

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Bacharelado em Matemática

**Rodrigo Bittencourt Pigozzo**

**Transformações de Möbius e Aplicações**

Juiz de Fora  
2018

Rodrigo Bittencourt Pigozzo

**Transformações de Möbius e Aplicações**

Orientador: Magno Branco Alves

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

PIGOZZO, Rodrigo.

Transformações de Möbius e Aplicações / Rodrigo Bittencourt Pigozzo.  
– 2018.

52 f. : il.

Orientador: Magno Branco Alves

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora,  
Instituto de Ciências Exatas. Bacharelado em Matemática, 2018.

1. transformações 2. transformação de Möbius 3. inversão - projeção  
estereográfica 4. Razão Cruzada 5. geometria

Rodrigo Bittencourt Pigozzo

Transformações de Möbius e Aplicações

Aprovada em: 11 de Julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Magno Branco Alves Magno Branco Alves -  
Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Kennedy Martins Pedroso  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. José Barbosa Gomes  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeira e exclusivamente a Deus, que me carrega em minhas oscilações e fraquezas e me dotou de inteligência e me deu tanta saúde e tanta disposição pra estudar, quero agradecer ao meu orientador Magno Branco pela paciência e total disposição de me ajudar a estudar, entender e escrever esse trabalho, quero agradecer aos meus pais também, Rita de Cássia e Wanderson Guedes que sempre me apoiaram a estudar e nunca me faltaram com nada, quero agradecer a todos os meus amigos e irmãos da Comunidade Católica Shalom que sempre me apoiaram nesse tempo de muita entrega aos estudos, agradecer aos meus amigos que caminharam nessa graduação comigo e me ajudaram em cada trabalho e provas, agradecer também a todos os professores que tive na graduação, que de certa forma me auxiliaram a descobrir e conhecer todo o Universo matemático que conheço e um agradecimento especial também a Giovana, minha namorada, que sempre me ajudou demais para que eu sempre estivesse motivado e sempre me dedicasse mais, enfim... agora sinto que todo esforço é recompensado! Louvado seja Deus! Viva a matemática!

## RESUMO

Ao longo do século XIX, a atenção do mundo matemático foi, em grande medida, concentrado na Teoria das funções complexas, que é o estudo das funções de uma variável complexa. Por sua posição central, diretamente relacionado com a análise, a álgebra, a teoria dos números, a teoria do potencial, a geometria e topologia, a *teoria da função complexa* torna-se interessante e um importante tópico para estudo, especialmente no nível de graduação: tendo um bom equilíbrio entre a teoria geral e exemplos particulares. Ilustra o desenvolvimento de um pensamento matemático e incentiva o aluno a pensar a matemática como sujeito unificado em vez de uma coleção de tópicos mutuamente disjuntos.

August Ferdinand Möbius, matemático alemão que nasceu em 1790 e morreu em 1868, introduziu o que hoje conhecemos por transformação de Möbius, uma transformação de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , que pode ser vista como composição de transformações complexas mais simples, como por exemplo, translação, rotação, dilatação e inversão. Vamos mostrar que estas composições tornam mais claras algumas propriedades das transformações de Möbius. Veremos que o conjunto das transformações de Möbius pode ser associado a uma matriz quadrada complexa de ordem 2.

Neste trabalho, o foco da exposição são as “Transformações de Möbius do Plano Complexo Estendido”, enfatizando seus aspectos geométricos. Como aplicação, discute-se aspectos elementares de “Equações Diferenciais Ordinárias Fuchsianas” e “Geometria Hiperbólica Plana”.

Palavras-chave: transformações - transformação de Möbius - inversão - projeção estereográfica - razão cruzada - conjugação - geometria - equação fuchsiana

## ABSTRACT

Throughout the nineteenth century, the attention of the mathematical world was to a large extent concentrated on the Theory of Complex Functions, which is the study of the functions of a complex variable. By its central position, directly related to analysis, algebra, number theory, potential theory, geometry and topology, the *complex function theory* it becomes interesting and an important topic for study, especially at the undergraduate level: having a good balance between general theory and particular examples. Illustrates the development of mathematical thinking and encourages the student to think of mathematics as a unified subject rather than a collection of mutually disjointed topics.

August Ferdinand Möbius, German mathematician who was born in 1790 and died in 1868, has introduced what we know today by Möbius transformation, a transformation of  $\mathbb{C}$  into  $\mathbb{C}$ , which can be seen as a composition of simpler complex transformations, such as translation, rotation, dilation, and inversion. We will show that these compositions clarify some properties of the Möbius transformations. We will see that the set of Möbius transformations can be associated to a complex square matrix of order 2.

In this work, the focus of the exhibition is the "Möbius Transformations of the Extended Complex Plane", emphasizing its geometrical aspects. As an application, elementary aspects of 'Fuchsian Ordinary Differential Equations' and 'Plan Hyperbolic Geometry' are discussed.

Key-words: transformations - Möbius transformation - inversion - stereographic projection  
- cross-ratio - conjugation - geometry - Fuchsian equation

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>A ESFERA DE RIEMANN <math>\mathbb{C}_\infty</math> . . . . .</b>	<b>8</b>
2.1	Noções Topológicas . . . . .	8
2.2	A Esfera e a inclusão do $\infty$ . . . . .	13
2.3	Funções e Equações Diferenciais Ordinárias na Esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ .	18
<b>3</b>	<b>AS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS . . . . .</b>	<b>23</b>
3.1	$PSL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	23
3.2	$PSL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	28
<b>4</b>	<b>MÉTRICA HIPERBÓLICA . . . . .</b>	<b>35</b>
4.1	A distância hiperbólica $\rho(ia, ib)(b > a)$ . . . . .	35
4.2	A distância hiperbólica $\rho(z, w)(\Re(z) \neq \Re(w))$ . . . . .	38
4.3	Área hiperbólica e a fórmula de Gauss-Bonnet . . . . .	46
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>52</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Como queremos chegar, por meio deste trabalho, em transformações de Möbius que conservam distâncias na Geometria Hiperbólica entre os semi-planos superiores(ou inferiores) que por sinal mostraremos que são as nossas transformações de  $PSL_2(\mathbb{C})$ , então começamos esse trabalho, no capítulo 1, introduzindo nossas esferas, que serão nossas estruturas para trabalho, a *esfera de Riemann*  $\mathbb{C}_\infty$  e a esfera usual de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2$ .

Daí, vamos atrás de “amarrar” muito bem uma esfera com a outra, entendendo que ao fazer alguma composição no plano, como se espelha na esfera  $S^2$  por meio de funções muito bem definidas, que serão as projeções.

Logo após essas considerações iniciais, mostramos uma aplicação, mais como curiosidade, definida em duas sentenças, que nos faz perceber melhor a projeção, que cobre qualquer ponto na esfera  $S^2$  por quaisquer duas funções como definidas em 2.3.

No capítulo 3, definimos finalmente que são as transformações, e já na notação de  $PSL_2(\mathbb{C})$  e  $SPL_2(\mathbb{R})$  mostramos os primeiros grandes resultados.

Por fim, no capítulo 4, definimos a métrica hiperbólica, e a noção de distância hiperbólica no semi-plano superior, e juntamente com as transformações de Möbius, que são de  $SPL_2(\mathbb{R})$ , provamos os grandes teoremas de conservação e a Fórmula de Gauss-Bonnet.

## 2 A ESFERA DE RIEMANN $\mathbb{C}_\infty$

### 2.1 Noções Topológicas

Começamos com a noção de topologia sobre um conjunto  $X \neq \emptyset$ .

**Definição 2.1.1** (Topologia). *Seja  $\mathcal{T}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$ . Diz-se que  $\mathcal{T}$  é uma **topologia** sobre  $X$ , quando:*

- a.  $\emptyset \in \mathcal{T}$  e  $X \in \mathcal{T}$  ;
- b.  $A_\lambda \in \mathcal{T}, \forall \lambda \in \Lambda \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$  ;
- c.  $A_1 \in \mathcal{T}, \dots, A_k \in \mathcal{T} \implies A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{T}$ .

Em palavras, o item (b), acima, diz que uma união arbitrária de elementos de  $\mathcal{T}$  também é elemento de  $\mathcal{T}$ ; o item (c), acima, diz que interseção finita arbitrária de elementos de  $\mathcal{T}$  também é elemento de  $\mathcal{T}$ .

**Exemplo 2.1.2.** *Abaixo, os dois exemplos extremos de topologias sobre  $X$ :*

- a. *Se  $\mathcal{T}_{min} = \{\emptyset, X\}$  então  $\mathcal{T}_{min}$  é uma topologia sobre  $X$ .*
- b. *Se  $\mathcal{T}_{max} = \mathcal{P}(X)$  (conjunto das partes de  $X$ ) então  $\mathcal{T}_{max}$  é uma topologia sobre  $X$ .*

**Observação: 2.1.3.** *A topologia no item (a) foi denotado com o subscrito min porque ela é a menor topologia sobre  $X$ , dado que ela está contida, vide o item (a) da Definição 2.1.1, em qualquer topologia admissível sobre  $X$ . No outro extremo, a topologia do item (b) foi denotada com o subscrito max, dado que,  $\mathcal{P}(X)$  contém qualquer topologia admissível sobre  $X$  (ver Definição 2.1.1)*

O próximo passo é definir espaço topológico.

**Definição 2.1.4** (Espaço Topológico). *Um **espaço topológico** é um par  $(X, \mathcal{T})$ , onde  $X \neq \emptyset$  e onde  $\mathcal{T}$  é uma topologia sobre  $X$ .*

Uma proposição elementar que se revelará instrumental, quando discutirmos a esfera de Riemann é a seguinte:

**Proposição 2.1.5.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $Y \subset X$  arbitrário. Defina a coleção  $\mathcal{T}_Y$ , de subconjuntos de  $Y$ , através de*

$$\mathcal{T}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}.$$

*Então  $\mathcal{T}_Y$  é uma topologia sobre  $Y$ .*

**Observação: 2.1.6.** É usual referir-se à topologia  $\mathcal{T}_Y$  como a **topologia relativa** de  $Y$  com respeito a  $\mathcal{T}$  ou como a **topologia induzida** por  $\mathcal{T}$  em  $Y$ .

Em um espaço topológico arbitrário, temos três classes destacadas de subconjuntos: os conjuntos **abertos**, os conjuntos **fechados** e os conjuntos **compactos**.

**Definição 2.1.7** (Abertos, Fechados e Compactos). *Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico arbitrário. Temos que:*

- a. *Os subconjuntos  $A \subset X$  que pertencem à coleção  $\mathcal{T}$  são denominados de os **abertos de  $X$  na topologia  $\mathcal{T}$** .*
- b. *Os subconjuntos  $F \subset X$  cujos complementares  $X \setminus F$  são abertos de  $X$  na topologia  $\mathcal{T}$  são os **fechados de  $X$  na topologia  $\mathcal{T}$** .*
- c. *Os subconjuntos  $K \subset X$  com a propriedade de que qualquer cobertura aberta de  $K$  admite uma subcobertura finita são denominados de os **compactos de  $X$  na topologia  $\mathcal{T}$** .*

**Observação: 2.1.8.** *O item (c) merece palavras adicionais. Uma **cobertura aberta** de  $K$  é uma coleção  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de abertos de  $X$  (na topologia  $\mathcal{T}$ ) tal que*

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

*Por outro lado, uma **subcobertura finita** de  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  para o conjunto  $K$  é uma coleção finita*

$$\{A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_k}\},$$

*onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$  e  $K \subset \bigcup_{j=1}^k A_{\lambda_j}$ .*

**Exemplo 2.1.9.** *Dado  $X \neq \emptyset$ , temos o seguinte*

1. *Em relação à topologia  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ :*
  - a) *Nenhum conjunto formado por um único ponto de  $X$  é aberto ou fechado, quando  $X$  contém mais de um ponto ;*
  - b) *Qualquer subconjunto de  $X$  é compacto.*
2. *Em relação à topologia  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ :*
  - a) *Qualquer subconjunto tanto é aberto como fechado ;*
  - b) *Os compactos são, justamente, os subconjuntos finitos de  $X$ .*
3. *Em relação a qualquer topologia  $\mathcal{T}$ , sobre  $X$ , qualquer subconjunto finito é compacto.*

Lembramos que se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  então

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

**Definição 2.1.10.** Diz-se que  $A \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto** se, a cada ponto  $a \in A$ , corresponde  $\delta = \delta(a) > 0$  de modo que

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \|x - a\| < \delta \implies A.$$

**Exemplo 2.1.11.** Em  $\mathbb{R}^n$ , são exemplos de conjuntos abertos:

- a. Os conjuntos  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$  ;
- b. Os conjuntos  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > r\}$  ;
- c. O conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $\mathbb{R}^n$

**Observação: 2.1.12.** O item (c), acima, merece palavras adicionais. A razão de  $\emptyset$  ser considerado um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  é justificada pelo fato de a possibilidade de ele não sê-lo revelar-se falsa, pois, em tal caso, dever-se-ia ser capaz de se obter ponto  $a \in \emptyset$  ao qual não correspondesse qualquer  $\delta = \delta(a) > 0$  como na definição acima. Ora, um tal  $a \in \emptyset$  está fora de cogitação pela essência do conjunto vazio  $\emptyset$  não conter elemento! Assim, se falsa é a possibilidade de  $\emptyset$  não ser subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , conclui-se que verdadeira é a opção alternativa de  $\emptyset$  ser subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Finalmente, temos, claramente, que  $\mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto de si mesmo. Aqui, para  $a \in \mathbb{R}^n$  arbitrário, qualquer  $\delta > 0$  cumpre a condição na definição acima.

Como é de se esperar, temos que

**Proposição 2.1.13.** Os subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  formam uma topologia.

**Observação: 2.1.14.** A topologia na Proposição 2.1.13 costuma ser denominada de a **topologia usual** de  $\mathbb{R}^n$ .

Os compactos de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual têm uma caracterização precisa, através do seguinte

**Teorema 2.1.15** (Heine-Borel). Um subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se, e somente se, ele é fechado e limitado.

**Observação: 2.1.16.** Um subconjunto  $L \subset \mathbb{R}^n$  é **limitado** se existe  $r = r(L) > 0$  tal que

$$L \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}.$$

Abaixo, alguns exemplos que ilustram o Teorema de Heine-Borel.

**Exemplo 2.1.17.** São válidos:

a. O conjunto vazio é um fechado de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual pois seu complementar  $\mathbb{R}^n \setminus \emptyset$  é o próprio  $\mathbb{R}^n$  que é aberto. O conjunto vazio também é limitado porque está contido em qualquer conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ . Assim, **pelo Teorema de Heine-Borel, conclui-se que o conjunto vazio  $\emptyset$  é um compacto de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual.**

b. A bola fechada unitária

$$\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

é um fechado de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual pois seu complementar  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$  é o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$  que é aberto de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual. Tal bola  $\mathbb{D}^n$  também é limitada pois, por exemplo, temos que

$$\mathbb{D}^n \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 2\}.$$

Assim, **pelo Teorema de Heine-Borel, conclui-se que  $\mathbb{D}^n$  é um compacto de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual.**

c. A esfera unitária

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

é um fechado de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual pois seu complementar  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^n$  é a união dos abertos de  $\mathbb{R}^n$  (na topologia usual).

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \text{ e } \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}.$$

Assim, o complementar  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^n$  é aberto de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual, donde se conclui que  $\mathbb{S}^n$  é fechado de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual. Além disso, tal esfera  $\mathbb{S}^n$  também é limitada pois, por exemplo, temos que

$$\mathbb{S}^n \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 2\}.$$

Assim, **pelo Teorema de Heine-Borel, conclui-se que  $\mathbb{S}^n$  é um compacto de  $\mathbb{R}^n$  na topologia usual.**

Outra proposição elementar que se revelará fundamental, quando discutirmos a esfera de Riemann é a seguinte:

**Proposição 2.1.18.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico e seja  $K$  um compacto de  $X$  na topologia  $\mathcal{T}$ . Então  $K$  é um compacto (de si mesmo) na topologia relativa  $\mathcal{T}_K$ .

Agora, seja  $f : X \longrightarrow Y$  uma função entre os conjuntos  $X, Y \neq \emptyset$ . Ao dotarmos os conjuntos  $X$  e  $Y$  com topologias  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$ , respectivamente, obtemos o direito de definir a continuidade de uma tal função  $f$  com respeito a tais topologias. Precisamente, temos o seguinte:

**Definição 2.1.19.** Diz-se que  $f$  é contínua com respeito às topologias  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$ , quando

$$A' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$

**Exemplo 2.1.20.** Agora, fixe uma função  $f : X \longrightarrow Y$  entre os conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ . Temos o seguinte:

- a. Em  $X$ , se fixamos a topologia  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  então qualquer topologia  $\mathcal{T}'$  em  $Y$  torna  $f$  contínua com respeito a  $\mathcal{T}$  e a  $\mathcal{T}'$ ;
- b. Em  $Y$ , se fixamos a topologia  $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y\}$  então qualquer topologia  $\mathcal{T}$  em  $X$  torna  $f$  contínua com respeito a  $\mathcal{T}$  e a  $\mathcal{T}'$ .

**Proposição 2.1.21.** Seja  $f : X \longrightarrow Y$  uma função bijetora entre os conjuntos  $X, Y \neq \emptyset$  e seja  $\mathcal{T}$  uma topologia no conjunto  $X$ . Considere a coleção  $\mathcal{T}'$  de subconjuntos de  $Y$ , dada por

$$\mathcal{T}' := \{f(A) : A \text{ é aberto de } X \text{ na topologia } \mathcal{T}\}.$$

Então:

- a.  $\mathcal{T}'$  é uma topologia em  $Y$ .
- b. Com respeito às topologias  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$ ,  $f$  é um **homeomorfismo**, isto é, tanto  $f$  como sua inversa  $f^{-1}$  são contínuas.

## 2.2 A Esfera e a inclusão do $\infty$

Existem algumas desvantagens no uso do conjunto dos  $\mathbb{C}$ :

- Por exemplo, divisão por 0 é impossível, e assim algumas funções não são definidas em todos os pontos (por exemplo,  $z^{-1}$  é indefinido em  $z = 0$ );
- Uma outra desvantagem, um pouco menos óbvia, é que  $\mathbb{C}$  não é compacto, de modo que certas sequências (1,2,3,..., por exemplo) não têm subsequências convergentes.

Em  $\mathbb{R}^3$ , denote o ponto  $(0, 0, 1)$  por  $N$  e denomine-o de **pólo norte**. Considere, também, a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Considere, ainda, a aplicação **projeção estereográfica** (via o pólo norte)

$$\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida, geometricamente, através do seguinte procedimento:

- Primeiro, considere um ponto arbitrário  $Q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ ;
- Segundo, considere a reta que une os pontos  $N$  e  $Q$
- Terceiro, defina  $\pi(Q)$  como sendo a (única) interseção da reta no item acima com o plano

$$\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} (\simeq \mathbb{C}).$$

Veja a figura a seguir:

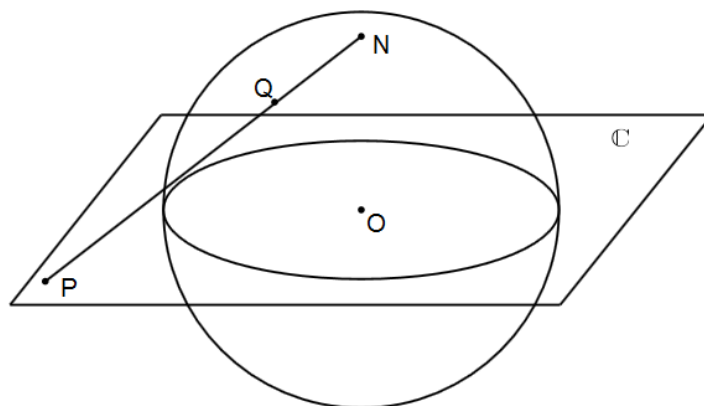


Figura 1 – projeção de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  em  $\mathbb{C}$

Resulta que a projeção estereográfica (via pólo norte) é um **homeomorfismo** entre  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  e  $\mathbb{C}$ . Precisamente, temos o seguinte:

**Proposição 2.2.1.** *São válidas:*

a. A projeção estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$  cumpre

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \quad (2.1)$$

b. A inversa  $\pi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  da projeção estereográfica cumpre

$$\pi^{-1}(x + iy) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Para o item (a) temos: seja  $P = (x, y, 0)$  onde  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , e seja  $Q = (x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\}$ . Como  $P, Q$  e  $N$  são pontos colineares, assim:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3}$$

Portanto, tiramos que:  $x = x_1/(1 - x_3)$  e  $y = x_2/(1 - x_3)$ , e então  $\pi : Q \mapsto P$  é dada por

$$\pi((x_1, x_2, x_3)) = z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Logo, voltamos na expressão (2.1) e cumprimos (a).

Para o item (b), usando  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} [x \cdot (1 - x_3)] + [y \cdot (1 - x_3)] + x_3 = 1 &\implies x \cdot (1 - x_3) + y \cdot (1 - x_3) + x_3 - 1 = 0 \\ \implies (x + y) \cdot (1 - x_3) + x_3 + 1 = 2 &\implies (x + y) \cdot (1 - x_3) + x_3 - 2x_3 + 1 = 2 - 2x_3 \\ \implies (x + y) \cdot (1 - x_3) + (1 - x_3) = 2 - 2x_3 &\implies (1 - x_3) \cdot [x + y + 1] = 2 - 2x_3 \\ \implies x + y + 1 = \frac{2 - 2x_3}{(1 - x_3)} = \frac{2}{1 - x_3}. \end{aligned}$$

E ainda:  $2 \cdot \frac{x}{x_1} = \frac{2}{1 - x_3}$ ;  $2 \cdot \frac{y}{x_2} = \frac{2}{1 - x_3}$ . Logo,  $\pi^{-1} : P \mapsto Q$  é dada por

$$x_1 = \frac{2x}{x + y + 1}, x_2 = \frac{2y}{x + y + 1}, x_3 = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}.$$

Portanto, segue o afirmado em (b). □

**Corolário 2.2.2.** *Vale o seguinte*

$$\lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} |\pi(x_1, x_2, x_3)| = +\infty.$$



*Demonstração.* De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} |\pi(x_1, x_2, x_3)|^2 &= \lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 \\
 &= \lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} \\
 &= \lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} \\
 &= \lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} \frac{1 + x_3}{1 - x_3} \\
 &= +\infty,
 \end{aligned}$$

donde se conclui que  $\lim_{(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 1)} |\pi(x_1, x_2, x_3)| = +\infty$ , como afirmado.  $\square$

Veja a figura a seguir:

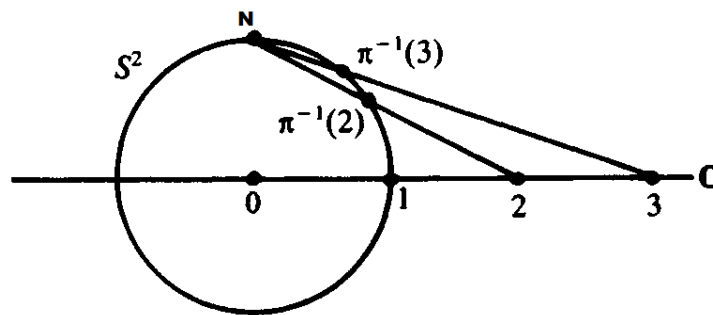


Figura 2 – Ilustração da projeção ao longo do eixo x

Ancorados no Corolário 2.2.2, onde se afirma que

$$\lim_{Q \rightarrow N} \pi(Q) = +\infty,$$

vamos considerar a extensão  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  da projeção estereográfica (via pólo norte), onde  $\infty$  é um ponto idealizado *no infinito* que, por definição, cumpre

$$\pi(N) = \infty.$$

Por conta da bijetividade da extensão  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  da projeção estereográfica (via pólo norte), daqui por diante, definimos:

**Definição 2.2.3** (Esfera de Riemann). *Seja  $\mathbb{C}$  o plano complexo e  $\infty$  o ponto idealizado (o infinito) que, por definição, cumpre  $\pi(N) = \infty$ . Chamamos de a **esfera de Riemann** a união:*

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

a qual será denotada por  $\mathbb{C}_\infty$ .

Nela,  $\mathbb{C}_\infty$ , vamos introduzir uma topologia  $\mathcal{T}_\infty$  que tornará tal extensão  $\pi$  um **homeomorfismo**. Pelo item (c) do Exemplo 2.1.17, sabe-se que  $\mathbb{S}^2$  é um compacto de  $\mathbb{R}^3$  na topologia usual.

Em  $\mathbb{S}^2$ , considere a topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$  induzida pela topologia usual de  $\mathbb{R}^3$ . Pela Proposição 2.1.18, conclui-se que a esfera  $\mathbb{S}^2$  é compacta na topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$ .

Em  $\mathbb{C}_\infty$ , seja  $\mathcal{T}_\infty$  a topologia definida, nos termos da Proposição 2.1.21, através da bijeção  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  e da topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$ . Como  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  é um homeomorfismo em relação às topologias  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$  e  $\mathcal{T}_\infty$  e como  $(\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_{\mathbb{S}^2})$  é um espaço topológico compacto, conclui-se, via Proposição 2.1.21, que  $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$  também é um espaço topológico *compacto*. Abaixo, uma caracterização dos abertos da topologia  $\mathcal{T}_\infty$ .

**Proposição 2.2.4.** *Em  $\mathbb{C}_\infty$ , os abertos da topologia  $\mathcal{T}_\infty$  são de dois tipos:*

- a. *Conjuntos  $A$  que são abertos de  $\mathbb{C} (\simeq \mathbb{R}^2)$  na topologia usual ;*
- b. *Uniões  $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ , onde  $K$  é compacto de  $\mathbb{C}$  na topologia usual.*

*Demonstração.* Em duas etapas:

1. Onde se mostrará que os abertos listados nos itens (a) e (b) do enunciado são abertos de  $\mathbb{C}_\infty$  na topologia  $\mathcal{T}_\infty$  ;
2. Onde se mostrará a recíproca, ou seja, que os abertos de  $\mathbb{C}_\infty$  na topologia  $\mathcal{T}_\infty$  enquadram-se em um dos itens (a) ou (b) do enunciado.

Para a primeira etapa, temos o seguinte:

- Se  $A$  é um aberto de  $\mathbb{C} (\simeq \mathbb{R}^2)$  na topologia usual, dado que (vide Proposição 2.2.1)  $\pi$  leva  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  homeomorficamente sobre  $\mathbb{C}$ , temos que  $\pi^{-1}(A)$  é aberto de  $\mathbb{S}^2$  na topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$ . Como  $A = \pi(\pi^{-1}(A))$ , conclui-se que  $A \in \mathcal{T}_\infty$ .
- Se  $K$  é um compacto de  $\mathbb{C}$  na topologia usual, temos que, na topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$ , a pré-imagem  $\pi^{-1}(K)$  é um compacto de  $\mathbb{S}^2$  que, claramente, não contém o pólo norte  $N = (0, 0, 1)$ . Segue que  $\mathbb{S}^2 \setminus \pi^{-1}(K)$  é um aberto de  $\mathbb{S}^2$  na topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$  e que este aberto é levado homeomorficamente por  $\pi$  em  $(\mathbb{C}_\infty) \setminus K$ . Como  $(\mathbb{C}_\infty) \setminus K = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ , conclui-se que  $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\} \in \mathcal{T}_\infty$ .

Para a segunda etapa, seja  $A'$  um aberto de  $\mathbb{C}_\infty$  na topologia  $\mathcal{T}_\infty$ . Temos o seguinte:

- Se  $\infty \notin A'$  então  $A' \subset \mathbb{C}$ . Daí, a pré-imagem  $\pi^{-1}(A')$  é um aberto de  $\mathbb{S}^2$  na topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$  que, claramente, não contém o pólo norte  $N = (0, 0, 1)$ . Daí e da Proposição 2.2.1, conclui-se que  $A' = \pi(\pi^{-1}(A'))$  é aberto de  $\mathbb{C}$  na topologia usual.

- Se  $\infty \in A'$ , temos que a pré-imagem  $\pi^{-1}(A')$  é aberto de  $\mathbb{S}^2$  na topologia  $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}$  que, claramente, contém o pólo norte  $N = (0, 0, 1)$ . Se  $A' = \mathbb{C}_\infty$ , tomamos  $K = \emptyset$ . Logo, não é perda de generalidade supor  $A' \neq \mathbb{C}_\infty$ . Neste caso,  $\pi^{-1}(A')$  é subconjunto (aberto) próprio de  $\mathbb{S}^2$ . Neste caso, temos que  $\mathbb{S}^2 \setminus \pi^{-1}(A')$  é compacto de  $\mathbb{S}^2$ . Seja  $K$  a imagem deste último compacto por  $\pi$ . Resulta que  $K$  é compacto - pois  $\pi$  é **homeomorfismo** - e que  $A' = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ .

□

**Proposição 2.2.5.** *A extensão  $\pi : S \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$  da projeção estereográfica (via pólo norte) leva  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : 1 \geq x_3 > \rho > 0\}$  bijectivamente sobre  $A' = (\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r}) \cup \{\infty\}$ , onde  $\overline{\Delta_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  e  $r = \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}$ . Em particular,  $\pi$  é contínua em  $N = (0, 0, 1)$  e  $\pi^{-1}$  é contínua no  $\infty$ .*

*Demonstração.* Da demonstração do Corolário 2.2.2, temos que a projeção estereográfica  $\pi$  (via pólo norte) cumpre

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{1+x_3}{1-x_3}},$$

qualquer que seja  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ . Portanto, se  $1 > x_3 > \rho > 0$  então

$$1 + x_3 > 1 + \rho \text{ e } 0 < 1 - x_3 < 1 - \rho,$$

donde se conclui que  $\frac{1+x_3}{1-x_3} > \frac{1+\rho}{1-\rho} > 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \pi(A) &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \right\} \cup \{\infty\} \\ &= (\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r}) \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

onde  $\overline{\Delta_r} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq r : r = \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \right\}$ .

□

**Corolário 2.2.6.**  *$\pi : S \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$  é homeomorfismo.*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.2.4 temos que os abertos de  $\mathbb{C}_\infty$  são os conjuntos  $A$  que são abertos de  $\mathbb{C} (\simeq \mathbb{R}^2)$  na topologia usual e as reuniões do tipo  $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ , onde  $K$  é compacto de  $\mathbb{C}$  na topologia usual. E pela Proposição 2.2.5, mostramos quem são esses abertos e que  $\pi$  e  $\pi^{-1}$  são contínuas nas vizinhanças de  $N$  e  $\infty$ , respectivamente. Logo, segue o resultado.

□

### 2.3 Funções e Equações Diferenciais Ordinárias na Esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$

Em  $S = \mathbb{C} \times \{0\} \cup \mathbb{C} \times \{1\}$ , considere a relação de equivalência  $\sim$ , dada por

$$(z, 0) \sim (w, 1) \iff z \neq 0 \text{ e } w = 1/z$$

e seja  $S/\sim$  o conjunto-quociente de  $S$  pela relação de equivalência  $\sim$ . Explicitamente, temos que

$$S/\sim = \{(0, 0)\} \cup \{(0, 1)\} \cup \bigcup_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \{(z, 0), (1/z, 1)\}.$$

Convém registrar a definição da projeção canônica  $\tilde{\pi} : S \rightarrow S/\sim$ , dada por

$$\tilde{\pi}(z, 0) = \begin{cases} \{(0, 0)\}, & z = 0; \\ \{(z, 0), (1/z, 1)\}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{cases}$$

e por

$$\tilde{\pi}(w, 1) = \begin{cases} \{(0, 1)\}, & w = 0; \\ \{(1/w, 0), (w, 1)\}, & w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Sem maiores dificuldades, prova-se a seguinte

**Proposição 2.3.1.** *O mapa  $\psi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S/\sim$  definido por*

- $\psi(0) = (0, 0)$ ;
- $\psi(\infty) = (0, 1)$ ;
- $\psi(z) = \{(z, 0), (1/z, 1)\}$ , se  $z \neq 0$

*é uma bijeção.*

**Corolário 2.3.2.** *Seja  $\mathcal{C}$  um conjunto arbitrário. Sejam as funções:*

- a. *Uma função  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{C}$ ;*
- b. *E outras duas funções  $f_0, f_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tais que*

$$f_0(z) = f_\infty(1/z), \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

*As funções dos itens a. e b. são equivalentes.*

*Demonstração.* Seja dada a função  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{C}$ . Defina  $f_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , pondo

$$f_0(z) := f(z), \forall z \in \mathbb{C}$$

e defina  $f_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , pondo

$$f_\infty(w) = \begin{cases} f(\infty), & w = 0; \\ f(1/w), & w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Agora, observe que

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies f_0(z) = f(z) = f(1/(1/z)) = f_\infty(1/z),$$

ou seja,  $f_0$  e  $f_\infty$  cumprem a condição do item (b). Segue, a implicação (a)  $\implies$  (b).

Reciprocamente, sejam  $f_0, f_\infty : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  como no item (b) do enunciado. As funções  $f_0$  e  $f_\infty$  definem  $\tilde{f} : S \longrightarrow \mathcal{C}$ , dada por

$$\tilde{f}(z, 0) := f_0(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

e por

$$\tilde{f}(w, 1) := f_\infty(w), \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Por sua vez, a aplicação  $\tilde{f}$  induz uma aplicação  $\bar{f} : S/\sim \longrightarrow \mathcal{C}$ , pois

$$\begin{aligned} (z, 0) \sim (w, 1) &\implies z \neq 0 \text{ e } w = 1/z \\ &\implies \tilde{f}(z, 0) = f_0(z) = f_\infty(1/z) = \tilde{f}(1/z, 1) = \tilde{f}(w, 1). \end{aligned}$$

Por sua vez, a aplicação  $\bar{f}$  induz aplicação  $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathcal{C}$ , através da composição

$$f := \bar{f} \circ \psi.$$

Resumindo, funções  $f_0$  e  $f_\infty$ , como no item (b), induzem função  $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathcal{C}$ .

Segue a implicação (b)  $\implies$  (a). □

Agora, seja  $Z = Z(z)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), considere a mudança de variável

$$z = 1/w \quad (w \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

e seja, também,  $W = W(w)$  ( $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ), dada por

$$W(w) := Z(1/w).$$

**Proposição 2.3.3.** *São válidas:*

- a.  $\frac{dZ}{dz} = -w^2 \frac{dW}{dw}$  ;
- b.  $\frac{d^2Z}{dz^2} = w^3 \left( 2 \frac{dW}{dw} + w \frac{d^2W}{dw^2} \right)$ .

*Demonstração.* Se  $z(w) = 1/w$  ( $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ), temos que  $W(w) = Z(z(w))$ . Daí e da regra da cadeia, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dw} &= \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dw} \\ &= (-1/w^2) \frac{dZ}{dz}, \end{aligned}$$

donde se obtém  $\frac{dZ}{dz} = -w^2 \frac{dW}{dw}$ , como afirmado. Segue o item (a).

Para o item (b), novamente, a regra da cadeia fornece

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( \frac{dZ}{dz} \right) \\ &= \frac{d}{dw} \left( \frac{dZ}{dz} \right) \cdot \frac{dw}{dz} \\ &= -w^2 \frac{d}{dw} \left( -w^2 \frac{dW}{dw} \right) \\ &= -w^2 \left( -2w \frac{dW}{dw} - w^2 \frac{d^2 W}{dw^2} \right) \\ &= w^3 \left( 2 \frac{dW}{dw} + w \frac{d^2 W}{dw^2} \right), \end{aligned}$$

como desejado. Segue o item (b).

□

No que segue, a nossa atenção estará concentrada em **EDO's lineares polinômiais de segunda ordem (no plano complexo  $\mathbb{C}$ )** do tipo

$$P(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} + Q(z) \frac{dZ}{dz} + R(z)Z = 0, \quad (2.3)$$

com  $P$ ,  $Q$  e  $R$  polinômios (com coeficientes complexos e) na variável  $z$ .

**Definição 2.3.4** (ponto singular). *Diz-se que  $z = z_0$  é um **ponto singular** da EDO linear polinomial  $P(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} + Q(z) \frac{dZ}{dz} + R(z)Z = 0$ , quando:*

- a.  $P(z_0) = 0$  ;
- b.  $Q(z_0)$  ou  $R(z_0)$  **não** é nulo.

Diversas equações da Física-Matemática são EDO's lineares polinomiais de segunda ordem (no plano complexo  $\mathbb{C}$ ). Entre elas, destacamos

**Exemplo 2.3.5.** a. *A equação de Euler*

$$z^2 Z'' + \alpha z Z' + \beta Z = 0, \quad (2.4)$$

que tem singularidade em  $z_0 = 0$ .

b. *A equação de Legendre*

$$(1 - z^2)Z'' - 2zZ' + \alpha(\alpha + 1)Z = 0, \quad (2.5)$$

que tem singularidades em  $z_0 = \pm 1$ .

c. *A equação Hipergeométrica de Gauss*

$$z(1-z)Z'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]Z' - \alpha\beta Z = 0, \quad (2.6)$$

que tem singularidades em  $z_0 = 0, 1$ .

d. *A equação de Bessel*

$$z^2 Z'' + zZ' + (z^2 - \nu^2)Z = 0, \quad (2.7)$$

que tem singularidade em  $z_0 = 0$ .

**Proposição 2.3.6.** *Se  $z = 1/w$  ( $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) então, na variável  $w$ , a EDO linear polinomial de segunda ordem  $P(z)\frac{d^2 Z}{dz^2} + Q(z)\frac{dZ}{dz} + R(z)Z = 0$  equivale à EDO linear polinomial de segunda ordem*

$$\tilde{P}(w)\frac{d^2 W}{dw^2} + \tilde{Q}(w)\frac{dW}{dw} + \tilde{R}(w)W = 0, \quad (2.8)$$

onde  $W(w) = Z(1/w)$  e

- a.  $\tilde{P}(w) = w^{4+m}P(1/w)$  ;
- b.  $\tilde{Q}(w) = w^{2+m}[2wP(1/w) - Q(1/w)]$  ;
- c.  $\tilde{R}(w) = w^m R(1/w)$ .

(Nos itens acima,  $m = \text{m.m.c}(\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R))$ .)

*Demonstração.* Após a Proposição 2.3.3, temos que  $P(z)\frac{d^2 Z}{dz^2} + Q(z)\frac{dZ}{dz} + R(z)Z = 0$  equivale a

$$P(1/w) \cdot \left[ w^3 \cdot \left( 2\frac{dW}{dw} + w\frac{d^2 W}{dw^2} \right) \right] + Q(1/w) \cdot \left( -w^2\frac{dW}{dw} \right) + R(1/w)W = 0$$

que, por sua vez, equivale a

$$w^4 P(1/w)\frac{d^2 W}{dw^2} + w^2 [2wP(1/w) - Q(1/w)]\frac{dW}{dw} + R(1/w)W = 0$$

que, após multiplicação por  $w^m$ , onde  $m = \text{m.m.c}(\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R))$ , equivale à EDO linear polinomial de segunda ordem

$$w^{4+m}P(1/w)\frac{d^2 W}{dw^2} + w^{2+m} [2wP(1/w) - Q(1/w)]\frac{dW}{dw} + w^m R(1/w)W = 0,$$

como afirmado. □

**Definição 2.3.7.** *Uma EDO linear polinomial de segunda ordem na esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  é uma dupla de EDO's lineares polinomiais de segunda ordem no plano complexo  $\mathbb{C}$  como em (2.3) e (2.8). Neste caso, diz-se que (2.8) é a **expressão no infinito** de (2.3).*

Resulta que, frequentemente, o ponto  $\infty$  no infinito também se apresenta como *singularidade* de EDO's do tipo (2.3) que, **por definição**, significa dizer que  $w = 0$  é ponto singular da expressão (2.8) de (2.3) no infinito. De volta a Euler, Legendre, Gauss e Bessel, temos

**Exemplo 2.3.8.** a. A *equação de Euler* (2.4) tem singularidade em  $\infty$ , pois, aqui

$$\tilde{P}(w) = w^2, \tilde{Q}(w) = \alpha - 2 \text{ e } \tilde{R}(w) = -\beta.$$

b. A *equação de Legendre* (2.5) tem singularidade em  $\infty$ , pois, aqui

$$\tilde{P}(w) = w^2(w^2 - 1), \tilde{Q}(w) = 1 - 2w^2(w + 1) \text{ e } \tilde{R}(w) = -\alpha(\alpha + 1).$$

c. A *equação Hipergeométrica de Gauss* (2.6) que tem singularidades em  $\infty$ , pois, aqui

$$\tilde{P}(w) = w^2(w - 1), \tilde{Q}(w) = (\gamma - 2)w^2 + (3 + \alpha + \beta)w \text{ e } \tilde{R}(w) = \alpha\beta.$$

d. A *equação de Bessel* (2.7) tem singularidade em  $\infty$ , pois, aqui

$$\tilde{P}(\xi) = w^4, \tilde{Q}(\xi) = w^3 \text{ e } \tilde{R}(w) = 1 - \nu^2 w^2.$$

**Observação: 2.3.9.** Observar que, no exemplo 2.3.8, temos  $m = 0$  nos itens (a), (b) e (c) e  $m = 2$  no item (d).



### 3 AS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

#### 3.1 $PSL_2(\mathbb{C})$

Começamos com a seguinte

**Proposição 3.1.1.** *Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tais que  $ad - bc \neq 0$ . Então a função racional*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

*induz uma bijeção  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ .*

*Demonstração.* Temos dois casos., a saber

1.  $c = 0$ : Neste caso, como  $ad - bc \neq 0$ , devemos ter

$$a \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

Aqui, definindo

$$T(z) = (a/d)z + (b/d), \quad z \in \mathbb{C} \text{ e } T(\infty) = \infty,$$

temos, claramente, que  $T$  é uma bijeção.

2.  $c \neq 0$ : Neste caso, temos dois subcasos

- a)  $a = 0$ : Neste subcaso, como  $ad - bc \neq 0$ , devemos ter

$$b \neq 0 \text{ (e } c \neq 0).$$

Aqui, defina

$$T(z) = \begin{cases} \frac{b}{cz + d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}; \\ \infty, & z = -d/c; \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

Como se pode verificar, diretamente,  $z \mapsto \frac{b}{cz + d}$  leva  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  bijetivamente sobre  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Da lei de definição atribuída a  $T$ , temos que  $T$  leva  $\{-d/c, \infty\}$  bijetivamente sobre  $\{\infty, 0\}$ . Juntando as informações, conclui-se que  $T$  é bijeção  $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ .

- b)  $a \neq 0$ : Neste subcaso, como  $ad - bc \neq 0$ , devemos ter

$$b \neq 0 \text{ (e } c \neq 0).$$

Aqui, defina

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}; \\ \infty, & z = -d/c; \\ a/c, & z = \infty. \end{cases}$$

Como se pode verificar, diretamente,  $z \mapsto \frac{b}{cz+d}$  leva  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  bijetivamente sobre  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ . (Aqui, usa-se  $ad - bc \neq 0$ !) Da lei de definição atribuída a  $T$ , temos que  $T$  leva  $\{-d/c, \infty\}$  bijetivamente sobre  $\{\infty, 0\}$ . Juntando as informações, conclui-se que  $T$  é bijeção  $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ .

□

**Definição 3.1.2.** Por  $PSL_2(\mathbb{C})$ , denotaremos o conjunto das bijeções

$$T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

induzidas por funções racionais como na Proposição 3.1.1. Um elemento arbitrário de  $PSL_2(\mathbb{C})$  será referido, genericamente, como uma **transformação de Möbius**.

Temos a seguinte

**Proposição 3.1.3.** Vale a implicação

$$T \in PSL_2(\mathbb{C}) \implies T^{-1} \in PSL_2(\mathbb{C}).$$

*Demonstração.* Aqui, estaremos em sintonia direta com as diversas definições dadas para  $T$  nos casos e subcasos da demonstração da Proposição 3.1.1. Temos então

1.  $c = 0$ : Neste caso, devemos ter

$$T^{-1}(z) = (d/a)z - (b/a), \quad z \in \mathbb{C} \text{ e } T^{-1}(\infty) = \infty.$$

2.  $c \neq 0$ : Neste caso, temos dois subcasos

- a)  $a = 0$ : Neste subcaso, devemos ter

$$T^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{-dz + b}{cz}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \\ \infty, & z = 0; \\ -d/c, & z = \infty. \end{cases}$$

- b)  $a \neq 0$ : Neste subcaso, devemos ter

$$T^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{-dz + b}{cz - a}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}; \\ \infty, & z = a/c; \\ -d/c, & z = \infty. \end{cases}$$

Observe que, nas três possibilidades acima,  $T^{-1}$  resulta ser bijeção induzida por função racional do tipo

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

De fato, temos o seguinte:

1.  $\alpha = d/a, \beta = -b/a, \gamma = 0, \delta = 1$  ;
2. a)  $\alpha = -d, \beta = b, \gamma = c, \delta = 0$  ;  
b)  $\alpha = -d, \beta = b, \gamma = c, \delta = -a$  .

Portanto, temos que  $T^{-1} \in PSL_2(\mathbb{C})$ , quando se supõe  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$ . Segue a proposição.

□

**Definição 3.1.4.** Uma transformação de Möbius  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$  é dita **elementar**, quando ela se enquadra em uma das três categorias abaixo:

a. Ou  $T$  é o elemento  $J \in PSL_2(\mathbb{C})$  induzido pela inversão

$$z \mapsto 1/z,$$

ou seja,  $J : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$  cumpre

$$J(z) = \begin{cases} 1/z, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} ; \\ \infty, & z = 0 ; \\ 0, & z = \infty . \end{cases}$$

b. Ou  $T$  é o elemento  $T_b \in PSL_2(\mathbb{C})$  induzido pela translação

$$z \mapsto z + b \quad (b \in \mathbb{C}),$$

ou seja,  $T_b : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$  cumpre

$$T_b(z) = \begin{cases} z + b, & z \in \mathbb{C} ; \\ \infty, & z = \infty . \end{cases}$$

c. Ou  $T$  é o elemento  $D_\lambda \in PSL_2(\mathbb{C})$  induzido pela dilatação

$$z \mapsto \lambda z \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ou seja,  $D_\lambda : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$  cumpre

$$D_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z, & z \in \mathbb{C} ; \\ \infty, & z = \infty . \end{cases}$$

**Proposição 3.1.5.** Toda transformação de Möbius é composição de transformações de Möbius elementares.

*Demonstração.* Novamente, seguiremos a agenda de casos/subcasos da demonstração da Proposição 3.1.1. Para  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$  induzida pela função racional

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}; ad - bc \neq 0),$$

cálculos diretos fornecem o seguinte:

1. Neste caso, ficamos com

$$T = T_{b/d} \circ D_{a/d} .$$

2. a) Neste subcaso, ficamos com

$$T = D_b \circ J \circ T_d \circ D_c .$$

b) Neste subcaso, ficamos com

$$T = D_{a/c} \circ T_1 \circ D_{b/a-d/c} \circ J \circ T_{d/c} .$$

□

**Proposição 3.1.6.** *Sejam  $b, b' \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e seja  $I \in PSL_2(\mathbb{C})$  induzida pela função identidade  $z \mapsto z$ . São válidas:*

- a.  $J \circ J = I$ .
- b.  $T_b \circ T'_b = T_{b+b'}$ .
- c.  $D_\lambda \circ D_{\lambda'} = D_{\lambda\lambda'}$ .
- d.  $J \circ D_\lambda = D_{1/\lambda} \circ J$ .
- e.  $T_b \circ D_\lambda = D_\lambda \circ T_{b/\lambda}$ .

*Demonstração.* Para o item (a), temos o seguinte

- $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies (J \circ J)(z) = J(J(z)) = J(1/z) = 1/(1/z) = z$  ;
- $z = 0 \implies (J \circ J)(0) = J(J(0)) = J(\infty) = 0$  ;
- $z = \infty \implies (J \circ J)(\infty) = J(J(\infty)) = J(0) = \infty$  .

Conclui-se, portanto, que

$$(J \circ J)(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}_\infty,$$

ou seja, conclui-se que  $J \circ J = I$ . Segue o item (a).

Para o item (b), temos o seguinte

- $z \in \mathbb{C} \implies (T_b \circ T'_b)(z) = T_b(T'_b(z)) = T_b(z + b') = (z + b') + b = z + (b + b')$  ;
- $z = \infty \implies (T_b \circ T'_b)(\infty) = T_b(T'_b(\infty)) = T_b(\infty) = \infty$  .

Conclui-se, portanto, que

$$(T_b \circ T'_b)(z) = \begin{cases} z + (b + b'), & z \in \mathbb{C}; \\ \infty, & z = \infty, \end{cases}$$

ou seja, conclui-se que  $T_b \circ T'_b = T_{b+b'}$ . Segue o item (b).

Para o item (c), temos o seguinte

- $z \in \mathbb{C} \implies (D_\lambda \circ D_{\lambda'})(z) = D_\lambda(D_{\lambda'}(z)) = D_\lambda(\lambda'z) = \lambda(\lambda'z) = (\lambda\lambda')z$ ;
- $z = \infty \implies (D_\lambda \circ D_{\lambda'})(\infty) = D_\lambda(D_{\lambda'}(\infty)) = D_\lambda(\infty) = \infty$ .

Conclui-se, portanto, que

$$(D_\lambda \circ D_{\lambda'})(z) = \begin{cases} (\lambda\lambda')z, & z \in \mathbb{C}; \\ \infty, & z = \infty, \end{cases}$$

ou seja, conclui-se que  $D_\lambda \circ D_{\lambda'} = D_{\lambda\lambda'}$ . Segue o item (c). □

**Proposição 3.1.7.** *Se  $T, S \in PSL_2(\mathbb{C})$  então  $T \circ S \in PSL_2(\mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $T$  seja dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

e que  $S$  seja dada por

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \alpha\beta - \gamma\delta \neq 0).$$

Não é difícil obter que  $T \circ S$  é dada por

$$(T \circ S)(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

Agora, observe que

$$(a\alpha + b\gamma) \cdot (c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta) \cdot (c\alpha + d\gamma)$$

nada mais é do que o determinante do produto matricial

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Como cada uma das matrizes no produto matricial acima tem determinante não nulo, por corresponder a transformação de Möbius, conclui-se que o determinante deste produto é não-nulo. Daí, conclui-se que  $T \circ S \in PSL_2(\mathbb{C})$ . □

Alguns resultados a seguir que só serão citados.

**Teorema 3.1.8.** *Seja  $f$  uma transformação de Möbius que leva  $\mathcal{D}$  (disco unitário) em si mesmo, então*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1},$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $|\alpha| < 1$ .

**Proposição 3.1.9.** *Diz-se que uma transformação conforme (Möbius)  $f$  do disco unitário  $\mathcal{D}$  do plano complexo em si mesmo é convexa hiperbolicamente se o  $H$ -segmento de reta entre quaisquer par de pontos de  $f(\mathcal{D})$  está também contido em  $f(\mathcal{D})$ . Então diz-se que a **Derivada Schwarziana** destas funções,  $S_f = (f''/f')' - (1/2)(f''/f')^2$ , satisfaz a desigualdade  $(1 - |z|^2 \cdot |S_f(z)|) < 2.54$ .*

### 3.2 $PSL_2(\mathbb{R})$

*Iniciamos esta seção com a*

**Definição 3.2.1.** *Uma transformação de Möbius  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$ , dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0),$$

*pertence a  $PSL_2(\mathbb{R})$ , quando:*

1.  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ;
2.  $ad - bc > 0$  .

**Lema 3.2.2.** *Seja  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0).$$

*não é perda de generalidade supor  $ad - bc = 1$ .*

*Demonstração.* Dividindo o numerador e o denominador por  $\sqrt{\Delta}$ , obtemos

$$T(z) = \frac{(a/\sqrt{\Delta})z + (b/\sqrt{\Delta})}{(c/\sqrt{\Delta})z + (d/\sqrt{\Delta})} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \Delta = ad - bc > 0).$$

Como  $(a/\sqrt{\Delta}) \cdot (d/\sqrt{\Delta}) - (b/\sqrt{\Delta}) \cdot (c/\sqrt{\Delta}) = \frac{ad - bc}{\Delta} = 1$ , obtemos o desejado.  $\square$

Os casos particulares (translação, homotetia/dilatação e negativo da inversão) seguem da seguinte maneira:

**Exemplo 3.2.3.** Vale o seguinte:

- A translação  $z \mapsto z + b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) pertence a  $PSL_2(\mathbb{R})$  pois, aqui, temos

$$a = 1, b = b, c = 0, d = 1,$$

donde se conclui que  $ad - bc = 1$ .

- A homotetia  $z \mapsto az$  ( $a > 0$ ) pertencem a  $PSL_2(\mathbb{R})$  pois, aqui, temos

$$a = a, b = 0, c = 0, d = 1,$$

donde se conclui que  $ad - bc = a > 0$ .

- A inversão simétrica  $z \mapsto -1/z$  pertence a  $PSL_2(\mathbb{R})$  pois, aqui, temos

$$a = 0, b = -1, c = 1, d = 0,$$

donde se conclui que  $ad - bc = 1$ .

**Lema 3.2.4.** Para toda  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$ ), se  $z = x + iy$  e  $T(z) = u + iv$ , são válidos:

$$(i) \quad u = \frac{ac(x + y) + (ad + bc)x}{|cz + d|}$$

$$(ii) \quad v = \frac{y}{|cz + d|}.$$

*Demonstração.* Temos: se  $w \neq 0, w \in \mathbb{C}$ , então  $w^{-1} = \bar{w}/|w|$ , assim:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = (az + b) \cdot \frac{1}{cz + d} = \frac{(az + b) \cdot (c\bar{z} + d)}{|cz + d|} \quad (c = \bar{c}; d = \bar{d}) \implies \\ T(z) &= \frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|} = \frac{ac|z|^2 + ad(x + iy) + bc(x - iy) + bd}{|cz + d|} \implies \\ T(z) &= \frac{ac(x + y) + (ad + bc)x + iy(ad - bc)}{|cz + d|} = \frac{ac(x + y) + (ad + bc)x}{|cz + d|} + \frac{y}{|cz + d|}i \end{aligned}$$

e por hipótese  $T(z) = u + iv$ , logo:

$$u = \frac{ac(x + y) + (ad + bc)x}{|cz + d|} \quad ; \quad v = \frac{y}{|cz + d|}.$$

□

**Proposição 3.2.5.** *Sejam  $z_1, z_2, z_3$  três pontos arbitrários na esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$ , distintos dois a dois. Dados outros três pontos arbitrários  $w_1, w_2, w_3$  na esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$ , também distintos dois a dois, existe uma única transformação de Möbius  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$  que cumpre*

$$T(z_1) = w_1, \quad T(z_2) = w_2 \text{ e } T(z_3) = w_3.$$

*Demonstração.* Se os pontos  $z_i \neq \infty$ , definimos uma transformação de Möbius  $T$  por

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (3.1)$$

o que claramente faz com que  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$  e  $T(z_3) = \infty$ . Se um dos três pontos é da forma  $z_i = \infty$ , temos

$$T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} (z_1 = \infty), \quad T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} (z_2 = \infty),$$

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} (z_3 = \infty)$$

o qual satisfaz  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$  e  $T(z_3) = \infty$ . Agora seja  $U$  denotando outra transformação de Möbius que leva  $U(z_1) = 0$ ,  $U(z_2) = 1$  e  $U(z_3) = \infty$ . Então vemos que a função  $h = U^{-1} \circ T$  satisfaz

$$h(z_1) = U^{-1} \circ T(z_1) = U^{-1}(0) = w_1$$

$$h(z_2) = U^{-1} \circ T(z_2) = U^{-1}(1) = w_2$$

$$h(z_3) = U^{-1} \circ T(z_3) = U^{-1}(\infty) = w_3$$

Note que a equação  $h(z) = w$ , pode ser escrita como

$$U^{-1}(T(z)) = w \iff U(w) = T(z)$$

o que significa que

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}$$

□

**Definição 3.2.6** (Razão Cruzada). *Sejam  $z, z_1, z_2$  e  $z_3$  quatro pontos em  $\mathbb{C}_\infty$ . Então a expressão*

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

*é chamada de razão cruzada dos quatro pontos  $z, z_1, z_2$  e  $z_3$ .*

**Proposição 3.2.7.** *Seja  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$  uma transformação de Möbius, dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0)$$

*e seja  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . São equivalentes:*



a. Os números  $a, b, c, d$  pertencem a  $\mathbb{R}$ .

b.  $T$  leva  $\mathbb{R}_\infty$  em si mesma, bijectivamente.

*Demonstração.* Para a implicação  $(a) \implies (b)$ , temos três casos a considerar:

- $c = 0$  e  $a \neq 0$ ;
- $c \neq 0$  e  $a = 0$ ;
- $c \neq 0$  e  $a \neq 0$ .

No primeiro caso, ficamos com

$$T(z) = (a/d)z + (b/d).$$

Aqui, claramente,  $T(\infty) = \infty$ . Além disso,  $T(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , pois neste caso,  $T(x) = (a/d)x + (b/d) \in \mathbb{R}$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , dado que  $a, b, d \in \mathbb{R}$ . Por último, dado  $y \in \mathbb{R}$ , temos que  $x := (dy - b)/a \in \mathbb{R}$  e que  $T(x) = y$ . Logo a implicação  $(a) \implies (b)$  se verifica no primeiro caso.

No segundo caso, também devemos ter  $b \neq 0$ , pois  $0 \neq ad - bc = 0 \cdot d - bc = -bc$ . Ficamos, então, com

$$T(z) = \frac{b}{cz + d}.$$

Aqui, claramente,  $T(\infty) = 0$  e  $T(-d/c) = \infty$  e, claramente,  $T$  leva  $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$  bijectivamente em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , sendo a inversa  $T^{-1}$  dada por

$$T^{-1}(y) = \frac{-dy + b}{cy} \quad (y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Logo a implicação  $(a) \implies (b)$  se verifica no segundo caso.

No terceiro caso, temos

$$T(z) = -1/z$$

e, claramente,  $T(\infty) = 0$  e  $T(0) = \infty$ . Além disso, verifica-se, sem maiores dificuldades, que  $T$  leva  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  bijectivamente em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , sendo a inversa  $T^{-1}$  dada por

$$T^{-1}(y) = -1/y \quad (y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Logo a implicação  $(a) \implies (b)$  se verifica no terceiro caso.

Para a implicação  $(b) \implies (a)$ , novamente, devemos considerar os casos:

- $c = 0$  e  $a \neq 0$ ;
- $c \neq 0$  e  $a = 0$ ;

- $c \neq 0$  e  $a \neq 0$ .

No primeiro caso, como  $d \neq 0$  e como

$$T(z) = (a/d)z + (b/d),$$

não é perda de generalidade supor  $d = 1$ . Assim, ficamos com  $T(z) = az + b$ . Como,  $T(\infty) = \infty$  e como  $T$  leva  $\mathbb{R}_\infty$  bijetivamente em si mesma, conclui-se que, neste caso,  $T$  leva  $\mathbb{R}$  em si mesma, bijetivamente. Em particular,  $b = T(0) \in \mathbb{R}$  e  $a + b = T(1) \in \mathbb{R}$ . Portanto

$$a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Logo, a implicação  $(b) \implies (a)$  se verifica no primeiro caso.

No segundo caso, como  $b \neq 0$  e como

$$T(z) = \frac{b}{cz + d} = \frac{1}{(c/b)z + (d/b)},$$

não é perda de generalidade supor  $b = 1$ . Como  $T$  leva  $\mathbb{R}_\infty$  bijetivamente em si mesma e como  $T(\infty) = 0$  e  $T(-d/c) = \infty$ , temos o seguinte:

- Se  $d = 0$  então  $T(\infty) = 0$  e  $T(0) = \infty$ . Neste caso, devemos ter  $T(1) = 1/c \in \mathbb{R}$ , donde se conclui que  $c \in \mathbb{R}$ .
- Se  $d \neq 0$  então  $T(0) = 1/d \in \mathbb{R}$ , donde se conclui que  $d \in \mathbb{R}$ . Agora, tomando  $x \neq 0, -d/c$ , temos que  $\frac{1}{cx + d} \in \mathbb{R}$ , donde se conclui que  $c \in \mathbb{R}$ .

Portanto, nos dois subcasos acima, temos que  $c, d \in \mathbb{R}$ . Logo a implicação  $(b) \implies (a)$  se verifica no segundo caso.

No terceiro caso, como

$$T(z) = -1/z$$

podemos escrever  $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$ , donde se obtém,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Logo a implicação  $(b) \implies (a)$  se verifica no terceiro caso.  $\square$

**Proposição 3.2.8.** *Seja  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$ . São equivalentes:*

- $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ .
- $T$  leva o semiplano superior  $\mathcal{U}^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  em si mesmo bijetivamente.

*Demonstração.* Primeiro, a implicação  $(a) \implies (b)$ . Se  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  é dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1)$$

então, como visto no item (b) do Lema 3.2.4, temos

$$\operatorname{Im}T(z) = \frac{\operatorname{Im}z}{|cz + d|^2},$$

onde  $\operatorname{Im}$  denota parte imaginária de número complexo. Daí, conclui-se que

$$T(\mathcal{U}^+) \subset \mathcal{U}^+.$$

Analogamente, se  $\mathcal{U}^- = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y < 0\}$  então

$$T(\mathcal{U}^-) \subset \mathcal{U}^-.$$

Destas duas observações, do fato de transformações de Möbius levarem a esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  bijetivamente em si mesma e da Proposição 3.2.7, que estabelece que uma transformação de Möbius com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  leva a reta estendida  $\mathbb{R}_\infty$  bijetivamente em si mesma, concluímos que uma  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  leva o semiplano superior  $\mathcal{U}^+$  bijetivamente em si mesmo. (O mesmo se dando com o semiplano inferior  $\mathcal{U}^-$ .) Segue a implicação  $(a) \implies (b)$ .

Para a implicação  $(b) \implies (a)$ , começamos por lembrar que uma transformação de Möbius  $T \in PSL_2(\mathbb{C})$  é uma aplicação contínua da esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  em si mesma. Em vista disto, no horizonte de  $T$  levar o semiplano superior  $\mathcal{U}^+$  em si mesmo, temos que

- $T(\mathbb{R}_\infty) \cap (\mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-) = \emptyset$  ;
- $T(\mathcal{U}^-) \cap (\mathcal{U}^+ \cup \mathbb{R}_\infty) = \emptyset$  .

Para o primeiro dos itens acima, fixe  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Não podemos ter  $T(x_0) \in \mathcal{U}^+$  porque  $T^{-1}(\mathcal{U}^+) = \mathcal{U}^+$  e  $\mathcal{U}^+ \cap \mathbb{R} = \emptyset$ . Também não podemos ter  $T(x_0) \in \mathcal{U}^-$  porque, neste caso,  $T^{-1}(\mathcal{U}^-)$  seria um aberto de  $\mathbb{C}$  que conteria  $x_0$  e como tal, inevitavelmente, conteria ponto  $x^+ \in \mathcal{U}^+$  o que levaria a uma contradição, a saber,  $T(\mathcal{U}^+) \cap \mathcal{U}^- \neq \emptyset$ , dado que  $T(\mathcal{U}^+) = \mathcal{U}^+$  e  $\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^- = \emptyset$ . Ainda com relação ao item primeiro, temos que  $T(\infty) \notin \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$  por razões idênticas às dadas acima para a não pertinência de  $T(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , à união  $\mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$ . Em resumo, verificamos o item primeiro acima.

A verificação do item segundo é inteiramente análoga.

Por último, como  $T$  leva  $\mathbb{C}_\infty$  bijetivamente em si mesma e dadas as condições de  $T$  com respeito aos semiplanos  $\mathcal{U}^\pm$  e à reta real estendida  $\mathbb{R}_\infty$ , conclui-se que  $T$  leva esta reta real estendida bijetivamente em si mesma. Com isso, conclui-se, via Proposição 3.2.7, que

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Agora, em tal horizonte, temos, via conta imediata, que

$$T(i) = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{c^2 + d^2}.$$

Como  $T(i) \in \mathcal{U}^+$ , conclui-se que

$$ad - bc > 0,$$

ou seja, conclui-se que  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ . Segue a implicação  $(b) \implies (a)$ . □

## 4 MÉTRICA HIPERBÓLICA

A conexão entre  $PSL_2(\mathbb{R})$  e geometria hiperbólica foi descoberta por Henri Poincaré (1854-1912) e publicado em 1882.

Os matemáticos Gaus, János Bolyai e Lobachevsky descobriram, quase que simultaneamente, uma Geometria Não-Euclidiana que, em 1871, o matemático alemão Felix Christian Klein a chamou de Geometria Hiperbólica. Por sua dedicação e ter sido o primeiro a publicar suas descobertas, a Geometria Hiperbólica também é conhecida como Geometria de Lobachevsky. O matemático taliano Eugenio Beltrami (1835-1900) provou a independência do 5º postulado de Euclides mostrando que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Deste modo, não poderia haver uma contradição.

Vários matemáticos continuaram os estudos de Geometrias Não-Euclidianas, entre eles, destacamos Henri Poincaré que criou dois modelos, no plano Euclidiano, para Geometria Hiperbólica chamados Semiplano de Poincaré e Modelo de Disco de Poincaré ou Disco de Poincaré (informações em [10]).

### 4.1 A distância hiperbólica $\rho(ia, ib)$ ( $b > a$ )

**Definição 4.1.1.** Suponha  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$  ( $I = [0, 1]$ ), dado por  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , seja caminho diferenciável suave (por partes). O comprimento euclidiano de  $\gamma$  é

$$e(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

**Definição 4.1.2.** Suponha  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$  ( $I = [0, 1]$ ), dado por  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , seja caminho diferenciável suave (por partes). O comprimento hiperbólico de  $\gamma$  é

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{y} dt.$$

**Exemplo 4.1.3.** Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  dado por

$$\gamma(t) = i[(b-a)t + a] \quad (0 \leq t \leq 1); b > a.$$

Temos que

1. O comprimento euclidiano de  $\gamma$  é

$$\begin{aligned} e(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{0^2 + (b-a)^2} dt = \\ &= \int_0^1 (b-a) dt = b-a. \end{aligned}$$

2. O comprimento hiperbólico de  $\gamma$  é

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{y} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{0^2 + (b-a)^2}}{(b-a)t + a} dt = \int_0^1 \frac{(b-a)dt}{(b-a)t + a} \\ &= \int_a^b \frac{ds}{s} = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

**Lema 4.1.4.** Suponha que  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  seja dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1)$$

e que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  seja um caminho diferenciável suave (por partes). Então:

1.  $\left| \frac{dT}{dz} \right| = \frac{1}{|cz + d|^2}$  ;
2.  $T(\gamma)'(t) = \frac{\gamma'(t)}{[c\gamma(t) + d]^2}$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

*Demonstração.* A prova do item (a) é a seguinte:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{[cz + d]^2} = \frac{ad - bc}{[cz + d]^2} = \frac{1}{[cz + d]^2}.$$

Para o item (b), a regra da cadeia fornece

$$\begin{aligned} T(\gamma)'(t) &= T'(\gamma(t))\gamma'(t) \\ &= \frac{\gamma'(t)}{[c\gamma(t) + d]^2} \quad (\text{item (a)}) \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.1.5.** Seja  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  e seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$  ( $I = [0, 1]$ ) um caminho diferenciável suave (por partes). Então  $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$ , ou seja,  $T$  preserva o comprimento hiperbólico.

*Demonstração.* Temos o seguinte

$$\begin{aligned} h(T(\gamma)) &= \int_0^1 \frac{T(\gamma)'(t)}{\text{Im}[T(\gamma)(t)]} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|/|c\gamma(t) + d|^2}{\text{Im}[\gamma(t)]/|c\gamma(t) + d|^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt \\ &= h(\gamma), \end{aligned}$$

como afirmado. □

Queremos agora mostrar que entre dois pontos em  $\mathcal{U}$  existe um único caminho de comprimento hiperbólico mais curto. Tais caminhos são chamados *segmentos de reta hiperbólicos* ou *H-segmentos de reta* e do Teorema 4.1.5 segue que elementos de  $PSL_2(\mathbb{R})$  levam H-segmentos de reta em H-segmentos de reta.

**Lema 4.1.6.** *Se  $\tilde{\kappa} : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}^+$  um caminho diferenciável (suave por partes) então o comprimento hiperbólico  $h(\tilde{\kappa})$  cumpre*

$$h(\tilde{\kappa}) \geq \ln(b/a).$$

*Demonstração.* Suponha que o caminho  $\tilde{\kappa}$  seja dado por

$$\tilde{\kappa}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Então:

$$h(\tilde{\kappa}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{d\tilde{y}}{dt}\right|}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}(t)} = \ln(b/a).$$

□

**Proposição 4.1.7.** *Se  $z_1$  e  $z_2$  têm a mesma parte real, então o **único** H-segmento de reta ligando  $z_1$  e  $z_2$  é o segmento de reta Euclideano.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1.5, sabemos que os elementos de  $PSL_2(\mathbb{R})$  preservam o comprimento hiperbólico. Logo, não é perda de generalidade supor que o caminho em pauta esteja sobre o eixo imaginário. O restante segue do Lema 4.1.6 que afirma que qualquer caminho diferenciável (suave por partes) que une  $ia$  a  $ib$  tem comprimento hiperbólico  $\geq \ln(b/a)$ . □

**Definição 4.1.8.** *Definimos **retas hiperbólicas** ou **H-retas** como sendo os semi-círculos cujos centros estão no eixo real ou as semiretas Euclidianas perpendiculares ao eixo real.*

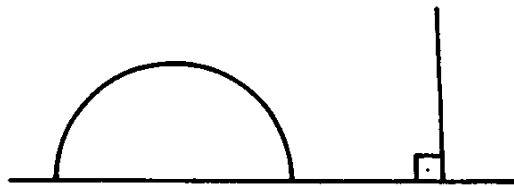


Figura 3 – H-retas

## 4.2 A distância hiperbólica $\rho(z, w)$ ( $\Re(z) \neq \Re(w)$ )

Na seção anterior, vimos que a distância hiperbólica  $\rho(ia, ib)$  vale  $\ln(b/a)$ , quando  $a < b$ . Nesta seção, ocuparemos-nos do cálculo da distância hiperbólica  $\rho(z, w)$ , quando  $\Re z \neq \Re w$ .

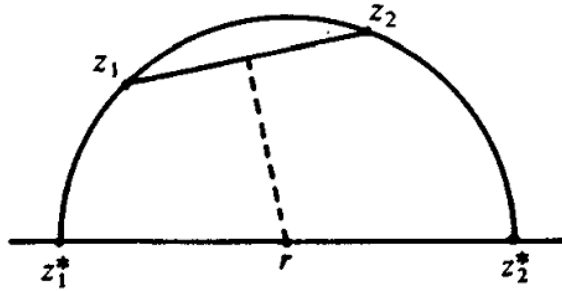


Figura 4 – H-segmento de reta entre  $z_1$  e  $z_2$

Sejam  $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$  tais que  $\Re(z_1) \neq \Re(z_2)$ . Considere o (único) semicírculo euclidiano  $\Gamma$  centrado no eixo real e que passa por  $z_1$  e por  $z_2$ . Sejam, ainda,  $z_1^*$  e  $z_2^*$  as interseções deste semicírculo com o eixo real. Sem perda de generalidade, suponha que  $z_1^* < z_2^*$ . (Ver Figura 4)

**Proposição 4.2.1.** O elemento  $T$  de  $PSL_2(\mathbb{R})$  dado por

$$T(z) = \frac{z - z_2^*}{z - z_1^*}$$

cumpra o seguinte:

1.  $T(z_1^*) = \infty$  e  $T(z_2^*) = 0$ .
2.  $T$  leva o semicírculo  $\Gamma$  bijectivamente em  $\{it : t \geq 0\} \cup \{\infty\}$ .

*Demonstração.* O item (a) é de verificação imediata. Para o item (b), temos do item (a) que os pontos  $z_1^*$  e  $z_2^*$  de  $\Gamma$  são levados em  $\infty$  e 0, respectivamente. Agora, considerando

$$z = x + iy \in \Gamma \setminus \{z_1^*, z_2^*\},$$

pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$[(x - z_1^*)^2 + y^2] + [(x - z_2^*)^2 + y^2] = (z_2^* - z_1^*)^2$$

A expressão acima, através da álgebra elementar de produto notável e fatoração, fornece

$$(x - z_1^*) \cdot (x - z_2^*) + y^2 = 0.$$



Por outro lado, um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}\Re T(z) &= \frac{(x - z_1^*) \cdot (x - z_2^*) + y^2}{[(x - z_1^*)^2 + y^2]^2} \\ &= \frac{0}{[(x - z_1^*)^2 + y^2]^2} \\ &= 0,\end{aligned}$$

mostrando que  $T(z)$  pertence ao eixo imaginário. Além disso, como elementos de  $PSL_2(\mathbb{R})$  levam pontos do semiplano superior  $\mathcal{U}$  em pontos deste semiplano, também temos que

$$\text{Im}T(z) > 0,$$

conclui-se, então, que  $T$  leva  $\Gamma$  injetivamente em  $\{it : t \geq 0\} \cup \{\infty\}$ .

Para finalizar, vamos mostrar que  $T$  leva  $\Gamma$  em  $\{it : t \geq 0\} \cup \{\infty\}$ , sobrejetivamente. Para isto, seja  $\psi : [z_1^*, z_2^*] \rightarrow \Gamma$  que, a cada  $t \in [z_1^*, z_2^*]$ , associa o único ponto  $\psi(t) \in \Gamma$  que está reta na vertical ao eixo real que passa por  $t$ . Claramente,  $\psi$  é contínua. Como  $T$  é contínua, temos que  $T \circ \psi$  é uma função contínua do intervalo  $[z_1^*, z_2^*]$  no intervalo  $[0, \infty]$ . Finalmente, o Teorema do Valor Intermediário mostra que nenhum ponto de  $[0, \infty]$  pode ser omitido de  $T \circ \psi([z_1^*, z_2^*])$ , pois

$$\lim_{t \rightarrow z_2^*} (T \circ \psi)(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow z_1^*} (T \circ \psi)(t) = \infty,$$

mostrando que  $T \circ \psi$  é sobrejetiva. Como  $\psi$  é bijeção, finalmente, conclui-se que  $T$  é sobrejetiva. Segue o item (b).  $\square$

**Corolário 4.2.2.** *Entre todos os caminhos diferenciáveis (suaves por partes)*

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$$

que unem  $z_1$  a  $z_2$ , no sentido que  $\gamma(0) = z_1$  e  $\gamma(1) = z_2$ , aquele que minimiza o comprimento hiperbólico tem o seu traço materializado no arco do semicírculo  $\Gamma$  que une os pontos  $z_1$  e  $z_2$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  unindo  $z_1$  a  $z_2$  no sentido que

$$\gamma(0) = z_1 \text{ e } \gamma(1) = z_2$$

e minimizando o comprimento hiperbólico. Como  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  preserva o comprimento hiperbólico de caminhos diferenciáveis (suaves por partes)  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ , temos que  $T(\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  une os pontos

$$T(\gamma)(0) = T(z_1) \text{ e } T(\gamma)(1) = T(z_2)$$

e minimiza o comprimento hiperbólico. Como  $T(z_1)$  e  $T(z_2)$  são pontos na parte do eixo imaginário contida no semiplano superior  $\mathcal{U}$ , pelo que já foi visto, o traço do caminho  $T(\gamma)$  é o segmento de reta (euclidiano) entre  $T(z_1)$  e  $T(z_2)$ . Mas aí, a imagem inversa deste segmento por  $T^{-1}$  resulta ser o traço do caminho  $\gamma$ , que pela Proposição anterior, não é outra senão a porção do semicírculo  $\Gamma$  entre  $z_1$  e  $z_2$ . Segue o corolário.  $\square$

**Teorema 4.2.3.**  $PSL_2(\mathbb{R})$  age transitivamente no conjunto de todas as H-retas.

*Demonstração.* Seja  $Q, Q'$  duas H-retas. Se  $Q$  tem pontos-finais  $s, t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  e  $Q'$  tem pontos-finais  $s', t' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , então, pela Proposição 4.2.1, temos duas coisas: existe  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  tal que  $T(s) = s', T(t) = t'$ ; e os pontos finais de uma H-reta são determinados unicamente, segue que  $T(Q) = Q'$ .  $\square$

**Definição 4.2.4.** Definimos a distância hiperbólica  $\rho(z, w)$  entre os pontos  $z, w \in \mathcal{U}$  como sendo o comprimento hiperbólico do H-segmeneto de reta que une os pontos  $z$  e  $w$ .

**Definição 4.2.5** (Isometria). Uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  entre espaços diz-se uma **isometria** se  $d_Y(T(z), T(w)) = d_X(z, w), \forall z, w \in X$ .

*Sintetizando as discussões anteriores, em torno da preservação do comprimento hiperbólico por elementos  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ , temos o*

**Teorema 4.2.6.**  $\rho(T(z), T(w)) = \rho(z, w), \forall T \in PSL_2(\mathbb{R})$  e  $\forall z, w \in \mathcal{U}$ . Ou seja,  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  é uma **isometria** em  $\mathcal{U}$ .

**Lema 4.2.7.** Dada  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}; ad - bc = 1$ ). É válido:

$$|T(z) - T(w)| = |z - w| \cdot |T'(z) \cdot T'(w)|^{1/2}.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} |T(z) - T(w)| &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right| = \\ &= \left| \frac{aczw + adz + bcw + bd - aczw - czb - adw - bd}{(cz + d)(cw + d)} \right| = \\ &= \left| \frac{(ad - bc)z - w(ad - bc)}{(cz + d)(cw + d)} \right| = \frac{|z - w|}{|cz + d||cw + d|}. \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 4.1.4, temos:  $\frac{1}{|cz + d|} = |T'(z)|^{1/2}$  e  $\frac{1}{|cw + d|} = |T'(w)|^{1/2}$ , logo,

$$|T(z) - T(w)| = |z - w| \cdot |T'(z) \cdot T'(w)|^{1/2}$$

□

**Lema 4.2.8.** *Dados  $z, w \in \mathcal{U}$ , temos que*

$$\tau(z, w) := \frac{z - w}{z - \bar{w}}$$

*cumpra  $\tau(Tz, Tw) = \tau(z, w)$ , qualquer que seja  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Fixe, arbitrariamente, um elemento  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ . Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \tau(Tz, Tw) &= \frac{T(z) - T(w)}{T(z) - \overline{T(w)}} \\ &= \frac{|z - w| \cdot |T'(z)T'(w)|^{1/2}}{|z - \bar{w}| \cdot |T'(z)T'(\bar{w})|^{1/2}} \\ &= \tau(z, w) \cdot \frac{|T'(w)|^{1/2}}{|T'(\bar{w})|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Agora, se  $T$  é dada por  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ;  $ad - bc = 1$ ), sabemos que

$$|T'(w)| = \frac{1}{|cw + d|^2},$$

donde se obtém

$$|T'(w)| = \frac{1}{|cw + d|^2} = \frac{1}{|c\bar{w} + d|^2} = |T'(\bar{w})|$$

que fornece  $\frac{|T'(w)|^{1/2}}{|T'(\bar{w})|^{1/2}} = 1$  que, por sua vez, permite concluir que

$$\tau(Tz, Tw) = \tau(z, w),$$

como desejado. □

**Proposição 4.2.9.** *Sejam  $z, w \in \mathcal{U}$ . A distância hiperbólica  $\rho(z, w)$  entre os pontos  $z$  e  $w$  cumpre*

$$\rho(z, w) = \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).$$

*Demonstração.* Se  $\Re(z) = \Re(w)$ , podemos supor que  $\Re(z) = \Re(w) = 0$ . Agora, escreva  $z = ia$  e  $w = ib$ , com ( $a < b$ ). Já vimos que

$$\rho(ia, ib) = \ln(b/a).$$

Além disso, neste caso, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} &= \frac{|ia - \bar{ib}| + |ia - ib|}{|ia - \bar{ib}| - |ia - ib|} \\ &= \frac{(a + b) + (b - a)}{(a + b) - (b - a)} \\ &= \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

confirmando que  $\ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) = \rho(z, w)$ , no caso em pauta.

Agota, suponha que  $Rez \neq Rew$ . Seja  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  tal que

$$T(z) = i \text{ e } T(w) = ir.$$

Sem perda de generalidade, suponha  $r > 1$ . Neste caso, como  $T$  preserva a distância hiperbólica, temos que

$$\rho(z, w) = \ln r.$$

Por outro lado, como  $\tau$  é invariante pela ação de elementos de  $PSL_2(\mathbb{R})$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \tau(z, w) &= \tau(i, ir) \\ &= \frac{|i - ir|}{|i - \bar{ir}|} \\ &= \frac{r - 1}{r + 1}. \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que

$$\frac{e^{\rho(z, w)} - 1}{e^{\rho(z, w)} + 1} = \tau(z, w) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|},$$

que fornece

$$e^{\rho(z, w)} = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|},$$

ou seja, fornece

$$\rho(z, w) = \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right),$$

confirmando a igualdade afirmada, também neste segundo caso. □

**Lema 4.2.10** (Lema de Trigonometria Hiperbólica). *São válidos:*

a.  $\frac{e^u - 1}{e^u + 1} = tgh\left(\frac{u}{2}\right);$

b.  $\sinh^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{tgh^2\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - tgh^2\left(\frac{u}{2}\right)}.$

*Demonstração.* Para o item (a), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{2}\right) &= \frac{\sinh\left(\frac{u}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{(e^{u/2} - e^{-u/2})/2}{(e^{u/2} + e^{-u/2})/2} = \\ &= \frac{e^{u/2} - e^{-u/2}}{e^{u/2} + e^{-u/2}} = \frac{(e^u - 1) \cdot e^{-u/2}}{(e^u + 1) \cdot e^{-u/2}}, \end{aligned}$$

de onde conclui-se que  $\operatorname{tgh}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}$ .

Para o item (b), observe que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tgh}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\left(\frac{e^u - 1}{e^u + 1}\right)^2}{1 - \left(\frac{e^u - 1}{e^u + 1}\right)^2} \\ \frac{(e^u - 1)^2/(e^u + 1)^2}{[(e^u + 1)^2 - (e^u - 1)^2]/(e^u + 1)^2} &= \frac{(e^u - 1)^2}{[(e^u + 1) - (e^u - 1)][(e^u + 1) + (e^u - 1)]} \\ \frac{(e^u - 1)^2}{2 \cdot (2e^u)} &= \frac{(e^u - 1)^2}{(2e^{u/2})^2} = \left(\frac{e^u - 1}{2e^{u/2}}\right)^2, \end{aligned}$$

de onde conclui-se que  $\frac{\operatorname{tgh}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \left(\frac{e^{u/2} - e^{-u/2}}{2}\right)^2 = \sinh^2\left(\frac{u}{2}\right)$ . □

**Corolário 4.2.11** (Corolário do Lema de Trigonometria Hiperbólica). *É válido:*

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{4\Im(z)\Im(w)}.$$

*Demonstração.* Da demonstração do Lema 4.2.10 e da Proposição 4.2.9, temos que

$$\tau(z, w) = \frac{e^{\rho(z, w)} - 1}{e^{\rho(z, w)} + 1}.$$

Daí e do item (a) do *Lema de Trigonometria Hiperbólica*, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) &= \frac{\operatorname{tgh}^2(\frac{1}{2} \rho(z, w))}{1 - \operatorname{tgh}^2(\frac{1}{2} \rho(z, w))} \\
&= \frac{\tau^2(z, w)}{1 - \tau^2(z, w)} \\
&= \frac{|z - w|^2 / |z - \bar{w}|^2}{1 - |z - w|^2 / |z - \bar{w}|^2} \\
&= \frac{|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \\
&= \frac{|z - w|^2}{[(\Re(z) - \Re(\bar{w}))^2 + (\Im(z) - \Im(\bar{w}))^2] - [(\Re(z) - \Re(w))^2 + (\Im(z) - \Im(w))^2]} \\
&= \frac{|z - w|^2}{(\Im(z) - \Im(\bar{w}))^2 - (\Im(z) - \Im(w))^2} \\
&= \frac{|z - w|^2}{2\Im(z)\Im(w) - (-2\Im(z)\Im(w))},
\end{aligned}$$

donde se conclui que  $\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{4\Im(z)\Im(w)}$ , como afirmado.  $\square$

**Proposição 4.2.12.** *O Círculo Hiperbólico de centro  $z = i$  e raio  $\delta > 0$ , não é outro senão o círculo euclideano de centro  $(0, \cosh \delta)$  e raio  $\sinh \delta$ .*

*Demonstração.* Pelo Corolário 4.2.11, tal círculo hiperbólico pode ser descrito pelos pontos  $z$  do semiplano (superior)  $\mathcal{U}$  que cumprem

$$\frac{|z - i|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(i)} = \sinh^2\left(\frac{1}{2}\delta\right).$$

Como  $\operatorname{Im}(i) = 1$ , ao escrevermos  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), a igualdade acima torna-se

$$\frac{x^2 + (y - 1)^2}{4y} = \left(\frac{e^{\delta/2} - e^{-\delta/2}}{2}\right)^2,$$

ou seja, reescreve-se como

$$\frac{x^2 + (y^2 - 2y + 1)}{4y} = \frac{e^\delta + e^{-\delta} - 2}{4},$$

ou melhor, como

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = (e^\delta + e^{-\delta})y - 2y,$$

ou ainda, como

$$x^2 + y^2 - (e^\delta + e^{-\delta})y = -1.$$

Agora, convém observar que

$$\begin{aligned}
y^2 - (e^\delta + e^{-\delta})y &= y^2 - 2(\cosh \delta)y \\
&= (y - \cosh \delta)^2 - \cosh^2 \delta.
\end{aligned}$$

Daí e da igualdade anterior, conclui-se que

$$x^2 + (y - \cosh \delta)^2 - \cosh^2 \delta = -1,$$

donde se conclui que

$$x^2 + (y - \cosh \delta)^2 = \cosh^2 \delta - 1.$$

Finalizando, lembramos que a relação fundamental da Trigonometria Hiperbólica é

$$\cosh^2 \delta - \sinh^2 \delta = 1,$$

logo,  $\cosh^2 \delta - 1 = \sinh^2 \delta$ . Resulta, finalmente, que a equação cartesiana do círculo hiperbólico de centro  $z = i$  e raio  $\delta > 0$  é

$$x^2 + (y - \cosh \delta)^2 = \sinh^2 \delta,$$

ou seja, é o *círculo euclideano* de centro  $(0, \cosh \delta)$  e raio  $\sinh \delta$ , como afirmado.  $\square$

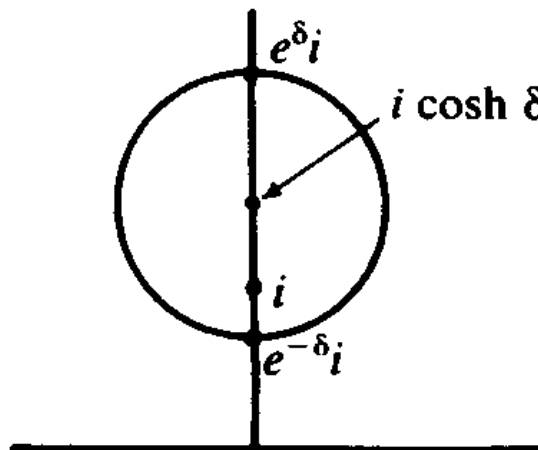


Figura 5 – Círculo de centro  $i$  e raio  $\delta > 0$

### 4.3 Área hiperbólica e a fórmula de Gauss-Bonnet

**Teorema 4.3.1** (Fórmula de Mudança de Variáveis). *Seja  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  e seja  $E \subset \mathcal{U}$  um domínio. Temos o seguinte:*

1.  $T(E)$  também é um domínio de  $\mathcal{U}$ .
2. Vale a fórmula

$$\int \int_{T(E)} f(u, v) du dv = \int \int_E (f \circ T)(x, y) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy$$

*Demonstração.* Para o item (a), basta lembrar que  $T$  leva  $\mathcal{U}$  homeomorficamente sobre si mesmo. O item (b) é a leitura da fórmula de mudança de variáveis em integrais duplas do Cálculo (ver [8]) neste caso particular.  $\square$

**Definição 4.3.2.** *Se  $E \subseteq \mathcal{U}$  definimos  $\mu(E)$  a **área hiperbólica** (*H-area*) de  $E$  por*

$$\mu(E) = \int \int_E \frac{dx dy}{y}$$

*se essa integral existir.*

**Teorema 4.3.3.** *Seja uma transformação  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ . As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para  $\Re(T)$  e  $\Im(T)$ . Ou seja:*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

*Demonstração.* Primeiro, sabemos que, dada  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ :

$$u(x, y) = \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd}{c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2} \quad ; \quad v(x, y) = \frac{y}{c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2}.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1 \cdot [c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2] - y \cdot [2c^2y]}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} = \\ &= \frac{c^2x^2 + c^2y^2 + 2(cd)x + d^2 - 2c^2y^2}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} = \frac{c^2x^2 - c^2y^2 + 2(cd)x + d^2}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} = \\ &= \frac{2c^2x^2 - c^2x^2 - c^2y^2 + 2(cd)x + d^2}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} = \frac{2c^2x^2 - c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2}. \end{aligned}$$

Depois:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{[2(ac)x + (ad + bc)] \cdot [c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2] - [ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd] \cdot [2ax + 2cd]}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2}$$

Separando somente o numerador para ser resolvido (pois o denominador já é o que queremos...) e isolando cada termo em função de  $x$ , ficamos com:



- Primeiro termo:  $[2(ac)c^2 - ac(2c^2)]x(x^2 + y^2)$ ;
- Segundo termo:  $[2ac \cdot 2cd - (ad + bc)(2c^2)]x^2$ ;
- Terceiro termo:  $[(ad + bc)c^2 - ac(2cd)](x^2 + y^2)$ ;
- Quarto termo:  $[(2ac)d^2 + (ad + bc)(2ad) - (ad + bc)(2cd) - bd(2c^2)]x$ ;
- Quinto termo:  $[(ad + bc)d^2 - bd(2cd)]$ .

E todos estes termos somados no numerador. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2c^2x^2 - c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

De maneira análoga, temos  $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ .

Com relação a  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , temos, por um lado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{[ac(2y)] \cdot [c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2] - [ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd] \cdot (2c^2y)}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} \\ &= \frac{2c^2xy + 2cdy}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} \\ &= \frac{2cy(cx + d)}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-y \cdot (2c^2x + 2cd)}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2} \\ &= -\frac{2cy(cx + d)}{[c^2(x^2 + y^2) + 2(cd)x + d^2]^2}, \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

□

**Lema 4.3.4.** Se  $T \in PSL_2(\mathbb{R})$  é dada por

$$T(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\text{então } \left| \frac{dT}{dz} \right|^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ onde } z = x + iy.$$

*Demonstração.* Por um lado, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= \frac{dT}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{dT}{dz}.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{dT}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \frac{dT}{dz} \cdot i,\end{aligned}$$

donde se conclui que  $dT/dz$  escreve-se, alternativamente, como

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Daí, conclui-se que

$$\left| \frac{dT}{dz} \right|^2 = \frac{dT}{dz} \cdot \overline{\frac{dT}{dz}} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

donde se conclui, via equações de Cauchy-Riemann, que

$$\begin{aligned}\left| \frac{dT}{dz} \right|^2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \cdot 0,\end{aligned}$$

donde se conclui que  $|dT/dz|^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ , como afirmado.  $\square$

**Teorema 4.3.5.**  $\mu(T(E)) = \mu(E)$ ,  $\forall T \in PSL_2(\mathbb{R})$ . Portanto,  $T$  preserva  $H$ -área.

*Demonstração.* Seja  $z = x + iy$ ,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

e  $w = u + iv$ . Então, usando as equações de Cauchy-Riemann (provadas no Teorema 4.3.3) e pelo Lema 4.3.4, temos que:

$$\left| \frac{dT}{dz} \right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}.$$

Portanto, calculando o *Jacobiano* e munido dessa expressão, pela *Fórmula de mudança de variáveis* concluímos o seguinte:

$$\begin{aligned} \mu(T(E)) &= \int \int_{T(E)} \frac{dudv}{v^2} = \int \int_E \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{dxdy}{v^2} \\ &= \int \int_E \frac{1}{|cz+d|^4} \frac{|cz+d|^4}{y^2} dxdy = \mu(E). \end{aligned}$$

□

**Definição 4.3.6.** *Um triângulo hiperbólico é um conjunto  $\Delta \subset \mathcal{U}$  que é fechado em  $\overline{\mathcal{U}} := \mathcal{U} \cup \mathbb{R}_\infty$ , cuja fronteira é a união dos fechos em  $\overline{\mathcal{U}}$  de exatos 3 (três) segmentos (ou retas) hiperbólicos e tal que dois quaisquer destes segmentos (ou retas) têm os seus fechos em  $\overline{\mathcal{U}}$  se interceptando em um único ponto que é denominado, genericamente, de um vértice do triângulo.*

Por exemplo, na figura a seguir ilustramos os 4 tipos de *triângulos hiperbólicos*, variando se 0,1,2 ou 3 vértices do triângulo pertencem à  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

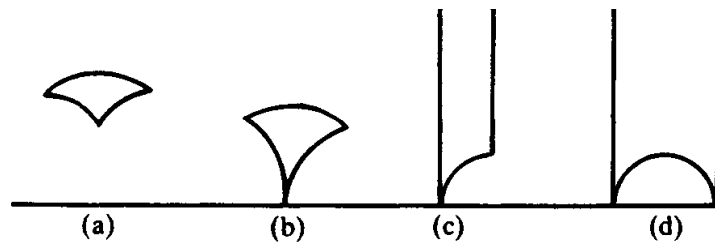


Figura 6 – 4 tipos de triângulos hiperbólicos

A *fórmula de Gauss-Bonnet* mostra que a H-área de um H-triângulo depende apenas de seus ângulos. O ângulo entre duas H-retas em  $\mathcal{U}$  é definido como sendo o ângulo entre suas tangentes em seu ponto de intersecção; duas H-retas se cruzam em um ponto de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  com ângulo zero.

**Teorema 4.3.7** (Gauss-Bonnet). *Seja  $\Delta$  um triângulo hiperbólico com ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$ . Então*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

*Demonstração.* 1. Primeiro consideramos o caso onde 2 lados do triângulo  $\Delta$  são H-retas verticais. A base de  $\Delta$  é então um segmento de um semi-círculo Euclideano. Aplicando transformações da forma  $z \mapsto z + \kappa (\kappa \in \mathbb{R})$ ,  $z \mapsto \lambda z (\lambda > 0)$  podemos assumir que o semi-círculo tem centro 0 e raio 1; e pelo Teorema 4.3.5 essas transformações **não**

mudam a H-área, e, como os lados verticais permanecem verticais, preservam os ângulos zero, sendo os outros ângulos preservados por conformalidade. Podemos assumir que  $\Delta$  é o triângulo representado na Figura 7 a seguir (onde o semi-círculo tem raio 1).

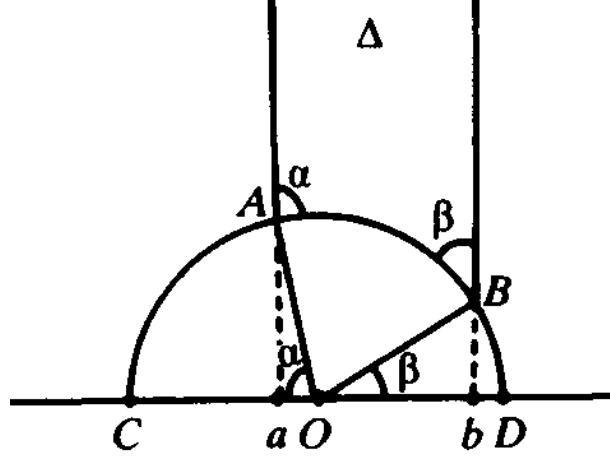


Figura 7 – triângulo hiperbólico traçado no H-segmento de reta

(Por simples geometria, os ângulos  $AOC$ ,  $BOD$  são  $\alpha$ ,  $\beta$  respectivamente.) Assumindo que as H-retas verticais atravessam  $A$  e  $B$  são  $x = a$  e  $x = b$ , respectivamente. Agora calculando

$$\mu(\Delta) = \int \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{(1-x^2)}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Faça a substituição  $x = \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ); então

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = \pi - \alpha - \beta.$$

2. Assumamos que  $\Delta$  tenha um vértice na reta real como em (b) da Figura 6. Aplicando a transformação de  $PSL_2(\mathbb{R})$  podemos levar esse vértice para  $\infty$  sem alterar H-área ou ângulos. Portanto, se os ângulos diferentes de zero de  $\Delta$  são  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta$  pelo Caso 1.
3.  $\Delta$  não tem vértices em  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Suponha que  $\Delta$  tem vértices  $A, B, C$  e que  $AB$  seja um H-segmento de reta produzido. (Podemos aplicar a transformação de  $PSL_2(\mathbb{R})$  e obter a certeza de que não têm lados de  $ABC$  que sejam verticais às H-retas). Então, temos a situação da Figura 8. Aqui,  $\Delta = \Delta_1/\Delta_2$ , onde  $\Delta_1$  é o H-triângulo com vértices  $A, C, D$  e  $\Delta_2$  é o H-triângulo com vértices  $B, C, D$ .

Então,

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) \\ &= \pi - \alpha - (\gamma + \theta) - [\pi - \theta - (\pi - \beta)] \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

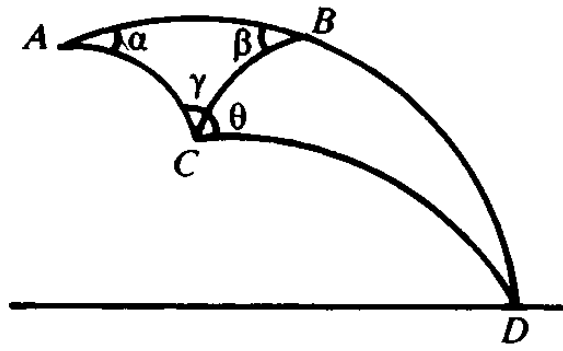


Figura 8 – vértices do H-triângulo

□

## REFERÊNCIAS

- [1] Bernhard Riemann, Turning Points in the Conception of Mathematics 1826 - 1866, Birkhäuser Basel 1<sup>o</sup> edição, 1998.
- [2] Olsen, John , The Geometry of Möbius Transformations, disponível em [www.johno.dk/mathematics/moebius.pdf](http://www.johno.dk/mathematics/moebius.pdf).
- [3] Jones, Gareth A., David Singerman - Complex Functions - an Algebraic and Geometric Viewpoint- Cambridge University Press, 2012.
- [4] S. Fernandez, Cecília, C. Bernardes Jr., Nilson, Introdução às Funções de uma Variável Complexa. 4.ed, 2016.
- [5] Needham, T. Visual Complex Analysis. 5.ed New york: Claredon Press, Oxford, 2000.
- [6] Duran, Francieli, Transformações de Möbius e Inversões - Tese de Mestrado, UNESP Câmpus de Rio Claro/SP, 2013.
- [7] Churchill, Ruel V. e Brown, James Ward - Complex variables and applications, McGraw-Hill Book Co. New York, 1987.
- [8] Stewart ,J., Cálculo. Volume 3, 5.ed, Editora CEN-GAGE Learning, 2009.
- [9] Willian E. Boyce, Richard C. DIPRIMA-Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno-LTC, 2005.
- [10] Bino De Souza, Carlos, Consistência do Modelo de Disco de Poincaré - Tese de Mestrado, UFR-PE, 2014.