Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Ecila Machado Werneck de Freitas

Teorema de existência e unicidade de solução para equações dinâmicas em escalas temporais

Juiz de Fora

2017

Ecila Machado Werneck de Freitas

Teorema de existência e unicidade de solução para equações dinâmicas em escalas temporais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Eduard Toon

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Freitas, Ecila Machado Werneck de.
Teorema de existência e unicidade de solução para equações dinâmicas em escalas temporais / Ecila Machado Werneck de Freitas. – 2017.
98 f. : il.

Orientador: Eduard Toon
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2017.

1. Escalas Temporais. 2. Existência e Unicidade de solução. I. Toon, Eduard, orient. II. Título.

Ecila Machado Werneck de Freitas

Teorema de existência e unicidade de solução para equações dinâmicas em escalas temporais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Aprovada em: 22 de junho de 2017

BANCA EXAMINADORA

EduardToon

Prof. Dr. Eduard Toon - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Fábio Rodrigues Pereira

Professor Dr. Fábio Rodrigues Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora

Lucy

Professor Dra. Lucy Tiemi Takahashi
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que são as pessoas mais importantes da minha vida, Anibal e Alice, pela educação, paciência e incentivo. Aos meus irmãos, Filipi e Anibal, pelo carinho. Ao meu marido Brunner pela compreensão e apoio.

Aos meus amigos da graduação. Em especial, ao Sérgio e Patrick, que nos últimos anos estiveram ao meu lado nos momentos de estudo contribuindo para o meu conhecimento e pela amizade.

Aos meus professores da graduação que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico.

Aos professores Fábio e Lucy que aceitaram o convite de participar de minha banca e proporcionar o aprimoramento deste trabalho.

Ao meu orientador Eduard, pela oportunidade de ser sua aluna de Iniciação Científica, pela atenção e paciência nos horários de atendimento para melhoria deste trabalho.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Departamento de Matemática.

À Propesq-UFJF, pela bolsa de Iniciação Científica.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a Teoria de Escalas Temporais, que foi desenvolvida com o objetivo de unificar as análises discreta e contínua, tornando-se um instrumento mais eficiente para modelos matemáticos.

Uma escala temporal é um subconjunto fechado e não vazio arbitrário dos números reais.

No presente trabalho, estamos interessados em expor os conceitos fundamentais do cálculo em escalas temporais, com o propósito de apresentar um teorema da existência e unicidade de solução para uma equação dinâmica em escalas temporais.

Palavras-chave: Escala Temporal. Existência e Unicidade de solução.

ABSTRACT

In this work, we study the theory of time scales, which was recently developed with the objective of unifying the discrete and continuous analysis, becoming a more efficient instrument for mathematical models.

A time scale is a closed, non-empty subset of the real numbers.

In the present work, we are interested in exposing the fundamental concepts of calculus in time scales, with the purpose of presenting a theorem of existence and uniqueness of solution for a dynamic equation in time scales.

Key-words: Time Scales. Existence and Uniqueness of solution.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo.
$\in$	Pertence.
$\mathbb{T}$	Escala Temporal
σ	Operador de avanço.
ρ	Operador de recuo.
μ	Função de rarefação de avanço.
ν	Função de rarefação de recuo.
f^{σ}	Função f composta com σ.
f^{ρ}	Função f composta com ρ.
$\mathbb{T}^{\kappa}$	Conjunto $T \setminus m$ onde m é o elemento máximo discreto à esquerda.
$\mathbb{T}_{\kappa}$	Conjunto $T \setminus m$ onde m é o elemento mínimo discreto à direita.
$\mathbb{T}^{\kappa}_{\kappa}$	É a interseção de $\mathbb{T}^{\kappa}$ com $\mathbb{T}_{k}$.
f^{Δ}	A derivada delta de f.
f^{∇}	A derivada nabla de f.
$f^{\diamond_{\alpha}}$	A $\diamond_{\alpha}$-derivada de f.
$f^{\Delta\Delta}$	A segunda derivada delta de f.
$C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	Conjunto das funções rd-contínuas.
$C^{1}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	O conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com derivada rd-contínua.
$\mathbb{C}_h$	Número complexo de Hilger.
$\mathbb{R}_h$	Eixo real de Hilger.
$\mathbb{A}_h$	Eixo alternativo de Hilger.
$\mathbb{I}_h$	Círculo imaginário de Hilger.
Re_h	Parte real de Hilger.
Im_h	Parte imaginária de Hilger.

$\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ O conjunto das funções regressivas e rd-contínuas.

$e_p(t,s)$ Função exponencial.

$C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{m\times n})$ Classe de todas as funções matriz valor $m\times n$ em $\mathbb{T}$.

$\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{n\times n})$ Classe de todas as funções regressivas e rd-contínuas.

SUMÁRIO

1 Introdução

O estudo de equações dinâmicas em escalas temporais foi desenvolvido em 1988 por Stefan Hilger em sua tese de doutorado [3]. Sua motivação foi unificar as análises discreta e contínua com o intento de obter um resultado para uma equação dinâmica, como as equações diferenciais ou as equações às diferenças, onde suas soluções são funções desconhecidas cujo o domínio é chamado de escala temporal.

O cálculo em escalas temporais também pode ser usado em aplicações, por exemplo, na modelagem de uma população de insetos que vivem numa estação do ano e desaparecem em outra, porém nesta, seus ovos estão dormentes, e em seguida eclodem em uma nova estação dando origem a uma nova população sem sobreposição [1] e [4].

Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é qualquer subconjunto fechado e não-vazio dos números reais.

Os objetivos principais do presente trabalho são apresentar as ferramentas básicas do cálculo em escalas temporais, a função exponencial em escalas temporais, resultados de existência de solução para equações dinâmicas em escalas temporais lineares (Método de variação das constantes) e um resultado de existência e unicidade de solução para uma equação dinâmica em escalas temporais não-lineares.

No capítulo 2, apresentamos alguns conceitos e resultados que são necessários para o entendimento dos demais capítulos. Definimos o operador de avanço e o operador de récuo, as funções rarefação de avanço e rarefação de récuo que são definições básicas e, exemplificamos estes conceitos. Apresentamos a derivada e a integral de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bem como alguns resultados fundamentais.

No capítulo 3, definimos a transformação cilindro para introduzirmos a função exponencial em escalas temporais, onde esta função é uma solução de um problema de valor inicial de uma equação dinâmica linear de primeira ordem em escalas temporais e exibimos suas propriedades. Por fim, mostramos a fórmula de variação das constantes para uma equação linear de primeira ordem não homogênea em escalas temporais.

No capítulo 4, abordamos os sistemas lineares de equação dinâmica, a função matriz valor bem como suas propriedades. A matriz exponencial e o teorema de variação das constantes.

No capítulo 5, apresentamos o teorema da existência e unicidade local em escalas temporais de solução para uma equação dinâmica em escalas temporais não-linear.

2 Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos definições básicas para a compreensão deste trabalho. Também, apresentaremos os conceitos de delta, nabla, α-diamante derivadas e suas propriedades. Além disso, faremos uma introdução à integral de Cauchy em escalas temporais, exibindo alguns resultados sobre esta integral. As principais referências são [1] e [2].

2.1 Definições básicas

Nesta seção, definiremos os conceitos básicos sobre escalas temporais.

Definição 2.1.1. *Uma escala temporal é um subconjunto fechado e não-vazio qualquer dos números reais.*

Exemplo 2.1.1. *Os números reais* $\mathbb{R}$*, números inteiros* $\mathbb{Z}$*, números naturais* $\mathbb{N}$*, intervalos fechados* $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$ *e a união de intervalos fechados, são todos exemplos de escalas temporais. Já os intervalos semiabertos, números racionais* $\mathbb{Q}$*, números irracionais, números complexos* $\mathbb{C}$*, não são escalas temporais.*

Denotaremos uma escala temporal por $\mathbb{T}$.

Assumimos que uma escala temporal tem a topologia herdada dos números reais, isto é, um aberto da escala temporal é a interseção de uma aberto de $\mathbb{R}$ com a escala temporal $\mathbb{T}$. Por exemplo, o intervalo $[0, 1)$ é um aberto na escala temporal, pois, pode ser escrito como a interseção do intervalo aberto da reta $(-1, 1)$ com a escala temporal $\mathbb{T} = [0, 2]$.

Sejam $a, b \in \mathbb{T}$ tais que $a \leq b$, então denotamos e definimos um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{T}$ por $[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\} = [a, b] \cap \mathbb{T}$. Analogamente, definimos intervalos abertos e semi-abertos, entre outros.

A seguir, definiremos o operador de avanço e o operador de récuo e as funções rarefação de avanço e récuo que são importantes para o estudo da diferenciação em escalas temporais. Alguns exemplos são dados para compreensão dessas definições.

Definição 2.1.2. *Seja* $\mathbb{T}$ *uma escala temporal. Para* $t \in \mathbb{T}$*, definimos o operador de avanço* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *por*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

e o operador de récuo $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *é definido por*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Nesta definição, consideramos $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ *de modo que* $\sigma(t) = t$*, se* $\mathbb{T}$ *tem um máximo* t*, e* $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ *de modo que* $\rho(t) = t$*, se* $\mathbb{T}$ *tem um mínimo* t*, onde* $\emptyset$ *representa o conjunto vazio.*

Lembremos que $\mathbb{T}$ é um subconjunto fechado e não-vazio dos números reais. Desta forma, para $t \in \mathbb{T}$, o operador de avanço $\sigma(t)$ e o operador de récuo $\rho(t)$ pertencem a $\mathbb{T}$.

A partir desta definição, podemos classificar os pontos de uma escala temporal.

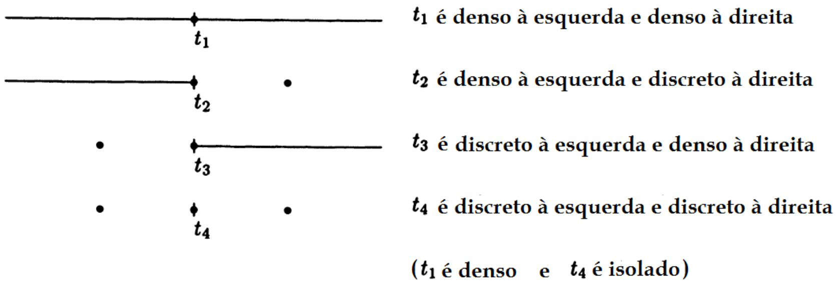
- $\sigma(t) > t$ dizemos que t é discreto à direita e $\rho(t) < t$ dizemos que t é discreto à esquerda. Quando t é discreto à direita e discreto à esquerda ao mesmo tempo, t é chamado isolado.

- $t < \sup \mathbb{T}$ e $\sigma(t) = t$ dizemos que t é denso à direita e se $t > \inf \mathbb{T}$ e $\rho(t) = t$ dizemos que t é denso à esquerda. Quando t é denso à esquerda e denso à direita ao mesmo tempo, então t é chamado denso.

Classificação de pontos	
t discreto à direita	$\sigma(t) > t$
t denso à direita	$\sigma(t) = t$
t discreto à esquerda	$\rho(t) < t$
t denso à esquerda	$\rho(t) = t$
t isolado	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t denso	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

A figura 1 adaptada de [1], p.2, ilustra a definição de classificação dos pontos de uma escala temporal $\mathbb{T}$.

Figura 1 – Classificação de pontos



A seguir exemplificaremos as definições dadas anteriormente.

Exemplo 2.1.2. *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então para $t \in \mathbb{R}$, obtemos:*

O operador de avanço $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = \inf\{(t, +\infty)\} = t$. Então, t é denso à direita.

O operador de récuo $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\} = \sup\{(-\infty, t)\} = t$. Então, t é denso à esquerda.

Como t é denso à esquerda e denso à direita ao mesmo tempo, segue que t é denso.

Exemplo 2.1.3. *Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então para $t \in \mathbb{Z}$ temos:*

O operador de avanço $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = \inf\{t+1, t+2, ...\} = t+1 > t$. Então, t é discreto á direita.

O operador de récuo $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\} = \sup\{..., t-2, t-1\} = t-1 < t$. Então, t é discreto à esquerda.

Como t é discreto à esquerda e discreto à direita ao mesmo tempo, temos que t é isolado.

Exemplo 2.1.4. *Se $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ onde $q > 1$ e $q^{\mathbb{Z}} := \{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$, ou seja,*

$$\mathbb{T} = \{\dots q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, q^3, \dots\} \cup \{0\}.$$

Seja $t \in \mathbb{T}$, $t \neq 0$. Então, o operador de avanço

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} \\ &= \inf\{q^{k+1}, q^{k+2}, ...\} \\ &= \inf\{q^k q^1, q^k q^2, ...\} \\ &= \inf\{tq, tq^2, ...\} = qt > t. \end{aligned}$$

Segue que t é discreto à direita.

O operador de récuo,

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\} \\
&= \sup\{..., q^{k-2}, q^{k-1}\} \\
&= \sup\{..., q^k q^{-2}, q^k q^{-1}\} \\
&= \sup\{..., t/q^2, t/q\} = t/q < t.
\end{aligned}$$

Portanto t é discreto à esquerda.

Como t é discreto à esquerda e discreto à direita ao mesmo tempo, temos que t é isolado.

Consideremos agora $t = 0$.

O operador de avanço $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = 0 = t$. Logo, t é denso á direita. O operador de récuo $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\} = \sup \emptyset = \inf \mathbb{T} = t = 0$. Logo, t é denso à esquerda.

Como $t = 0$ é denso à esquerda e denso à direita, temos que $t = 0$ é denso.

Exemplo 2.1.5. *Se $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{ab} = \cup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a]$ em que, $a, b > 0$, temos:*

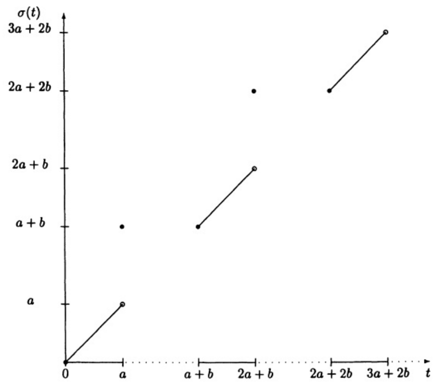
O operador de avanço,

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a), \\ t+b, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

O operador de récuo,

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a), \\ t-b, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\}. \end{cases}$$

Figura 2 – Operador de avanço para $\mathbb{P}_{ab}$. Fonte: [1], p.15



Definição 2.1.3. *Definimos a função rarefação de avanço* $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *por*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

e a função rarefação de récuo $\nu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *por*

$$\nu(t) = t - \rho(t).$$

Exemplo 2.1.6. *As funções rarefação de avanço e récuo, para as escalas temporais dos exemplos anteriores* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ *e* $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{ab}$ *são:*

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *então* $\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$ *e* $\nu(t) = t - \rho(t) = t - t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$

- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *então* $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$ *e* $\nu(t) = t - \rho(t) = t - (t - 1) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$

- $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, *então* $\mu(t) = \sigma(t) - t = qt - t = t(q - 1)$ *e*
  $\nu(t) = t - \rho(t) = t - tq^{-1} = t(1 - q^{-1}), \quad \forall t \in \mathbb{T},\ t \neq 0.$
  Se $t = 0$, $\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$ *e* $\nu(t) = t - \rho(t) = t - t = 0.$

- $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{ab}$, *então*

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a), \\ b, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

  e

$$\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a), \\ b, & t \in \cup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\}. \end{cases}$$

Os conjuntos definidos a seguir, serão utilizados nas definições da delta-derivada e nabla-derivada de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e são os conjuntos onde as funções são diferenciáveis. Porém, neste trabalho daremos ênfase à delta-derivada.

Definição 2.1.4. *Definimos o conjunto* $\mathbb{T}^{\kappa}$ *por*

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{M\}, & se \quad M = sup\mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & se \quad sup\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

Analogamente, definimos o conjunto $\mathbb{T}_{\kappa}$ *por*

$$\mathbb{T}_{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{m\}, & se \quad m = inf\mathbb{T} > -\infty, \\ \mathbb{T}, & se \quad inf\mathbb{T} = -\infty \end{cases}$$

Se b é denso à esquerda, então $[a, b]^{\kappa} = [a, b]$. Se b é discreto à esquerda, então $[a, b]^{\kappa} = [a, b) = [a, \rho(t)]$.

Definição 2.1.5. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função, então definimos $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por*

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \text{ isto é, } f^\sigma = f \circ \sigma.$$

Analogamente, definimos $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$f^\rho(t) = f(\rho(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \text{ isto é, } f^\rho = f \circ \rho.$$

Teorema 2.1.1. *(Princípio da Indução) Seja $t_0 \in \mathbb{T}$ e suponha que $\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$ é uma família que satisfaz as afirmações:*

(i) *$S(t_0)$ é verdadeira.*

(ii) *Se $t \in [t_0, \infty)$ é discreto à direita e $S(t)$ é verdadeira, então $S(\sigma(t))$ é verdadeira.*

(iii) *Se $t \in [t_0, \infty)$ é denso à direita e $S(t)$ é verdadeira, então existe uma vizinhança U de t, tal que $S(s)$ é verdadeira para todo $s \in U \cap (t, \infty)$.*

(iv) *Se $t \in (t_0, \infty)$ é denso à esquerda e $S(s)$ é verdadeira para todo $s \in [t_0, t)$, então $S(t)$ é verdadeira.*

Então, $S(t)$ é verdadeira para todo $t \in [t_0, \infty)$.

Demonstração. Seja $S^* := \{t \in [t_0, \infty); \quad S(t) \quad \text{é} \quad \textit{não} \quad \textit{verdadeiro}\}$.

Queremos mostrar que $S^* = \emptyset$.

Vamos supor que $S^* \neq \emptyset$.

Uma vez que S^* é não vazio e $\mathbb{T}$ é fechado, temos que

$$\inf S^* := t^* \in \mathbb{T}.$$

Afirmamos que $S(t^*)$ é verdadeira.

Se $t^* = t_0$, então $S(t^*)$ é verdadeira por (i).

Se $t^* \neq t_0$ e $\rho(t^*) = t^*$, temos que t é denso à esquerda e $t^* \in (t_0, \infty)$. Além disso, $t^* = \inf S^*$ então $t^* \leq s$, para todo $s \in S^*$. Logo $s \notin S^*$ para todo $s \in [t_0, t^*)$, então $S(s)$ é verdadeira para todo $s \in [t_0, t^*)$. Portanto, $S(t^*)$ é verdadeira por (iv).

Se $t^* \neq t_0$ e $\rho(t^*) < t^*$ então $\rho(t^*) \in [t_0, t^*)$, pois $t_0 < t^*$. Daí segue que, $S(\rho(t^*))$ é verdadeira. Como $\inf S^* \neq \inf[t_0, \infty)$, pois $t_0 < t^*$, então $\sigma(\rho(t^*)) = t^* > \rho(t^*)$. Portanto, por (ii), $S(\sigma(\rho(t^*)))$ é verdadeira. Portanto, $S(t^*)$ é verdadeira.

Portanto, as afirmações mostram que $t^* \notin S^*$.

Assim, t^* não é discreto à direita e $\inf S^* \neq \max[t_0, \infty)$, então t^* é denso à direita. Mas, por (iii) $S(t^*)$ é verdadeira, o que é uma contradição. Assim, $S^* = \emptyset$. $\square$

Para mais exemplos de escalas temporais ver [1].

2.2 Diferenciação

Nesta seção, estudaremos a diferenciabilidade de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ em um ponto $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Apresentaremos alguns resultados e propriedades desta derivada.

Diremos que $f^\Delta(t)$ é a delta (ou Hilger) derivada de f no ponto t. Além disso, diremos que f é delta (Hilger) diferenciável em $\mathbb{T}^\kappa$ sempre que $f^\Delta(t)$ existir para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$. A função $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ será chamada de delta-derivada de f em $\mathbb{T}^\kappa$.

Definição 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é delta diferenciável em $t \in \mathbb{T}^\kappa$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de t (isto é, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$) tal que*

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \ \forall s \in U.$$

Teorema 2.2.1. *A delta derivada, se existir, é única.*

Demonstração. Suponhamos que f tem duas derivadas $f^\Delta(t) = g(t)$ e $f(t) = h(t)$ em t.

Afirmamos que $g(t) = h(t)$. Com efeito, por definição da derivada $g(t)$ e $h(t)$ temos para todo $\varepsilon > 0$, existem

$$\begin{aligned} U_1 &= (t - \delta_1, t + \delta_1) \cap \mathbb{T},\ \delta_1 > 0, \\ U_2 &= (t - \delta_2, t + \delta_2) \cap \mathbb{T},\ \delta_2 > 0, \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} |[f(\sigma(t)) - f(s)] - g(t)[\sigma(t) - s]| &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in U_1, \\ |[f(\sigma(t)) - f(s)] - h(t)[\sigma(t) - s]| &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in U_2. \end{aligned}$$

Note que a primeira desigualdade pode ser escrita na forma equivalente

$$|g(t)[\sigma(t) - s] - f(\sigma(t)) + f(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|.$$

Somando esta desigualdade com a outra desigualdade, obtemos:

$$|g(t)[\sigma(t) - s] - f(\sigma(t)) + f(s)| + |[f(\sigma(t)) - f(s)] - h(t)[\sigma(t) - s]| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$, onde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Aplicando a desigualdade triangular ao lado esquerdo desta desigualdade, obtemos

$$|[g(t) - h(t)][\sigma(t) - s]| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|.$$

Por definição de $\mathbb{T}^\kappa$, toda a vizinhança de t contém algum $s \in \mathbb{T}^\kappa$ com $s \neq \sigma(t)$. Isto implica que

$$|g(t) - h(t)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Logo, $g(t) = h(t)$.

Portanto, a delta derivada é única. $\square$

A seguir alguns exemplos sobre a definição dada.

Exemplo 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \alpha$, para todo $t \in \mathbb{T}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é constante. Então $f^\Delta \equiv 0$.*

De fato, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot (\sigma(t) - s)| = |\alpha - \alpha - 0| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in \mathbb{T}$.

Exemplo 2.2.2. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Então $f^\Delta \equiv 1$.*

De fato, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot (\sigma(t) - s)| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in \mathbb{T}$.

Exemplo 2.2.3. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(t) = t^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $f^\Delta(t) = t + \sigma(t)$.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& |f(\sigma(t)) - f(s) - (t + \sigma(t)) \cdot (\sigma(t) - s)| = |\sigma(t)^2 - s^2 - (t - s + \sigma(t) + s) \cdot (\sigma(t) - s)| \\
= \ & |\sigma(t)^2 - s^2 - [\sigma(t)^2 - s^2 + (t - s) \cdot (\sigma(t) - s)]| \\
= \ & |\sigma(t)^2 - s^2 - \sigma(t)^2 + s^2 - (t - s) \cdot (\sigma(t) - s)| \\
= \ & |-(t - s) \cdot (\sigma(t) - s)| = |-1||t - s| \cdot |\sigma(t) - s| \\
= \ & |t - s| \cdot |\sigma(t) - s| \\
< \ & \delta|\sigma(t) - s| \\
\leq \ & \varepsilon|\sigma(t) - s|,
\end{aligned}$$

para todo $s \in U$.

Definição 2.2.2. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f é nabla (ou Hilger) diferenciável em $t \in \mathbb{T}_\kappa$, se dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de t (isto é, $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$) tal que*

$$|[f(s) - f(\rho(t))] - f^\nabla(t)[s - \rho(t)]| \leq \varepsilon |s - \rho(t)|, \forall s \in U.$$

Neste caso, diremos que $f^\nabla(t)$ é nabla-derivada de f no ponto t.

Por fim, definiremos a função alfa-diamante diferenciável.

Definição 2.2.3. *Diremos que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é alfa-diamante diferenciável em $t \in \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa$, se ela é delta e nabla diferenciável ao mesmo tempo em t e sua $\diamond_\alpha$-derivada é dada por*

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha) f^\nabla(t)$$

para $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 2.2.4. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(t) = t^2$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Vamos calcular $f^{\diamond_\alpha}(t)$, com $\alpha = 1/2$ e $f^\nabla(t) = \rho(t) + t$.*

Primeiro mostraremos que de fato $f^\nabla(t) = \rho(t) + t$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhaça $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ para $\delta = \varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|f(s) \quad &- \quad f(\rho(t)) - (\rho(t)+t)\cdot(s-\rho(t))| = |s^2 - \rho(t)^2 - (\rho(t)+t-s+s)\cdot(s-\rho(t))| \\
&= \quad |s^2 - \rho(t)^2 - [s^2 - \rho(t)^2 + (t-s)\cdot(s-\rho(t))]| \\
&= \quad |s^2 - \rho(t)^2 - s^2 + \rho(t)^2 - (t-s)\cdot(s-\rho(t))| \\
&= \quad |-(t-s)\cdot(s-\rho(t))| \\
&= \quad |-1||t-s|\cdot|s-\rho(t)| = |t-s|\cdot|s-\rho(t)| \\
&< \quad \delta|s-\rho(t)| \\
&\leq \quad \varepsilon|s-\rho(t)|, \quad \forall s \in U.
\end{aligned}$$

Já vimos no exemplo 2.2.3 que $f^\Delta(t) = t + \sigma(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
f^{\diamond_\alpha}(t) &= \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha) f^\nabla(t) \\
&= \frac{1}{2}(t+\sigma(t)) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(\rho(t)+t) \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sigma(t) + \frac{1}{2}\rho(t) + \frac{1}{2}t \\
&= t + \frac{1}{2}(\sigma(t)+\rho(t)).
\end{aligned}$$

A seguir, mostraremos dois resultados importantes a respeito da delta derivada.

Teorema 2.2.2. *Sejam $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função e $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Valem as seguintes afirmações.*

(i) Se f é delta diferenciável em t, então f é contínua em t.

(ii) Se f é contínua em t e t é discreto à direita, então f é delta diferenciável em t e

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

(iii) Se t é denso à direita, então f é delta diferenciável em t se, e somente se, o limite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como um número finito. Neste caso,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

(iv) Se f é delta diferenciável em t, então $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$

Demonstração. (i) Vamos supor f delta diferenciável em t.

Assim, dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe uma vizinhança $U = (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*) \cap \mathbb{T}$ para algum $\varepsilon^* > 0$ tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U.$$

Tome $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2\mu(t) + |f^\Delta(t)|}$, onde $\varepsilon^* \in (0,1)$ pois $1 + 2\mu(t) + |f^\Delta(t)| > 0$ e $\varepsilon \in (0,1)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
&|f(s) - f(t)| = \\
&\quad = |f(\sigma(t)) - f(\sigma(t)) - f(s) + f(t) - f^\Delta(t)\sigma(t) + f^\Delta(t)\sigma(t) + f^\Delta(t)s - f^\Delta(t)s| \\
&\quad = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t)\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t)\}| \\
&\quad = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t)\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t) \\
&\qquad - f^\Delta(t)t + f^\Delta(t)t\}| \\
&\quad = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t)\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \sigma(t)f^\Delta(t) + sf^\Delta(t) \\
&\qquad - tf^\Delta(t) + tf^\Delta(t)\}| \\
&\quad = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t)\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - [\sigma(t) - t]f^\Delta(t)\} \\
&\qquad + [s - t]f^\Delta(t)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; |f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]f^{\Delta}(t)| + |f(\sigma(t)) - f(t) - [\sigma(t) - t]f^{\Delta}(t)| \\
&+ \; |[s - t]f^{\Delta}(t)| \\
&\leq \; \varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*|\sigma(t) - t| + |s - t||f^{\Delta}(t)| \\
&< \; \varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*|\mu(t)| + \varepsilon^*|f^{\Delta}(t)| \\
&= \; \varepsilon^*[|\sigma(t) - s| + |\mu(t)| + |f^{\Delta}(t)|] \\
&= \; \varepsilon^*[|\sigma(t) - t + t - s| + |\mu(t)| + |f^{\Delta}(t)|] \\
&\leq \; \varepsilon^*[|\sigma(t) - t| + |t - s| + |\mu(t)| + |f^{\Delta}(t)|] \\
&= \; \varepsilon^*[|\mu(t)| + |t - s| + |\mu(t)| + |f^{\Delta}(t)|] \\
&< \; \varepsilon^*[2|\mu(t)| + |f^{\Delta}(t)| + \varepsilon^*] \\
&< \; \varepsilon^*[2|\mu(t)| + |f^{\Delta}(t)| + 1] \\
&= \; \varepsilon^*[1 + 2\mu(t) + |f^{\Delta}(t)|] \\
&= \; \varepsilon
\end{aligned}
$$

Portanto, f é contínua em t.

(ii) Vamos supor f contínua em t e t discreto à direita, ou seja, $\sigma(t) > t$.
Pela continuidade da f,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\mu(t)[f(\sigma(t)) - f(s)] - [\sigma(t) - s][f(\sigma(t)) - f(t)]}{\mu(t)[\sigma(t) - s]} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{[\sigma(t) - s]} \cdot \frac{\mu(t)[f(\sigma(t)) - f(s)] - [\sigma(t) - s][f(\sigma(t)) - f(t)]}{\mu(t)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{\sigma(t) - s} \right| \cdot \left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{[\sigma(t) - s][f(\sigma(t)) - f(t)]}{\mu(t)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|\sigma(t) - s|} \cdot \left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{[\sigma(t) - s][f(\sigma(t)) - f(t)]}{\mu(t)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{[\sigma(t) - s][f(\sigma(t)) - f(t)]}{\mu(t)} \right| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t) - s] \right| < \varepsilon|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U$$

Logo, f é delta diferenciável em t e

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

(iii) $(\Rightarrow)$ Vamos supor f diferenciável em t e t denso à direita, ou seja, $\sigma(t) = t$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$ tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| < \varepsilon|\sigma(t) - s|, \forall s \in U$$

Como $\sigma(t) = t$, segue

$|[f(t) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[t - s]| < \varepsilon|t - s|$

$\left|(t - s)\dfrac{f(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(t - s)}{t - s}\right| \leq \varepsilon|t - s|$

$|t - s| \cdot \left|\dfrac{f(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(t - s)}{t - s}\right| \leq \varepsilon|t - s|$

$\left|\dfrac{f(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(t - s)}{t - s}\right| \leq \varepsilon$

$\left|\dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon, \forall s \in U$ e $s \neq t$

Portanto, existe

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^{\Delta}(t).$$

$(\Leftarrow)$ Vamos supor que o limite existe e t é denso à direita. Assim,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = L.$$

Pela definição de limite, temos.

Dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - L\right| \leq \varepsilon, \quad \forall s \in U, \quad s \neq t$$

Como $\sigma(t) = t$, temos

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - L\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s) - L[\sigma(t) - s]}{\sigma(t) - s}\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{\sigma(t) - s} \cdot \{f(\sigma(t)) - f(s) - L[\sigma(t) - s]\}\right| \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{|\sigma(t) - s|} \cdot |f(\sigma(t)) - f(s) - L[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon$$

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - L[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \forall s \in U.$$

Portanto, f é delta diferenciável em t e $L = f^{\Delta}(t)$.

(iv) Vamos supor que f é delta diferenciável em t. Por (i) segue que f é contínua em t. Então, se t é discreto à direita, isto é $\sigma(t) > t$, por (ii) temos

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(t)} \Rightarrow f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$$

E, se t é denso à direita, isto é $\sigma(t) = t$, temos que $\mu(t) = \sigma(t) - t = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} & f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + 0 \cdot f^{\Delta}(t) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t) \\ \Rightarrow \quad & f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t). \end{aligned}$$

□

A seguir daremos alguns exemplos sobre estas propriedades.

Exemplo 2.2.5. *Sejam $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em t. Então, $f^{\Delta}(t) = f'(t) = f^{\nabla}(t)$.*

Como vimos no exemplo 2.1.2, para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ temos que t é denso. Assim, pelo Teorema 2.2.2 (iii) segue que

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

se o limite existe, o que coincide com a derivada usual na reta.

E pela definição 2.2.2 temos que

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

se o limite existe, o que coincide com a derivada usual na reta.

Portanto, $f^{\Delta}(t) = f'(t) = f^{\nabla}(t)$, para o caso contínuo.

Exemplo 2.2.6. *Sejam $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ diferenciável em t. Então, $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t)$ e $f^{\nabla}(t) = \nabla f(t)$.*

Como vimos no exemplo 2.1.3, para $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ temos que t é isolado. Logo, f é contínua. Então $f^{\nabla}(t)$ existe e $f^{\nabla}(t) = \frac{f(t)-f(\rho(t))}{\nu(t)}$. Pelo Teorema 2.2.2(ii) segue que $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$.

Portanto, pelos exemplos 2.1.3 e 2.1.6,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

onde Δ é o operador diferença de avanço. E,

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(t-1)}{1} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

onde ∇ é o operador diferença de récuo.

Exemplo 2.2.7. *Sejam $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ onde $q > 1$, $q^{\mathbb{Z}} := \{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciável em t. Então,*

$$f^{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{f(qt)-f(t)}{t(q-1)}, & se \quad t \neq 0, \\ \lim_{s \to t} \frac{f(s)-f(t)}{s-t}, & se \quad t = 0. \end{cases}$$

Para $t \neq 0$, vimos no exemplo 2.1.4 que t é discreto à direita. Assim, pelo Teorema 2.2.2(ii) segue que, para todo $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(qt) - f(t)}{qt - t} = \frac{f(qt) - f(t)}{t(q-1)}$$

Para $t = 0$, vimos no exemplo 2.1.4 que t é denso à direita. Assim, pelo Teorema 2.2.2(iii) segue que

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

desde que o limite exista.

A seguir mostraremos um resultado que descreve as propriedades de soma, produto e quociente de funções delta diferenciáveis.

Teorema 2.2.3. *Suponha $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ delta diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Então:*

(i) A soma $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

(ii) Para toda constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

(iii) O produto $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

(iv) Se $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, então $1/f$ é delta diferenciável em t com

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = \frac{-f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

(v) Se $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, então f/g é delta diferenciável em t e

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)) - f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

Demonstração. (i) Vamos supor f e g delta diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de t tais que

$$\begin{aligned} |[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_1 \\ |[g(\sigma(t)) - g(s)] - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_2. \end{aligned}$$

Seja $U = U_1 \cap U_2$, então

$$\begin{aligned} & |[(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s)] - [f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)][\sigma(t) - s]| \\ = \; & |f(\sigma(t)) + g(\sigma(t)) - f(s) - g(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\ = \; & |[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] + [g(\sigma(t)) - g(s)] - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\ \leq \; & |[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| + |[g(\sigma(t)) - g(s)] - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\ \leq \; & \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s| + \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s| \\ = \; & \varepsilon|\sigma(t) - s|, \forall s \in U. \end{aligned}$$

Portanto, $f + g$ é delta diferenciável em t e $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$.

(ii) Vamos supor f delta diferenciável em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de t, tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U \quad e \quad |\alpha| \neq 0$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} & |(\alpha f)(\sigma(t)) - (\alpha f)(s) - \alpha f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\ = \; & |\alpha f(\sigma(t)) - \alpha f(s) - \alpha f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\ = \; & |\alpha\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\}| \\ = \; & |\alpha| \cdot |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\ \leq \; & |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|}|\sigma(t) - s| \\ = \; & \varepsilon|\sigma(t) - s| \end{aligned}$$

Portanto, (αf) é delta diferenciável em t e $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$.

Se $\alpha = 0$, então αf é delta diferenciável em t, pois $\alpha f \equiv 0$ e $(\alpha f)^{\Delta} = \alpha f^{\Delta} \equiv 0$.

(iii) Vamos supor f e g delta diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Assim, dado $\varepsilon \in (0,1)$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de t tais que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_1$$

$$|[g(\sigma(t)) - g(s)] - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_2$$

onde $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^{\Delta}(t)|}$. Logo, $\varepsilon^* \in (0,1)$.

Como f é delta diferenciável, pelo Teorema 2.2.2(i), f é contínua em t. Então, existe uma vizinhança U_3 de t tal que

$$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon^*, \quad \forall s \in U_3.$$

Tomamos $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ e seja $s \in U$, então

$$\begin{aligned}
&|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - [f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)][\sigma(t) - s]| \\
&= |f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(s)g(s) - f^{\Delta}(t)g(t)[\sigma(t) - s] - f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\
&= |f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(s)g(s) - f^{\Delta}(t)g(t)[\sigma(t) - s] - f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \\
&\quad + f(\sigma(t))g(s) - f(\sigma(t))g(s) + g(t)f(\sigma(t)) - g(t)f(\sigma(t)) - g(t)f(s) \\
&\quad + g(t)f(s) - g(s)f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] + g(s)f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \\
&\quad + g(t)f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] - g(t)f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\
&= |f(\sigma(t))\{g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} + g(t)\{f(\sigma(t)) - f(s) \\
&\quad - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} + g(s)\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} \\
&\quad - g(t)\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} + g(s)f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \\
&\quad - g(t)f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\
&= |f(\sigma(t))\{g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} + g(t)\{f(\sigma(t)) - f(s) \\
&\quad - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} + [g(s) - g(t)]\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} \\
&\quad + [g(s) - g(t)]f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\
&\leq |f(\sigma(t))| \cdot |g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| + |g(t)||f(\sigma(t)) - f(s) \\
&\quad - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| + |g(s) - g(t)| \cdot |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \\
&\quad + |g(s) - g(t)| \cdot |f^{\Delta}(t)| \cdot |\sigma(t) - s| \\
&\leq |f(\sigma(t))|\varepsilon^*|\sigma(t) - s| + |g(t)|\varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*\varepsilon^*|\sigma(t) - s| \\
&\quad + \varepsilon^*|\sigma(t) - s| \cdot |f^{\Delta}(t)| \\
&= \varepsilon^*|\sigma(t) - s| \cdot [|f(\sigma(t))| + |g(t)| + \varepsilon^* + |f^{\Delta}(t)|] \\
&< \varepsilon^*|\sigma(t) - s| \cdot [1 + |f(\sigma(t))| + |g(t)| + |f^{\Delta}(t)|] \\
&= \varepsilon|\sigma(t) - s|
\end{aligned}$$

Portanto, (fg) é delta diferenciável em t e $(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$.

A outra igualdade é provada de forma análoga.

(iv) Temos que $f(t)\left(\dfrac{1}{f(t)}\right) = 1$, para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Logo, $\left(f \cdot \dfrac{1}{f}\right)^\Delta (t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Por (iii), obtemos

$$f^\Delta(t) \cdot \frac{1}{f(t)} + f(\sigma(t))\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta (t) = 0.$$

Assim, temos que $\dfrac{1}{f}$ é delta diferenciável com

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta (t) = \frac{-f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) Usando os itens (iii) e (iv), temos para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta (t) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)^\Delta (t) \\
&= f^\Delta(t)\left(\frac{1}{g}\right)(t) + f(\sigma(t))\left(\frac{1}{g}\right)^\Delta (t) \\
&= f^\Delta(t) \cdot \frac{1}{g(t)} + f(\sigma(t)) \cdot \left[\frac{-g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}\right] \\
&= \frac{f^\Delta(t)g(\sigma(t)) - f(\sigma(t))g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.
\end{aligned}$$

Portanto, (f/g) é diferenciável e

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta (t) = \frac{f^\Delta(t)g(\sigma(t)) - f(\sigma(t))g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

$\square$

A seguir um exemplo para ilustrar o teorema anterior.

Exemplo 2.2.8. *Sejam* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(t) = t$ *e* $g(t) = t^2$, *para todo* $t \in \mathbb{T}^\kappa$. *Então:*

(a) $(fg)^\Delta(t) = t^2 + t\sigma(t) + \sigma(t)^2$

Pelo Teorema 2.2.3(iii) temos,

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t).$$

Já vimos nos exemplos 2.2.2 e 2.2.3 que $f^\Delta(t) = 1$ *e* $g^\Delta(t) = t+\sigma(t)$, *respectivamente. Assim,*

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = 1(t^2) + \sigma(t)(t + \sigma(t)) = t^2 + t\sigma(t) + \sigma(t)^2.$$

(b) $(f + g)^\Delta(t) = 1 + t + \sigma(t)$

Pelo Teorema 2.2.3(i) temos,

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t) = 1 + t + \sigma(t).$$

Vimos no Teorema 2.2.3(iii) que o produto de duas funções delta diferenciáveis é delta diferenciável.

Então,

$$(f^2)^\Delta = (f \cdot f)^\Delta = f^\Delta f + f^\sigma f^\Delta = (f + f^\sigma)f^\Delta$$

Agora, vamos generalizar para a derivada de potência $(n + 1)$, isto é, $(f^{n+1})^\Delta$.

Usando a indução matemática, mostraremos que

$$(f^{n+1})^\Delta = \left\{\sum_{k=0}^{n} f^k (f^\sigma)^{n-k}\right\} f^\Delta.$$

Demonstração. Para $n = 1$.

$$\begin{aligned}(f^{1+1})^\Delta = (f^2)^\Delta &= \left\{\sum_{k=0}^{1} f^k (f^\sigma)^{1-k}\right\} f^\Delta = \left\{f^0(f^\sigma)^{1-0} + f^1(f^\sigma)^{1-1}\right\} f^\Delta \\ &= \{1(f^\sigma)^1 + f(f^\sigma)^0\}f^\Delta = \{f^\sigma + f \cdot 1\}f^\Delta = \{f^\sigma + f\}f^\Delta\end{aligned}$$

Vamos supor que o resultado é válido para $n = t$, então deve valer para $n = t + 1$. Assim, por hipótese temos

$$(f^{t+1})^\Delta = \left\{\sum_{k=0}^{t} f^k (f^\sigma)^{t-k}\right\} f^\Delta.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(f^{t+1+1})^{\Delta} = (f^{t+1}\cdot f)^{\Delta} &= (f^{t+1})^{\Delta} f + (f^{t+1})^{\sigma} f^{\Delta} \\
&= \left\{\sum_{k=0}^{t} f^k (f^{\sigma})^{t-k}\right\} f^{\Delta}\cdot f + (f^{t+1})^{\sigma} f^{\Delta} \\
&= \left\{\left[\sum_{k=0}^{t} f^k (f^{\sigma})^{t-k}\right] f + 1\cdot (f^{t+1})^{\sigma}\right\} f^{\Delta} \\
&= \left\{\left[\sum_{k=0}^{t} f^{k+1} (f^{\sigma})^{t-k}\right] + f^0 (f^{\sigma})^{t+1}\right\} f^{\Delta} \\
&= \{[f^1(f^{\sigma})^t + f^2 (f^{\sigma})^{t-1} + \cdots + f^{t+1}(f^{\sigma})^0] + f^0 (f^{\sigma})^{t+1}\} f^{\Delta} \\
&= \{f^0(f^{\sigma})^{t+1} + f^1(f^{\sigma})^t + f^2 (f^{\sigma})^{t-1} + \cdots + f^{t+1}(f^{\sigma})^0\} f^{\Delta} \\
&= \left\{\sum_{k=0}^{t+1} f^k (f^{\sigma})^{t-k+1}\right\} f^{\Delta}
\end{aligned}
$$

□

O próximo resultado nos fornece um outro método de achar a delta derivada para dois tipos de função.

Teorema 2.2.4. *Sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}^k$, α uma constante real e $m \in \mathbb{N}$,.*

(i) Para f definida por $f(t) = (t-\alpha)^m$, temos

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}$$

(ii) Para g definida por $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m}$, temos

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}(t-\alpha)^{\nu+1}}$$

onde $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$.

Demonstração. (i) Provaremos o resultado por indução.

Se $m = 1$, então $f(t) = (t-\alpha)^1 = (t-\alpha)$ e, claramente

$$f^{\Delta}(t) = (t-\alpha)^{\Delta} = t^{\Delta} - \alpha^{\Delta} = 1 - 0 = 1 = \sum_{\nu=0}^{0} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{0-\nu}.$$

Agora, vamos supor que o resultado é válido para $m = k$, logo

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{k-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{k-1-\nu} \quad para \quad f(t) = (t-\alpha)^k.$$

Mostraremos que o resultado é válido para $m = k+1$. Seja

$$F(t) = (t-\alpha)^{k+1} = (t-\alpha)^k(t-\alpha) = f(t)(t-\alpha).$$

Derivando $F(t)$ usando a regra do produto, temos:

$$\begin{aligned}
F^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)(t-\alpha) + f(\sigma(t))(t-\alpha)^{\Delta} \\
&= \left[\sum_{\nu=0}^{k-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{k-1-\nu}\right](t-\alpha) + f(\sigma(t))(1-0) \\
&= \left[\sum_{\nu=0}^{k-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{k-1-\nu}\right](t-\alpha) + f(\sigma(t)) \\
&= \left[\sum_{\nu=0}^{k-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{k-\nu}\right] + (\sigma(t)-\alpha)^k \\
&= \left[\sum_{\nu=0}^{k-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{k-\nu}\right] + (\sigma(t)-\alpha)^k(t-\alpha)^0 \\
&= \sum_{\nu=0}^{k}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{k-\nu}
\end{aligned}$$

Portanto, segue (i).

(ii) Temos, $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m}$, onde $t \neq \alpha$. Seja $(t-\alpha)^m = f(t)$. Logo, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

Se t é discreto ($\sigma(t) > t$) ou denso à direita ($\sigma(t) = t$), temos para ambos que

$$f(t)f(\sigma(t)) = (t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m \neq 0$$

portanto, podemos usar o Teorema 2.2.3(iv). Assim,

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \frac{-f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))} \\
&= \frac{-\sum\limits_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}}{(t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}}{(\sigma(t)-\alpha)^m(t-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}(t-\alpha)^{\nu+1}}
\end{aligned}$$

onde $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$. $\square$

Exemplo 2.2.9. *Vamos calcular a derivada de $f(t) = t^4$ e $g(t) = 1/t$.*

Demonstração. Temos $f(t) = t^4 = (t-0)^4$. Assim, $\alpha = 0$ e $m = 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \sum_{\nu=0}^{4-1}(\sigma(t)-0)^{\nu}(t-0)^{4-1-\nu} = \sum_{\nu=0}^{3}(\sigma(t))^{\nu}(t)^{3-\nu} \\ &= (\sigma(t))^0(t)^{3-0} + (\sigma(t))^1(t)^{3-1} + (\sigma(t))^2(t)^{3-2} + (\sigma(t))^3(t)^{3-3} \\ &= 1t^3 + \sigma(t)t^2 + (\sigma(t))^2 t + (\sigma(t))^3 t^0 = t^3 + \sigma(t)t^2 + (\sigma(t))^2 t + (\sigma(t))^3 \\ &= t^2(t+\sigma(t)) + (\sigma(t))^2(t+\sigma(t)) \\ &= (t+\sigma(t))(t^2 + (\sigma(t))^2) \end{aligned}$$

Agora, temos $g(t) = \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{(t-0)^1}$. Assim, $\alpha = 0$ e $m = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} g^{\Delta}(t) &= -\sum_{\nu=0}^{1-1}\frac{1}{(\sigma(t)-0)^{1-\nu}(t-0)^{\nu+1}} = -\sum_{\nu=0}^{0}\frac{1}{(\sigma(t))^{1-\nu}(t)^{\nu+1}} \\ &= -\frac{1}{(\sigma(t))^{1-0}(t)^{0+1}} = -\frac{1}{t\sigma(t)} \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.10. *Vamos calcular a derivada de $f(t) = \sigma(t)$ onde $\mathbb{T} = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.*

Primeiro, acharemos o operador de avanço σ de $\mathbb{T} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\} \cup \{0\}$.

Para $t \neq 0$, isto é, $t = \frac{1}{n}$, temos

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = \left\{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \cdots, 1\right\} = \frac{1}{n-1}.$$

Logo, $f(t) = \frac{1}{n-1}$. Colocando em função de t, temos $f(t) = \dfrac{t}{1-t}$.

Para $t = 0$,

$$\sigma(t) = inf\{t \in \mathbb{T}; s > t\} = \{\cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\} = 0 = t.$$

Logo, $f(t) = t$.

Agora, vamos calcular $f^{\Delta}(t)$ para os dois casos.

Para $t = 0$. Temos $f(t) = t = (t-0)^1$. Então,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \sum_{\nu=0}^{1-1}(t-0)^{\nu}(t-0)^{1-1-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{0}(t-0)^{\nu}(t-0)^{-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{0} 1 = 1 \end{aligned}$$

Para $t \neq 0$, temos $f(t) = \frac{t}{1-t} = -t \cdot \frac{1}{t-1} = h(t) \cdot g(t)$, em que $h(t) = -t$ e $g(t) = \frac{1}{t-1}$. Usando o Teorema 2.2.3(iii) encontramos,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= [h(t)g(t)]^{\Delta} = h^{\Delta}(t)g(t) + h(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= (-1)g(t) + (-\sigma(t))\left[-\sum_{\nu=0}^{1-1} \frac{1}{(\sigma(t)-1)^{1-\nu}(t-1)^{\nu+1}}\right], \end{aligned}$$

em que $(t-1)(\sigma(t)-1) \neq 0$, pois, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Assim,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= -g(t) + \sum_{\nu=0}^{0} \frac{\sigma(t)}{(\sigma(t)-1)^{1-\nu}(t-1)^{\nu+1}} = -g(t) + \frac{\sigma(t)}{(\sigma(t)-1)(t-1)} \\ &= -\frac{1}{t-1} + \frac{\frac{t}{1-t}}{\left(\frac{t}{1-t} - 1\right)(t-1)} = -\frac{1}{t-1} + \left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-t}{2t^2-3t+1}\right) \\ &= -\frac{1}{t-1} + \frac{t}{(2t-1)(t-1)} = \frac{-t+1}{(2t-1)(t-1)} \\ &= \frac{1}{1-2t} \end{aligned}$$

2.3 Integração

Nesta seção, definiremos classes de funções que são integráveis.

Definição 2.3.1. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada regrada se, seu limite(finito) lateral direito existir em todos os pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e, o seu limite (finito) lateral esquerdo existir em todos os pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$.*

Definição 2.3.2. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada rd-contínua se, f for contínua em pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e se, seu limite (finito) lateral esquerdo existir em pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$.*

O conjunto de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-contínuas é denotado por

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

O conjunto de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ que são delta diferenciáveis e cujas derivadas são rd-contínuas é denotado por

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

Teorema 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.*

(i) Se f é contínua, então f é rd-contínua.

(ii) Se f é rd-contínua, então f é regrada.

(iii) O operador de avanço σ é rd-contínuo.

(iv) Se f é regrada ou rd-contínua, então f^σ é regrada ou rd-contínua.

(v) Seja f contínua. Se $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é regrada ou rd-contínua, então $f \circ g$ é regrada ou rd-contínua.

Demonstração. (i) Suponha f contínua, então f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{T}$, em particular, em todos os pontos densos à direita de $\mathbb{T}$ e existe o limite de $f(t)$ em pontos t densos à esquerda em $\mathbb{T}$. Logo, f é rd-contínua.

(ii) Vamos supor f rd-contínua, então f é contínua em pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e o limite de $f(t)$ existe em pontos t densos à esquerda em $\mathbb{T}$.

Assim, como f é contínua em pontos densos à direita, então o limite de $f(t)$ existe em todos pontos t densos à direita em $\mathbb{T}$. Logo, f é regrada.

(iii) O operador de avanço é contínuo em pontos densos à direita em t.

De fato, t é denso à direita quando $\sigma(t) = t$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $|x - t| < \delta \Rightarrow |\sigma(x) - \sigma(t)| = |x - t| < \delta = \varepsilon$. Logo, σ é contínua em t denso à direita.

Seja $t \in \mathbb{T}$ denso à esquerda, então $\rho(t) = t$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ uma sequência crescente, tal que, $x_n < t$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = t$.

Além disso, $\sigma(x_n) = \{s \in \mathbb{T}; s > x_n\} = \inf\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\} = x_{n+1}$.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = t = \rho(t)$.

Portanto, existe $\lim\limits_{\xi\to t^-} \sigma(\xi) = t = \rho(t)$.

(iv) Vamos supor f rd-contínua. Por (iii) temos que $\sigma(t)$ é rd-contínua, daí segue que, $\sigma(t)$ é contínua em pontos densos à direita.

Seja t denso à direita, isto é, $\sigma(t) = t$. Logo, $\lim\limits_{s\to t^+} f(\sigma(s)) = f(\sigma(t))$.

Assim, f^σ é contínua em pontos densos á direita.

Seja t denso à esquerda, isto é, $\rho(t) = t$, então $\lim\limits_{s\to t^-} f(\sigma(s))$ existe, pois, σ e f são rd-contínuas.

Portanto, f^σ é rd-contínua.

Como f^σ é rd-contínua, segue por (ii) que f^σ é regrada.

(v) Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é rd-contínua, temos que g é contínua em pontos densos à direita em $\mathbb{T}$.

Seja t denso à direita em $\mathbb{T}$, obtemos

$$\lim_{s \to t^+} (f \circ g)(s) = \lim_{s \to t^+} f(g(s)) = f(g(t)).$$

Então, $(f \circ g)$ é contínua em pontos densos à direita em $\mathbb{T}$.

Seja t denso à esquerda em $\mathbb{T}$. Pela continuidade da f obtemos,

$$\lim_{s \to t^-} (f \circ g)(s) = \lim_{s \to t^-} (f(g(s))) = f(\lim_{s \to t^-} g(s)).$$

Como g é rd-contínua, segue que $\lim_{s \to t^-} (g(s))$ existe e, portanto $\lim_{s \to t^-} (f \circ g)(s) = f(\lim_{s \to t^-} g(s))$ existe.

Portanto, $(f \circ g)$ é rd-contínua.

Por conseguinte, $(f \circ g)$ é regrada por (ii). □

Definição 2.3.3. *A função contínua $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada de pré-diferenciável com região de diferenciação D, desde que $D \subset \mathbb{T}^\kappa$, $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ seja enumerável e não contenha elementos discretos à direita de $\mathbb{T}$ e f seja diferenciável em cada $t \in D$.*

Exemplo 2.3.1. *Seja $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{2,1}$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \in \cup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1], \\ t - 3k - 1, & se \quad t \in \cup_{k=0}^{\infty} [3k+1, 3k+2]. \end{cases}$$

Então, f é pré-diferenciável com

$$D := \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}.$$

Pelo exemplo 2.1.5, temos

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & se \quad t \in \cup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+2), \\ t+1, & se \quad t \in \cup_{k=0}^{\infty} \{3k+2\}. \end{cases}$$

Em $t \in \cup_{k=0}^{\infty} \{3k+2\}$, t é discreto à direita e f é delta diferenciável em $t \in D$.

Como $\mathbb{T}^\kappa \setminus D = \cup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$ é enumerável e não contém pontos discretos à direita de $\mathbb{T}$, segue que f é pré-diferenciável com $D := \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$.

Teorema 2.3.2. *Toda função regrada em um intervalo compacto é limitada.*

Demonstração. Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é não limitada, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [a, b]$ com $|f(t_n)| > n$.

Uma vez que $\{t_n; n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ e $[a, b]$ é compacto, toda sequência em $[a, b]$ possui uma subsequência convergente $\{t_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$$

para algum $t_0 \in [a, b]$.

Note que $t_0 \in \mathbb{T}$, pois $\{t_{n_k}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ e $\mathbb{T}$ é fechado.

Como $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$, t_0 não é ponto isolado. Então existe tanto uma sequência que tende a t_0 pela esquerda ou pela direita.

Como f é regrada, o limite lateral existe em qualquer caso quando $t \to t_0$. Absurdo.

Portanto, f é limitada. □

A seguir, o Teorema do Valor Médio para funções pré-diferenciáveis.

Teorema 2.3.3. *(Teorema do Valor Médio). Sejam f e g funções reais definidas em $\mathbb{T}$, ambas pré-diferenciáveis com região de diferenciação D. Se,*

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$$

para todo $t \in D$, então

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

para todo $r, s \in \mathbb{T}$, $r \leq s$.

Demonstração. Sejam $r, s \in \mathbb{T}$ com $r \leq s$ e defina $[r, s) \setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $\varepsilon > 0$.

Mostraremos por indução que

$$S(t): \quad |f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right)$$

vale para todo $t \in [r, s]$.

Mostrando isso, a afirmação do Teorema do Valor Médio é válida.

Para isso, usaremos o Teorema 2.1.1.

I) A afirmação $S(r)$ é trivialmente satisfeita, pois

$$\begin{aligned} 0 &= |f(r) - f(r)| \leq g(r) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<r} 2^{-n}\right) \\ &= \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right) \end{aligned}$$

II) Seja t discreto à direita e suponha que $S(t)$ vale. Então, $t \in D$ e $t < \sigma(t)$.

$$
\begin{aligned}
S(\sigma(t)) : |f(\sigma(t)) - f(r)| &= |\mu(t)f^{\Delta}(t) + f(t) - f(r)| \\
&\leq |\mu(t)f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&= \mu(t)|f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \mu(t)g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right) \\
&= g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}\right) \\
&< g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left(\sigma(t) - r + \sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto, $S(\sigma(t))$ é satisfeita.

III) Vamos supor que $S(t)$ vale e $t \neq s$ é denso à direita, isto é, $\sigma(t) = t$.

Consideremos 2 casos: $t \in D$ e $t \notin D$.

Primeiramente, vamos supor que $t \in D$. Então, f e g são diferenciáveis em t, e dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|t - \tau| < \delta$, ou seja, (existe uma vizinhança U de t) então

$$|f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|, \quad \forall \tau \in U$$

e

$$|g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|, \quad \forall \tau \in U.$$

Temos,

$$|f(t) - f(\tau)| - |f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leq |f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
& |f(t) - f(\tau)| - |f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| \\
\Rightarrow\ & |f(t) - f(\tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| + |f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \\
\Rightarrow\ & |f(t) - f(\tau)| \leq \left[|f^{\Delta}(t)| + \frac{\varepsilon}{2}\right]|t - \tau|, \quad \forall \tau \in U
\end{aligned}
$$

E,

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| \leq g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t - \tau) \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| \leq g(t) - g(\tau) + g^{\Delta}(t)(\tau - t) \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|, \quad \forall \tau \in U
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$g^{\Delta}(t)(\tau - t) \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| - g(t) + g(\tau).$$

Assim, temos para todo $\tau \in U \cap (t, \infty)$.

$$
\begin{aligned}
S(\tau) : |f(\tau) - f(r)| &= |f(\tau) - f(t) + f(t) - f(r)| \\
&\le |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\le \left[|f^{\Delta}(t)| + \frac{\varepsilon}{2}\right] |t - \tau| + |f(t) - f(r)| \\
&\le \left[g^{\Delta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\right] |t - \tau| + |f(t) - f(\tau)| \\
&\le \left[g^{\Delta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\right] |t - \tau| + g(t) - g(r) + \varepsilon \left(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\right) \\
&= g^{\Delta}(t)|t - \tau| + \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&= g^{\Delta}(t)(\tau - t) + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau| - g(t) + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) \\
&\quad + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}t - \frac{\varepsilon}{2}\tau + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2}\tau - \frac{\varepsilon}{2}t - g(r) + \varepsilon t - \varepsilon r + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&= g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\right) \\
&= g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left(\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n}\right)
\end{aligned}
$$

Logo, $S(\tau)$ vale para todo $\tau \in U \cap (t, \infty)$.

Agora, vamos supor que $t \notin D$.

Então, $t = t_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Uma vez que f e g são pré-diferenciáveis, ambas são contínuas e, portanto, existe uma vizinhança U de t tal que

$$
|f(\tau) - f(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m}, \quad \tau \in U
$$

e

$$
|g(\tau) - g(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m}, \quad \tau \in U.
$$

Portanto,

$$
-\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m} \le g(\tau) - g(t) \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m} \Rightarrow g(t) \le g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2}2^{-m}
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(\tau)-f(r)| &= |f(\tau)-f(t)+f(t)-f(r)| \\
&\leq |f(\tau)-f(t)|+|f(t)-f(r)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{-m}+g(t)-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{-m}-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right)+g(\tau)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{-m} \\
&= \varepsilon\cdot 2^{-m}+g(\tau)-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right) \\
&\leq g(\tau)-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}2^{-n}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, $S(\tau)$ vale para todo $\tau \in U \cap (t,\infty)$.

IV) Agora, seja t denso à esquerda e suponha $S(\tau)$ verdadeira para todo $\tau < t$. Então,

$$\lim_{\tau\to t^-}|f(\tau)-f(r)| \leq \lim_{\tau\to t^-}\left\{g(\tau)-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}2^{-n}\right)\right\}$$

Como f e g são contínuas em t,

$$|f(t)-f(r)| \leq g(t)-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right).$$

Assim, $S(t)$ é verdadeira e segue o resultado. $\square$

Corolário 2.3.4. *Sejam f e g pré-diferenciáveis com região de diferenciação D.*

(i) Se U é um intervalo compacto com extremos $r, s \in \mathbb{T}$, então

$$|f(s)-f(r)| \leq \left\{\sup_{t\in U^k\cap D}|f^{\Delta}(t)|\right\}|s-r|$$

(ii) Se $f^{\Delta}(t)=0$, para todo $t \in D$, então f é uma função constante.

(iii) Se $f^{\Delta}(t)=g^{\Delta}(t)$, para todo $t\in D$, então

$$g(t)=f(t)+C$$

para todo $t \in \mathbb{T}$ em que C é uma constante.

Demonstração. (i) Vamos supor que f é pré-diferenciável com D e sejam $r, s \in \mathbb{T}$ com $r \leq s$. Definimos,

$$g(t) := \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (t - r), \quad para \quad t \in \mathbb{T}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \left[\left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (t - r) \right]^{\Delta} \\
&= \left[\left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} t - \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} r \right]^{\Delta} \\
&= \left[\left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} t \right]^{\Delta} - \left[\left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} r \right]^{\Delta} \\
&= \left[\left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} \right] - [0] \\
&= \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \\
&\geq |f^{\Delta}(t)|, \quad \forall t \in D \cap [r, s]^k.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.3,

$$|f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r), \quad \forall t \in [r, s],$$

de modo que

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(r)| &\leq g(s) - g(r), \quad \forall s, r \in \mathbb{T} \\
&= \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (s - r) - \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (r - r) \\
&= \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (s - r) \\
&\leq \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} |s - r|.
\end{aligned}$$

(ii) Se $f^{\Delta}(t) = 0$, para todo $t \in D$, temos por (i) que

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U^k \cap D} |0| \right\} |s - r| \leq 0|s - r| = 0.$$

O que implica,

$$|f(s) - f(r)| \leq 0 \Leftrightarrow f(s) - f(r) = 0 \Leftrightarrow f(s) = f(r).$$

Então, $f(s) = f(r)$ para todo $r, s \in \mathbb{T}$.

Portanto, f é uma função constante.

(iii) $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t) \Leftrightarrow g^{\Delta}(t) - f^{\Delta}(t) = 0 \Leftrightarrow (g - f)^{\Delta}(t) = 0.$

Pelo item (ii), segue que, $(g - f)$ é uma função constante.

Portanto,

$$(g - f)(t) = C \Leftrightarrow g(t) - f(t) = C \Leftrightarrow g(t) = f(t) + C,$$

em que C é uma constante.

□

A seguir o teorema da existência de pré-antiderivada.

Teorema 2.3.5. *(Existência da pré-antiderivada). Seja f uma função regrada. Então, existe uma função F que é pré-diferenciável com região de diferenciação D tal que,*

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

para todo $t \in D$.

Demonstração. Veja [1, Teorema 8.13] □

Definição 2.3.4. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função regrada. Qualquer função F como no Teorema 2.3.5 é chamada pré-antiderivada de f. Definimos a integral indefinida de uma função regrada f por,*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

onde C é uma constante arbitrária e F é uma pré-antiderivada de f. Definimos a integral de Cauchy por

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

para todo $r, s \in \mathbb{T}$. A função $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada de antiderivada de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e é dada por

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Exemplo 2.3.2. *A integral*

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a - 1} + C,$$

onde $a \neq 1$ é uma constante e $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Como $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, segue que t é discreto à direita ($\sigma(t) = t + 1 > t$) e f é contínua, e por conseguinte f é diferenciável em t. Assim, $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$.

Como f é contínua, temos que f é regrada e, então existe uma função F pré-diferenciável tal que $F^{\Delta}(t) = f(t)$ e $\int f(t)\Delta t = F(t) + C$.

Note que,

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \frac{\frac{a^{\sigma(t)}}{a-1} - \frac{a^t}{a-1}}{1} = \frac{a^{t+1}}{a-1} - \frac{a^t}{a-1} = \frac{a^t(a-1)}{a-1} = a^t.$$

Logo,

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C.$$

Teorema 2.3.6. *(Existência de antiderivadas) Cada função rd-contínua tem uma antiderivada. Em particular, se $t_0 \in \mathbb{T}$, então F definida por*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau, \quad t > t_0$$

para todo $t \in \mathbb{T}$ é uma antiderivada de f.

Demonstração. Seja f uma função rd-contínua. Assim, pelo Teorema 2.3.1(ii), f é regrada. Como f é uma função regrada, garantimos pelo Teorema 2.3.5 que existe uma função F pré-diferenciável com região D de diferenciação e

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \forall t \in D.$$

Temos que $D \subset \mathbb{T}^{\kappa}$ e $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ é enumerável e não contém elementos discretos à direita de $\mathbb{T}$.

Devemos mostrar que $F^{\Delta}(t) = f(t)$ vale para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Seja $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$, então t é denso à direita. Como f é rd-contínua, f é contínua em pontos densos à direita em $\mathbb{T}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (ou seja, uma vizinhança à direita U de t) tal que $|t - s| < \delta \Rightarrow$

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

para todo $s \in U$.

Definimos,

$$h(\tau) := F(\tau) - f(t)(\tau - t_0)$$

para $\tau \in \mathbb{T}$.

Então, h é pré-diferenciável com D e temos:

$$\begin{aligned} h^{\Delta}(\tau) &= [F(\tau) - f(t)(\tau - t_0)]^{\Delta} \\ &= F^{\Delta}(\tau) - [f(t)(\tau - t_0)]^{\Delta} \\ &= f(\tau) - f(t), \end{aligned}$$

para todo $\tau \in D$.

Assim,

$$|h^{\Delta}(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon, \forall s \in D \cap U.$$

Logo,

$$\sup_{s \in D \cap U} |h^{\Delta}(s)| \leq \varepsilon.$$

Portanto, pelo Corolário 2.3.4(i), temos para $r \in U$,

$$\begin{aligned}
|F(t) - F(r) - f(t)(t-r)| &= |h(t) + f(t)(t-t_0) - [h(r) + f(t)(r-t_0)] - f(t)(t-r)| \\
&= |h(t) + f(t)t - f(t)t_0 - h(r) - f(t)r + f(t)t_0 \\
&\qquad -f(t)t + f(t)r| \\
&= |h(t) - h(r)| \\
&\leq \left\{ \sup_{s \in U \cap D} |f^{\Delta}(s)| \right\} |t-r| \\
&\leq \varepsilon |t-r|
\end{aligned}$$

Assim, F é diferenciável em t e $F^{\Delta}(t) = f(t)$. □

Teorema 2.3.7. *Se $f \in C_{rd}$ e $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ então*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t).$$

Demonstração. Como f é rd-contínua, pelo Teorema 2.3.6, existe uma antiderivada F de f, e pelo Teorema 2.2.2(iv), temos

$$\begin{aligned}
\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau) &= F(\sigma(t)) - F(t) \\
&= F(t) + \mu(t)F^{\Delta}(t) - F(t) \\
&= F^{\Delta}(t)\mu(t) = f(t)\mu(t) \\
&= \mu(t)f(t)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.8. *Se $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C_{rd}$, então:*

(i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$

(ii) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t.$

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$

(iv) $\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \int\limits_a^c f(t)\Delta t + \int\limits_c^b f(t)\Delta t.$

(v) $\int\limits_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int\limits_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t.$

(vi) $\int\limits_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int\limits_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

(vii) $\int\limits_a^a f(t)\Delta t = 0.$

(viii) *Se* $|f(t)| \leq g(t)$ *em* $[a,b)$*, então* $\left|\int\limits_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int\limits_a^b g(t)\Delta t.$

(ix) *Se* $f(t) \geq 0$*, para todo* $a \leq t < b$*, então* $\int\limits_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

Demonstração. Como f e g são rd-contínuas, pelo Teorema 2.3.6, elas possuem antiderivadas F e G, respectivamente.

(i) Como $f, g \in C_{rd}$, segue que $f + g \in C_{rd}$ e pelo Teorema 2.3.6 $(F + G)$ é sua antiderivada de modo que

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b (f+g)\Delta t &= (F+G)(b) - (F+G)(a)\\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a)\\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int\limits_a^b f(t)\Delta t + \int\limits_a^b g(t)\Delta t\end{aligned}$$

(ii) Como $f \in C_{rd}$ e pelo Teorema 2.3.6 F é sua antiderivada. Logo, αF é uma antiderivada de αf sw modo que

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b (\alpha f)(t)\Delta t &= (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a)\\ &= \alpha F(b) - \alpha F(a)\\ &= \alpha(F(b) - F(a))\\ &= \alpha\int\limits_a^b f(t)\Delta t\end{aligned}$$

(iii) Como $f \in C_{rd}$, pelo Teorema 2.3.6, F é sua antiderivada. Logo,

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int\limits_b^a f(t)\Delta t$$

(iv) Da mesma maneira, F é uma antiderivada de f. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\Delta t &= F(b) - F(a) \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t\end{aligned}$$

(v) Note que fg é uma antiderivada de $f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g$, então

$$\begin{aligned}(fg)(b) - (fg)(a) &= \int_a^b (f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g)\Delta t \\ &= \int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t + \int_a^b f^\Delta g(t)\Delta t\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t.$

(vi) Analogamente ao item (v), temos

$$(fg)(b) - (fg)(a) = \int_a^b (fg^\Delta + f^\Delta g^\sigma)(t)\Delta t = \int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t + \int_a^b f^\Delta g(\sigma(t))\Delta t$$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

(vii) $\int_a^a f(t)\Delta t = F(a) - F(a) = 0.$

(viii) Como $f, g \in C_{rd}$, então para $a \in \mathbb{T}$, temos que

$$F(t) := \int_a^t f(\tau)\Delta\tau, \quad t \in \mathbb{T} \quad e$$

$$G(t) := \int_a^t g(\tau)\Delta\tau, \quad t \in \mathbb{T}$$

são uma antiderivada de f e g, respectivamente, tais que

$$F^\Delta(t) = f(t) \quad e \quad G^\Delta(t) = g(t), \quad para \quad todo \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Logo, por hipótese, temos

$$|F^\Delta(t)| \leq G^\Delta(t), \quad para \quad todo \quad t \in [a, b).$$

Assim, pelo Teorema 2.3.3, temos

$$|F(b) - F(a)| \leq G(b) - G(a).$$

Logo, como $F(a) = G(a) = 0$, por (vii), temos $|F(b)| \leq G(b)$, isto é,

$$\left| \int_a^b f(\tau)\Delta\tau \right| \leq \int_a^b g(\tau)\Delta\tau.$$

(ix) Por (viii), temos $|g(t)| \leq f(t)$ em $[a, b)$. Então, $\left| \int_a^b g(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b f(t)\Delta t$.

Seja $g(t) = 0$, então $f(t) \geq |0| = 0$, para todo $a \leq t < b$.

Portanto, $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$.

□

As fórmulas (v) e (vi) são chamadas de integração por partes.

Teorema 2.3.9. *Se $f^\Delta \geq 0$, então f é não-decrescente.*

Demonstração. Seja $f^\Delta \geq 0$ em $[a, b]$ e seja $s, t \in \mathbb{T}$ com $a \leq s \leq t \leq b$.

Então,

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau)\Delta\tau \geq f(s).$$

Portanto, f é não-decrescente. □

O Teorema a seguir nos fornece o resultado das deltas integrais de uma função rd-contínua para algumas escalas temporais. E por fim, definimos a integral imprópria.

Teorema 2.3.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{T}$ e $f \in C_{rd}$.*

(i) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

onde a integral à direita é a integral de Riemann usual.

(ii) Se $[a, b]$ consiste em apenas pontos isolados, então

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t), & se \quad a < b, \\ 0, & se \quad a = b, \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t), & se \quad a > b. \end{cases}$$

(iii) Se $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$*, onde* $h > 0$*, então*

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & se \quad a < b, \\ 0, & se \quad a = b, \\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & se \quad a > b. \end{cases}$$

(iv) Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$*, então*

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t), & se \quad a < b, \\ 0, & se \quad a = b, \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t), & se \quad a > b. \end{cases}$$

Demonstração. (i) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, vimos pelo exemplo 2.2.5 que a delta derivada coincide com a derivada usual.

Portanto, se $f \in C_{rd}$ temos que F é sua antiderivada e $F^{\Delta}(t) = F'(t) = f(t)$.

Logo,

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

(ii) Note que $[a, b]$ contém apenas um número finito de pontos, pois cada ponto de $[a, b]$ é isolado. Além disso, $\sigma(t) > t$.

Suponha que $a < b$ e seja $[a, b] = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, onde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, em que $\sigma(t_{i-1}) = t_i$, $i = 1, ..., n$.

Pelo Teorema 2.3.8 (iv) e pelo Teorema 2.3.7 segue,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\Delta t &= \int_{t_0}^{t_1} f(t)\Delta t + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\Delta t + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i)f(t_i) \\ &= \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) \end{aligned}$$

Vamos supor que $a > b$.

Pelo Teorema 2.3.8 (iii) temos,

$$\sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) = \int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t = -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t).$$

Por fim, vamos supor que $a = b$. Então,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^a f(t)\Delta t = 0$$

pelo Teorema 2.3.8 (vii).

(iii) Seja $\mathbb{T} = \{\cdots, -2h, -1h, 0, 1h, 2h, \cdots\}$. Note que t é discreto para todo $t \in \mathbb{T}$, pois para $t = hk$, temos

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = \inf\{h(k+1), h(k+2), \cdots\} = h(k+1) > hk = t.$$

Então, $\mu(t) = \sigma(t) - t = h(k+1) - hk = h$ e

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\} = \sup\{\cdots, h(k-2), h(k-1)\} = h(k-1) < hk = t.$$

Seja $[a, b] \subset \mathbb{T}$ que contém apenas pontos isolados, pois $\mathbb{T}$ é discreto. Então, recaímos ao caso (ii).

Seja $a < b$, $b = a + ph$ para $p \in \mathbb{N}$ e $t_{i-1} = a + (i-1)h$ onde $1 \leq i \leq p$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\Delta t &= \sum_{i=1}^{p} \mu(t_{i-1}) f(t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p} h \cdot f(a + (i-1)h) \\
&= \sum_{i=1}^{p} h \cdot f\left(\frac{a}{h}h + (i-1)h\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} h \cdot f\left(\left[\frac{a}{h} + (i-1)\right] h\right)
\end{aligned}$$

Se $k = \frac{a}{h} + (i-1)$, para $i = 1$ temos $k = \frac{a}{h}$ e para $i = p$ temos $k = \frac{a}{h} + p - 1 \Rightarrow kh = (a + ph) - h \Rightarrow kh = b - h \Rightarrow k = \frac{b}{h} - 1$.

Portanto,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h.$$

Se $a > b$, temos

$$\int_a^b f(t)\Delta t = -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h.$$

Se $a = b$, temos

$$\int_a^b f(t)\Delta t = 0.$$

(iv) Este item decorre do item (iii) com $h = 1$.

□

A seguir, uma tabela com os mais importantes exemplos de escalas temporais.

Escala Temporal $\mathbb{T}$	$\rho(t)$	$\sigma(t)$	$\mu(t)$	$f^{\Delta}(t)$	$\int_a^b f(t)\Delta t$
$\mathbb{R}$	t	t	0	$f'(t)$	$\int_a^b f(t)dt$
$\mathbb{Z}$	$t-1$	$t+1$	1	$\Delta f(t)$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t) \quad se \quad a<b$
$h\mathbb{Z}$	$t-h$	$t+h$	h	$\Delta f(t)$	$\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h \quad se \quad a<b$

Definição 2.3.5. *Se $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ e f é rd-contínua em $[a,\infty)$, então definimos a integral imprópria por*

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\Delta t$$

desde que, exista este limite e, dizemos que a integral imprópria converge neste caso. Se este limite não existe, então dizemos que a integral imprópria diverge.

3 Equação Linear de Primeira Ordem

Neste capítulo, iremos estudar o número complexo de Hilger, o conceito de função regressiva que é usado na definição da função exponencial. Esta é definida a partir da transformação cilindro, onde poderá ser usada como solução de uma equação dinâmica linear de primeira ordem. Além disso, mostraremos as propriedades da função exponencial. A principal referência é [1].

3.1 Plano Complexo de Hilger

Definição 3.1.1. *Para $h > 0$, definimos o número complexo de Hilger, eixo real de Hilger, eixo alternativo de Hilger e o círculo imaginário de Hilger como*

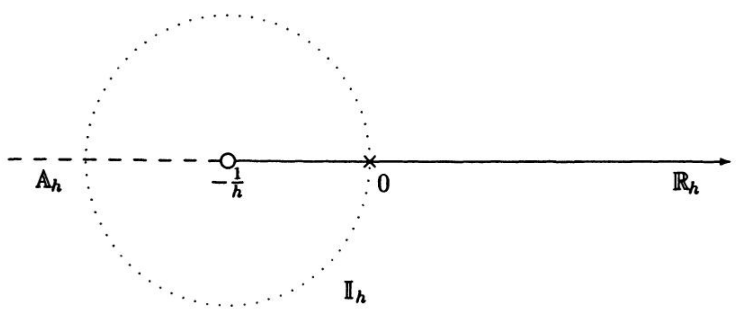
$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{-1}{h} \right\};\\
\mathbb{R}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \quad e \quad z > \frac{-1}{h} \right\};\\
\mathbb{A}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \quad e \quad z < \frac{-1}{h} \right\};\\
\mathbb{I}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\},
\end{aligned}$$

respectivamente.

Para $h = 0$, definimos $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 := i\mathbb{R}$ e $\mathbb{A}_0 := \emptyset$.

A figura 3, retirada de [1], p.52, ilustra os conjuntos definidos acima.

Figura 3 – Plano complexo de Hilger para $h > 0$



Definiremos agora a parte real e a parte imaginária do número complexo de Hilger.

Definição 3.1.2. *Seja $h > 0$ e $z \in \mathbb{C}_h$. Definimos a parte real de Hilger de z por*

$$Re_h(z) := \frac{|zh+1|-1}{h}$$

e a parte imaginária de Hilger de z por

$$Im_h(z) := \frac{Arg(zh+1)}{h},$$

onde $Arg(z)$ é chamado de argumento principal de z, (isto é, $-\pi < Arg(z) \leq \pi$).

Observação 3.1.1. *Note que $Re_h(z)$ e $Im_h(z)$ satisfazem*

$$\frac{-1}{h} < Re_h(z) < \infty \quad e \quad \frac{-\pi}{h} < Im_h(z) \leq \frac{\pi}{h},$$

respectivamente.

Em particular, $Re_h(z) \in \mathbb{R}_h$ e $iIm_h(z) \in \mathbb{I}_h$, para $z \in \mathbb{C}_h$.

Definição 3.1.3. *Seja $\frac{-\pi}{h} < w < \frac{\pi}{h}$. Definimos o número puramente imaginário de Hilger iw por,*

$$iw = \frac{e^{iwh}-1}{h}.$$

Teorema 3.1.1. *Se $\frac{-\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$, então*

$$|iw|^2 = \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{wh}{2}\right).$$

Demonstração. Pela definição 3.1.3, temos $iw = \dfrac{e^{iwh}-1}{h}$. E sabemos que $|iw|^2 = iw \cdot \overline{iw}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|iw|^2 &= iw \cdot \overline{iw} \\
&= \left(\frac{e^{iwh}-1}{h}\right) \cdot \left(\frac{e^{-iwh}-1}{h}\right) = \frac{e^{iwh}e^{-iwh} - e^{iwh} - e^{-iwh} + 1}{h^2} \\
&= \frac{e^0 - e^{iwh} - e^{-iwh} + 1}{h^2} = \frac{1 - e^{iwh} - e^{-iwh} + 1}{h^2} \\
&= \frac{2 - [cos(wh) + isen(wh)] - [cos(-wh) + isen(-wh)]}{h^2} \\
&= \frac{2 - cos(wh) - isen(wh) - cos(wh) + isen(wh)}{h^2} \\
&= \frac{2 - 2cos(wh)}{h^2} \\
&= \frac{2}{h^2}(1 - cos(wh)) \\
&= \frac{2}{h^2}\left[2sen^2\left(\frac{wh}{2}\right)\right] \\
&= \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{wh}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.2. *Se definirmos a adição* $\oplus$ *em* $\mathbb{C}_h$ *por*

$$z \oplus w := z + w + zwh,$$

então $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ *é um grupo abeliano.*

Demonstração. Mostraremos que $\mathbb{C}_h$ é fechado para adição $\oplus$, isto é, $z \oplus w \in \mathbb{C}_h$. Para $z, w \in \mathbb{C}_h$, $z \oplus w$ é um número complexo. Assim, resta mostrar que $z \oplus w \neq \frac{-1}{h}$, pois, $\mathbb{C}_h = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{-1}{h}\right\}$. Ou seja, mostraremos que $1 + h(z \oplus w) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
1 + h(z \oplus w) &= 1 + h(z + w + zwh) \\
&= 1 + hz + hw + hzwh \\
&= 1 + hz + hw(1 + hz) \\
&= (1 + hz)(1 + hw) \neq 0
\end{aligned}$$

pois $z, w \in \mathbb{C}_h$. Portanto, $\mathbb{C}_h$ é fechado para adição.

Mostraremos agora que $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ é um grupo abeliano. Para isto, $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ deve satisfazer os seguintes axiomas.

(i) (Associatividade)

Para quaisquer $z, w, y \in \mathbb{C}_h$,

$$(z \oplus w) \oplus y = z \oplus (w \oplus y).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
(z \oplus w) \oplus y &= (z + w + zwh) \oplus y \\
&= (z + w + zwh) + y + (z + w + zwh)yh \\
&= z + w + zwh + y + zyh + wyh + zwhyh \\
&= z + (w + y + wyh) + z(w + y + wyh)h \\
&= z \oplus (w + y + wyh) \\
&= z \oplus (w \oplus y)
\end{aligned}$$

(ii) (Existência de elemento neutro)

Existe o elemento $0 \in \mathbb{C}_h$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}_h$,

$$z \oplus 0 = 0 \oplus z = z.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
z \oplus 0 &= z + 0 + z0h = z \\
&\quad e \\
0 \oplus z &= 0 + z + 0zh = z
\end{aligned}$$

(iii) (Existência de inverso)

Para qualquer elemento $z \in \mathbb{C}_h$ existe um elemento $w = \dfrac{-z}{1+zh} \in \mathbb{C}_h$ tal que

$$z \oplus w = w \oplus z = 0.$$

Para verificar este fato, temos

$$\begin{aligned}
z \oplus w &= z \oplus \frac{-z}{1+zh} \\
&= z + \left(\frac{-z}{1+zh}\right) + z\left(\frac{-z}{1+zh}\right)h \\
&= \frac{z(1+zh) - z - zzh}{1+zh} = 0 \\
&e \\
w \oplus z &= \frac{-z}{1+zh} \oplus z \\
&= \left(\frac{-z}{1+zh}\right) + z + \left(\frac{-z}{1+zh}\right)zh \\
&= \frac{-z + z(1+zh) - zzh}{1+zh} = 0
\end{aligned}$$

(iv) (Comutatividade)

Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}_h$

$$z \oplus w = w \oplus z.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
z \oplus w &= z + w + zwh \\
&= w + z + wzh \\
&= w \oplus z
\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ é um Grupo Abeliano. $\square$

Teorema 3.1.3. *Para $z \in \mathbb{C}_h$ temos $z = Re_h(z) \oplus iIm_h(z)$.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C}_h$. Então,

$$\begin{aligned}
Re_h(z) \oplus iIm_h(z) &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus i\frac{Arg(zh+1)}{h} \\
&= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{e^{i\frac{Arg(zh+1)h}{h}} - 1}{h} \\
&= \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{e^{iArg(zh+1)}-1}{h} + \frac{|zh+1|-1}{h} \cdot \frac{e^{iArg(zh+1)}-1}{h} \cdot h \\
&= \frac{1}{h}\left[|zh+1| - 1 + e^{iArg(zh+1)} - 1 + (|zh+1|-1)(e^{iArg(zh+1)}-1)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}[|zh+1| - 1 + e^{iArg(zh+1)} - 1 + \\
&\quad |zh+1| \cdot e^{iArg(zh+1)} - |zh+1| - e^{iArg(zh+1)} + 1] \\
&= \frac{1}{h}[|zh+1| \cdot e^{iArg(zh+1)} - 1] \\
&= \frac{1}{h}[(zh+1) - 1] \\
&= \frac{1}{h}[zh] = z
\end{aligned}
$$

□

Observação 3.1.2. *Na demonstração do Teorema 3.1.2 vimos que se $z \in \mathbb{C}_h$ então, o inverso aditivo de z sob a operação $\oplus$ é*

$$\ominus z := -\frac{z}{1+zh}.$$

Assim, se $z \in \mathbb{C}_h$ temos que

$$\ominus(\ominus z) = z.$$

Demonstração. De fato, seja $z \in \mathbb{C}_h$, então

$$
\begin{aligned}
\ominus(\ominus z) &= \ominus\left(-\frac{z}{1+zh}\right) = -\frac{-\frac{z}{1+zh}}{1+\left(-\frac{z}{1+zh}\right)\cdot h} = -\frac{-\frac{z}{1+zh}}{\frac{1+zh-zh}{1+zh}} \\
&= -\left(-\frac{z}{1+zh}\right)\cdot(1+zh) = z
\end{aligned}
$$

□

Definição 3.1.4. *Definimos a subtração $\ominus$ em $\mathbb{C}_h$ por*

$$z \ominus w := z \oplus (\ominus w)$$

Definição 3.1.5. *Se $z \in \mathbb{C}_h$, o quadrado generalizado de z é definido por*

$$z^{②} := (-z)(\ominus z) = \frac{z^2}{1+zh}$$

A seguir algumas propriedades do quadrado generalizado.

Teorema 3.1.4. *Para* $z \in \mathbb{C}_h$,

$$(\ominus z)^{②} = z^{②}$$

$$1 + zh = \frac{z^2}{z^{②}}$$

$$z + (\ominus z) = z^{②} \cdot h$$

$$z \oplus z^{②} = z + z^2$$

$$z^{②} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h$$

$$e \text{ para, } -\frac{\pi}{h} < w < \frac{\pi}{h} \text{ temos, } -(iw)^{②} = \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{wh}{2}\right).$$

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C}_h$. Assim, para provar $(\ominus z)^{②} = z^{②}$ usamos a definição do quadrado generalizado.

$$\begin{aligned}(\ominus z)^{②} &= \frac{(\ominus z)^2}{1 + (\ominus z)h} = \frac{\left(-\dfrac{z}{1+zh}\right)^2}{1 + \left(-\dfrac{z}{1+zh}\right)h} = \frac{\dfrac{z^2}{(1+zh)^2}}{\dfrac{(1+zh) - zh}{1+zh}} = \frac{z^2}{(1+zh)^2} \cdot (1+zh) \\ &= \frac{z^2}{1+zh} = z^{②}\end{aligned}$$

A prova de $1 + zh = \dfrac{z^2}{z^{②}}$, segue diretamente da Definição 3.1.5.

$$z^{②} = \frac{z^2}{1+zh} \Rightarrow 1 + zh = \frac{z^2}{z^{②}}.$$

Mostramos que, $z + (\ominus z) = z^{②} \cdot h$:

$$z + (\ominus z) = z + \left(-\frac{z}{1+zh}\right) = \frac{z(1+zh) - z}{1+zh} = \frac{z^2 h}{1+zh} = z^{②} \cdot h.$$

Provemos que, $z \oplus z^{②} = z + z^2$:

$$\begin{aligned} z \oplus z^{②} &= z \oplus \frac{z^2}{1+zh} = z + \frac{z^2}{1+zh} + z \cdot \frac{z^2}{1+zh} \cdot h \\ &= \frac{z(1+zh) + z^2 + z^3 h}{1+zh} = \frac{z + z^2 h + z^2 + z^3 h}{1+zh} \\ &= \frac{zh(z+z^2) + (z+z^2)}{1+zh} = \frac{(z+z^2)(1+zh)}{1+zh} \\ &= z + z^2 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que, $z^{②} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h$.

Seja $z = u + iv$. Note que,

$$\begin{aligned}
z^{②} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z^2}{1+zh} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(u+iv)^2}{1+(u+iv)h} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{u^2+2iuv-v^2}{1+uh+ivh} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{u^2+2iuv-v^2}{1+uh+ivh} \cdot \frac{1+uh-ivh}{1+uh-ivh} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{(u^2+2iuv-v^2)(1+uh-ivh)}{1+2uh+u^2h^2+v^2h^2} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (u^2+2iuv-v^2)(1+uh-ivh) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow u^2+u^3h+uv^2h-v^2+iu^2vh+2iuv+iv^3h \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow i(u^2vh+2uv+v^3h) = 0 \\
&\Leftrightarrow u^2vh+2uv+v^3h = 0 \\
&\Leftrightarrow v(u^2h+2u+v^2h) = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \quad \text{ou} \quad u^2h+2u+v^2h = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \quad \text{ou} \quad \left(u+\frac{1}{h}\right)^2 - \frac{1}{h^2} + v^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \quad \text{ou} \quad \left(u+\frac{1}{h}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{h^2}
\end{aligned}$$

Note que,

se $v = 0 \Rightarrow z = u \in \mathbb{R}$ e como

$$z \in \mathbb{C}_h \Rightarrow z \neq \frac{-1}{h} \Rightarrow z > \frac{-1}{h} \quad \text{ou} \quad z < \frac{-1}{h} \Rightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h.$$

se $\left(u+\frac{1}{h}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{h^2}$, observe que, como $z = u + iv$, temos que

$$z + \frac{1}{h} = u + iv + \frac{1}{h} = \left(u + \frac{1}{h}\right) + iv$$

$$\Rightarrow \left|z + \frac{1}{h}\right| = \sqrt{\left(u+\frac{1}{h}\right)^2 + v^2} = \sqrt{\frac{1}{h^2}} = \frac{1}{h} \Rightarrow z \in \mathbb{I}_h.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
z^{②} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \quad \text{ou} \quad z \in \mathbb{I}_h \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h.
\end{aligned}$$

Por fim, mostraremos que $-(iw)^{②} = \dfrac{4}{h^2} sen^2\left(\dfrac{wh}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} -(iw)^{②} &= -[(-iw)(\ominus(iw))] = (iw)(\ominus(iw)) = (iw)(\overline{iw}) = |iw|^2 \\ &= \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{wh}{2}\right). \end{aligned}$$

□

A seguir definiremos a função Transformação Cilindro para definir na próxima seção a função exponencial generalizada.

Definição 3.1.6. *Para $h > 0$, definimos $\mathbb{Z}_h$ como*

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{h} < Im(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}$$

e para $h = 0$, definimos $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Definição 3.1.7. *Para $h > 0$, definimos a transformação cilindro $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ por*

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} Log(1 + zh)$$

onde Log é a função logarítmo principal. Para $h = 0$, definimos $\xi_0(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.1.5. *A transformação cilindro ξ_h é um homomorfismo de grupos de $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ para $(\mathbb{Z}_h, +)$, onde a soma $+$ em $\mathbb{Z}_h$ é definida por $z + w := z + w \left(mod \dfrac{2\pi i}{h} \right)$ para $z, w \in \mathbb{Z}_h$.*

Demonstração. Para $h > 0$ e para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}_h$, temos

$$\begin{aligned} \xi_h(z \oplus w) &= \frac{Log(1 + (z \oplus w)h)}{h} \\ &= \frac{Log(1 + (z + w + zwh)h)}{h} \\ &= \frac{Log[zh(1 + wh) + (1 + wh)]}{h} \\ &= \frac{Log[(1 + wh)(1 + zh)]}{h} \\ &= \frac{Log(1 + zh) + Log(1 + wh)}{h} \\ &= \xi_h(z) + \xi_h(w). \end{aligned}$$

Para $h = 0$ e para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}_h$, temos

$$\begin{aligned} \xi_0(z \oplus w) &= z \oplus w = z + w + zwh = z + w \\ &= \xi_0(z) + \xi_0(w). \end{aligned}$$

□

Agora, iremos estudar a função exponencial generalizada e suas propriedades. A principal referência é: [1].

Definição 3.2.1. *Dizemos que a função $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é regressiva se*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad para \quad todo \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

O conjunto de todas as funções regressivas e rd-contínuas $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é denotado por

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

.

Exemplo 3.2.1. *Sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(t) = 1$ e $g(t) = \sigma(t)$ em $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Então, $f \in \mathcal{R}$ e $g \notin \mathcal{R}$.*

Temos que a função constante e o operador de avanço são funções rd-contínuas. Mas, note que

$$1 + \mu(t)f(t) = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0, \quad para \quad todo \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa} \quad e$$

$$1 + \mu(t)g(t) = 1 + 1\sigma(t) = 1 + 1(t + 1) = t + 2 \neq 0, \quad para \qquad t \neq -2.$$

Portanto, $f \in \mathcal{R}$ e $g \notin \mathcal{R}$.

Observação 3.2.1. *Sejam $p, q \in \mathcal{R}$, então as funções*

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) \quad e \quad (\ominus p)(t) = -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

são também elementos de $\mathcal{R}$.

Demonstração. De fato,

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) \text{ e } (\ominus p)(t) = -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \text{ são rd-contínuas}$$

pois p, q são rd-contínuas.

Além disso, $(p \oplus q)(t)$ e $(\ominus p)$ são regressivas, pois como p, q são regressivas temos $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ e $1 + \mu(t)q(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Assim,

$$\begin{aligned}
1 + \mu(t)(p \oplus q)(t) &= 1 + \mu(t)[p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)] \\
&= 1 + \mu(t)p(t) + \mu(t)q(t) + \mu^2(t)p(t)q(t) \\
&= (\mu(t)p(t))(1 + \mu(t)q(t)) + 1 + \mu(t)q(t) \\
&= [1 + \mu(t)q(t)][\mu(t)p(t) + 1] \neq 0 \quad e
\end{aligned}$$

$$1 + \mu(t)\left[-\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}\right] = \frac{1 + \mu(t)p(t) - \mu(t)p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} = \frac{1}{1 + \mu(t)p(t)} \neq 0.$$

□

Observação 3.2.2. *$\mathcal{R}$ é um grupo Abeliano sob a adição $\oplus$ definida por*

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^\kappa,\ p, q \in \mathcal{R}.$$

Este grupo é chamado de grupo Regressivo.

Demonstração. (i) (Associatividade)

Para quaisquer $p, q, w \in \mathcal{R}$,

$$[(p \oplus q) \oplus w](t) = [p \oplus (q \oplus w)](t).$$

Temos,

$$\begin{aligned}
[(p \oplus q) \oplus w](t) &= (p \oplus q)(t) + w(t) + \mu(t)(p \oplus q)(t)w(t) \\
&= p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) + w(t) \\
&\quad + \mu(t)[p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)]w(t) \\
&= p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) + w(t) + p(t)\mu(t)w(t) + \mu(t)q(t)w(t) \\
&\quad + \mu^2(t)p(t)q(t)w(t) \\
&= p(t) + [q(t) + w(t) + \mu(t)q(t)w(t)] \\
&\quad + \mu(t)[q(t) + w(t) + \mu(t)q(t)w(t)]p(t) \\
&= p(t) + (q \oplus w)(t) + \mu(t)p(t)(q \oplus w)(t) \\
&= [p \oplus (q \oplus w)](t), \forall t \in \mathbb{T}^k
\end{aligned}$$

(ii) (Existência de elemento neutro)

Existe a função $0 \in \mathcal{R}$ tal que, para toda $p \in \mathcal{R}$,

$$(p \oplus 0)(t) = (0 \oplus p)(t) = p(t).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(p \oplus 0)(t) &= p(t) + 0 + \mu(t)p(t)0 = p(t) \\
&= 0 + p(t) + \mu(t)0p(t) \\
&= (0 \oplus p)(t), \forall t \in \mathbb{T}^k
\end{aligned}$$

(iii) (Existência do inverso)

Para qualquer função $p \in \mathcal{R}$, existe um elemento $q(t) = -\dfrac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \in \mathcal{R}$ tal que

$$(p \oplus q)(t) = (q \oplus p)(t) = 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}(p \oplus q)(t) &= p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)\\ &= p(t) + \left(-\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right) + \mu(t)p(t)\left(-\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right)\\ &= \frac{p(t) + \mu(t)p^2(t) - p(t) - \mu(t)p^2(t)}{1+\mu(t)p(t)} = 0, \forall t \in \mathbb{T}^\kappa \quad e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(q \oplus p)(t) &= q(t) + p(t) + \mu(t)q(t)p(t)\\ &= \left(-\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right) + p(t) + \mu(t)\left(-\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right)p(t)\\ &= \frac{-p(t) + p(t) + \mu(t)p^2(t) - \mu(t)p^2(t)}{1+\mu(t)p(t)} = 0, \forall t \in \mathbb{T}^\kappa\end{aligned}$$

(iv) (Comutatividade)

Para quaisquer $p, q \in \mathcal{R}$,

$$(p \oplus q)(t) = (q \oplus p)(t).$$

$$\begin{aligned}(p \oplus q)(t) &= p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)\\ &= q(t) + p(t) + \mu(t)q(t)p(t)\\ &= (q \oplus p)(t), \forall t \in \mathbb{T}^\kappa\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{R}, \oplus)$ é um grupo Abeliano. □

Definição 3.2.2. *Definimos a subtração $\ominus$ em $\mathcal{R}$ por*

$$(p \ominus q) := (p \oplus (\ominus q))(t), \quad para \quad todo \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

Agora, definiremos a função exponencial generalizada e mais adiante veremos que esta, será uma solução para um problema de valor inicial.

Definição 3.2.3. *Seja $p \in \mathcal{R}$, definimos a função exponencial generalizada por*

$$e_p(t,s) = exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)$$

para $s, t \in \mathbb{T}$.

Lema 3.2.1. *Se $p \in \mathcal{R}$, então a propriedade de semigrupo*

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s)$$

para quaisquer $r, s, t \in \mathbb{T}$ é satisfeita.

Demonstração. Sejam $p \in \mathcal{R}$ e $r, s, t \in \mathbb{T}$. Então,

$$\begin{aligned} e_p(t,r)e_p(r,s) &= exp\left(\int_r^t \xi_\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau\right) exp\left(\int_s^r \xi_\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= exp\left(\int_r^t \xi_\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau + \int_s^r \xi_\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= exp\left(\int_s^t \xi_\mu(\tau)(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= e_p(t,s) \end{aligned}$$

□

Definição 3.2.4. *Suponha $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então a equação*

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$$

é chamada equação dinâmica de primeira ordem. Se

$$f(t,y,y^\sigma) = f_1(t)y + f_2(t) \quad ou \quad f(t,y,y^\sigma) = f_1(t)y^\sigma + f_2(t)$$

para funções $f_1, f_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, então $y^\Delta = f(t,y,y^\sigma)$ é chamada equação linear. A função $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada uma solução de $y^\Delta = f(t,y,y^\sigma)$ se,

$$y^\Delta = f(t, y(t), y(\sigma(t))) \quad \text{é} \quad satisfeita \quad para \quad todo \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

A solução geral de $y^\Delta = f(t,y,y^\sigma)$ é definida como o conjunto de todas as soluções de $y^\Delta = f(t,y,y^\sigma)$. Dados $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, problema

$$y^\Delta = (t, y, y^\sigma), \quad y(t_0) = y_0$$

é chamado problema de valor inicial (PVI) e a solução y de $y^\Delta = f(t,y,y^\sigma)$ com $y(t_0) = y_0$ é chamada de solução deste PVI.

Definição 3.2.5. *Seja $p \in \mathcal{R}$, definimos a equação dinâmica linear de primeira ordem*

$$y^\Delta = p(t)y$$

é chamada regressiva.

Teorema 3.2.2. *Seja $y^\Delta = p(t)y$ regressiva e fixemos $t_0 \in \mathbb{T}$. Então, $e_p(\cdot, t_0)$ é uma solução do problema de valor inicial,*

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

em $\mathbb{T}$.

Demonstração. Mostraremos que $y(t) = e_p(t, t_0)$ satisfaz a equação dinâmica $y^{\Delta} = p(t)y$.

Fixemos $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$ e seja $y^{\Delta} = p(t)y$ regressiva.

Primeiramente, note que

$$y(t_0) = e_p(t_0, t_0) = exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = exp(0) = 1$$

pelo teorema 2.3.8(vii).

Agora, fixemos $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Caso 1: Seja $\sigma(t) > t$.

$$y^{\Delta} = e_p^{\Delta}(t, t_0) = \frac{e_p(\sigma(t), t_0) - e_p(t, t_0)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - exp\left(-\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - \dfrac{1}{exp\left(\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\dfrac{exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) exp\left(\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{exp\left(\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\dfrac{exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau + \int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{exp\left(\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\dfrac{exp\left(\int\limits_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{exp\left(\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}}{\mu(t)} = \frac{exp\left(\int\limits_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{exp\left(\int\limits_{t}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)\mu(t)}$$

$$= \frac{exp\left(\int\limits_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)\mu(t)} = \frac{exp\left(\int\limits_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{\frac{\mu(t)}{exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}}$$

$$= \frac{exp\left(\int\limits_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \frac{e^{(\xi_{\mu(t)}p(t))\mu(t)} - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0) = \frac{e^{\frac{1}{\mu(t)}[Log(1+p(t)\mu(t))]\mu(t)} - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \frac{1 + p(t)\mu(t) - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0) = p(t)e_p(t, t_0).$$

Caso 2: Seja $\sigma(t) = t$. Se $y(t) = e_p(t, t_0)$, mostraremos que $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)$ por definição. Assim,

$$|y(\sigma(t)) - y(s) - p(t)y(t)(\sigma(t) - s)| = |y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t - s)|$$

$$= |e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t - s)|$$

$$= |e_p(t, t_0) - e_p(s, t)e_p(t, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t - s)|$$

$$= |[e_p(t, t_0)][1 - e_p(s, t) - p(t)(t - s)]| = |e_p(t, t_0)||1 - e_p(s, t) - p(t)(t - s)|$$

$$= |e_p(t, t_0)| \left|1 - \int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t) + \int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t - s)\right|$$

$$\leq |e_p(t, t_0)| \left|1 - \int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right| + |e_p(t, t_0)|$$
$$\left|\int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t - s)\right|$$

$$= |e_p(t, t_0)| \left|1 - \int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right| + |e_p(t, t_0)|$$
$$\left|\int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - \xi_0(p(t))(t - s)\right|$$

$$\leq |e_p(t, t_0)| \left|1 - \int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right| + |e_p(t, t_0)|$$
$$\left|\int\limits_{s}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - \int\limits_{s}^{t} \xi_0(p(t))\Delta\tau\right|$$

$$\leq |e_p(t,t_0)|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t)\right| + |e_p(t,t_0)|\left|\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau\right|.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe uma vizinhança U de t tal que

$$|e_p(t,t_0)|\cdot\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t)\right| + |e_p(t,t_0)|\cdot\left|\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau\right| < \varepsilon|t-s|.$$

Primeiramente, mostraremos que

$$|e_p(t,t_0)|\cdot\left|\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau\right| < \frac{\varepsilon}{3}|t-s|.$$

Como $\sigma(t) = t$ e $p \in C_{rd}$, segue que,

$$\lim_{r\to t} \xi_{\mu(r)}(p(r)) = \xi_0(p(t)).$$

Isto implica que, exite uma vizinhança U_1 de t tal que

$$|\xi_{\mu(r)}(p(r)) - \xi_0(p(t))| < \frac{\varepsilon}{3|e_p(t,t_0)|}, \quad \forall r \in U_1.$$

Seja $s \in U_1$. Então,

$$|e_p(t,t_0)|\cdot\left|\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau\right| < |e_p(t,t_0)|\cdot\left|\int_s^t \frac{\varepsilon}{3(e_p(t,t_0))}\Delta\tau\right| = \frac{\varepsilon}{3}|t-s|.$$

Agora, mostraremos que

$$|e_p(t,t_0)|\cdot\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t)\right| < \frac{2}{3}\varepsilon|t-s|.$$

Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-z-e^{-z}}{z} = 0.$$

Portanto, existe uma vizinhança U_2 de t, tal que se, $s \in U_2$ com $s \neq t$ então

$$\left|\frac{1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau}\right| < \varepsilon^*,$$

em que

$$\varepsilon^* = min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3|p(t)e_p(t,t_0)|}\right\}.$$

Seja $s \in U := U_1 \cap U_2$. Então,

$$|e_p(t,t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t) \right| =$$

$$= |e_p(t,t_0| \cdot \left| \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau} \right| \cdot \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right|$$

$$< |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right|$$

$$= |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t-s) + p(t)(t-s) \right|$$

$$\leq |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - \int_s^t \xi_0(p(t))\Delta\tau + p(t)(t-s) \right|$$

$$\leq |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau \right| + |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* |p(t)(t-s)|$$

$$< |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* \left| \int_s^t \frac{\varepsilon}{3|e_p(t,t_0)|}\Delta\tau \right| + |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* |p(t)(t-s)|$$

$$= |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* \frac{\varepsilon}{3|e_p(t,t_0)|}|t-s| + |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* |p(t)(t-s)|$$

$$= \varepsilon^* \cdot \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* |p(t)||t-s|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + |e_p(t,t_0)| \cdot \varepsilon^* |p(t)||t-s|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + \frac{\varepsilon}{3}|t-s| = \frac{2}{3}\varepsilon|t-s|.$$

Finalmente,

$$|e_p(t,t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s,t) \right| + |e_p(t,t_0)| \cdot \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau \right|$$

$$< \frac{2}{3}\varepsilon|t-s| + \frac{1}{3}\varepsilon|t-s| = \varepsilon|t-s|,$$

para $s \in U := U_1 \cap U_2$, donde segue o resultado. $\square$

Teorema 3.2.3. *Se $y^{\Delta} = p(t)y$ é regressiva, então a única solução de*

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

é dada por $e_p(\cdot, t_0)$.

Demonstração. Seja y uma solução de $y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$ e considere o quociente $\dfrac{y}{e_p(\cdot, t_0)}$, onde $e_p(t, t_0) \neq 0$, para todo $s, t \in \mathbb{T}$. Pelo Teorema 2.2.3(v) temos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{e_p(t, t_o)}\right)^{\Delta} &= \frac{y^{\Delta}(t)e_p(t, t_0) - y(t)e_p^{\Delta}(t, t_0)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\ &= \frac{p(t)y(t)e_p(t, t_o) - y(t)p(t)e_p(t, t_o)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{y}{e_p(t, t_0)}$ é constante pelo Corolário 2.3.4(ii). Logo,

$$\frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} \equiv \frac{y(t_0)}{e_p(t_0, t_0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Isso implica que,

$$\frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} = 1 \Rightarrow y(t) = e_p(t, t_0).$$

□

A seguir, mostraremos algumas propriedades da função exponencial generalizada.

Teorema 3.2.4. *Se $t, s \in \mathbb{T}$ e $p, q \in \mathcal{R}$, então*

(i) $e_0(t, s) \equiv 1$ *e* $e_p(t, t) \equiv 1$

(ii) $e_p(\sigma(t), s) = [1 + \mu(t)p(t)]e_p(t, s)$

(iii) $\dfrac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$

(iv) $e_p(t, s) = \dfrac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$

(v) $e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$

(vi) $\dfrac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$

(vii) $\left(\dfrac{1}{e_p(\cdot, s)}\right)^{\Delta} = \dfrac{-p(t)}{e_p^{\sigma}(\cdot, s)}$

Demonstração. (i) A função $y(t) \equiv 1$ é uma solução do problema de valor inicial

$$y^{\Delta}(t) = 0 \cdot y(t), \quad y(s) = 1$$

uma vez que, este problema, tem apenas uma solução $e_0(t, s)$.

Logo, $e_0(t, s) \equiv y(t) \equiv 1$.

Por definição,

$$e_p(t,t) = exp\left(\int_t^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = exp(0) = 1.$$

(ii) Pelo Teorema 2.2.2(iv) temos,

$$\begin{aligned} e_p(\sigma(t), s) &= e_p(t, s) + \mu(t)e_p^{\Delta}(t, s) \\ &= e_p(t, s) + \mu(t)p(t)e_p(t, s) \\ &= [1 + \mu(t)p(t)]e_p(t, s). \end{aligned}$$

(iii) Considere o problema de valor inicial,

$$y^{\Delta}(t) = (\ominus p)(t)y(t), \quad y(s) = 1.$$

Como $(\ominus p)(t)$ é regressiva, pela Definição 3.2.5, temos $y^{\Delta}(t) = (\ominus p)(t)y(t)$ regressivo.

Pelos Teoremas 3.2.2 e 3.2.3, a única solução para este problema de valor inicial é $y(t) = e_{\ominus p}(t, s)$.

Mostraremos que, para cada s fixo, $y(t) = \dfrac{1}{e_p(t, s)}$ satisfaz $y^{\Delta}(t) = (\ominus p)(t)y(t)$, $y(s) = 1$.

De fato,

$$y(s) = \frac{1}{e_p(s, s)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Temos,

$$\begin{aligned} y^{\Delta}(t) &= \left(\frac{1}{e_p(t, s)}\right)^{\Delta}(t) = \frac{-e_p^{\Delta}(t.s)}{e_p(t, s)e_p(\sigma(t), s)} = \frac{-p(t)e_p(t, s)}{e_p(t, s)e_p(\sigma(t), s)} \\ &= \frac{-p(t)}{e_p(\sigma(t), s)} = \frac{-p(t)}{[1 + \mu(t)p(t)]e_p(t, s)} = (\ominus p)(t)y(t). \end{aligned}$$

Como a solução de $y^{\Delta}(t) = (\ominus p)(t)y(t)$, $y(s) = 1$ é única, segue que

$$\frac{1}{e_p(t, s)} = y(t) = e_{\ominus p}(t, s).$$

(iv) Por (iii) temos, $\dfrac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$. Então, nos resta mostrar que, $e_p(t,s) = e_{\ominus p}(s,t)$. Por definição, temos

$$e_p(t,s) = exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \quad para \quad s,t \in \mathbb{T}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} e_p(t,s) &= exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = exp\left(-\int_t^s \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \frac{1}{exp\left(\int_t^s \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)} = \frac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t). \end{aligned}$$

(v) Considere o problema de valor inicial

$$y^{\Delta}(t) = (p \oplus q)(t)y(t), \quad y(s) = 1.$$

Como $(p \oplus q)(t)$ é regressiva, pela Definição 3.2.5, temos $y^{\Delta}(t) = (p \oplus q)(t)y(t)$ é regressiva. Pelos Teoremas 3.2.2 e 3.2.3, a única solução para este problema de valor inicial é $y(t) = e_{p\oplus q}(t,s)$. Mostraremos que $y(t) = e_p(t,s)e_q(t,s)$ satisfaz o PVI.

Temos,

$$y(s) = e_p(s,s)e_q(s,s) = 1 \cdot 1 = 1$$

e

$$\begin{aligned} y^{\Delta}(t) &= [e_p(t,s)e_q(t,s)]^{\Delta} = e_p^{\Delta}(t,s)e_q(t,s) + e_p(\sigma(t),s)e_q^{\Delta}(t,s) \\ &= p(t)e_p(t,s)e_q(t,s) + [e_p(t,s) + \mu(t)e_p^{\Delta}(t,s)]q(t)e_q(t,s) \\ &= p(t)e_p(t,s)e_q(t,s) + e_p(t,s)q(t)e_q(t,s) + \mu(t)e_p^{\Delta}(t,s)q(t)e_q(t,s) \\ &= p(t)e_p(t,s)e_q(t,s) + q(t)e_p(t,s)e_q(t,s) + \mu(t)p(t)e_p(t,s)q(t)e_q(t,s) \\ &= [p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)]e_p(t,s)e_q(t,s) \\ &= (p \oplus q)(t)e_p(t,s)e_q(t,s) = (p \oplus q)(t)y(t). \end{aligned}$$

Como a solução de $y^{\Delta}(t) = (p \oplus q)(t)y(t)$, $y(s) = 1$ é única, segue que

$$e_p(t,s)e_q(t,s) = y(t) = e_{p\oplus q}(t,s).$$

(vi) Temos,

$$\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_p(t,s)e_{\ominus q}(t,s) = e_{p\oplus(\ominus q)}(t,s) = e_{p\ominus q}(t,s).$$

Usando (iii) e (v) deste Teorema o resultado segue.

(vii) Temos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{e_p(\cdot,s)}\right)^{\Delta} &= (e_{\ominus p}(\cdot,s))^{\Delta} = (\ominus p)(t)e_{\ominus p}(\cdot,s) = \frac{-p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\cdot\frac{1}{e_p(\cdot,s)}\\
&= \frac{-p}{e_p(\cdot,s)+\mu(t)p(t)e_p(\cdot .s)} = \frac{-p}{e_p(\cdot,s)+\mu(t)e_p^{\Delta}(\cdot,s)}\\
&= \frac{-p}{e_p(\sigma(t),s)} = \frac{-p}{e_p^{\sigma}(\cdot,s)}.
\end{aligned}$$

Usando (ii) e (iii) deste Teorema o resultado segue.

□

Teorema 3.2.5. *Se $p, q \in \mathcal{R}$, então*

$$e^{\Delta}_{p\ominus q}(\cdot,t_0) = (p-q)\frac{e_p(\cdot,t_0)}{e_q^{\sigma}(\cdot,t_0)}.$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
(p\ominus q)(t) &= (p\oplus(\ominus q))(t)\\
&= p(t)+(\ominus q)(t)+\mu(t)p(t)(\ominus q)(t)\\
&= p(t)+\left[-\frac{q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\right]+\mu(t)p(t)\left[-\frac{q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\right]\\
&= \frac{p(t)+\mu(t)p(t)q(t)-q(t)-\mu(t)p(t)q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\\
&= \frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)}
\end{aligned}$$

Como $p, q \in \mathcal{R}$, temos que p, q são rd-contínuas e regressivas. Daí, $(p\ominus q)$ é rd-contínua e regressiva, pois $\dfrac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)} \neq 0$. Logo, $(p\ominus q)\in\mathcal{R}$.

Portanto, $y^{\Delta} = (p\ominus q)y$ é regressiva. Assim, $e_{(p\ominus q)}(\cdot,t_0)$ é a única solução de

$$y^{\Delta} = (p\ominus q)y, \quad y(t_0)\equiv 1$$

.

Segue que,

$$\begin{aligned}
e^{\Delta}_{p\ominus q}(\cdot,t_0) &= (p\ominus q)(t)e_{p\ominus q}(\cdot,t_0) = \frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\cdot\frac{e_p(\cdot,t_0)}{e_q(\cdot,t_0)}\\
&= \frac{(p(t)-q(t))\cdot e_p(\cdot,t_0)}{e_q(\cdot,t_0)+\mu(t)q(t)e_q(\cdot,t_0)}\\
&= \frac{(p(t)-q(t))e_p(\cdot,t_0)}{e_q(\cdot,t_0)+\mu(t)e_q^{\Delta}(\cdot,t_0)}\\
&= \frac{(p(t)-q(t))e_p(\cdot,t_0)}{e_q(\sigma(t),t_0)}\\
&= (p-q)\frac{e_p(\cdot,t_0)}{e_q^{\sigma}(\cdot,t_0)}
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.6. *Se $p \in \mathcal{R}$ e $a, b, c \in \mathbb{T}$, então*

$$[e_p(c, \cdot)]^\Delta = -p[e_p(c, \cdot)]^\sigma$$

e

$$\int_a^b p(t)e_p(c, \sigma(t))\Delta t = e_p(c, a) - e_p(c, b)$$

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.2.4(ii),(iv) temos

$$\begin{aligned}
p(t)[e_p(c,\cdot)]^\sigma &= p(t)e_p(c,\sigma(t)) \\
&= p(t)\frac{1}{e_p(\sigma(t),c)} \\
&= p(t)e_{\ominus p}(\sigma(t),c) \\
&= p(t)[e_{\ominus p}(t,c) + \mu(t)e^\Delta_{\ominus p}(t,c)] \\
&= p(t)[e_{\ominus p}(t,c) + \mu(t)(\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t,c)] \\
&= p(t)[e_{\ominus p}(t,c)][1 + \mu(t)(\ominus p)(t)] \\
&= p(t)[e_{\ominus p}(t,c)]\left[1 + \mu(t)\left(-\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right)\right] \\
&= [e_{\ominus p}(t,c)]\left[p(t) - \frac{\mu(t)p^2(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right] \\
&= \frac{p(t) + \mu(t)p^2(t) - \mu(t)p^2(t)}{1+\mu(t)p(t)} \cdot e_{\ominus p}(t,c) \\
&= \frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)} \cdot e_{\ominus p}(t,c) \\
&= -(\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t,c) \\
&= -e^\Delta_{\ominus p}(t,c) = -e^\Delta_p(c,t) = -[e_p(c,t)]^\Delta = -[e_p(c,\cdot)]^\Delta
\end{aligned}$$

Portanto, $[e_p(c,\cdot)]^\Delta = -p(t)[e_p(c,\cdot)]^\sigma$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(t)e_p(c,\sigma(t))\Delta t &= \int_a^b -[e_p(c,t)]^\Delta \Delta t \\
&= -\int_a^b [e_p(c,t)]^\Delta \Delta t \\
&= -[e_p(c,b) - e_p(c,a)] \\
&= e_p(c,a) - e_p(c,b)
\end{aligned}$$

□

A seguir, dois exemplos de função exponencial e uma tabela da função exponencial para distintas escalas temporais.

Exemplo 3.2.2. *Seja $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ para $h > 0$. Seja $\alpha \in \mathcal{R}$ constante, isto é, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{h}\right\}$. Então, $e_\alpha(t,0) = (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}$, $\forall t \in \mathbb{T}$.*

Seja $y(t) = (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}$.

Note que,

$$y(0) = (1+\alpha h)^{\frac{0}{h}} = 1$$

e que

$$y^\Delta(t) = \alpha(t)y(t).$$

A escala temporal $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{\cdots, -3h, -2h, -1h, 0, 1h, 2h, 3h, \cdots\}$ tem o operador de avanço $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = t + h > t$. Logo, t é discreto à direita e $y^\Delta(t) = \frac{y(\sigma(t)) - y(t)}{\mu(t)}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
y^\Delta(t) &= \frac{y(\sigma(t)) - y(t)}{\mu(t)} \\
&= \frac{y(t+h) - y(t)}{\sigma(t) - t} \\
&= \frac{(1+\alpha h)^{\frac{t+h}{h}} - (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}{(t+h) - t} \\
&= \frac{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}+1} - (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\
&= \frac{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}} \cdot (1+\alpha h) - (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\
&= \frac{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}[(1+\alpha h) - 1]}{h} \\
&= \alpha(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}} = \alpha \cdot y(t), \forall t \in \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Como $y(t)$ satisfaz o PVI

$$y^\Delta(t) = \alpha(t)y(t), \quad y(0) = 1,$$

segue que $y(t) = e_\alpha(t,0)$, ou seja,

$$e_\alpha(t,0) = (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}.$$

Exemplo 3.2.3. *Seja* $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2; n \in \mathbb{N}_0\}$. *Seja* $p(t) = 1 \in \mathcal{R}$. *Então,* $e_1(t,0) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$ *para* $t \in \mathbb{T}$.

Seja $y(t) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$. *Note que,*

$$y(0) = 2^{\sqrt{0}}(\sqrt{0})! = 1$$

e que

$$y^{\Delta}(t) = 1 \cdot y(t).$$

A escala temporal $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 4, 9, 16, \cdots\}$ *tem o operador de avanço* $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} = (\sqrt{t}+1)^2 > t$. *Logo,* t *é discreto à direita e* $y^{\Delta}(t) = \frac{y(\sigma(t))-y(t)}{\mu(t)}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
y^{\Delta}(t) &= \frac{y(\sigma(t)) - y(t)}{\mu(t)} \\
&= \frac{2^{\sqrt{\sigma(t)}}\left(\sqrt{\sigma(t)}\right)! - 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!}{\sigma(t) - t} \\
&= \frac{2^{(\sqrt{t}+1)}(\sqrt{t}+1)! - 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!}{(\sqrt{t}+1)^2 - t} \\
&= \frac{2^{(\sqrt{t}+1)}(\sqrt{t}+1)! - 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!}{1 + 2\sqrt{t}} \\
&= \frac{2^{\sqrt{t}} \cdot 2(\sqrt{t}+1)(\sqrt{t})! - 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!}{1 + 2\sqrt{t}} \\
&= \frac{2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})![2(\sqrt{t}+1) - 1]}{1 + 2\sqrt{t}} \\
&= \frac{2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})![2\sqrt{t}+1]}{2\sqrt{t}+1} \\
&= 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})! = 1 \cdot 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})! = 1 \cdot y(t), \forall t \in \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Como $y(t)$ *satisfaz o PVI*

$$y^{\Delta}(t) = 1 \cdot y(t), \quad y(0) = 1$$

segue que $y(t) = e_1(t,0)$. *Daí,*

$$e_1(t,0) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$$

Tabela da função exponencial.

Função Exponencial			
$\mathbb{T}$	t_0	$p(t)$	$e_p(t,t_0)$
$\mathbb{R}$	0	1	e^t
$\mathbb{Z}$	0	1	2^t
$h\mathbb{Z}$	0	1	$(1+h)^{\frac{t}{h}}$
$\frac{1}{n}\mathbb{Z}$	0	1	$[(1+\frac{1}{n})^n]^t$
$q^{\mathbb{N}_0}$	1	1	$\prod_{s\in(0,t)}[1+(q-1)s]$
$2^{\mathbb{N}_0}$	1	1	$\prod_{s\in(0,t)}(1+s)$
$\mathbb{N}_0^2$	0	1	$2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$
$\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}; n\in\mathbb{N}\}$	0	1	$n+1 \quad se \quad t=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

3.3 Equações lineares não homogêneas

Nesta seção, estudaremos as equações lineares de primeira ordem não homogêneas

$$y^{\Delta}=p(t)y+f(t)$$

e a equação homogênea correspondente

$$y^{\Delta}=p(t)y$$

em uma escala temporal.

O Teorema a seguir é uma consequência dos resultados da Seção 3.2.

Teorema 3.3.1. *Seja $y^{\Delta}=p(t)y$ regressiva e $t_0\in\mathbb{T}$, $y_0\in\mathbb{R}$. A única solução do problema de valor inicial*

$$y^{\Delta}=p(t)y, \quad y(t_0)=y_0$$

é dada por

$$y(t)=e_p(t,t_0)y_0.$$

Observação 3.3.1. *A função $y(t)=e_p(t,t_0)y_0$ resolve o problema de valor inicial*

$$y^{\Delta}=p(t)y, \quad y(t_0)=y_0.$$

Demonstração. Seja $y(t)=e_p(t,t_0)y_0$. Verificaremos se $y(t_0)=y_0$. Pelo Teorema 3.2.4(i), $e_p(t_0,t_0)=1$, então

$$\begin{aligned} y(t_0) &= e_p(t_0,t_0)y_0 \\ &= 1\cdot y_0 \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Agora, utilizando o Teorema 2.2.3(iii), temos

$$\begin{aligned} y^{\Delta}(t) &= [e_p(t,t_0)y_0]^{\Delta} \\ &= e_p(t,t_0)^{\Delta}y_0 + e_p(\sigma(t),t_0)y_0^{\Delta}. \quad Como, \quad y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0^{\Delta} = 0 \\ &= [p(t)e_p(t,t_0)]y_0 \\ &= p(t)y(t). \end{aligned}$$

□

Definição 3.3.1. *Para $p \in \mathcal{R}$, definimos o operador $L_1 : C_{rd}^1 \to C_{rd}$ por*

$$L_1 y(t) = y^{\Delta}(t) - p(t)y(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Com a definição acima podemos reescrever $y^{\Delta} = p(t)y(t)$ como $L_1 y(t) = 0$ e $y^{\Delta}(t) = p(t)y + f(t)$ como $L_1 y(t) = f(t)$.

Uma vez que L_1 é um operador linear, dizemos que $y^{\Delta}(t) = p(t)y + f(t)$ é uma equação linear.

Definição 3.3.2. *O operador adjunto $L_1^* : C_{rd}^1 \to C_{rd}$ é definido por*

$$L_1^* x(t) = x^{\Delta}(t) + p(t)x^{\sigma}(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Exemplo 3.3.1. *A função $x(t) = (1+\alpha h)^{-\frac{t}{h}}$, $t \in h\mathbb{Z}$ é uma solução da equação adjunta $x^{\Delta} + \alpha x^{\sigma} = 0$, $t \in h\mathbb{Z}$ onde α é uma constante regressiva.*

Para a escala temporal $h\mathbb{Z}$, temos $\sigma(t) = t + h$ para $t \in h\mathbb{Z}$.

Portanto, t é discreto à direita e $x^{\Delta}(t) = \frac{x^{\sigma}(t) - x(t)}{\mu(t)}$.

Assim,

$$x^{\Delta}(t) = \frac{x^{\sigma}(t) - x(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{(1+\alpha h)^{-\frac{\sigma(t)}{h}} - (1+\alpha h)^{-\frac{t}{h}}}{(t+h) - t} = \frac{(1+\alpha h)^{-(\frac{t}{h}+1)} - (1+\alpha h)^{-\frac{t}{h}}}{h}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) + \alpha x^{\sigma}(t) &= \frac{(1+\alpha h)^{-(\frac{t}{h}+1)} - (1+\alpha h)^{-\frac{t}{h}}}{h} + \alpha(1+\alpha h)^{-\frac{\sigma(t)}{h}} \\ &= \frac{(1+\alpha h)^{-(\frac{t}{h}+1)} - (1+\alpha h)^{-\frac{t}{h}} + \alpha h(1+\alpha h)^{-(\frac{t}{h}+1)}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}} \cdot (1+\alpha h)} - \frac{1}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}} + \frac{\alpha h}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}(1+\alpha h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{1+\alpha h}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}(1+\alpha h)} - \frac{1}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}}{h} = \frac{\frac{1}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}} - \frac{1}{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}}{h} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, x é solução de $x^{\Delta} + \alpha x^{\sigma} = 0$.

Teorema 3.3.2. *(Identidade de Lagrange) Se $x, y \in C^1_{rd}$, então*

$$x^\sigma L_1 y + y L_1^* x = (xy)^\Delta \quad em \quad \mathbb{T}^\kappa.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in C^1_{rd}$. Pelo Teorema 2.2.2(iii), temos

$$\begin{aligned} (xy)^\Delta &= x^\Delta y + x^\sigma y^\Delta \\ &= x^\Delta y + x^\sigma y^\Delta + ypx^\sigma - ypx^\sigma \\ &= x^\sigma(y^\Delta - yp) + y(x^\Delta + px^\sigma) \\ &= x^\sigma L_1 y + y L_1^* x \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

Corolário 3.3.3. *Se x, y são soluções de $L_1 y = 0$ e $L_1^* x = 0$, respectivamente, então*

$$x(t)y(t) = C, \quad para \quad t \in \mathbb{T}, \quad onde \quad C \quad é \quad constante.$$

Demonstração. Se x, y são soluções de $L_1 y = 0$ e $L_1^* x = 0$ e a partir da Identidade de Lagrange $x^\sigma L_1 y + y L_1^* x = (xy)^\Delta$, temos

$$(xy)^\Delta = x^\sigma L_1 y + y L_1^* x = 0$$

Logo, $xy = C$ onde C é uma constante. □

Como consequência do Corolário 3.3.3, segue que, se y é não trivial e satisfaz $L_1 y = 0$, então $x := \frac{1}{y}$ satisfaz a equação adjunta $L_1^* x = 0$.

O Teorema a seguir é um resultado de existência e unicidade para o problema de valor inicial adjunto.

Teorema 3.3.4. *Suponha $p \in \mathcal{R}$. Sejam $t_0 \in \mathbb{T}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. A única solução do problema de valor inicial*

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma, \quad x(t_0) = x_0$$

é dado por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0.$$

Trataremos agora sobre os problemas não-homogêneos.

Seja $x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t)$, $x(t_0) = x_0$ e x uma solução deste PVI. Assim,

$$\begin{aligned} x^\Delta &= -p(t)x^\sigma + f(t) \\ e_p(t, t_0)x^\Delta &= e_p(t, t_0)[-p(t)x^\sigma + f(t)] \\ e_p(t, t_0)x^\Delta &= -e_p(t, t_0)p(t)x^\sigma + e_p(t, t_0)f(t) \\ e_p(t, t_0)f(t) &= e_p(t, t_0)x^\Delta + e_p(t, t_0)p(t)x^\sigma \\ e_p(t, t_0)f(t) &= e_p(t, t_0)x^\Delta + e_p^\Delta(t, t_0)x^\sigma \\ e_p(t, t_0)f(t) &= [x \cdot e_p(t, t_0)]^\Delta(t) \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 2.3.6 podemos integrar ambos os lados, desde que $f \in C_{rd}$.

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} [e_p(\tau, t_0)x(\tau)]^{\Delta}\Delta\tau &= \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0)f(\tau)\Delta\tau \\
e_p(t, t_0)x(t) - e_p(t_0, t_0)x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0)f(\tau)\Delta\tau
\end{aligned}
$$

A partir disto, temos a seguinte definição.

Definição 3.3.3. *Se $y^{\Delta} = p(t)y$ é regressiva e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é rd-contínua, a equação $y^{\Delta} = p(t)y + f(t)$ é chamada regressiva,*

A seguir daremos a fórmula de variação das constantes para $L_1^* x(t) = f(t)$ e $L_1 y(t) = f(t)$.

Teorema 3.3.5. *(Variação das constantes) Suponha $y^{\Delta} = p(t)y + f(t)$ regressiva. Sejam $t_0 \in \mathbb{T}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. A única solução do problema de valor inicial*

$$x^{\Delta} = -p(t)x^{\sigma} + f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

é dada por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau.$$

Demonstração. Verificaremos se $x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau$ resolve o problema de valor inicial dado acima. Temos,

$$
\begin{aligned}
x(t_0) &= e_{\ominus p}(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0} e_{\ominus p}(t_0, \tau)f(\tau)\Delta\tau \\
x(t_0) &= 1 \cdot x_0 + 0 \\
x(t_0) &= x_0
\end{aligned}
$$

Utilizando o Teorema 3.2.4(iii),(iv) e o Lema 3.2.1, note que

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e_{\ominus p}(t, t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{e_{\ominus p}(t, \tau)}{e_{\ominus p}(t, t_0)} f(\tau)\Delta\tau\right) \\
&= e_{\ominus p}(t, t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t) \cdot e_p(t, t_0)f(\tau)\Delta\tau\right) \\
&= e_{\ominus p}(t, t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0)f(\tau)\Delta\tau\right)
\end{aligned}
$$

E, utilizando o Teorema 3.2.5 onde $p = 0$ e o Teorema 3.2.4(iv), temos

$$\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau\right)^{\Delta} \cdot e_{\ominus p}(t, t_0) \\
&\quad + \left(x_0 + \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau\right) \cdot e^{\Delta}_{\ominus p}(t, t_0) \\
&= \left[x_0^{\Delta} + \left(\int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau\right)^{\Delta}\right] \cdot e_{\ominus p}(t, t_0) \\
&\quad + \left(x_0 + \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau\right) \cdot -p(t) \cdot \frac{1}{e_p(\sigma(t), t_0)} \\
&= [0 + e_p(t, t_0) f(t)]\, e_{\ominus p}(t, t_0) \\
&\quad - \left(x_0 + \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_p(\tau . t_0) f(\tau)\Delta\tau\right) \cdot p(t) \cdot e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) \\
&= e_p(t, t_0) f(t) \cdot e_{\ominus p}(t, t_0) - p(t) \cdot e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) \left(x_0 + \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau\right) \\
&= \frac{1}{e_{\ominus p}(t, t_0)} \cdot f(t) \cdot e_{\ominus p}(t, t_0) - p(t) \cdot x(\sigma(t)) \\
&= -p(t) \cdot x^{\sigma} + f(t)
\end{aligned}$$

Assumindo que x é uma solução de $x^{\Delta} = -p(t)x^{\sigma} + f(t)$, $x(t_0) = x_0$, vimos que

$$e_p(t, t_0)x(t) - e_p(t_0, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau,$$

desde que $f \in C_{rd}$. Assim,

$$\begin{aligned}
e_p(t, t_0)x(t) - 1 \cdot x_0 &= \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau \\
e_p(t, t_0)x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau)\Delta\tau \\
x(t) &= \frac{x_0}{e_p(t, t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, t_0)} f(\tau)\Delta\tau \\
x(t) &= e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) e_p(t_0, t) f(\tau)\Delta\tau \\
x(t) &= e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t) f(\tau)\Delta\tau
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.6. *(Variação das constantes) Suponha $y^{\Delta} = p(t)y + f(t)$ regressiva e sejam $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. A única solução do problema de valor inicial*

$$y^{\Delta} = p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

é dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau)\Delta(\tau).$$

Demonstração. Reescrevemos $y^{\Delta} = p(t)y + f(t)$ como,

$$\begin{aligned} y^{\Delta} = p(t)[y^{\sigma} - \mu(t)y^{\Delta}] + f(t) \quad &\Leftrightarrow \quad y^{\Delta} = p(t)y^{\sigma} - p(t)\mu(t)y^{\Delta} + f(t) \\ &\Leftrightarrow \quad y^{\Delta} + p(t)\mu(t)y^{\Delta} = p(t)y^{\sigma} + f(t) \\ &\Leftrightarrow \quad [1 + \mu(t)p(t)]y^{\Delta} = p(t)y^{\sigma} + f(t). \end{aligned}$$

Como $p \in \mathcal{R}$, temos

$$\begin{aligned} y^{\Delta} \quad &= \quad \frac{p(t)y^{\sigma} + f(t)}{1 + \mu(t)p(t)} = \frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}y^{\sigma} + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \\ &\Rightarrow y^{\Delta} = -(\ominus p)y^{\sigma} + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)p(t)}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 3.3.5, encontramos a solução de $y^{\Delta} = p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0$ que é

$$y(t) = e_{\ominus(\ominus p)}(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus(\ominus p)}(t, \tau)\frac{f(\tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)}\Delta\tau.$$

Como $\ominus(\ominus p) = p$, segue que

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \tau)\frac{f(\tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)}\Delta\tau.$$

Por fim,

$$\frac{e_p(t, \tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} = \frac{1}{[1 + \mu(\tau)p(\tau)]e_p(\tau, t)} = \frac{1}{e_p(\sigma(\tau), t)} = e_p(t, \sigma(\tau)).$$

Logo,

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

$\square$

4 Sistemas Lineares

Neste capítulo, estudaremos a diferenciabilidade, a regressividade, a soma $\oplus$ e a subtração $\ominus$ da função matriz valor. Definiremos a função matriz exponencial. A principal referência para este capítulo é: [1].

4.1 Matrizes Regressivas

Definição 4.1.1. *Seja A uma função matriz valor $m \times n$ em $\mathbb{T}$. Dizemos que A é rd-contínua em $\mathbb{T}$, se cada entrada de A é rd-contínua em $\mathbb{T}$, e a classe de todas as funções matriz valor $m \times n$ em $\mathbb{T}$ é denotada por*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{m\times n}).$$

Dizemos que A é diferenciável em $\mathbb{T}$ se cada entrada de A é diferenciável em $\mathbb{T}$, neste caso

$$A^{\Delta} = (a_{ij}^{\Delta})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \quad \textit{onde} \quad A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

Teorema 4.1.1. *Se A é diferenciável em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, então*

$$A^{\sigma}(t) = A(t) + \mu(t)A^{\Delta}(t).$$

Demonstração. Usando o fato de que, se A é diferenciável, então suas entradas são diferenciáveis em $\mathbb{T}^{\kappa}$ e o Teorema 2.2.2(iv), temos

$$\begin{aligned} A^{\sigma} &= (a_{ij}^{\sigma}) \\ &= (a_{ij} + \mu a_{ij}^{\Delta}) \\ &= (a_{ij}) + (\mu a_{ij}^{\Delta}) \\ &= (a_{ij}) + \mu(a_{ij}^{\Delta}) \\ &= A + \mu A^{\Delta}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.2. *Suponha A e B funções matrizes valores $n \times n$ diferenciáveis. Então,*

(i) $(A+B)^{\Delta} = A^{\Delta} + B^{\Delta}$;

(ii) $(\alpha A)^{\Delta} = \alpha A^{\Delta}$, *se α é constatne;*

(iii) $(AB)^{\Delta} = A^{\Delta}B^{\sigma} + AB^{\Delta} = A^{\sigma}B^{\Delta} + A^{\Delta}B$;

(iv) $(A^{-1})^{\Delta} = -(A^{\sigma})^{-1}A^{\Delta}A^{-1} = -A^{-1}A^{\Delta}(A^{\sigma})^{-1}$, *se A e A^{σ} é invertível;*

(v) $(AB^{-1})^{\Delta} = (A^{\Delta} - AB^{-1}B^{\Delta})(B^{\sigma})^{-1} = (A^{\Delta} - (AB^{-1})^{\sigma}B^{\Delta})B^{-1}$, *se B e B^{σ} é invetível.*

Demonstração. Sejam A e B diferenciáveis e $1 \leq i, j \leq n$. Assim,

(i) $(A+B)^\Delta = (a_{ij}+b_{ij})^\Delta = (a_{ij}^\Delta) + (b_{ij}^\Delta) = A^\Delta + B^\Delta$.

(ii) $(\alpha A)^\Delta = (\alpha a_{ij})^\Delta = (a_{ij})^\Delta \alpha + (a_{ij}^\sigma)\alpha^\Delta = A^\Delta \alpha + (a_{ij}^\sigma) \cdot 0 = \alpha A^\Delta$

(iii) Sabemos que $(AB) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$, então

$$\begin{aligned}
(AB)^\Delta &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^\Delta = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj})^\Delta = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}^\Delta)(b_{kj}) + (a_{ik}^\sigma)(b_{kj}^\Delta)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}^\Delta)(b_{kj}) + \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}^\sigma)(b_{kj}^\Delta)\\
&= (a_{ik}^\Delta)_{1\leq i\leq n, 1\leq k\leq n} \cdot (b_{kj})_{1\leq k\leq n, 1\leq j\leq n} + (a_{ik}^\sigma)_{1\leq i\leq n, 1\leq k\leq n} \cdot (b_{kj}^\Delta)_{1\leq k\leq n, 1\leq j\leq n}\\
&= A^\Delta B + A^\sigma B^\Delta
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos $(AB)^\Delta = A^\Delta B^\sigma + AB^\Delta$.

(iv) Sabemos que $AA^{-1} = I$, então $(AA^{-1})^\Delta = A^\Delta A^{-1} + A^\sigma (A^-1)^\Delta = I^\Delta = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
A^\Delta A^{-1} + A^\sigma (A^-1)^\Delta &= 0\\
A^\sigma (A^{-1})^\Delta &= -A^\Delta A^{-1}\\
(A^{-1})^\Delta &= -(A^\sigma)^{-1} A^\Delta A^{-1} \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos $(A^{-1})^\Delta = -A^{-1}A^\Delta (A^\sigma)^{-1}$.

(v) Por (iii) e (iv) deste Teorema temos

$$\begin{aligned}
(AB^{-1})^\Delta &= A^\Delta (B^{-1})^\sigma + A(B^{-1})^\Delta\\
&= A^\Delta (B^{-1})^\sigma + A[-B^{-1}B^\Delta (B^\sigma)^{-1}]\\
&= A^\Delta (B^\sigma)^{-1} - AB^{-1}B^\Delta (B^\sigma)^{-1}\\
&= (A^\Delta - AB^{-1}B^\Delta)(B^\sigma)^-1 \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Analogamente mostramos $(AB^{-1})^\Delta = (A^\Delta - (AB^{-1})^\sigma B^\Delta)B^{-1}$.

□

Vamos considerar que o sistema linear de equações dinâmicas

$$y^\Delta = A(t)y$$

em que A é uma função matriz valor $m \times n$ em $\mathbb{T}$. Uma função $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ diz-se uma solução de $y^\Delta = A(t)y$ em $\mathbb{T}$ desde que $y^\Delta(t) = A(t)y(t)$ é válida para cada $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

A seguir a definição de regressividade para a função matriz valor e prontamente o Teorema da existência e unicidade para o problema de valor inicial

$$y^\Delta = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 4.1.2. *(Regressividade) Uma função matriz valor $A_{n\times n}$ em uma escala temporal $\mathbb{T}$ é chamada regressiva quando*

$$I + \mu(t)A(t) \quad \text{é} \quad \textit{invertível} \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa},$$

e a classe de todas as funções regressivas e rd-contínuas é denotada por

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}).$$

Dizemos que o sistema $y^{\Delta} = A(t)y$ é regressivo quando $A \in \mathcal{R}$.

Teorema 4.1.3. *(Teorema Existência e Unicidade) Seja $A \in \mathcal{R}$ uma função matriz valor $n \times n$ em $\mathbb{T}$ e suponha $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ rd-contínua. Sejam $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Então, o problema de valor inicial*

$$y^{\Delta} = A(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

tem uma única solução $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$.

Segue do Teorema 4.1.3 que o problema de valor inicial de matriz

$$Y^{\Delta} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0$$

onde Y_0 é uma matriz constante $n \times n$ tem uma única (matriz valor) solução Y.

Definição 4.1.3. *Suponha A e B funções matriz valor $n \times n$ regressivas em $\mathbb{T}$. Então,*

$$(A \oplus B)(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t), \ \forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$
$$e$$
$$(\ominus A)(t) = -[I + \mu(t)A(t)]^{-1}A(t), \ \forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Lema 4.1.4. $(\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}), \oplus)$ *é um grupo.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$, então $I + \mu(t)A(t)$ e $I + \mu(t)B(t)$ são invertíveis para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Assim,

$$\begin{aligned} I + \mu(A \oplus B)(t) &= I + \mu(t)A(t) + \mu(t)B(t) + \mu^2(t)A(t)B(t) \\ &= [I + \mu(t)A(t)] + [\mu(t)B(t)][I + \mu(t)A(t)] \\ &= [I + \mu(t)A(t)][I + \mu(t)B(t)] \end{aligned}$$

Portanto, $I + \mu(t)(A \oplus B)$ é invertível para cada $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, pois é produto de duas matrizes invertíveis, e como $\mu \in C_{rd}$,

$$A \oplus B \in \mathcal{R},$$

e,

$$
\begin{aligned}
I+\mu(t)(\ominus A)(t) &= I+\mu(t)\{-[I+\mu(t)A(t)]^{-1}A(t)\}\\
&= I-\mu(t)[I+\mu(t)A(t)]^{-1}A(t)\\
&= I-[I+\mu(t)A(t)]^{-1}\mu(t)A(t)\\
&= \{[I+\mu(t)A(t)]^{-1}[I+\mu(t)A(t)]\}-[I+\mu(t)A(t)]^{-1}\mu(t)A(t)\\
&= [I+\mu(t)A(t)]^{-1}[I+\mu(t)A(t)-\mu(t)A(t)]\\
&= [I+\mu(t)A(t)]^{-1}[I]\\
&= [I+\mu(t)A(t)]^{-1}
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\ominus A)\in\mathcal{R}$ é invertível para cada $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$. Logo,

$$(\ominus A)\in\mathcal{R}.$$

Agora mostraremos que $(\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{n\times n},\oplus)$ satisfaz:

(i) (Associatividade)

Para quaisquer $A,B,C\in(\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{n\times n},\oplus)$,

$$[(A\oplus B)\oplus C](t)=[A\oplus(B\oplus C)](t).$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
[(A\oplus B)\oplus C](t) &= [(A+B+\mu AB)+C+\mu(A+B+\mu AB)C](t)\\
&= [A+B+\mu AB+C+\mu AC+\mu BC+\mu^2ABC](t)\\
&= A(t)+B(t)+C(t)+\mu(t)B(t)C(t)\\
&\quad +\mu(t)A(t)[B(t)+C(t)+\mu(t)B(t)C(t)]\\
&= A(t)\oplus[B(t)+C(t)+\mu(t)B(t)C(t)]\\
&= A(t)\oplus[B(t)\oplus C(t)]\\
&= [A\oplus(B\oplus C)](t)
\end{aligned}
$$

(ii) (Existência de Elemento Neutro)

Existe a função matriz valor $0\in(\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{n\times n},\oplus)$, tal que para toda $A\in(\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{n\times n},\oplus)$,

$$(A\oplus 0)(t)=(0\oplus A)(t)=A(t).$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
(A\oplus 0)(t) &= (A+0+\mu A0)(t)=A(t)\\
(0\oplus A)(t) &= (0+A+\mu 0A)(t)=A(t)
\end{aligned}
$$

(iii) (Existência do inverso)

Para qualquer função matriz valor $A \in (\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}, \oplus)$, existe $B(t) = -A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1} \in (\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}, \oplus)$ tal que,

$$(A \oplus B)(t) = (B \oplus A)(t) = 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
(A \oplus B)(t) &= A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t) \\
&= A(t) + [-A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}] + \mu(t)A(t)[-A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}] \\
&= A(t) - A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1} - \mu(t)A^2(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1} \\
&= A(t)\{I - [I + \mu(t)A(t)]^{-1} - \mu(t)A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}\} \\
&= A(t)\{[I + \mu(t)A(t)][I + \mu(t)A(t)]^{-1} \\
&\quad -[I + \mu(t)A(t)]^{-1} - \mu(t)A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}\} \\
&= A(t)\{[(I + \mu(t)A(t)) - I - \mu(t)A(t)][I + \mu(t)A(t)]^{-1}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, $(\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}), \oplus)$ é um grupo. □

Definição 4.1.4. *Se as funções matriz valor A e B são regressivas em $\mathbb{T}$, definimos*

$$(A \ominus B)(t) = (A \oplus (\ominus B))(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}^k.$$

Se A é uma matriz, então denotamos A^* como a conjugada da transposta.

Note que $(A^*)^\Delta = (A^\Delta)^*$, pois:

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \quad e \quad A^t = (a_{ji})_{1\leq j\leq n, 1\leq i\leq m}.$$

Temos que $A^* = (\overline{A})^t = \overline{A^t}$, assim:

$$\begin{aligned}
(A^*)^\Delta &= (a_{ij}^*)^\Delta = ((\overline{a_{ij}})^t)^\Delta = ((\overline{a_{ij}})^\Delta)^t \\
&= (\overline{a_{ij}^\Delta})^t = (a_{ij}^\Delta)^* = (A^\Delta)^*
\end{aligned}$$

Definição 4.1.5. *Seja $t_0 \in \mathbb{T}$ e suponha que $A \in \mathcal{R}$ é uma função matriz valor $n \times n$. A única solução matriz valor do PVI*

$$Y^\Delta = A(t)Y, \quad Y(t_0) = I$$

é chamada função matriz exponencial (em t_0) e é denotada por

$$e_A(\cdot, t_0)$$

onde I é a matriz identidade usual $n \times n$.

A seguir algumas propriedades da função matriz exponecnial.

Teorema 4.1.5. *Se $A, B \in \mathcal{R}$ são funções matriz valor em $\mathbb{T}$, então*

(i) $e_0(t,s) \equiv I$ *e* $e_A(t,t) \equiv I$*;*

(ii) $e_A(\sigma(t),s) = (I + \mu(t)A(t))e_A(t,s)$*;*

(iii) $e_A^{-1}(t,s) = e^*_{\ominus A^*}(t,s)$*;*

(iv) $e_A(t,s) = e_A^{-1}(s,t) = e^*_{\ominus A^*}(s,t)$*;*

(v) $e_A(t,s) \cdot e_A(s,r) = e_A(t,r)$*;*

(vi) $e_A(t,s) \cdot e_B(t,s) = e_{A\oplus B}(t,s)$ *se* $e_A(t,s)$ *e* $B(t)$ *comutam.*

Demonstração. (i) Considere o problema de valor inicial

$$Y^\Delta = 0, \quad Y(s) = I.$$

com exatamente uma solução pelo Teorema 4.1.3. Uma vez que $Y(t) \equiv I$ é uma solução deste PVI, temos

$$Y(t) \equiv I = e_0(t,s).$$

Considere o problema de valor inicial

$$Y^\Delta = 0, \quad Y(t) = I.$$

com exatamente uma solução. Uma vez que $Y(t) \equiv I$ é uma solução deste PVI, temos

$$Y(t) \equiv I = e_A(t,t).$$

(ii) De acordo com o Teorema 4.1.1, temos

$$\begin{aligned} e_A(\sigma(t),s) &= e_A(t,s) + \mu(t)e_A^\Delta(t,s) \\ &= e_A(t,s) + \mu(t)A(t)e_A(t,s) \\ &= (I + \mu(t)A(t))e_A(t,s) \end{aligned}$$

(iii) Seja $Y(t) = (e_A^{-1}(t,s))^*$. Usando o Teorema 4.1.2(iv), o item (ii) deste Teorema, a Definição 4.1.3 e o fato de que $\ominus A^* = (\ominus A)^*$ temos

$$\begin{aligned}
Y^\Delta(t) &= [(e_A^{-1}(t,s))^*]^\Delta = [e_A^{-1}(t,s)^\Delta]^* \\
&= -[e_A^{-1}(\sigma(t),s) \cdot e_A^\Delta(t,s) \cdot e_A^{-1}(t,s)]^* \\
&= -[e_A^{-1}(\sigma(t),s) \cdot A(t)e_A(t,s) \cdot e_A^{-1}(t,s)]^* \\
&= -[e_A^{-1}(\sigma(t),s) \cdot A(t)]^* \\
&= -[e_A^{-1}(t,s)(I+\mu(t)A(t))^{-1} \cdot A(t)]^* \\
&= [e_A^{-1}(t,s) \cdot (-(I+\mu(t)A(t))^{-1}) \cdot A(t)]^* \\
&= [e_A^{-1}(t,s)(\ominus A)(t)]^* \\
&= (\ominus A)^*(t) \cdot (e_A^{-1}(t,s))^* \\
&= (\ominus A^*)(t) \cdot Y(t)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$Y(s) = (e_A^{-1}(s,s))^* = (I^{-1})^* = I.$$

Portanto, $Y(t) = (e_A^{-1}(t,s))^*$ resolve o PVI

$$Y^\Delta = (\ominus A^*)(t)Y, \quad Y(s) = I$$

que tem exatamente uma solução pelo Teorema 4.1.3. Logo,

$$e_{\ominus A^*}(t,s) = Y(t) = (e_A^{-1}(t,s))^*$$

$$e_{\ominus A^*}^*(t,s) = [e_A^{-1}(t,s)^*]^* = e_A^{-1}(t,s).$$

(iv) A demonstração é análoga ao item (iii).

(v) Seja $Y(t) = e_A(t,s)e_A(s,r)$. Usando (iv) deste Teorema, temos

$$\begin{aligned}
Y^\Delta &= [e_A(t,s)e_A(s,r)]^\Delta \\
&= e_A^\Delta(t,s)e_A(s,r) + e_A^\sigma(t,s)e_A^\Delta(s,r) \\
&= e_A^\Delta(t,s)e_A(s,r) \\
&= A(t)e_A(t,s)e_A(s,r) \\
&= A(t)Y(t).
\end{aligned}$$

Além disso, $Y(r) = e_A(r,s)e_A(s,r) = I$.

Portanto, $Y(t) = e_A(t,s)e_A(s,r)$ resolve o PVI

$$Y^\Delta = A(t)Y(t), \quad Y(r) = I$$

que tem exatamente uma única solução de acordo com o Teorema 4.1.3. Logo,

$$e_A(t,r) = Y(t) = e_A(t,s)e_A(s,r).$$

(vi) Vamos supor que $e_A(t,s)$ e B(t) comutam e seja $Y(t) = e_A(t,s)e_B(t,s)$. Então,

$$
\begin{aligned}
Y(t)^{\Delta} &= [e_A(t,s)e_B(t,s)]^{\Delta} = e_A^{\Delta}(t,s)e_B(\sigma(t),s) + e_A(t,s)e_B^{\Delta}(t,s)\\
&= A(t)e_A(t,s)\cdot(I+\mu(t)B(t))e_B(t,s) + e_A(t,s)\cdot B(t)e_B(t,s)\\
&= A(t)e_A(t,s)e_B(t,s) + A(t)e_A(t,s)\mu(t)B(t)e_B(t,s)\\
&\quad + e_A(t,s)\cdot B(t)e_B(t,s)\\
&= A(t)e_A(t,s)e_B(t,s) + A(t)B(t)\mu(t)e_A(t,s)e_B(t,s)\\
&\quad + B(t)e_A(t,s)e_B(t,s)\\
&= [A(t) + A(t)B(t)\mu(t) + B(t)]e_A(t,s)e_B(t,s)\\
&= [A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t)]e_A(t,s)e_B(t,s)\\
&= (A\oplus B)(t)e_A(t,s)e_B(t,s)\\
&= (A\oplus B)(t)Y(t).
\end{aligned}
$$

Além disso, $Y(s) = e_A(s,s)e_B(s,s) = I\cdot I = I$.

Portanto, $Y(t) = e_A(t,s)e_B(t,s)$ resolve o PVI

$$Y^{\Delta}(t) = (A\oplus B)(t)Y(t), \quad Y(s) = I$$

que tem exatamente uma solução de acordo com o Teorema 4.1.3. Logo,

$$e_{A\oplus B}(t,s) = Y(t) = e_A(t,s)e_B(t,s).$$

$\square$

Teorema 4.1.6. *Se $A \in \mathcal{R}$ e $a,b,c \in \mathbb{T}$, então*

$$[e_A(c,\cdot)]^{\Delta} = -[e_A(c,\cdot)]^{\sigma}A$$

e

$$\int_a^b e_A(c,\sigma(t))A(t)\Delta t = e_A(c,a) - e_A(c,b).$$

Demonstração. Utilizando o Teorema 4.1.5(ii), (iv), temos

$$\begin{aligned}
e_A(c,\sigma(t))A(t) &= e^*_{\ominus A^*}(\sigma(t),c)A(t) = [(I+\mu(t)(\ominus A^*)(t))e_{\ominus A^*}(t,c)]^*A(t)\\
&= [e_{\ominus A^*}(t,c)]^*[I+\mu(t)(\ominus A^*)(t)]^*A(t)\\
&= e^*_{\ominus A^*}(t,c)\{I+\mu(t)[-(I+\mu(t)A^*(t))^{-1}A^*(t)]\}^*A(t)\\
&= e^*_{\ominus A^*}(t,c)\{(I+\mu(t)A^*(t))(I+\mu(t)A^*(t))^{-1}\\
&\quad -\mu(t)A^*(t)(I+\mu(t)A^*(t))^{-1}\}^*A(t)\\
&= e^*_{\ominus A^*}(t,c)\{[I+\mu(t)A^*(t)-\mu(t)A^*(t)](I+\mu(t)A^*(t))^{-1}\}^*A(t)\\
&= e^*_{\ominus A^*}(t,c)\{(I+\mu(t)A^*(t))^{-1}\}^*A(t) = e^*_{\ominus A^*}(t,c)(I+\mu(t)A(t))^{-1}A(t)\\
&= \{A^*(t)(I+\mu(t)A^*(t))^{-1}e_{\ominus A^*}(t,c)\}^* = \{-(\ominus A)^*(t)e_{\ominus A^*}(t,c)\}^*\\
&= -\{(\ominus A^*)(t)e_{\ominus A^*}(t,c)\}^* = -\{e^{\Delta}_{\ominus A^*}(t,c)\}^*\\
&= -[e_A(c,t)]^{\Delta}
\end{aligned}$$

Portanto, $[e_A(c,\cdot)]^{\Delta} = -[e_A(c,\cdot)]^{\sigma}A$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_a^b e_A(c,\sigma(t))A(t)\Delta t &= \int_a^b -[e_A(c,t)]^{\Delta}\Delta t = -[e_A(c,b)-e_A(c,a)]\\
&= e_A(c,a)-e_A(c,b)
\end{aligned}$$

□

A seguir temos o Teorema da Variação das Constantes para uma equação não homogênea.

Teorema 4.1.7. *(Variação das Constantes) Seja $A \in \mathcal{R}$ uma função matriz valor $n \times n$ em $\mathbb{T}$ e suponha que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é rd-contínua. Seja $t_0 \in \mathbb{T}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Então, o problema de valor inicial*

$$y^{\Delta} = A(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

tem uma única solução $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Além disso, esta solução é dada por

$$y(t) = e_A(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

Demonstração. Note que $y(t)$ é bem definida e de acordo com Teorema 4.1.5(v) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
y(t) &= e_A(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau = e_A(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t,t_0)e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\\
&= e_A(t,t_0)\left\{y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right\}
\end{aligned}$$

Derivando $y(t)$, temos

$$\begin{aligned}
y^{\Delta}(t) &= \left\{e_A(t,t_0)\left[y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right]\right\}^{\Delta} \\
&= e_A^{\Delta}(t,t_0)\left[y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right] \\
&\quad + e_A(\sigma(t),t_0)\left[y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right]^{\Delta} \\
&= A(t)e_A(t,t_0)\left[y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0.\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right] \\
&\quad + e_A(\sigma(t),t_0)\left\{[y_0]^{\Delta}+\left[\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right]^{\Delta}\right\} \\
&= A(t)e_A(t,t_0)\left[y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0.\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right] + e_A(\sigma(t),t_0)[e_A(t_0,\sigma(t))f(t)] \\
&= A(t)e_A(t,t_0)y_0 + A(t)e_A(t,t_0)\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau + e_A(\sigma(t),\sigma(t))f(t) \\
&= A(t)e_A(t,t_0)y_0 + A(t)e_A(t,t_0)\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau + f(t) \\
&= A(t)\left[e_A(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t,t_0)e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right]+f(t) \\
&= A(t)\left[e_A(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right]+f(t) = A(t)y(t)+f(t)
\end{aligned}$$

Note também que,

$$y(t_0) = e_A(t_0,t_0)\left\{y_0+\int_{t_0}^{t_0} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right\} = y_0.$$

Portanto, $y(t)$ é solução de $y^{\Delta} = A(t)y + f(t)$, $y(t_0) = y_0$. Agora mostraremos que $y(t)$ é a única solução deste PVI.

Vamos supor que $\tilde{y}$ é outra solução do PVI acima.

Seja $v(t) = e_A(t_0,t)\tilde{y}(t)$. Utilizando o Teorema 4.1.5(v), temos

$$\begin{aligned}
v(t) &= e_A(t_0,t)\tilde{y}(t) \\
e_A(t,t_0)v(t) &= e_A(t,t_0)e_A(t_0,t)\tilde{y}(t) \\
e_A(t,t_0)v(t) &= \tilde{y}(t)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A(t)e_A(t,t_0)v(t)+f(t) &= A(t)\tilde{y}(t)+f(t)\\
&= \tilde{y}^{\Delta}(t)\\
&= [e_A(t,t_0)v(t)]^{\Delta}\\
&= e_A^{\Delta}(t,t_0)v(t)+e_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t)\\
&= A(t)e_A(t,t_0)v(t)+e_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f(t) &= e_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t)\\
e_A(t_0,\sigma(t))f(t) &= e_A(t_0,\sigma(t))e_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t)\\
e_A(t_0,\sigma(t))f(t) &= v^{\Delta}(t)
\end{aligned}$$

Se $v(t_0)$ é igual a y_0, então

$$v(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= e_A(t,t_0)v(t)\\
&= e_A(t,t_0)\left\{y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right\}\\
&= e_A(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t,t_0)e_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\\
&= e_A(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau = y(t)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.8. *Suponha $A\in\mathcal{R}$ e C diferenciável. Se C é uma solução da equação dinâmica*

$$C^{\Delta}=A(t)C-C^{\sigma}A(t),$$

então

$$C(t)e_A(t,s)=e_A(t,s)C(s).$$

Demonstração. Vamos fixar $s\in\mathbb{T}$ e supor $C^{\Delta}(t)=A(t)C-C^{\sigma}A(t)$. Considere

$$F(t)=C(t)e_A(t,s)-e_A(t,s)C(s).$$

Assim,

$$F(s) = C(s)e_A(s,s) - e_A(s,s)C(s) = C(s) - C(s) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
F^{\Delta}(t) &= [C(t)e_A(t,s) - e_A(t,s)C(s)]^{\Delta} \\
&= [C(t)e_A(t,s)]^{\Delta} - [e_A(t,s)C(s)]^{\Delta} \\
&= C^{\Delta}(t)e_A(t,s) + C(\sigma(t))e_A^{\Delta}(t,s) - e_A^{\Delta}(t,s)C(s) - e_A(\sigma(t),s)C^{\Delta}(s) \\
&= C^{\Delta}(t)e_A(t,s) + C(\sigma(t))A(t)e_A(t,s) - A(t)e_A(t,s)C(s) \\
&= C^{\Delta}(t)e_A(t,s) + C(\sigma(t))A(t)e_A(t,s) - A(t)C(t)e_A(t,s) + A(t)C(t)e_A(t,s) \\
&\quad - A(t)e_A(t,s)C(s) \\
&= [C^{\Delta}(t) + C(\sigma(t))A(t) - A(t)C(t)]e_A(t,s) + A(t)[C(t)e_A(t,s) - e_A(t,s)C(s)] \\
&= [A(t)C(t) - C(\sigma(t))A(t) + C(\sigma(t))A(t) - A(t)C(t)]e_A(t,s) + A(t)F(t) \\
&= A(t)F(t)
\end{aligned}$$

Logo, F resolve o problema de valor inicial

$$F^{\Delta} = A(t)F, \quad F(s) = 0.$$

Pelo Teorema 4.1.7, temos $F \equiv 0$ e isto significa que $C(t)e_A(t,s)$ e $e_A(t,s)C(s)$ comutam. □

Corolário 4.1.9. *Suponha $A \in \mathcal{R}$ e C uma matriz constante.*

(i) Se $CA(t) = A(t)C$ então, $Ce_A(t,s) = e_A(t,s)C$.

(ii) Em particular, se A é uma matriz constante, então $Ae_A(t,s) = e_A(t,s)A$.

Demonstração. (i) Seja $A \in \mathcal{R}$ e C uma matriz constante, então $C^{\Delta} \equiv 0$ e $C^{\sigma} = C$.

Assim,

$$C^{\Delta} = AC - C^{\sigma}A = 0 \Rightarrow AC = CA.$$

Portanto, pelo Teorema 4.1.8, temos

$$Ce_A(t,s) = e_A(t,s)C.$$

(ii) Como A é constante, temos $A^{\Delta} = 0$ e $A^{\sigma} = A$. Seja $F(t) = Ae_A(t,s) - e_A(t,s)A$, derivando $F(t)$ temos:

$$\begin{aligned}
F^{\Delta}(t) &= [Ae_A(t,s) - e_A(t,s)A]^{\Delta} \\
&= [Ae_A(t,s)]^{\Delta} - [e_A(t,s)A]^{\Delta} \\
&= A^{\Delta}e_A(t,s) + A^{\sigma}e_A^{\Delta}(t,s) - [e_A^{\Delta}(t,s)A + e_A^{\sigma}(t,s)A^{\Delta}] \\
&= 0 + Ae_A^{\Delta}(t,s) - e_A^{\Delta}(t,s)A - 0 \\
&= AAe_A(t,s) - Ae_A(t,s)A \\
&= A[Ae_A(t,s) - e_A(t,s)A] \\
&= AF(t)
\end{aligned}$$

E, $F(s) = Ae_A(s,s) - e_A(s,s)A = A - A = 0$.

Portanto, $F(t)$ resolve o PVI $F^{\Delta}(t) = AF(t)$, $F(s) = 0$.

Pelo Teorema 4.1.7, $F(t) = 0$.

Assim,

$$Ae_A(t,s) - e_A(t,s)A = 0 \Rightarrow Ae_A(t,s) = e_A(t,s)A.$$

□

A seguir o Teorema da Variação das Constantes para a equação adjunta

$$x^{\Delta} = -A^{*}(t)x^{\sigma} + f(t)$$

.

Teorema 4.1.10. *Seja $A \in \mathcal{R}$ uma função matriz valor $n \times n$ em $\mathbb{T}$ e suponha que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é rd-contínua. Sejam $t_0 \in \mathbb{T}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então, o problema de valor inicial*

$$x^{\Delta} = -A^{*}(t)x^{\sigma} + f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

tem uma única solução $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Além disso, esta solução é dada por

$$x(t) = e_{\ominus A^{*}}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus A^{*}}(t,\tau)f(\tau)\Delta\tau.$$

Demonstração. Podemos reescrever $x^{\Delta}(t)$ como,

$$\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &= -A^{*}(t)x(\sigma(t)) + f(t) \\
&= -A^{*}(t)[x(t) + \mu(t)x^{\Delta}(t)] + f(t) \\
&= -A^{*}(t)x(t) - A^{*}(t)\mu(t)x^{\Delta}(t) + f(t) \\
&= -A^{*}(t)x(t) - \mu(t)A^{*}(t)x^{\Delta}(t) + f(t)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t)+\mu(t)A^*(t)x^{\Delta}(t) &= -A^*(t)x(t)+f(t) \\ (I+\mu(t)A^*(t))x^{\Delta}(t) &= -A^*(t)x(t)+f(t) \end{aligned}$$

Como A é regressiva, temos que A^* também é regressiva. Assim,

$$\begin{aligned} [I+\mu(t)A^*(t)]^{-1}[I+\mu(t)A^*(t)]x^{\Delta}(t) &= -[I+\mu(t)A^*(t)]^{-1}A^*(t)x(t) \\ &\quad +[I+\mu(t)A^*(t)]^{-1}f(t) \end{aligned}$$

$$x^{\Delta}(t) = -[I+\mu(t)A^*(t)]^{-1}A^*(t)x(t)+[I+\mu(t)A^*(t)]^{-1}f(t)$$

$$x^{\Delta}(t) = (\ominus A^*)(t)x(t)+[I+\mu(t)A^*(t)]^{-1}f(t).$$

Aplicando o Teorema 4.1.7 para obter a solução de $x^{\Delta} = -A^*(t)x^{\sigma}+f(t)$, $x(t_0)=x_0$ e usando o Teorema 4.1.5(ii) e (iv), temos

$$\begin{aligned} x(t) &= e_{(\ominus A^*)}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} e_{(\ominus A^*)}(t,\sigma(\tau))[I+\mu(\tau)A^*(\tau)]^{-1}f(\tau)\Delta\tau \\ &= e_{(\ominus A^*)}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} e_A^*(\sigma(\tau),t))[I+\mu(\tau)A^*(\tau)]^{-1}f(\tau)\Delta\tau \\ &= e_{(\ominus A^*)}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} \{[I+\mu(\tau)A(\tau)]^{-1}e_A(\sigma(\tau),t))\}^*f(\tau)\Delta\tau \\ &= e_{(\ominus A^*)}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} [e_A(\tau,t)]^*f(\tau)\Delta\tau \\ &= e_{(\ominus A^*)}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} e_{(\ominus A^*)}(t,\tau)f(\tau)\Delta\tau. \end{aligned}$$

$\square$

5 Equação não linear

Neste capítulo, vamos apresentar o Teorema da Existência e Unicidade para uma equação da forma

$$y^{\Delta} = f(t, y).$$

A principal referência para este capítulo é: [1].

5.1 Definição básica

Definição 5.1.1. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e X um espaço de Banach. A função $f : \mathbb{T} \times X \to X$ é chamada,*

(i) rd-contínua, se g definida por $g(t) = f(t, x(t))$ é rd-contínua para qualquer função contínua $x : \mathbb{T} \to X$

(ii) limitada em um conjunto $S \subset \mathbb{T} \times X$, se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in S$$

(iii) Lipschitz contínua em um conjunto $S \subset \mathbb{T} \times X$, se existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in S.$$

5.2 Teorema Existência e Unicidade Local

Teorema 5.2.1. *(Existência e Unicidade Local) Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, X um espaço de Banach, $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in X$, $a > 0$ com $\inf \mathbb{T} \leq t_0 - a$ e $\sup \mathbb{T} \geq t_0 + a$. Defina*

$$I_a = (t_0 - a, t_0 + a) \quad e \quad U_b = \{x \in X : |x - x_0| < b\}.$$

Suponha que $f : I_a \times U_b \to X$ seja rd-contínua, limitada por $M > 0$ e Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $L > 0$.

Então, o PVI

$$x^{\Delta} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

tem exatamente uma solução em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1-\varepsilon}{L}\}$, para algum $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Seja $C(A, B)$ o espaço das funções contínuas $f : A \to B$, onde A e B são espaços de Banach com a norma do supremo $\| f \|_{\infty} = \sup_{t \in A} |f(t)|$.

Seja $C = C(I_\alpha, U_b)$. Se $\lambda \in C(I_\alpha, U_b)$, então a função g definida por $g(t) = f(t, \lambda(t))$ é rd-contínua por hipótese e, consequentemente, g tem uma antiderivada de acordo com o Teorema 2.3.6.

Portanto, o operador $F : C(I_\alpha, U_b) \to C(I_\alpha, X)$ definido por

$$F(\lambda)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda(\tau))\Delta\tau$$

onde $\lambda \in C(I_\alpha, U_b)$ é bem definido.

Vamos mostrar que F satisfaz o teorema do ponto fixo de Banach.

Primeiro, seja $\lambda \in C(I_\alpha, U_b)$, então

$$\| \lambda(t) - x_0 \| < b, \quad \forall t \in I_\alpha$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\| F(\lambda)(t) - x_0 \| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda(\tau))\Delta\tau - x_0 \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda(\tau))\Delta\tau \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_0}^{t} M\Delta\tau \right\| = M|t - t_0| < M \cdot \alpha < M \cdot \frac{b}{M} \\
&= b, \quad \forall t \in I_\alpha.
\end{aligned}$$

Logo, $\| F(\lambda)(t) - x_0 \| < b$, para todo $t \in I_\alpha$.

Assim, $F(\lambda) : I_\alpha \to U_b$. Além disso, F é diferenciável e por conseguinte, F é contínua de acordo com o Teorema 2.2.2(i).

Logo, $F(C) \subset C$ e portanto, $F : C(I_\alpha, U_b) \to C(I_\alpha, U_b)$.

Agora mostraremos que F é uma contração.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in C(I_\alpha, U_b)$ e $t > t_0$. Então,

$$\begin{aligned}
\| F(\lambda_1)(t) - F(\lambda_2)(t) \| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda_1(\tau))\Delta\tau - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda_2(\tau))\Delta\tau \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda_1(\tau))\Delta\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda_2(\tau))\Delta\tau \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, \lambda_1(\tau)) - f(\tau, \lambda_2(\tau))]\Delta\tau \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L \| \lambda_1(\tau) - \lambda_2(\tau) \| \Delta\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} L \| (\lambda_1 - \lambda_2)(\tau) \| \Delta\tau \leq \int_{t_0}^{t} L \sup_{t \in I_\alpha} \| (\lambda_1 - \lambda_2)(t) \| \Delta\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} L \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_\infty \Delta\tau = L \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_\infty \int_{t_0}^{t} \Delta\tau \\
&= L \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_\infty |t - t_0| < L \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_\infty \alpha \\
&\leq L \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_\infty \frac{1 - \varepsilon}{L} \\
&\leq (1 - \varepsilon) \| \lambda_1 - \lambda_2 \| .
\end{aligned}$$

Obtemos, $\parallel F(\lambda_1)(t) - F(\lambda_2)(t) \parallel \leq (1-\varepsilon) \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel$.

Como $(1-\varepsilon) < 1$, segue que F é uma contração.

Pelo teorema do ponto fixo de Banach (ver Teorema A.0.1), existe um único $\lambda \in C(I_\alpha, U_b)$ tal que $\lambda = F(\lambda)$ e, portanto,

$$\lambda(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lambda(\tau))\Delta\tau,$$

donde segue que

$$\lambda^{\Delta}(t) = f(t, \lambda(t)), \quad \lambda(t_0) = x_0.$$

□

REFERÊNCIAS

[1] BOHNER, M.; PETERSON, A. *Dynamic Equations on Time Scales, an Introduction with Applications.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[2] BOHNER, M.; PETERSON, A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Birkhäuser Boston, MA, 2003.

[3] HILGER, S. *Ein Mabkettenkalküll Mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten.* PhD Thesis. Universiatät Wurzburg, 1988.

[4] AGARWAL, R.; BOHNER, M.; O'REGAN, D.; PETERSON, A. Dynamic equations on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141 (2002) 1-26.

[5] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library, 1978.

APÊNDICE A – Espaços Normados Completos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição A.0.1. *Seja X espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ é dita uma norma em X se, para quaisquer $x, y \in X$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\| x \| \geq 0$

(ii) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

(iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Definição A.0.2. *Seja X um espaço normado. Uma sequência (x_n) em X converge para $x \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $\| x_n - x \| < \varepsilon$.*

Definição A.0.3. *Uma sequência (x_n) em X é chamada de sequência de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$, então $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.*

Definição A.0.4. *Um espaço normado X é completo quando toda sequência de Cauchy em X é convergente.*

Definição A.0.5. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.*

Definição A.0.6. *Uma função $T : X \to X$ é uma contração em X quando existe uma constante $\alpha \in [0, 1)$ tal que*

$$\| Tx - Ty \| \leq \alpha \| x - y \| .$$

Definição A.0.7. *Seja $T : X \to X$ qualquer. Dizemos que $c \in X$ é um ponto fixo de T, se*

$$T(c) = c.$$

Teorema A.0.1. *Considere o espaço vetorial normado X, onde $X \neq 0$ (espaço nulo). Suponha X completo e seja $T : X \to X$ uma contração em X. Então, T tem precisamente um único ponto fixo.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ qualquer.

Definimos (x_n) por:

$$(x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = TTx_0 = T^2x_0, \cdots, \quad x_n = T^n x_0).$$

Claramente, esta é uma sequência de imagens de x_0 sob a aplicação repetida de T.

Mostraremos que (x_n) é de Cauchy.

Temos:

$$\begin{aligned}
\| x_{m+1} - x_m \| &= \| Tx_m - Tx_{m-1} \| \\
&\leq \alpha \| x_m - x_{m-1} \| \\
&= \alpha \| Tx_{m-1} - Tx_{m-2} \| \\
&\leq \alpha \cdot \alpha \| x_{m-1} - x_{m-2} \| \\
&\vdots \\
&\leq \alpha^m \| x_1 - x_0 \| .
\end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade triangular e pela fórmula da soma da Progressão Geométrica, obtemos para $n > m$:

$$\begin{aligned}
\| x_m - x_n \| &\leq \| x_m - x_{m+1} + x_{m+1} - x_{m+2} + x_{m+2} + \cdots + x_{n-1} + x_n \| \\
&\leq \| x_m - x_{m+1} \| + \| x_{m+1} - x_{m+2} \| + \cdots + \| x_{n-1} - x_n \| \\
&\leq \alpha^m \| x_0 - x_1 \| + \alpha^{m+1} \| x_0 - x_1 \| + \cdots + \alpha^{n-1} \| x_0 - x_1 \| \\
&= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n+1}) \| x_0 - x_1 \| \\
&= \alpha^m \frac{(1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} \| x_0 - x_1 \| \\
&\leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \| x_0 - x_1 \|
\end{aligned}$$

Para que,

$$\frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \| x_0 - x_1 \|$$

torne-se tão pequeno quanto se queira, basta tomar m suficientemente grande.

Logo, (x_m) é de Cauchy. Como X é Completo, então (x_m) converge, isto é, $x_m \to x$.

Agora, mostraremos que x é um ponto fixo.

Temos,

$$\begin{aligned}
\| x - Tx \| &= \| x - x_m + x_m - Tx \| \\
&\leq \| x - x_m \| + \| x_m - Tx \| \\
&= \| x - x_m \| + \| Tx_{m-1} - Tx \| \\
&\leq \| x - x_m \| + \alpha \| x_{m-1} - x \|
\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$, concluímos que $\| x - Tx \| = 0$ e, portanto, $Tx = x$ donde segue que x é um ponto fixo.

Mostremos que x é o único ponto fixo de T.

Sejam $Tx = x$ e $Ty = y$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \| x - y \| = \| Tx - Ty \| \leq \alpha \| x - y \| \\ \Rightarrow\ & \| x - y \| - \alpha \| x - y \| \leq 0 \\ \Rightarrow\ & \| x - y \| (1 - \alpha) \leq 0; \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

O que implica $\| x - y \| = 0$.

Logo, $x = y$. $\square$