u(p)$  é chamado de **subespaço instável** de  $p$ .

Como no caso de um ponto fixo hiperbólico a dinâmica perto de um conjunto hiperbólico é direta. O Teorema a seguir dá a existência de variedades locais estáveis e instáveis para conjunto hiperbólicos.

**Teorema 4.3.9.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo. Seja  $\Lambda$  um conjunto fechado invariante, hiperbólico e contendo uma região limitada de  $\mathbb{R}^2$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $p \in \Lambda$ , existe uma curva suave  $\gamma_p : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo:*

1.  $\gamma_p(0) = p$ ;
2.  $\gamma_p(t) \in E^u(p)$ ;
3.  $\gamma_p(0)$  encontra-se no subespaço instável  $E^u(p)$ ;
4.  $F^{-1}(\gamma_p) \subset \gamma_{F^{-1}(p)}$ ;
5.  $|F^{-n}(\gamma_p(t)) - F^{-n}(p)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Além disso, as curvas  $\gamma_p$  dependem continuamente de  $F$ .

**Observação 4.3.10.** 1. *Assim, a  $\gamma_p$  se comporta exatamente como nas variedades instável local de ponto fixo, onde o resultado foi apresentado na seção anterior. A prova desse Teorema também é semelhante, apesar de exigir maiores detalhes técnicos, e por isso será omitida.*

2. *Uma afirmação similar vale para as variedades estáveis.*

Notemos que a maioria dos exemplos tratados até aqui, verificar a hiperbolicidade foi fácil, pois tínhamos a linearidade em pelo menos uma das direções, ou seja, conseguimos verificar explicitamente as retas estáveis e instáveis. Porém a maioria dos sistemas dinâmicos não lineares não são dados de uma maneira tão simples. Nesses casos, verificar

a hiperbolicidade é algo mais complicado. Para facilitar, as ideias a seguir fornecem um critério para hiperbolicidade que muitas vezes é útil.

Para um vetor  $v \neq 0$  em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , definimos o  $\alpha$ -cone ao redor de  $v$  como o conjunto de todos os vetores que formam um ângulo menor ou igual a  $\alpha$  com  $v$  ou  $-v$ . O vetor  $v$  é chamado de núcleo do  $\alpha$ -cone.

**Definição 4.3.11.** *Seja  $U$  um conjunto aberto. Um **campo de cones**  $C(p)$  em  $U$  é a atribuição de um  $\alpha$ -cone para cada ponto  $p \in U$  tal que*

1.  $\alpha = \alpha(p)$  varia continuamente com  $p$ ;
2. o vetor núcleo  $v_p$  varia continuamente com  $p$ .

Visualizamos um campo de cones como uma coleção de vetores tangentes em cada ponto  $p \in U$ .

Na prova do Teorema da Variedade Instável (Teorema 4.2.5), identificamos dois campos de cones que foram preservados ou expandidos por  $J_F$  ou  $(J_F)^{-1}$ . O mesmo ocorre em geral.

**Teorema 4.3.12.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja  $\Lambda$  um subconjunto fechado e  $F$ -invariante contendo uma região limitada de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $\Lambda$  e suponha que existem campos de cones  $C^s$  e  $C^u$  mutuamente disjuntos para os quais temos:*

1.  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ ;
2.  $J_F(C^u(p)) \subset C^u(F(p))$  e  $J_{F^{-1}}(C^s(p)) \subset C^s(F^{-1}(p))$ ;
3. Se  $v \in C^u(p)$ , então  $|J_{F^{-1}}(p)v| \leq 2|v|$ ;
4. Se  $w \in C^s(p)$ , então  $|J_{F^{-1}}(p)w| \leq 2|w|$ .

Então  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico e  $E^u \subset C^u$  e  $E^s \subset C^s$ .

**Observação 4.3.13.** *A condição de cone é relativamente fácil de verificar em um dado sistema dinâmico não linear pois depende de apenas uma iteração da aplicação.*

## 5 A FERRADURA DE SMALE

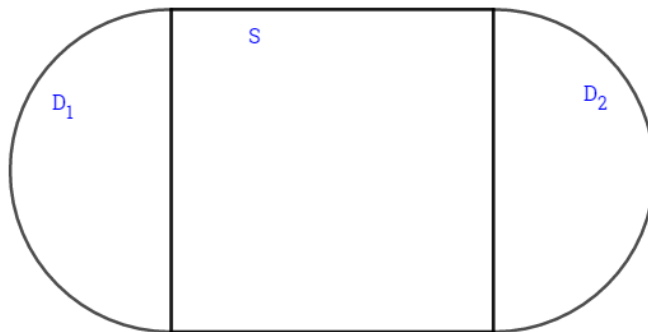
Neste capítulo vamos abordar o principal tema deste trabalho: a Ferradura de Smale. A principal referência é o livro (6).

### 5.1 A FERRADURA

Nesta seção, vamos estudar um exemplo clássico na teoria de sistemas dinâmicos, a Ferradura de Smale. Porém, diferentemente dos exemplos vistos até aqui, esse exemplo é definido geometricamente e não algebricamente. Vamos identificar a presença de conjuntos estáveis e instáveis, além de pontos homoclínicos, que definimos no capítulo anterior. A importância desse exemplo vem do fato de que esse difeomorfismo foi o primeiro exemplo encontrado que possui infinitos pontos periódicos, mas ainda sim é estruturalmente estável.

Para definirmos essa aplicação, primeiramente, consideremos um região  $D$  em um formato de “estádio”, ou seja, formada por um quadrado unitário central  $S$  e dois semicírculos  $D_1$  e  $D_2$  em cada extremidade, como ilustrado na Figura 32.

– Figura 32 - Representação da região “ $D$ ”



Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Definiremos a aplicação  $F : D \rightarrow D$  da seguinte maneira:

- Primeiramente, contraímos linearmente  $S$  na direção vertical por um fator  $\delta < \frac{1}{2}$  e expandimos na direção horizontal por um fator  $\frac{1}{\delta}$ . Desse modo,  $S$  será longo e fino.
- Em seguida, colocaremos  $S$  dentro de  $D$  novamente em uma figura no formato de ferradura.
- As regiões semicirculares  $D_1$  e  $D_2$  são contraídas e mapeadas dentro de  $D_1$ .

A figura que representa a ação de  $F$  em  $D$  é a Figura 33.

– Figura 33 - Ação de  $F$  em  $D$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Observemos que  $F(D) \subset D$  e que  $F$  é injetora, por construção. Entretanto,  $F(D) = D$ , garantindo que  $F$  não é sobrejetora. Com isso,  $F^{-1}$  não está globalmente definida.

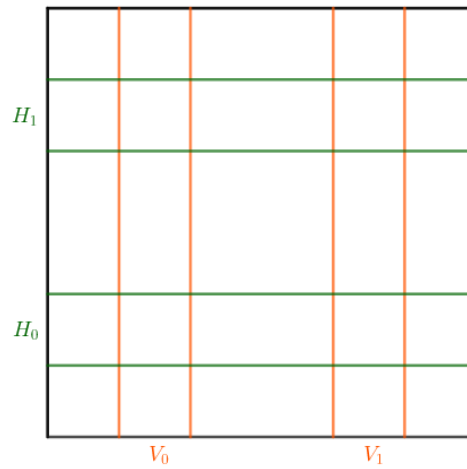
Sejam  $H_0$  e  $H_1$  as duas componentes horizontais de  $F(S) \subset S$ , que serão retângulos. Olhamos para a pré-imagem em  $S$ . Nesse caso, teremos duas componentes verticais, que chamaremos de  $V_0$  e  $V_1$ , que serão levadas linearmente nas duas componentes horizontais. Vejamos a Figura 34. A largura de  $V_0$  e  $V_1$  é  $\delta$ , assim como a altura de  $H_0$  e  $H_1$ . Vamos restringir  $F$  aos retângulos  $V_0$  e  $V_1$ . Pela linearidade de  $F|_{V_0} : V_0 \rightarrow H_0$  e  $F|_{V_1} : V_1 \rightarrow H_1$ , garantindo que  $F$  preserva linhas horizontais e verticais em  $S$ . Observemos que se  $h$  é um segmento de linha horizontal em  $S$  cuja imagem também está em  $S$ , então o comprimento de  $F(h)$  é  $\frac{1}{\delta}$  vezes o comprimento de  $h$ . Similarmente, se  $v$  e  $F(v)$  são segmentos verticais em  $S$ , então o comprimento de  $F(v)$  é reduzido por um fator de  $\delta$ .

Observemos que  $F$  é uma contração em  $D_1$  garantindo que  $F$  possui um único ponto fixo  $p$  em  $D_1$  e

$$\lim_n F^n(q) = p, \quad q \in D_1.$$

Como  $F(D_2) \subset D_1$ , então todos os pontos em  $D_2$  também vão convergir para  $p$  sob as iterações de  $F$ . Similarmente, se  $q \in S$ , mas  $F^k(q) \in D_1 \subset D_2$ , então  $F^n(q) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente, para compreender as órbitas futuras de  $F$  basta considerar os pontos que nunca saem de  $S$ .

Seja  $\Lambda = \{q \in S; F^k(q) \in S, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ . Observemos que se a órbita de  $q$  está em  $S$ , devemos ter, primeiramente, que  $q \in V_0$  ou  $q \in V_1$ , pois os demais pontos são levados por  $F$  para  $D_1 \subset D_2$ . Se  $F^2(q) \in S$ , então, similarmente, temos que  $F(q) \in V_0 \cup V_1$ , isto é,  $q \in F^{-1}(V_0) \cup F^{-1}(V_1)$ . Assim, se  $V$  é um retângulo vertical em  $S$  com largura  $\omega$ , então  $F^{-1}(V)$  é um par de retângulos verticais menores de largura  $\delta\omega$ , um em  $V_0$  e o

– Figura 34 - Componentes horizontais e verticais de  $S$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

outro em  $V_1$ . Conseqüentemente,  $F^{-2}(V_i)$  consiste de quatro retângulos de largura  $\delta^2$  cada;  $F^{-3}(V_i)$  consiste de oito retângulos de largura  $\delta^3$ ; e assim sucessivamente. Lembrando que  $\delta < \frac{1}{2}$ , garantindo que as larguras dos retângulos estão diminuindo. Consideremos  $\Lambda_+ = \{q; F^k(q) \in S, k = 0, 1, 2, \dots\}$ . Pela construção acima, assim como fizemos para a função quadrática, temos que  $\Lambda_+$  é o produto de um conjunto de Cantor com um intervalo vertical. A prova é análoga ao que foi feito no Teorema 3.2.4.

Analogamente, garantimos que  $\Lambda_- = \{q; F^{-k}(q) \in S, k = 1, 2, 3, \dots\}$  é o produto de um conjunto de Cantor e um intervalo horizontal. Por definição,  $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ . Observemos que todos os pontos neste conjunto são recorrentes em cadeia.

Para estudar a dinâmica de  $F$ , vamos utilizar a dinâmica simbólica assim como na seção 3.2. Para a construção dessa dinâmica, escolhemos, primeiramente, qualquer segmento vertical  $l \in \Lambda_+$ . Observemos que  $F^k(l)$  é um segmento vertical de comprimento  $\delta^k$  em  $V_0$  ou  $V_1$ . A afirmação vale para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Assim, podemos associar uma seqüência  $s_0 s_1 s_2 \dots$  de 0 e 1 a um segmento vertical  $l$  da seguinte forma:  $s_j = \alpha$  se, e somente se,  $F^j(l) \in V_\alpha$ , onde  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ . Analogamente, dado um segmento horizontal  $h \in \Lambda_-$ ,  $F^{-k}(h)$  é um segmento horizontal de largura  $\delta^k$ . Assim, podemos associar a seqüência  $\dots s_{-3} s_{-2} s_{-1}$  de 0 e 1, onde  $s_{-j} = \alpha$  se  $F^{-j}(h) \in V_\alpha$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots$ .

Assim, se  $p \in \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ , então podemos associar um par de seqüências de 0's e 1's a  $p$ , onde uma seqüência descreve a trajetória futura de  $p$  e a outra a passada. Vamos juntar essas duas seqüências, formando uma seqüência duplamente infinita de 0's e 1's. Em resumo, definimos a trajetória de um ponto  $p \in \Lambda_+ \cup \Lambda_-$  pela regra

$$S(p) = (\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots)$$

onde  $s_j = k$  se, e somente se,  $F^j(p) \in V_k$  para  $k = 0, 1$ .

Vamos definir o espaço dessas seqüências. Seja

$$\Sigma_2 = \{(s) = (\cdots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \cdots); s_j = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Definimos a função  $d$  em  $\Sigma_2$  dada por

$$d[(s), (t)] = \sum_{i=-} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}.$$

Como  $|s_i - t_i|$  é igual a 0 ou 1, esta série infinita é limitada inferiormente por 0 e superiormente pela série geométrica e, portanto, converge.

**Proposição 5.1.1.**  $d$  é uma métrica em  $\Sigma_2$ .

*Demonstração.* Sejam  $(s) = (\cdots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \cdots)$ ,  $(r) = (\cdots r_{-2}r_{-1} \cdot r_0r_1r_2 \cdots)$  e  $(t) = (\cdots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2 \cdots)$  seqüências em  $\Sigma_2$ . Vamos provar as quatro propriedades necessárias para garantir que  $d$  é uma métrica.

$$1. \ d[(s), (s)] = \sum_{i=-} \frac{|s_i - s_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-} \frac{0}{2^{|i|}} = 0;$$

2. Suponhamos que  $s \neq r$ . Assim, existe pelo menos um  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $s_j \neq r_j$ . Com isso,  $|s_j - r_j| = 1$ , garantindo,

$$d[(s), (r)] = \sum_{i=-} \frac{|s_i - r_i|}{2^{|i|}} > 0.$$

$$3. \ d[(s), (t)] = \sum_{i=-} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-} \frac{|t_i - s_i|}{2^{|i|}} = d[(t), (s)].$$

4. Pela desigualdade triangular, temos:

$$|s_i - t_i| = |(s_i - r_i) + (r_i - t_i)| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$$

para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Logo,

$$\begin{aligned} d[(s), (t)] &= \sum_{i=-} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sum_{i=-} \frac{|s_i - r_i| + |r_i - t_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{i=-} \frac{|s_i - r_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=-} \frac{|r_i - t_i|}{2^{|i|}} \\ &= d[(s), (r)] + d[(r), (t)]. \end{aligned}$$

Portanto,  $d$  é uma métrica. □

Definimos a função *shift*  $\sigma$  em  $\Sigma_2$  por:

$$\sigma(\cdots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \cdots) = (\cdots s_{-2}s_{-1}s_0 \cdot s_1s_2 \cdots)$$

Diferentemente da função *shift* da seção 3.2, neste caso a função  $\sigma$  admite uma inversa, que é definida como um deslocamento uma casa para a direita. Assim,  $\sigma$  é um homeomorfismo em  $\Sigma_2$ .

Seja  $S$  o **itinerário** de  $x$ , isto é, a sequência  $S(x) = (\cdots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2 \cdots)$ , onde  $s_{-j} = 0$  se  $F^{-j}(x) \in V_0$ ,  $s_{-j} = 1$  se  $F^{-j}(x) \in V_1$ ,  $s_j = 0$  se  $F^j(x) \in H_0$  e  $s_j = 1$  se  $F^j(x) \in H_1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Analogamente ao que foi provado no Teorema 3.2.15, garantimos que  $S : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$  também é um homeomorfismo neste caso. Além disso, a aplicação  $S$  fornece uma conjugação topológica entre  $F$  em  $\Lambda$  e  $\sigma$  em  $\Sigma_2$ , analogamente ao que foi feito no Teorema 3.2.16.

Ademais, as propriedades válidas para a função *shift* apresentada na seção 3.2 também são válidas aqui, como a existência de  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$  para  $\sigma$  e também a existência de uma órbita densa. Assim, pela conjugação topológica citada anteriormente, garantimos que  $F$  possui as mesmas propriedades.

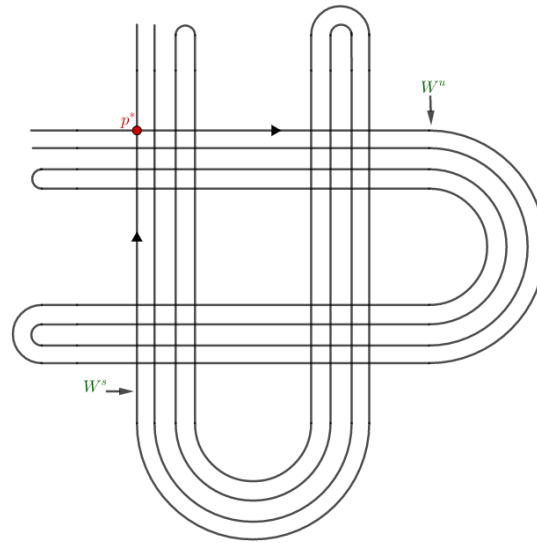
Como já mencionado, todos os pontos que deixam  $S$  sob iteração de  $F$  tendem para o ponto fixo  $p \in D_1$ , ou seja, podemos afirmar que todos os pontos que estão em  $D - \Lambda$  estão no conjunto estável do ponto fixo  $p$ .

Vamos descrever as variedades estáveis e instáveis em  $\Lambda$ . Como já mencionado, conseguimos uma conjugação topológica entre  $\sigma$  e  $F$ , e assim, existe um ponto fixo  $V_0$  que possui a sequência associada  $(\cdots 00 \cdot 000 \cdots)$ . Chamamos esse ponto de  $p$ . Seja  $l_s$  o segmento vertical que passa por  $p$ . Pela definição de  $F$ , qualquer ponto que esteja em  $l_s$  se aproxima de  $p$  pelas iterações diretas de  $F$ , ou seja, todos os pontos de  $l_s$  estão em  $W^s(p)$ . Porém esses não são os únicos pontos em  $W^s(p)$ . Seja  $q$  um ponto em  $\Lambda$  tal que existe um  $n \in \mathbb{N}$  onde  $F^n(q) \in l_s$ . Assim,  $|F^n(q) - p| < 1$ , garantindo que  $|F^{n+k}(q) - p| < \delta^k$ . Como  $\delta < \frac{1}{2}$ , então o ponto  $q$  se aproxima de  $p$ , e assim  $q \in W^s(p)$ . Logo, a união de intervalos verticais dados por  $F^{-k}(l_s)$  estão em  $W^s(p)$  para todo  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Agora descreveremos a variedade instável de  $p$ . Seja  $l_u$  a linha horizontal que passa por  $p$ . Neste caso, pela construção da  $F$ , os pontos nesta linha horizontal se afastam de  $p$ , garantindo que os pontos que estão em  $l_u$  pertençam à  $W^u(p)$ . Além disso,  $F^k(l_u)$  possui o formato de uma cobra, que corta o quadrado unitário  $S$  exatamente  $2^k$  vezes em um segmento horizontal. Observemos que, neste caso,  $p$  é um ponto homoclínico de  $F$ , como retratado na Figura 35.

Vamos observar essas variedades estáveis e instáveis com relação à função  $\sigma$ . Seja

$$s = (\cdots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \cdots) \in \Sigma_2.$$

– Figura 35 - Variedades Instável e Estável de  $p$ 

Fonte: Elaborada pela autora. (2022).

Seja  $t$  uma sequência em  $\Sigma_2$  tal que todas as entradas concordam com as  $s$  à direita de alguma entrada. Logo,  $t \in W^s(s)$ . Por outro lado, seja  $u \in \Sigma_2$  tal que todas as entradas coincidam com as entradas de  $s$  à esquerda de alguma entrada. Neste caso,  $u \in W^u(s)$ .

Como já mencionado, Steve Smale provou que todos os sistemas dinâmicos que possuem um ponto homoclínico possuem também uma Ferradura. A demonstração desse resultado pode ser observado no livro (14), Capítulo 7, Teorema 4.5.



## 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como principal tema a Ferradura de Smale, uma aplicação definida apenas geometricamente e de suma importância para o estudo de Sistemas Dinâmicos Caóticos. Para a compreensão da sua dinâmica, construímos uma conjugação topológica entre ela e a aplicação chamada de *shift* definida no espaço de seqüências, que possui uma dinâmica mais simples de ser estudada, semelhantemente ao que foi feito no estudo da família quadrática. Através desse estudo, podemos observar a presença de caos na dinâmica da Ferradura, além da presença de pontos homoclínicos. Daí vem a sua importância para o estudo de Sistemas Dinâmicos: além de garantir a existência do caos, Steve Smale provou que todos os sistemas dinâmicos que possuem um ponto homoclínico possuem também uma Ferradura.

Assim como a Ferradura de Smale, existem outros exemplos importantes no estudo de Sistemas Dinâmicos Caóticos. Um deles é o Automorfismo Hiperbólico no Toro, definido algebricamente. Ele é caótico em todos os pontos em que estão definidos, porém a sua dinâmica pode ser compreendida totalmente. Maiores informações sobre essa classe de aplicações pode ser encontrada na seção 2.4 da referência (6). Além disso, temos o Solenoide, definido algebricamente em um toro sólido, e o Atrator Plykin, definido geometricamente, assim como a Ferradura. Ambos possuem um determinado conjunto em que a dinâmica é caótica e, por cada ponto desse conjunto, passa um conjunto instável e um conjunto estável. Eles podem ser encontrados com maiores detalhes na seção 2.5 da referência (6).

## REFERÊNCIAS

- 1 BARAVIERA, Alexandre T.; BRANCO, Flávia M. **Sistemas dinâmicos**: uma primeira visão. Instituto de Matemática-UFRGS. Disponível em: <https://www.emis.de/journals/em/docs/coloquios/SU-2.02.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2022.
- 2 BARREIRA, Luís; VALLS, Claudia. **Teoria dos sistemas dinamicos**: uma introdução. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- 3 BHIRKHOFF, George D. On the periodic motions of dynamical systems. **Acta Math**, v.50, p. 359-379, 1927.
- 4 BHIRKHOFF, George D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamique. **Mém. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei 1**, p. 85-216, 1935.
- 5 CARTWRIGHT, Mary; LITTLEWOOD, Jonh E. On Non-Linear Differential Equations of the Second Order: I. the Equation  $\ddot{y}k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$ ,  $k$  Large, **J. London Math. Soc.**, v.20, p. 180–189, 1945.
- 6 DEVANEY, Robert L. **An introduction to chaotic dynamical systems**. Redwood City: Addison-Wesley, 2 ed., 1989.
- 7 DEVANEY, Robert L. **A first course in chaotic dynamical systems**: theory and experiment. Perseus, 1992.
- 8 LIMA, Elon L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1 ed., 2014.
- 9 LIMA, Elon L. **Análise Real**- Volume 2: Funções de n variáveis. Rio de Janeiro: IMPA, 6 ed., 2016.
- 10 LIMA, Elon L. **Análise Real**: Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 12 ed., 2017.
- 11 HASSELBLATT, Boris; KATOK, Anatole. **A first course in dynamics**: with a panorama of recent developments. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- 12 LEVINSON, Norman. A second order differential equation with singular solutions. **Ann. of Math**, v.50, p. 127-153, 1949.
- 13 POINCARÉ, Henri. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**, Vols. I, II, III. Paris, 1892, 1893, 1899.
- 14 ROBINSON, Clark. **Dynamical Systems**: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. Boca Raton: CRC Press, 1995.
- 15 SMALE, Steve. Morse inequalities for a Dynamical System. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v.66, p.43-49, 1960.
- 16 SMALE, Steve. A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points, **Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations**, v.2, p.365–366, 1961.

- 17 SMALE, Steve. Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. **Proc. Internat. Congr. Mathematicians**, p. 490–496, 1962.
- 18 SMALE, Steve. Differentiable dynamical systems. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v.73, p. 747-817, 1967.
- 19 SMALE, Steve. Finding a horseshoe on the beaches of Rio. **The Mathematical Intelligencer**, v.20, p. 39–44, 1998.