Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Pablo Dos Santos Corrêa Junior

Estudo de uma EDP não linear e com singularidade por métodos não variacionais

Juiz de Fora

2019

Pablo Dos Santos Corrêa Junior

Estudo de uma EDP não linear e com singularidade por métodos não variacionais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

.

Estudo de uma EDP não linear e com singularidade por métodos não variacionais / Pablo Dos Santos Corrêa Junior. – 2019.
42 f.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria
Trabalho de conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2019.

Pablo Dos Santos Corrêa Junior

Estudo de uma EDP não linear e com singularidade por métodos não variacionais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Eduard Toon
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Fabio Rodrigues Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Anderson Luis Albuquerque de Araujo
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho aos meus avós, Maria da Graça Luiz da Silva e Olavo Moreira da Silva (In Memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas vitórias durante esta jornada, à minha família por acreditar no meu potencial e estar sempre disposta a me amparar nos momentos de dificuldade, ao meu orientador Luiz Fernando De Oliveira Faria por ser sempre um ponto de apoio nos momentos de dúvidas e desafios que a matemática proporciona, à minha amada Karen pelo seu carinho e amor sincero, à Universidade Federal De Juiz de Fora pelo incentivo à pesquisa através do programa de iniciação científica B.I.C.

RESUMO

Neste trabalho abordamos a equação diferencial parcial elíptica e não variacional

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

com $0 < \gamma < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, através de dois métodos: o de Galerkin e por teoria de ponto fixo. O estudo da primeira técnica se baseou no minicurso "Introdução as Equações Elípticas" do professor Claudianor O. Alves [1] e a segunda foi uma adaptação da argumentação apresentada no artigo [2], em que os autores estudam o problema biharmônico

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \frac{q(x)}{u^\gamma} = 0, & \text{em; } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} .$$

Apresentamos a existência e unicidade de solução para o problema proposto.

Palavras-chave: Equação diferencial parcial não linear, método de Galerkin, ponto fixo de Schauder.

ABSTRACT

In this work, we approach the nonlinear partial differential equation

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \text{in } \Omega \\ u > 0, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $0 < \gamma < 1$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, by two non-variational techniques: the Galerkin method and fixed point theory. The study of the first method was motivated by the mini-course "Introdução as equações Elípticas", of Claudianor O. Alves [1]. The second technic was a adaptation of the arguments presented in [2], where the autors treated the biharmonic problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \frac{q(x)}{u^\gamma} = 0, & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}.$$

We show the existence and uniqueness of solution for the proposed problem.

Key-words: Nonlinear Partial differential equation, Galerkin Method, Schauder fixed point theorem.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Contribuições para o estudo do problema tratado neste trabalho podem ser resgatadas na década de 70 do século passado com o artigo "*On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*" de M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, e L. Tartar, em que os autores investigaram a existência e unicidade de solução por meio do método de sub-super solução, onde foi possível garantir que para $\gamma > 1$ a solução não estará em $C^1(\overline{\Omega})$. Para o caso real, isto é $\Omega \subset \mathbb{R}$, o problema proposto surge na descrição física do escoamento de fluidos pseudo-plásticos. Um modelo físico neste sentido pode ser encontrado no artigo "*A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*", de A. Nachman e A. Callegari. Em [3] os autores, novamente amparados pela técnica de sub-super solução, garantem a existência e unicidade de solução para o problema proposto para $\gamma > 0$ e concluem que esta estará em $C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com Ω um domínio suficientemente regular. Além disto neste trabalho, para $\gamma \geq 3$, A. C. Lazer e P. J. Mckenna mostram que a solução do problema apresentado não está em $W^{1,2}$. Optamos por uma apresentação do problema pela ótica de outras técnicas possíveis na investigação de existência e unicidade de solução, focando o caso $0 < \gamma < 1$. A abordagem pelo método de Galerkin seguiu o exposto em [1] com ligeiras modificações e a aplicação da teoria de ponto fixo provém de uma adaptação da argumentação elaborada em [2].

Sugere-se ao leitor interessado no texto noções básicas de medida e integração, análise funcional e espaços de Sobolev. Os capítulos estão dispostos da seguinte maneira:

- Primeiro: Visa a aplicação do método de Galerkin para obter uma solução fraca do problema proposto.
- Segundo: Buscamos a construção de um operador e espaço apropriado de atuação para utilizar um corolário do Teorema de Ponto Fixo de Schauder e garantir a existência de solução do problema proposto.
- Terceiro: Provar a unicidade da solução do problema.

1 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GALERKIN

O método de Galerkin é uma técnica utilizada na matemática aplicada e pura para o estudo de equações diferenciais parciais. Do ponto de vista da matemática pura este procedimento é uma ferramenta útil para garantir a existência de solução de EDP's, podendo ser aplicada a uma variedade de problemas. O método consiste em buscar solução da EDP fornecida através da procura de uma *solução fraca*, isto é, a solução de uma equação integral. Para tal, visto que os espaços de funções trabalhados possuem dimensão infinita, constroem-se aproximações da solução fraca do problema em subespaços de dimensão finita, de maneira que as soluções aproximadas convirjam para uma solução fraca da equação. Exemplificamos este expediente aplicando a técnica em um problema não linear.

Buscamos a existência de solução para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe C^1, $n \geq 2$ e $0 < \gamma < 1$, através do *método de Galerkin.* A construção aqui exposta pode ser encontrada em [1]. Os seguintes resultados serão pilares do desenvolvimento da teoria.

1.1 RESULTADOS FUNDAMENTAIS

Teorema 1.1.1 (Ponto fixo de Brouwer)**.** *Seja $f : B[0,r] \to B[0,r]$ uma função contínua, onde $B[0,r] \subset \mathbb{R}^n$ é a bola fechada de centro na origem e raio r. Então existe $z \in B[0,r]$ tal que $f(z) = z$, isto é, f possui pelo menos um ponto fixo em $B[0,r]$.*

Para uma demonstração do resultado acima consulte [14] , página 445.

Corolário 1.1.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua com $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ para todo x verificando $\|x\| = R > 0$. Então existe $z_0 \in B[0,R]$ tal que $f(z_0) = 0$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B[0,R]$ e defina $g : B[0,R] \to B[0,R]$ por

$$g(x) = \frac{-R}{\|f(x)\|} f(x).$$

Note que

$$\|g(x)\| = \frac{|-R|}{\|f(x)\|}\|f(x)\| = R$$

mostrando que $g(B[0,R]) \subset B[0,R]$. Além disso segue da continuidade de f que g é contínua. Assim, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, existe $x_0 \in B[0,R]$ ponto fixo de g. Portanto, $\|x_0\| = \|g(x_0)\| = R > 0$ e por outro lado

$$R^2 = \|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, g(x_0) \rangle = \left\langle x_0, \frac{-R}{\|f(x_0)\|} f(x_0) \right\rangle = \frac{-R}{\|f(x_0)\|} \langle x_0, f(x_0) \rangle.$$

Mas por hipótese $\langle x_0, f(x_0) \rangle \geq 0$, então

$$0 < R^2 = \frac{-R}{\|f(x_0)\|} \langle x_0, f(x_0) \rangle \leq 0,$$

o que é uma contradição. Logo existe $z_0 \in B[0,r]$ tal que $f(z_0) = 0$. □

Definição 1.1.1. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo, dizemos que Ω é um domínio.

Definição 1.1.2. Diremos que $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fronteira suave se ∂X for uma superfície regular de codimensão 1 e de classe C^k.

Teorema 1.1.2 (Princípio do máximo fraco)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.*

Se $\Delta u \geq 0$ em Ω, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Se $\Delta u \leq 0$ em Ω, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Demonstração. Ver [4] página 136. □

Teorema 1.1.3 (Princípio do máximo forte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Suponha que u satisfaz $\Delta u \geq 0$ $[\Delta u \leq 0]$ em Ω. Se u atinge seu máximo [mínimo] no interior de Ω, então u é constante.*

Demonstração. Ver [4] página 140. □

Com estas ferramentas em mãos podemos trabalhar propriamente no problema proposto.

1.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Fixado $\epsilon > 0$ e $0 < \gamma < 1$, considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{(\epsilon + |u|)^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

Um fato importante a respeito do problema auxiliar é que se u_ϵ é solução de (P_ϵ), então u_ϵ é estritamente positiva em Ω. Antes de provarmos isto, observe que neste caso $\Delta u_\epsilon(x) < 0$, $\forall x \in \Omega$.

Afirmação 1.2.1. $u_\epsilon(x) > 0,\ \forall\, x \in \Omega.$

De fato, pelo princípio do máximo fraco, temos :

$$u_\epsilon(x) \geq \min_{\overline{\Omega}} u_\epsilon = \min_{\partial\Omega} u_\epsilon = 0$$

ou seja, $u_\epsilon(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$. Suponha por absurdo que existe $x_0 \in \Omega$ de modo que $u_\epsilon(x_0) = 0$; pelo exposto x_0 é ponto de mínimo, então pelo princípio do máximo forte segue que

$$u_\epsilon(x) = 0, \forall x \in \overline{\Omega},$$

o que contradiz o fato de u_ϵ ser solução de (P_ϵ). Logo $u_\epsilon(x) > 0\, \forall x \in \Omega$.

Definiremos agora os conceitos de solução fraca e solução forte. Por motivação, observe que se $u_\epsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ e satisfizer (P_ϵ) então $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} \in C^1(\Omega)$, implicando que $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ para todo i. Dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, multiplicando (P_ϵ) por φ e integrando em Ω, obtemos:

$$\int_\Omega -\Delta u_\epsilon \varphi = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\epsilon + |u_\epsilon|)^\gamma}.$$

Mas

$$\int_\Omega -\Delta u_\epsilon \varphi = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i^2}\varphi = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \varphi \tag{1.1}$$

em que a segunda igualdade de (1.1) segue da definição do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\epsilon + |u_\epsilon|)^\gamma}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pela densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\epsilon + |u_\epsilon|)^\gamma}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Definição 1.2.1. Diremos que :

- $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P_ϵ) se satisfaz (1.2);
- $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução forte do problema (P_ϵ) se satisfaz (P_ϵ).

Toda solução *forte* do problema (P_ϵ) é uma solução fraca, pelo exibido acima. Nosso objetivo a partir deste momento será obter uma solução fraca para o problema auxiliar e através de argumentos de regularidade concluir que , na verdade, a solução fraca obtida é uma solução forte. Este é um procedimento padrão e de enorme importância, pois ao trabalharmos no espaço $H_0^1(\Omega)$ ganhamos mais ferramentas para atacar o problema.

Seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ uma base ortonormal para $H_0^1(\Omega)$ (existe devido ao teorema A.0.2 e a proposição B.0.2) e considere este espaço com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $V_m = ger(\{e_1, \ldots, e_m\})$. Então V_m é um subespaço vetorial de $H_0^1(\Omega)$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base de V_m, isto é, dado $v \in V_m$ temos :

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$$

em que $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$.

Afirmação 1.2.2. V_m é isomorfo ao $\mathbb{R}^m$.

Realmente, considere a função $F : V_m \to \mathbb{R}^m$, dada por $F(e_1) = c_1$, $F(e_2) = c_2, \ldots,$ $F(e_m) = c_m$ em que $\{c_1, \ldots, c_m\}$ é a base canônica ordenada do $\mathbb{R}^m$, com $F(v) = F(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i$. Então F é linear e $F(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha$.

Como $C = \{F(e_1), \ldots, F(e_m)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^m$ temos que F é bijetora, mostrando que F é um isomorfismo. Por outro lado F leva base ortonormal em subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}^m$, implicando que F preserva norma, isto é,

$$\|v\| = \|\alpha\|_{\mathbb{R}^m}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

Logo F é uma isometria.

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f(\alpha) = (f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))$ em que

$$f_j(\alpha) = \int_\Omega \nabla F^{-1}(\alpha) \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |F^{-1}(\alpha)|)^\gamma} = \int_\Omega \nabla v \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma}$$

$1 \leq j \leq m$ e identificamos o vetor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ com $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$.

Proposição 1.2.1.

- *f é contínua;*
- *existe R>0 tal que $\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$ para $\|\alpha\| = R > 0$.*

Demonstração. (i) f é contínua.

Mostraremos que cada função coordenada f_j é contínua. Note que basta provarmos que o termo $\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma}$ é contínuo pois $\int_\Omega \nabla v \nabla e_j$ é contínuo, já que pode ser visto como o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.

Observe que para todo $x \in \Omega$,

$$\left| \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \right| (x) \leq \left| \frac{e_j}{\epsilon^\gamma} \right| (x)$$

mostrando que $\frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma}$ é integrável. Seja $(v_n) \subset V_m$ uma sequência tal que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $dim V_m < \infty$ tem-se que V_m é fechado, ou seja, $v \in V_m$. Considere

$$v_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(n)} e_i, \quad v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i,$$

então dado $x \in \Omega$ temos que

$$|v_n(x) - v(x)| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i||e_i(x)|.$$

Além disso, pela isometria F, como $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, segue que $(\alpha_i^{(n)}) \to \alpha_i$ em $\mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Assim a medida que $n \to \infty$ a parte direita da desigualdade acima tende a zero e consequentemente $v_n(x) \to v(x)$. Logo v_n converge q.t.p para v. Em vista, disso $\frac{e_j}{(\epsilon+|v_n|)^\gamma}$ converge para $\frac{e_j}{(\epsilon+|v|)^\gamma}$ q.t.p. em Ω.

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que :

$$\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma}$$

implicando que $\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v|)^\gamma}$ é contínua. Logo f_j é contínua para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ e consequentemente f é contínua.

(ii) Existe $R > 0$ tal que $\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$ para $\|\alpha\| = R > 0$.

Visto que $f(\alpha) = (f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))$ e $\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{j=1}^m f_j(\alpha)\alpha_j$, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle f(\alpha), \alpha \rangle =& \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\int_\Omega \nabla v \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma}) \\
=& \sum_{j=1}^{m} \left(\int_\Omega \nabla v \nabla \alpha_j e_j - \int_\Omega \frac{\alpha_j e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \right) \\
=& \int_\Omega \nabla v (\sum_{j=1}^{m} \nabla \alpha_j e_j) - \int_\Omega \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \\
=& \int_\Omega \nabla v \nabla v - \int_\Omega \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \\
=& \|v\|^2 - \int_\Omega \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma}.
\end{aligned}$$

Como $-1/\epsilon^\gamma \leq -1/(\epsilon + |v|)^\gamma$, temos :

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 - \int_\Omega \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \geq& \|v\|^2 - \int_\Omega \frac{|v|}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \\
\geq& \|v\|^2 - \int_\Omega \frac{|v|}{\epsilon^\gamma} \\
=& \|v\|^2 - 1/\epsilon^\gamma \|v\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Pelas imersões de Rellich (Teorema B.0.3), existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^1} \leq C\|u\|$,$\forall u \in H_0^1(\Omega)$, então:

$$\|v\|^2 - 1/\epsilon^\gamma \|v\|_{L^1} \geq \|v\|^2 - C_\epsilon \|v\|$$

onde $C_\epsilon = C/\epsilon^\gamma$. Portanto ,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - C_\epsilon \|v\|.$$

Escolhendo $R \geq C_\epsilon > 0$, para $v \in V_m$ com $\|v\| = R$ teremos :

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0.$$

$\square$

Observação 1. Note que R não depende de m (dimensão do espaço V_m), pois basta que $R \geq C_\epsilon$.

Pelo Corolário 1.1.1 , existe $z_m \in \mathbb{R}^m$ com $\|z_m\| \leq R$ e $f(z_m) = 0$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} = 0 \tag{1.3}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, em que $v_m = F^{-1}(z_m)$. Do fato de $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ser base de V_m, dado $\psi \in V_m$ teremos que $\psi = \sum_{j=1}^m \beta_j e_j$. Daí e de (1.3) segue que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi - \int_\Omega \frac{\psi}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} = 0 \quad \forall \psi \in V_m. \tag{1.4}$$

Considere a sequência $(v_m) \subset H_0^1(\Omega)$. Observe que por construção $\|v_m\| \leq R$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, visto que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo (Proposição B.0.2), (v_m) possui uma subsequência que converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$. A menos de subsequência podemos assumir que $v_m \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_m(x) \to v(x)$ q.t.p, de acordo com a observação abaixo.

Observação 2. Seja (u_n) uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que (u_n) converge fraco para $u \in H_0^1(\Omega)$, então (u_n) possui uma subsequência que converge q.t.p para u.

De fato, pelas imersões de Rellich, o operador identidade $i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ é compacto e como operadores compactos levam sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes, segue que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Pelo Teorema B.0.1 existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) de modo que $u_{n_j}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Logo $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_{n_j}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω.

Dado $\phi \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i e_i \quad \text{com} \quad \|\phi\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^2 < \infty$$

(veja apêndice A) e além disso,

$$\phi = \lim_m \Psi_m \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

em que $\Psi_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \in V_m$.

Observe que $V_m \subset V_k$ para $m \leq k$, então por (1.4)

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} = 0. \tag{1.5}$$

Pela definição de convergência fraca, quando $k \to \infty$, segue que

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma}.$$

Assim, pelas convergências acima e por (1.5), obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} = 0. \tag{1.6}$$

Agora utilizando a continuidade das aplicações em (1.6) conseguimos, para $m \to \infty$,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m \to \int_\Omega \nabla v \nabla \phi\,,$$
$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma}\,,$$

chegando em

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi - \int_\Omega \frac{\phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto v é uma solução fraca do problema (P_ϵ). Por regularidade (ver [1]) v é solução forte, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{1}{(\epsilon + |v|)^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\Delta v < 0$ segue pelos princípios do máximo que $v > 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{1}{(\epsilon + v)^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ v > 0, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Gostaríamos de fazer $\epsilon \to 0$ para obter uma solução do problema (P); com esta finalidade considere $\epsilon_n = 1/n$ e u_n solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \frac{1}{(1/n + u_n)^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u_n > 0, & \text{em } \Omega \\ u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela definição de solução fraca (1.2) temos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi - \int_\Omega \frac{\phi}{(1/n + u_n)^\gamma} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.7}$$

Escolhendo $\phi = u_n$ concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega \frac{u_n}{(1/n + u_n)^\gamma} = 0.$$

Assim, usando que $u_n > 0$ em Ω,

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2 &= \int_\Omega \frac{u_n}{(1/n + u_n)^\gamma} \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{u_n^{1/\gamma}}{u_n}\right)^\gamma \\ &= \int_\Omega u_n^{1-\gamma}.\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder com $p = 1/(1-\gamma)$ e $q = 1/\gamma$, obtemos

$$\|u_n\|^2 \leq \int_\Omega u_n^{1-\gamma} \leq \|u_n^{1-\gamma}\|_{L^p}\|1\|_{L^q} = (\|u_n\|_{L^1})^{1-\gamma} \cdot vol(\Omega)^\gamma.$$

Pelas imersões de Rellich

$$\|u_n\|^2 \leq (\|u_n\|_{L^1})^{1-\gamma} \cdot vol(\Omega)^\gamma \leq C^{1-\gamma} vol(\Omega)^\gamma \|u_n\|^{1-\gamma} = K\|u_n\|^{1-\gamma} \tag{1.8}$$

em que $K = C^{1-\gamma}vol(\Omega)^\gamma$. Logo u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$; como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, a menos de subsequência, podemos assumir que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω.

Sejam $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor e φ_1 uma autofunção positiva correspondente ao operador laplaciano negativo com condição de fronteira de Dirichlet, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \quad \text{em } \Omega \\ \varphi_1 = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{Ξ}$$

e assuma que $\|\varphi_1\|_\infty = 1$.

Lema 1.2.1. *Para todo $t \in (0, +\infty)$ e $\gamma \in (0,1)$ vale a desigualdade $t^\gamma \leq \gamma t + (1-\gamma)$.*

Demonstração. Seja $\psi : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(t) = \gamma t - t^\gamma$. Note que para $0 < t < 1$ temos $\psi'(t) < 0$ e para $t > 1$ vale $\psi'(t) > 0$. Além disso pelo teorema do valor médio segue que $\psi(t) \geq \psi(1)$ e $\psi(t) = \psi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Daí para todo $t \in (0, +\infty)$

$$t^\gamma \leq \gamma t + (1-\gamma). \tag{1.9}$$

□

Lema 1.2.2. *Seja u_ϵ, $\epsilon \in (0,1)$, uma solução clássica de (P_ϵ). Se existir $K > 0$,independente de ϵ, tal que $\|u_\epsilon\|_\infty \leq K$, então existirá $\delta > 0$(independente de ϵ) tal que*

$$u_\epsilon \geq \delta\varphi_1.$$

Demonstração. Sejam u_ϵ e K como na hipótese e defina $w = u_\epsilon - \delta\varphi_1$, em que δ é uma constante a ser escolhida. Note que

$$\Delta w = \Delta u_\epsilon - \Delta\delta\varphi_1 = \delta\lambda_1\varphi_1 - \frac{1}{(u_\epsilon + \epsilon)^\gamma}.$$

Sabemos que para todo $t \in (0, +\infty)$,

$$t^\gamma \leq \gamma t + (1-\gamma),$$

então para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$(u_\epsilon(x)+\epsilon)^\gamma \leq \gamma(u_\epsilon(x)+\epsilon) + (1-\gamma) \leq \gamma(K+1) + (1-\gamma)$$

e portanto

$$0 < \frac{1}{\gamma(K+1)+(1-\gamma)} \leq \frac{1}{(u_\epsilon(x)+\epsilon)^\gamma}.$$

Tome δ tal que

$$0 < \delta < \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\gamma(K+1)+(1-\gamma)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta w = \delta\lambda_1\varphi_1 - \frac{1}{(u_\epsilon+\epsilon)^\gamma} &\leq \frac{\varphi_1}{\gamma(K+1)+(1-\gamma)} - \frac{1}{(u_\epsilon+\epsilon)^\gamma}\\ &\leq \frac{1}{\gamma(K+1)+(1-\gamma)} - \frac{1}{(u_\epsilon+\epsilon)^\gamma} \leq 0\end{aligned}$$

pois $\|\varphi_1\|_\infty = 1$.

Logo $\Delta w \leq 0$ e pelos princípios do máximo segue que $w \geq 0$, isto é, $u_\epsilon \geq \delta\varphi_1$, como queríamos demonstrar. □

Pela limitação obtida em (1.8) e pelos argumentos de regularidade de [8], Seção 3, (ver também suas referências), conseguimos uma constante $\tilde{c} > 0$ (independente de n) tal que $\|u_n\|_\infty \leq \tilde{c}$. Portanto, pelo Lema 1.2.2,

$$u_n \geq \delta\varphi_1.$$

Assim quando $n \to \infty$, obtemos

$$u(x) \geq \delta\varphi_1(x) > 0 \quad \text{q.t.p em}\,\Omega$$

mostrando que $med\{x \in \Omega; u(x) = 0\} = 0$. Pelo exposto em (1.7) conseguimos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi - \int_\Omega \frac{\varphi}{(u_n+1/n)^\gamma} = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.10}$$

e pela definição de convergência fraca obtemos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi.$$

Segundo o Lema 1.2.2 e a desigualdade de Hardy-Sobolev (B.0.4), juntamente com a desigualdade de Hölder, obtemos, respectivamente,

$$\frac{|\varphi|}{(u_n+1/n)^\gamma} \leq \frac{|\varphi|}{u_n^\gamma} \leq \frac{|\varphi|}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \quad \text{e} \quad \frac{\varphi}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \in L^1(\Omega), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Consequentemente pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(u_n+1/n)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma}.$$

Passando o limite $n \to \infty$ em (1.10) ficamos com a igualdade

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.11}$$

Já que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, então dado $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ existe uma sequência $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \Psi$ em $H_0^1(\Omega)$. Observe também que por (1.11)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_n - \int_\Omega \frac{\phi_n}{u^\gamma} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmação 1.2.3.

$$\int_\Omega \frac{\phi_n}{u^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma}.$$

De fato, pela desigualdade de Hardy-Sobolev em conjunto com a de Hölder,

$$\left\| \frac{\phi_n}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \right\|_{L^1} \leq \tilde{K} \left\| \frac{\phi_n}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \right\|_{L^q} \leq \tilde{C}\|\phi_n\|,$$

$\tilde{K}, \tilde{C}$ constantes positivas. Logo, como $\phi_n \to \Psi$ em $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\phi_n}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\Psi}{(\delta\varphi_1)^\gamma}.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$\left| \int_\Omega \frac{\phi_n - \Psi}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí,

$$\left| \int_\Omega \frac{\phi_n}{u^\gamma} - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \right| = \left| \int_\Omega \left(\frac{\phi_n - \Psi}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \right) \left(\frac{\delta\varphi_1}{u} \right)^\gamma \right|.$$

Visto que $0 < \delta\varphi_1(x) \leq u(x)$ q.t.p em Ω, temos $(\delta\varphi_1/u)(x) \leq 1$ q.t.p. em Ω. Logo

$$\left| \int_\Omega \left(\frac{\phi_n - \Psi}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \right) \left(\frac{\delta\varphi_1}{u} \right)^\gamma \right| \leq \left| \int_\Omega \left(\frac{\phi_n - \Psi}{(\delta\varphi_1)^\gamma} \right) \right| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Assim, quando $n \to \infty$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} = 0, \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que u é solução fraca do problema (P). Usando regularidade elíptica (ver [1]) tem-se que $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Assim concluímos o estudo do problema (P) via método de Galerkin.

2 APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE PONTO FIXO

A teoria de ponto fixo de aplicações é amplamente utilizada na área de equações diferenciais para estudar a existência de solução. Podemos destacar, por exemplo, o uso do Teorema do Ponto fixo de Banach na demonstração do Teorema de Picard e o Teorema do Ponto fixo de Brouwer, utilizado no capítulo anterior através de um dos seus corolários (Corolário 1.1.1). Neste capítulo exploraremos um corolário do Teorema do Ponto Fixo de Schauder para estabelecer, novamente, a existência de solução para o problema (P). Para tal, exibiremos uma aplicação T e um espaço A, de atuação de T, apropriados ao problema, isto é, obter um ponto fixo de T nos levará a uma solução de (P).

Considere o mesmo problema (P) do capítulo anterior, onde $0 < \gamma < 1$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

mas com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, com fronteira de classe $C^{2,1}$ e convexo, em que $n \geq 2$. Através da teoria de ponto fixo obteremos uma solução $u \in C^{2,\alpha_1}(\Omega)$ em que $0 < \alpha_1 < \alpha\gamma$ para $0 < \alpha \leq 1$ e o γ do problema.

2.1 RESULTADOS FUNDAMENTAIS

Definição 2.1.1. Um *retângulo m-dimensional* é o produto cartesiano

$$A = \Pi_{i=1}^m I_i \subset \mathbb{R}^n$$

em que ou todos os $I_i's \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos ou todos são intervalos fechados. A será chamado de retângulo aberto se ocorrer o primeiro caso e retângulo fechado se ocorrer o segundo.

Definição 2.1.2. Sejam $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo e A um retângulo. Diremos que $L(A)$ é um *paralelogramo* aberto [fechado] se A for um retângulo aberto [fechado].

Definição 2.1.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é α-Hölder contínua se

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty$$

para algum $0 < \alpha \leq 1$. Neste caso escreveremos que $f \in C^\alpha(\Omega)$. Além disso, denotaremos

$$[f]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha}.$$

Se f for α-Hölder contínua em todo paralelogramo aberto $A \subset \Omega$ diremos que f é localmente α-Hölder contínua.

Definição 2.1.4. Definimos

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\Omega);\ D^\sigma f \text{ é limitada e uniformemente contínua em } \Omega\ \forall |\sigma| \leq k\},$$

com a norma

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\sigma|\leq k} \|D^\sigma f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Analogamente, definimos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\overline{\Omega});\ D^\sigma f \in C^\alpha(\Omega)\ \forall |\sigma| \leq k\},$$

com a norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\sigma|\leq k}[D^\sigma f]_\alpha.$$

Observação 3. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto tem-se que $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é Banach.

Observação 4. O conceito de função contínua de Hölder pode ser facilmente estendido para espaços métricos.

Definição 2.1.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)[C^{k,\alpha}_{loc}(\Omega)]$ são definidos como os subespaços de $C^k(\Omega)$ consistindo das funções cujas derivadas parciais até a ordem k, inclusive, são todas α- Hölder [localmente α- Hölder] contínuas.

Observação 5. De acordo com o Teorema 4.4.2 de [18], para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado e com fronteira de classe $C^{2,1}$, temos que $C^{k,\alpha}(\Omega) = C^{k,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Teorema 2.1.1. *(Schauder) Seja $0 < \alpha^* \leq 1$ e suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^{k+2,α^*} e que $f \in C^{k,\alpha^*}(\overline{\Omega})$. Então existe uma única função $u \in C^{k+2,\alpha^*}(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $C_* > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha^*}(\overline{\Omega})} \leq C_* \|f\|_{C^{0,\alpha^*}(\overline{\Omega})}.$$

Demonstração. Veja [9] Teorema 8.2 e [10] Teorema 6.1. □

Teorema 2.1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todos $0 < \alpha < \beta \leq 1$, valem as seguintes imersões:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas e se Ω é convexo e limitado todas as três imersões são compactas. Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais :

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

sendo a última compacta se Ω for também limitado.

Demonstração. Veja [4], Teorema 9.6. □

Observação 6. Segue das imersões acima que a fronteira de Ω é, em particular, de classe $C^{2,\alpha}$, para todo $1 < \alpha \leq 1$.

Proposição 2.1.1. *Sejam $\gamma \in (0,1)$ e $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^\gamma$. Então f é γ- Hölder contínua.*

Demonstração. Sejam $x, y \in [0,+\infty)$ e assuma, sem perda de generalidade, que $0 \leq y < x$. Então,

$$|f(x) - f(y)| = x^\gamma - y^\gamma = \int_y^x \gamma t^{\gamma-1} dt \leq \int_y^x \gamma (t-y)^{\gamma-1} dt = (x-y)^\gamma = |x-y|^\gamma$$

Logo

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq 1.$$

□

Proposição 2.1.2. *Sejam $g : X \to W$ e $f : g(X) \subset W \to Z$, em que X, W, Z são espaços normados. Se g é μ-Hölder contínua e f é λ-Hölder contínua, então $f \circ g$ é $\mu\lambda$-Hölder contínua.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$, $x \neq y$,

$$\|f(g(x)) - f(g(y))\|_Z \leq [f]_\lambda \|g(x) - g(y)\|_W^\lambda \leq [f]_\lambda [g]_\mu^\lambda \|x-y\|_X^{\lambda\mu}$$

Logo

$$\frac{\|f(g(x)) - f(g(y))\|}{\|x-y\|_X^{\lambda\mu}} \leq [f]_\lambda [g]_\mu^\lambda.$$

□

Proposição 2.1.3. *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que* $\inf |g| > 0$ *e g é λ- Hölder contínua. Então $\frac{1}{g}$ é λ- Hölder contínua.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$,$x \neq y$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(y)-g(x)}{g(x)g(y)}\right| = \frac{|g(y)-g(x)|}{|g(x)||g(y)|} \leq \frac{|g(y)-g(x)|}{(\inf|g|)^2} \leq \frac{[g]_\lambda |x-y|^\lambda}{(\inf|g|)^2}.$$

Portanto,

$$\frac{|1/g(x) - 1/g(y)|}{|x-y|^\lambda} \leq \frac{[g]_\lambda}{(\inf|g|)^2}.$$

□

Teorema 2.1.3. *(Representação de Green) Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

em que f, g são funções contínuas. Então

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dy + \int_\Omega f(y)G(x,y)dy$$

onde $G(x,y)$ é a função de Green e ν um campo vetorial normal à fronteira $\partial\Omega$, unitário e apontando para fora.

Demonstração. Veja [11], seção 2.2.4, Teorema 12. □

Teorema 2.1.4. *Seja Ω um domínio $C^{0,1}$ em $\mathbb{R}^n$. Então*

- *Se $kp < n$ o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = np/(n-kp)$, e compactamente imerso em $L^q(\Omega)$ para qualquer $q < p^*$;*

- *Se $0 \leq m < k - n/p < m+1$, o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$, $\theta = k - n/p - m$, e compactamente imerso em $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\beta < \theta$*

Demonstração. Veja [12], Teorema 7.26. □

Teorema 2.1.5 (Agmon, Douglas e Nirenberg)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $\overline{C} > 0$(independente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq \overline{C}\|f\|_{L^r}$$

Demonstração. Veja [10] e [9]. □

Teorema 2.1.6. *Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, uma solução forte da equação $Lu = f$ em Ω, em que $Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u$. Suponha que os coeficientes de L satisfaçam, para constantes positivas λ, Λ,*

- $a^{ij} \in C^0(\Omega)$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega), f \in L^p(\Omega)$;
- $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda\|\xi\|^2$ *para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$;
- $|a^{ij}|$,$|b^i|$, $|c| \leq \Lambda$,

onde $j, i = 1, \ldots, n$. Então para qualquer domínio Ω' compactamente contido em Ω ($\overline{\Omega'} \subset \Omega$) temos

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq \tilde{\tilde{C}}(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}).$$

Demonstração. Veja [12], Teorema 9.11. □

2.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Seguindo o expediente já exposto no método de Galerkin, inicialmente mostraremos que o problema auxiliar (P_ϵ) possui solução. Considere φ_1 a autofunção exibida em (Ξ); pelo lema de Hopf (Teorema 6.7 [4]) existe $\rho > 0$ tal que $\|\nabla\varphi_1\|_{\mathbb{R}^n} \geq \rho$ para todo $x \in \partial\Omega$. Seja ϕ_0 solução de

$$\begin{cases} -\Delta\phi_0 = 1, & \text{em } \Omega \\ \phi_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e observe que, pelo princípio do máximo, $\phi_0(x) > 0$ para $x \in \Omega$. Pelo Teorema 2.1.3

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_\Omega G(x,y)\varphi_1(y)dy \quad \text{e} \quad \phi_0(x) = \int_\Omega G(x,y)dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = |\varphi_1(x)| &= \left|\lambda_1 \int_\Omega G(x,y)\varphi_1(y)dy\right| \\ &\leq \lambda_1 \int_\Omega |G(x,y)||\varphi_1(y)|dy \\ &\leq \lambda_1 \int_\Omega G(x,y)dy = \lambda_1\phi_0(x) \ \ \forall x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

já que $G(x,y) \geq 0$ e $\|\varphi_1\|_\infty = 1$.

Seja $A = \{v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}); \delta\varphi_1 \leq v \leq K_1\}$ em que δ e K_1 são constantes a serem determinadas e $0 < \alpha \leq 1$.

Afirmação 2.2.1. Se $u \in A$, então $\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma} \in C^{0,\gamma\alpha}(\overline{\Omega})$.

De fato, já que $u \in A$ teremos que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, implicando que $(u+\epsilon) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Pelo exposto na Proposição 2.1.1 segue que $(u+\epsilon)^\gamma$ é $\alpha\gamma$- Hölder contínua. Visto que $\inf |u+\epsilon|^\gamma > 0$, concluímos através da Proposição 2.1.3 que a afirmação é verdadeira.

Observação 7. Pela teoria clássica do estudo das autofunções de $-\Delta$ sabemos que $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, (veja por exemplo [1] seção 1.5), então, em particular, pelo Teorema 2.1.2 teremos que $\varphi_1 \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e portanto $\varphi_1 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Proposição 2.2.1. *Dado $0<\gamma<1$, existe uma constante $C>0$, que depende apenas de γ, de modo que para todo $x \in \Omega$ vale*

$$\int_\Omega \frac{G(x,y)}{\varphi_1^\gamma} dy \leq C.$$

Demonstração. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_\epsilon = \frac{1}{(\varphi_1+\epsilon)^\gamma} & \text{em } \Omega \\ w_\epsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.1.1 (de Schauder) a equação acima possui solução única $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$, pois $\frac{1}{(\varphi_1+\epsilon)^\gamma} \in C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema (2.1.3) (de representação de Green), temos

$$w_\epsilon(x) = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(\varphi_1+\epsilon)^\gamma} dy.$$

Defina $z = C\varphi_1^\gamma$, em que C é uma constante a ser determinada. Dado $x \in \Omega$ temos que

$$-\Delta z = \varphi_1^{\gamma-2}[C\gamma(1-\gamma)\|\nabla\varphi_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 C\gamma\varphi_1^2].$$

Afirmação 2.2.2. Defina $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \gamma(1-\gamma)\|\nabla\varphi_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1\gamma\varphi_1^2$, então $\inf_{x\in\overline{\Omega}} h(x) > 0$.

De fato, suponha por absurdo que $\inf_{x\in\overline{\Omega}} h(x) = 0$. Então existe uma sequência $(x_n) \subset \overline{\Omega}$ de modo que

$$0 < h(x_n) \leq 1/n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\Omega}$ é compacto, a menos de subsequência, podemos supor que $x_n \to x$ em $\overline{\Omega}$. Visto que h é contínua, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, concluímos que $h(x) = 0$ e portanto $\varphi_1(x) = 0$. Já que φ_1 é positiva em Ω teremos que $x \in \partial\Omega$, e pelo lema de Hopf $\|\nabla\varphi_1(x)\|_{\mathbb{R}^n} > 0$ implicando que $h(x) > 0$, o que é uma contradição.

Escolha $C > 0$ grande o suficiente para que

$$C\gamma(1-\gamma)\|\nabla\varphi_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 C\gamma\varphi_1^2 \geq \varphi_1^{2(1-\gamma)} \tag{2.2}$$

em Ω. O que é possível porque

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{\varphi_1^{2(1-\gamma)}}{\gamma(1-\gamma)\|\nabla\varphi_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1\gamma\varphi_1^2} \right)(x) \leq \frac{1}{\inf_{x\in\overline{\Omega}} h(x)}.$$

Assim,

$$-\Delta z = \varphi_1^{\gamma-2}[C\gamma(1-\gamma)\|\nabla\varphi_1\|^2_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 C\gamma\varphi_1^2] \geq \frac{1}{\varphi_1^\gamma} \geq \frac{1}{(\varphi_1+\epsilon)^\gamma} = -\Delta w_\epsilon.$$

Então

$$\begin{cases} -\Delta z \geq -\Delta w_\epsilon, & \text{em } \Omega \\ z = w_\epsilon = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e pelos princípios do máximo $w_\epsilon(x) \leq z(x) \leq C$ em $\overline{\Omega}$, (tome $h = z - w_\epsilon$ e $\tau = C - z$ e note que $\Delta h \leq 0$ e $\Delta\tau \geq 0$). Para x fixado, tomando $\epsilon_n = 1/n$, a sequência $G(x,y)/(\varphi_1+\epsilon_n)^\gamma$ converge q.t.p para $G(x,y)/\varphi_1^\gamma$ em Ω. Assim, pelo lema de Fatou,

$$\int_\Omega \liminf \frac{G(x,y)}{(\varphi_1+\epsilon_n)^\gamma} dy \leq \liminf \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(\varphi_1+\epsilon_n)^\gamma} dy = \liminf w_{\epsilon_n}(x) \leq C.$$

Logo,

$$\int_\Omega \frac{G(x,y)}{\varphi_1^\gamma} dy \leq C.$$

□

Dado $u \in A$, pelo teorema de Schauder e pela Afirmação 2.2.1 a equação

$$\begin{cases} -\Delta\xi_u = \frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ \xi_u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_{ξ_u}}$$

possui solução única de classe $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$. Sendo assim, em relação ao Teorema de representação de Green, definindo

$$T_\epsilon u = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u+\epsilon)^\gamma} dy$$

em A, teremos que T_ϵ está bem definida e $T_\epsilon : A \longrightarrow C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$.

Proposição 2.2.2. *Existem δ e K_1 tais que $T_\epsilon : A \longrightarrow A$.*

Demonstração. Inicialmente note que pelo Teorema 2.1.2 valem as seguintes imersões :

$$C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

e todas são compactas. Assim $T_\epsilon : A \longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Determinaremos agora constantes apropriadas para concluir a demonstração. Considere

$$\begin{aligned} g : (0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{(x+1)^{\gamma^2}}. \end{aligned}$$

Como $0 < \gamma < 1$ temos que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, implicando que existe $K_1 \in (0,+\infty)$ de modo que

$$C\lambda_1^\gamma < \frac{K_1}{(K_1+1)^{\gamma^2}} \Rightarrow \quad C^{1/\gamma} < \frac{K_1^{1/\gamma}}{\lambda_1(K_1+1)^\gamma},$$

onde C é a constante da Proposição 2.2.1 e λ_1 o autovalor associado a φ_1. Escolha δ tal que

$$\frac{C^{1/\gamma}}{K_1^{1/\gamma}} < \delta < \frac{1}{\lambda_1(K_1+1)^\gamma}$$

então

$$\frac{C}{\delta^\gamma} < K_1 \quad \text{e} \quad \delta < \frac{1}{\lambda_1(K_1+1)^\gamma}.$$

Afirmamos que com as escolhas de δ e K_1 acima garantimos que $T_\epsilon : A \longrightarrow A$. De fato, podemos supor, sem danificar a construção feita, que $\epsilon \leq 1$. Seja $u \in A$, então

$$\frac{1}{(K_1+1)^\gamma} \leq \frac{1}{(u(x)+\epsilon)^\gamma} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(u(x)+\epsilon)^\gamma} \leq \frac{1}{(\delta\varphi_1(x))^\gamma}, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Cota inferior: por (2.1) temos

$$\begin{aligned} T_\epsilon(u) = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u(y)+\epsilon)^\gamma} dy &\geq \frac{1}{(K_1+1)^\gamma} \int_\Omega G(x,y)dy \\ &= \frac{1}{(K_1+1)^\gamma} \phi_0(x) \\ &\geq \frac{1}{\lambda_1(K_1+1)^\gamma} \varphi_1(x) > \delta\varphi_1(x). \end{aligned}$$

Cota superior: Pela Proposição 2.2.1

$$\begin{aligned} T_\epsilon(u) = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u(y)+\epsilon)^\gamma} dy &\leq \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(\delta\varphi_1(y))^\gamma} dy \\ &= \frac{1}{\delta^\gamma} \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(\varphi_1(y))^\gamma} dy \\ &\leq \frac{1}{\delta^\gamma} C < K_1. \end{aligned}$$

□

Lema 2.2.1. *Seja $u \in A$,então*

$$\left\| \frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma} \right\|_{C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|u\|_\infty + C_2 [u]_\alpha^\gamma,$$

em que $C_1 = C_1(\epsilon, \delta, \varphi_1)$ e $C_2 = C_2(\gamma, \epsilon)$.

Demonstração. Note que

$$\left\| \frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma} \right\|_{C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})} = \left\| \frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma} \right\|_\infty + \left[\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma} \right]_{\alpha\gamma}.$$

Considere $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $h_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por, $f(x) = x^\gamma$ e $h_\epsilon(x) = x + \epsilon$. Temos que f é γ-Hölder contínua e h_ϵ é Lipschitz contínua. Defina $g(x) = (u(x)+\epsilon)^\gamma$. Pela Proposição 2.1.3 obtemos que

$$\frac{|1/g(x) - 1/g(y)|}{\|x-y\|^{\alpha\gamma}} \leq \frac{[g]_{\alpha\gamma}}{\epsilon^2}.$$

Além disso, $g(x) = (u(x)+\epsilon)^\gamma = (f \circ h_\epsilon \circ u)(x)$, então semelhante ao exposto na Proposição 2.1

$$|g(x) - g(y)| = |f(h_\epsilon(u(x))) - f(h_\epsilon(u(y)))| \le [f]_\gamma [h_\epsilon]_1^\gamma [u]_\alpha^\gamma \|x - y\|^{\alpha\gamma}.$$

Portanto $[g]_{\alpha\gamma} \le [f]_\gamma [h_\epsilon]_1^\gamma [u]_\alpha^\gamma$. Logo

$$\left[\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right]_{\alpha\gamma} \le \frac{\gamma}{\epsilon^2}[u]_\alpha^\gamma.$$

Como $u \in A$, temos :

$$\delta\varphi_1(x) + \epsilon \le u(x) + \epsilon \le K_1 + \epsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Então

$$\frac{1}{(K_1+\epsilon)^\gamma} \le \left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty \le \left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty,$$

implicando que

$$(K_1+\epsilon)^\gamma \ge \left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty^{-1} \ge \left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty^{-1}.$$

Desta maneira

$$\frac{\|u\|_\infty}{\left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty^{-1}} \ge \frac{\|u\|_\infty}{\left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty^{-1}} \ge \frac{\|\delta\varphi_1\|_\infty}{\left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty^{-1}}$$

Considere $1/\tau = \frac{\|\delta\varphi_1\|_\infty}{\|(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma\|_\infty^{-1}}$, então teremos que

$$\left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty \le \tau\|u\|_\infty.$$

Logo

$$\left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_{C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})} \le \tau\|u\|_\infty + \frac{\gamma}{\epsilon^2}[u]_\alpha^\gamma.$$

□

Proposição 2.2.3. *Sejam M, N espaços métricos. Para que $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é suficiente que $x_n \to a$ em M implique que $(f(x_n))$ possui uma subsequência convergindo para $f(a)$.*

Demonstração. Veja Corolário 2, página 140 de [15]. □

Proposição 2.2.4. *Sejam D um subconjunto convexo e fechado em um espaço de Banach B e $T : D \to D$ contínua e tal que $T(D)$ é relativamente compacto (isto é, seu fecho é compacto). Então T possui um ponto fixo.*

Demonstração. Veja [12], Corolário 11.2. □

Com vista à aplicação da proposição acima, mostraremos o seguinte lema

Lema 2.2.2.

1. *A é fechado e convexo;*

2. *T_ϵ é contínuo;*

3. *$T_\epsilon(A)$ é relativamente compacto.*

Demonstração. (1) i) A é convexo.

Sejam $u, v \in A$, dado $t \in [0,1]$ temos que

$$\begin{cases} (1-t)\delta\varphi_1 \leq (1-t)u \leq (1-t)K_1; \\ t\delta\varphi_1 \leq tv \leq tK_1; \end{cases}$$

então $\delta\varphi_1 \leq (1-t)u + tv \leq K_1$, ou seja, $(1-t)u + tv \in A$.

ii) A é fechado

Seja $v \in \overline{A}$, então existe uma sequência (v_n) de elementos de A de modo que $v_n \to v$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Para todo $x \in \overline{\Omega}$ teremos que

$$\delta\varphi_1(x) \leq v_n(x) \leq K_1$$

e portanto, quando $n \to \infty$, concluímos que

$$\delta\varphi_1(x) \leq v(x) \leq K_1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo $v \in A$, mostrando que A é fechado.

(2) Sejam $u \in A$ e $(u_n) \subset A$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Pelo teorema de Schauder e pelo Lema 2.2.1 temos que

$$\|T_\epsilon u_n\|_{C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C_* \left\| \frac{1}{(u_n+\epsilon)^\gamma} \right\|_{C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C_*\tau\|u_n\|_\infty + \frac{C_*\gamma}{\epsilon^2}[u_n]_\alpha^\gamma.$$

Como (u_n) converge, então (u_n) é limitada em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Assim $\|u_n\|_\infty$ e $[u_n]_\alpha$ são limitados, o que implica que $(T_\epsilon u_n)$ é limitada em $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$. Já que a imersão $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é compacta, existe uma subsequência $(T_\epsilon u_{n_j})$ de $(T_\epsilon u_n)$ de maneira que $T_\epsilon u_{n_j} \to v$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Como A é fechado temos que $v \in A$. Além disso, observe que

$$\frac{G(x,y)}{(u_{n_j}(y)+\epsilon)^\gamma} \to \frac{G(x,y)}{(u(y)+\epsilon)^\gamma} \text{ q.t.p,}$$

e

$$\left| \frac{G(x,y)}{(u_{n_j}+\epsilon)^\gamma} \right| \leq \left| \frac{G(x,y)}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma} \right|.$$

Então pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u_{n_j}+\epsilon)^\gamma}dy \to \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u+\epsilon)^\gamma}dy.$$

Desta convergência e do fato de $T_\epsilon u_{n_j} \to v$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, concluímos que

$$v(x) = \lim_{n_j\to\infty} T_\epsilon u_{n_j}(x) = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u+\epsilon)^\gamma}dy = T_\epsilon u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo $v = T_\epsilon u$, provando que T_ϵ é contínua, pela Proposição 2.2.3.

(3) Utilizando o Teorema 2.1.4 com $k = 2$, $p = 2n$, em que $n = \dim \mathbb{R}^n$, e $m = 1$, obtemos $0 < 1 < 2 - 1/2 < 2$ e $\theta = 2 - 1/2 - 1 = 1/2$, então

$$W^{2,2n}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,1/2}(\overline{\Omega}).$$

Assim $\|\cdot\|_{C^{1,1/2}(\overline{\Omega})} \leq C_{**}\|\cdot\|_{W^{2,2n}(\Omega)}$ e já que $T_\epsilon u \in C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$ temos que $T_\epsilon u \in W^{2,2n}(\Omega)$. Portanto

$$\|T_\epsilon u\|_{C^{1,1/2}(\overline{\Omega})} \leq C_{**}\|T_\epsilon u\|_{W^{2,2n}(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Mas pelo exposto anteriormente $T_\epsilon u$ é solução de (P_{ξ_u}), então pelo Teorema 2.1.5 (Agmon, Douglas e Nirenberg)

$$\|T_\epsilon u\|_{W^{2,2n}(\Omega)} \leq \overline{C}\left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_{L^{2n}},$$

e além disto

$$\left\|\frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}\right\|_{L^{2n}} \leq \left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty vol(\Omega)^{1/2n}.$$

Logo

$$\|T_\epsilon u\|_{C^{1,1/2}(\overline{\Omega})} \leq C_{**}\overline{C}\left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1+\epsilon)^\gamma}\right\|_\infty vol(\Omega)^{1/2n}, \tag{2.4}$$

mostrando que $T_\epsilon(A)$ é limitado em $C^{1,1/2}(\overline{\Omega})$. Visto que a imersão $C^{1,1/2}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é compacta, concluímos que $T_\epsilon(A)$ é relativamente compacto em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. $\square$

Observação 8. Segue como um corolário da demonstração da continuidade de T_ϵ que esta aplicação é compacta.

De fato, dada uma sequência $(u_n) \subset A$ limitada, teremos que $(T_\epsilon u_n)$ será limitada em $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$ e como a imersão $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é compacta $(T_\epsilon u_n)$ possuirá uma subsequência convergente em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Diante do lema exposto, pela Proposição 2.2.4 existe $u_\epsilon \in A$ ponto fixo de T_ϵ, isto é, $T_\epsilon(u_\epsilon) = u_\epsilon$. Daí,

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u_\epsilon(y)+\epsilon)^\gamma}dy$$

e pelas propriedades já estabelecidas de T_ϵ, u_ϵ será solução em $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{(u+\epsilon)^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

o que garante, novamente, a existência de solução para o problema auxiliar. Agora gostaríamos de fazer $\epsilon \to 0$ para obter uma solução do problema (P); para isto considere Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência crescente de domínios, com fronteira $C^{2,1}$ e compactamente encaixados, isto é, $\overline{\Omega_{k-1}} \subset \Omega_k$ e $\overline{\Omega_k} \subset \Omega$ para todo k,

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \cdots \subset \Omega_n \cdots \subset \Omega,$$

e tais que $\Omega_k \to \Omega$, significando que $vol(\overline{\Omega} \backslash \overline{\Omega_k})$ tende a zero a medida que $k \to \infty$. A existência desses Ω_k's pode ser garantida utilizando homotetias em $\overline{\Omega}$.

Considerando a solução u_ϵ acima obtida, observe que não podemos utilizar diretamente o Teorema de Schauder em Ω_i compactamente contido em Ω para estimar $\|u_\epsilon\|_{C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_i})}$, pois u_ϵ não se anula na fronteira de Ω_i. Neste sentido, buscaremos uma estimativa que "se assemelha a de Schauder". O Teorema 4.8 do livro [12] se mostra uma ferramente útil, nesta perspectiva, quando empregado juntamente com outras expressões. Destacamos este fato na observação abaixo.

Observação 9. Sejam $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^\alpha(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$ em Ω, onde Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Então segue do Teorema 4.8 de [12] e das expressões $(4.17)''$ ([12] página 61) e (4.18) ([12] página 61) que para Ω_i aberto e compactamente contido em Ω vale a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_i})} \leq W_i \tilde{\tilde{K}}(\|u\|_\infty + \vartheta \|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})})$$

em que $\tilde{\tilde{K}}$ é uma constante que depende de $n = \dim \mathbb{R}^n$e α. Além disto $W_i = 1/\min(1, \sigma_i^{2+\alpha})$ onde $\sigma_i = \text{dist}(\Omega_i, \partial\Omega)$ e $\vartheta \geq \max\{\text{diam}(\Omega)^2, \text{diam}(\Omega)^{2+\alpha}\}$.

Seja $0 < \alpha_1 < \alpha\gamma$ e considere u_n ponto fixo de $T_{1/n}$ em A, isto é,

$$u_n = \int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u_n(y) + 1/n)^\gamma} dy.$$

A ideia principal a partir deste momento será estimar $\|u_n\|_{C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_1})}$ utilizando a Observação 9 com $\Omega = \Omega_2$. Observe que em $\overline{\Omega_2}$ vale

$$(u_n(x) + 1/n)^\gamma \geq (\delta\varphi_1(x) + 1/n)^\gamma \geq (\delta\varphi_1(x))^\gamma. \tag{2.5}$$

Então, $\inf_{x\in\overline{\Omega_2}}(u_n(x) + 1/n)^\gamma \geq \inf_{x\in\overline{\Omega_2}}(\delta\varphi_1(x))^\gamma := I_2 > 0$ e I_2 *não depende de* $1/n$. Com esta nova estimativa para o $\inf_{x\in\overline{\Omega_2}}(u_n(x) + 1/n)^\gamma$ e com a observação da desigualdade (2.5), podemos revisar o Lema 2.2.1 e obter a seguinte estimativa :

$$\left\| \frac{1}{(u_n + 1/n)^\gamma} \right\|_{C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_2})} \leq \tau_2 \|u_n\|_\infty + \frac{\gamma}{I_2^2}[u_n]_\alpha^\gamma, \tag{2.6}$$

em que $1/\tau_2 = \frac{\|\delta\varphi_1\|_{\infty_2}}{\|\frac{1}{(\delta\varphi_1)^\gamma}\|_{\infty_2}}$, onde $\|\cdot\|_{\infty_2}$ indica a norma do sup em Ω_2.

Assim, utilizando o fato de u_n ser ponto fixo de $T_{1/n}$, pela Observação 9 e pela estimativa (2.6) teremos que

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_1})} \leq W_1\tilde{\tilde{K}}(\|u\|_{\infty_2} + \vartheta\left\|\frac{1}{(u_n+1/n)^\gamma}\right\|_{C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_2})}) \leq W_1\tilde{\tilde{K}}(K_1 + \vartheta\tau_2 K_1 + \frac{\vartheta\gamma}{I_2^2}[u_n]_\alpha^\gamma). \tag{2.7}$$

Agora gostaríamos de estimar o termo $[u_n]_\alpha^\gamma$. Por argumentação similar à exposta no item (3) do Lema 2.2.2 conseguimos a imersão $W^{2,2n}(\Omega_1) \hookrightarrow C^{1,1/2}(\overline{\Omega_1})$ e pelo exposto no Teorema 2.1.6 temos que

$$\|T_{1/n}u\|_{C^{1,1/2}(\overline{\Omega_1})} \leq C_{**}\|T_{1/n}u\|_{W^{2,2n}(\Omega_1)} \leq C_{**}\tilde{\tilde{C}}(\|T_{1/n}u\|_{L^{2n}(\Omega_2)} + \left\|\frac{1}{(u+1/n)^\gamma}\right\|_{L^{2n}(\Omega_2)}).$$

Vamos estimar $\|T_{1/n}u\|_{L^{2n}(\Omega_2)}$ e $\left\|\frac{1}{(u+1/n)^\gamma}\right\|_{L^{2n}(\Omega_2)}$.

$$\begin{aligned}
\|T_{1/n}u\|_{L^{2n}(\Omega_2)}^{2n} &= \int_{\Omega_2}\left|\int_\Omega \frac{G(x,y)}{(u(y)+1/n)^\gamma}dy\right|^{2n}dx \\
&\leq \int_{\Omega_2}\left|\int_\Omega \frac{G(x,y)}{(\delta\varphi_1(y)+1/n)^\gamma}dy\right|^{2n}dx \\
&\leq \int_{\Omega_2}\left|\int_\Omega \frac{G(x,y)}{(\delta\varphi_1(y))^\gamma}dy\right|^{2n}dx \\
&\leq \int_{\Omega_2}\left(\frac{C}{\delta^\gamma}\right)^{2n}dx = vol(\Omega_2)\left(\frac{C}{\delta^\gamma}\right)^{2n} \leq vol(\Omega)\left(\frac{C}{\delta^\gamma}\right)^{2n}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{(u+1/n)^\gamma}\right\|_{L^{2n}(\Omega_2)}^{2n} &= \int_{\Omega_2}\left|\frac{1}{(u(x)+1/n)^\gamma}\right|^{2n}dx \\
&\leq \int_{\Omega_2}\left|\frac{1}{(\delta\varphi_1(x))^\gamma}\right|^{2n}dx \\
&\leq \int_{\Omega_2}\left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1)^\gamma}\right\|_{\infty_2}^{2n}dx \\
&= vol(\Omega_2)\left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1)^\gamma}\right\|_{\infty_2}^{2n} \leq vol(\Omega)\left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1)^\gamma}\right\|_{\infty_2}^{2n}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Logo $\|T_{1/n}u\|_{C^{1,1/2}(\overline{\Omega_1})} \leq C_{**}\tilde{\tilde{C}}B$, em que $B = vol(\Omega)^{1/2n}\left(\left(\frac{C}{\delta^\gamma}\right) + \left\|\frac{1}{(\delta\varphi_1)^\gamma}\right\|_{\infty_2}\right)$.

Observação 10. Não confundir o "n"$=\dim\mathbb{R}^n$ que aparece na constante B com o índice "n" da sequência.

Então $\|T_{1/n}u\|_{C^{1,1/2}(\overline{\Omega_1})} \leq C_{**}\tilde{\tilde{C}}B$ implica que $T_{1/n}(A)$ é limitado em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_1})$ por uma constante $R > 0$ que não depende de n (n índice da sequência), pois temos a imersão $C^{1,1/2}(\overline{\Omega_1}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_1})$. Assim,

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_1})} \leq R, \quad \forall v \in T_{1/n}(A).$$

Então conseguimos estimar $[u_n]_\alpha^\gamma$ com o R obtido. Portanto, pela desigualdade (2.7) obtemos

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_1})} \leq W_1 \tilde{\tilde{K}}(K_1 + \vartheta\tau_2 K_1 + \frac{\vartheta\gamma}{I_2^2} R^\gamma).$$

Logo a sequência (u_n) é limitada em $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_1})$. Já que $0 < \alpha_1 < \alpha\gamma$, a imersão $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_1}) \hookrightarrow C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_1})$ é compacta, assim existe uma subsequência $(u_{n,1})$ de (u_n) tal que $u_{n,1} \to u^{(1)}$ em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_1})$. Observe que

$$C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega}) \subset \cdots \subset C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_n}) \subset \cdots \subset C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_2}) \subset C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_1}).$$

Por argumentação similar à exposta anteriormente, $(u_{n,1})$ é limitada em $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_2})$ e da imersão compata $C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega_2}) \hookrightarrow C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_2})$ conseguimos uma subsequência $(u_{n,2})$ de $(u_{n,1})$ de modo que $u_{n,2} \to u^{(2)}$ em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_2})$.

Afirmação 2.2.3. $u^{(2)}|_{\overline{\Omega_1}} = u^{(1)}$.

De fato, como $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_2}) \subset C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_1})$, a sequência $(u_{n,2})$ converge em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_1})$ para $u^{(2)}|_{\overline{\Omega_1}}$. Além disso $(u_{n,2})$ é uma subsequência de $(u_{n,1})$ e portanto $u_{n,2} \to u^{(1)}$ em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_1})$, implicando que $u^{(2)}|_{\overline{\Omega_1}} = u^{(1)}$.

Repetindo a argumentação acima, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma subsequência $(u_{n,k})$ de $(u_{n,(k-1)})$ convergente em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_k})$ para $u^{(k)}$ e $u^{(k)}|_{\overline{\Omega_{(k-i)}}} = u^{(k-i)}$, $1 \leq i < k$. Defina $g_n = u_{n,n}$ e observe que $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g_n \in C^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$ pois g_n é uma subsequência de u_n e u_n satisfaz estas propriedades. Note que $g_n \to u^{(k)}$ em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_k})$, pois para $n > k$ (g_n) é uma subsequência de $(u_{n,k})$. Como (g_n) é uma subsequência de (u_n), para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado ela satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta g_n = \frac{1}{(g_n + \epsilon_{n,n})^\gamma}, & \text{em } \Omega_k \\ g_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

em que $\epsilon_{n,n} \to 0$ quando $n \to \infty$ ($\epsilon_{n,n}$ é uma subsequência de $(1/n)$). Pela imersão $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_k}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega_k})$, por (2.10) e pela convergência $g_n \to u^{(k)}$ em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_k})$, quando $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u^{(k)}(x) = \frac{1}{(u^{(k)})^\gamma}(x), & \text{em } \Omega_k \\ u^{(k)} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Defina $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por $u(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

Lema 2.2.3.

1. *u está bem definida;*

2. *$u \in C^{2,\alpha_1}_{loc}(\Omega)$;*

3. *$u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

Demonstração. (1) Dado $x \in \Omega$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \Omega_k$. Como $g_n \to u^{(k)}$ em $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_k})$ temos, em particular, que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = u^{(k)}(x)$. Além disso, por construção, $u^{(k)}|_{\overline{\Omega_{(k-i)}}} = u^{(k-i)}$ para $1 \leq i < k$. Logo o limite existe e independe de k, mostrando que u está bem definida.

(2) Dado $\Gamma \subset \Omega$ um paralelogramo aberto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\Gamma \subset \Omega_{k_0} \subset \Omega$. Já que $u = u^{(k_0)}$ em Ω_{k_0} e $u^{(k_0)} \in C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega_{k_0}})$ segue que u é α_1- Hölder contínua em Γ.

(3) Dado $x \in \partial\Omega$ temos que $u(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. $\square$

Pela observação (5) temos que $C^{2,\alpha_1}_{loc}(\Omega) = C^{2,\alpha_1}(\Omega)$ e, de acordo com o lema acima, concluímos que $u \in C^{2,\alpha_1}(\Omega)$. Além disso u satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

pelo exposto em (2.11). Logo u é solução para o problema (P).

3 UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Neste capítulo mostraremos que o problema (P) possui solução única. Assim, apesar das técnicas utilizadas nos capítulos anteriores serem distintas ambas conduzem a mesma solução. Nesta perspectiva é interessante notar que a regularidade da solução obtida está entrelaçada com a técnica utilizada para provar a existência. O aprimoramento de regularidade pode ser obtido, por exemplo, através da técnica de *bootstrap* (ver [1] seção 1.5).

Proposição 3.0.1. *Seja* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função tal que* $t^{-1}f(t)$ *é decrescente para* $t > 0$. *Sejam* v, w *satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta v \leq f(v), & em\, \Omega \\ v > 0, & em\, \Omega \\ v = 0, & sobre\, \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w \geq f(w), & em\, \Omega \\ w > 0, & em\, \Omega \\ w = 0, & sobre\, \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Então $w \geq v$ *em* Ω.

Demonstração. Veja [7] Lema 3.3. $\square$

Sejam u_1 e u_2 soluções do problema (P). Utilizando a proposição acima com $f(t) = 1/t^\gamma$ e $X = (0, +\infty)$ temos que, $u_1 \geq u_2$ e $u_2 \geq u_1$ em Ω. Logo $u_1 = u_2$ em Ω, o que prova a unicidade.

REFERÊNCIAS

[1] ENCONTRO NACIONAL DE ANÁLISE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES, 1., 2007, Rio de Janeiro. *Introdução às Equações Elípticas*. Rio de Janeiro: Claudianor O. Alves, 2007. 75 p.

[2] HERNANDEZ, Gaston L.; CHOI, Y.. *Existence of solutions in a singular biharmonic nonlinear problem*. Proceedings Of The Edinburgh Mathematical Society, [s.l.], v. 36, n. 3, p.537-546, out. 1993. Cambridge University Press (CUP). http://dx.doi.org/10.1017/s0013091500018605.

[3] LAZER, A. C.; MCKENNA, P. J.. *On a Singular Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problem*. Proceedings Of The American Mathematical Society, [s.l.], v. 111, n. 3, p.721-730, mar. 1991. JSTOR. http://dx.doi.org/10.2307/2048410.

[4] BIEZUNER, Rodney Josué. *Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II*. [s. L.]: Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. 306 p.

[5] FARIA, Luiz Fernando de Oliveira. *Equações Elípticas Semilineares com dependência do gradiente por Passo da Montanha*. 2004. 74 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, [S. L.], 2004.

[6] FARIA, Luiz Fernando de Oliveira. *Equações Elípticas com dependência não-linear do gradiente*. 2008. 94 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/1/browse?value=Luiz+Fernando+de +Oliveira+Faria&type=author>.

[7] AMBROSETTI, Antonio; BREZIS, Haim; CERAMI, Giovanna. *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Eliptic Problems*. Journal Of Functional Analysis. [s.l.], p. 519-543. 17 maio 1993.

[8] FARIA, Luiz F. O. *Existence and uniqueness of positive solutions for singular biharmonic elliptic systems*. Dynamical Systems And Differential Equations, Aims Proceedings 2015 Proceedings Of The 10th Aims International Conference (madrid, Spain), [s.l.], p.400-408, nov. 2015. American Institute of Mathematical Sciences. http://dx.doi.org/10.3934/proc.2015.0400.

[9] S. Agmon, *The L_p approach to the Dirichlet problem*. I. Regularity theorems,Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 13 (1959) 405-448.

[10] S. Agmon; A. Douglis; L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* -I, Comm. Pure Appl. Math. 12 1959 623-727.

[11] EVANS, Lawrence C.. *Partial Differential Equations*. 19. ed. [s. L.]: American Mathematical Society, 1998. 662 p.

[12] GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S.. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2. ed. [s. L.]: Springer-verlag Berlin Heidelberg, 2001. 518 p.

[13] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*: Volume 2. 11. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 547 p. (Projeto Euclides).

[14] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise: Volume 1*. 14. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2017. 432 p. (Projeto Euclides).

[15] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2017. (Projeto Euclides).

[16] BREZIS, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S. L.]: Springer, 2010. 599 p.

[17] BARTLE, Robert G.. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. [S. L.]: Wiley, 1995. 179 p.

[18] FIORENZA, Renato. *Hölder and locally Hölder Continuous Functions, and Open Sets of Class C^k, $C^{k,\lambda}$*. [s. L.]: Birkhäuser Basel, 2016. 152 p. (Frontiers in Mathematics).

[19] ARANDA, Jose Miguel Mendoza. *Estimativas a Priori Para Problemas Elípticos Via Desigualdade De Hardy-Sobolev*. 2014. 37 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

[20] SPRING, 2009, [s. L.]. *18.102 Introduction to Functional Analysis*. [s.l.]: Mit Opencourseware, 2009. 9 p.

APÊNDICE A – Base Ortonormal em Espaços de Hilbert

O conteúdo deste apêndice pode ser encontrado em [20].

Proposição A.0.1 (Desigualdade de Bessel)**.** *Sejam* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com produto interno,* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um conjunto ortonormal e* $u \in H$*. Se*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$$

então $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$ *e* $(v - u) \perp e_i \, , 1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Inicialmente note que pela definição de v $\langle u, e_i \rangle = \langle v, e_i \rangle$, assim $\langle v - u, e_i \rangle = 0 \, , 1 \leq i \leq n$. Além disso,

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, v - u + u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, v - u \rangle = \langle v, u \rangle \leq |\langle v, u \rangle|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$, então $\|v\| \leq \|u\|$, implicando $\|v\|^2 \leq \|u\|^2$. Segue diretamente das relações de ortogonalidade que:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i \rangle|^2$$

o que prova a afirmação. □

Nas notações da proposição anterior, visto que a desigualdade é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ for uma sequência ortonormal teremos que $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$.

Proposição A.0.2. *A sequência* $v_n = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$ *será uma sequência de Cauchy em* H*.*

Demonstração. De fato, seja $s_n = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i \rangle|^2$. Pelo exposto s_n converge; dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, $|s_{n+p} - s_n| = \sum_{i=n+1}^{n+p} |\langle u, e_i \rangle|^2 < \epsilon^2$. Assim, $\|v_{n+p} - v_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |\langle u, e_i \rangle|^2 < \epsilon^2$ o que garante que v_n é de Cauchy. □

Estas observações nos motivam para a seguinte

Proposição A.0.3. *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ *uma sequência ortonormal. Então para cada* $u \in H$*,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i$$

converge para $v \in H$ *e vale* $(v - u) \perp e_i \, , \forall i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Visto que a sequência v_n é de Cauchy e H é completo, v_n converge para algum $v \in H$. Note também que para $n \geq j$ temos $\langle v_n - u, e_j \rangle = 0$; pela continuidade do produto interno segue que :

$$\langle v - u, e_j \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle v_n - u, e_j \rangle = 0$$

□

Definição A.0.1. Seja H um espaço vetorial com produto interno. Diremos que uma sequência ortonormal $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ é completa (ou uma base ortonormal) de H se $\langle u, e_i \rangle = 0 \, \forall i \in \mathbb{N}$ implicar u=0.

Proposição A.0.4. *Se $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal em um espaço de Hilbert H, então:*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle e_j \;\; \forall u \in H.$$

Demonstração. Pela proposição anterior a série converge para $v \in H$ e $\langle v - u, e_j \rangle = 0 \, \forall j \in \mathbb{N}$. Logo $v - u = 0 \Rightarrow u = v$. □

Teorema A.0.1 (Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt)**.** *Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno e $\{u_1, \dots, u_r\} \subset V$. Então existe um subconjunto $\{v_1, \dots, v_s\}$ ortonormal de V tal que $ger(\{u_1, \dots, u_r\}) = ger(\{v_1, \dots v_s\})$.*

Demonstração. Esse é um resultado clássico e sua demonstração será omitida. □

Teorema A.0.2. *Todo espaço de Hilbert separável possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ um subconjunto denso e enumerável de H. Sem perda de generalidade suponha $v_1 \neq 0$ e tome $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.

Dado $n \in \mathbb{N}\,, n > 1$, podemos obter pelo teorema anterior o conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ tal que $m \leq n$ e

$$ger(\{v_1, \dots, v_n\}) = ger(\{e_1, \dots, e_m\}).$$

Se $v_{n+1} \in ger(\{v_1, \dots, v_n\})$ então $v_{n+1} \in ger(\{e_1, \dots, e_m\})$. Caso contrário, tome

$$w = v_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_j \rangle e_j \neq 0$$

e $e_{m+1} = \frac{w}{\|w\|}$.

Assim, novamente pelo teorema de ortogonalização de Gram-Schmidt,$\{e_1, e_2, \dots, e_{m+1}\}$ é ortogonal e $ger(\{v_1, \dots, v_{n+1}\}) = ger(\{e_1, \dots, e_{m+1}\})$. Logo, por indução, obtemos uma sequência ortonormal $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $ger((e_i)_{i=1}^{\infty}) = ger((v_j)_{j=1}^{\infty})$.

Afirmação: Se $u \in H$ e $\langle u, e_j \rangle = 0$ para todo j, então u=0.

De fato, como o conjunto dos v_n's é denso em H, existe uma sequência w_j, em que cada w_j é um v_n, tal que $w_j \to u$ em H. Por outro lado, cada v_n, e portanto cada w_j, é uma combinação linear de e_k's. Então pela desigualdade de Bessel segue que

$$\|w_j\|^2 = \sum_k |\langle w_j, e_k \rangle|^2 = \sum_k |\langle u - w_j, e_k \rangle|^2 \leq \|u - w_j\|^2.$$

Note que usamos o fato de $\langle u, e_j \rangle = 0$ para todo j. Assim $\|w_j\| \to 0$, implicando que $u = 0$. □

APÊNDICE B – Espaços de Sobolev, notações e outros resultados preliminares

Os resultados aqui expostos podem ser encontrados em [16].

Teorema B.0.1. *Sejam* (f_n) *uma sequência em* L^P *e* $f \in L^p$ *tais que* $\|f_n - f\|_p \to 0$. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *e uma função* $h \in L^p$ *de modo que*

1. $f_{n_k}(x) \to f(x) q.t.p;$

2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k \ q.t.p$.

A demonstração para esse fato pode ser encontrada em ([16] página 94, Teorema 4.9)

Definição B.0.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem suporte compacto se existir um compacto $K \subset \Omega$ tal que $Supp f \subset K$, em que :

$$Supp f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

.

Definição B.0.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$, $p \in \mathbb{R}$.O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \exists g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) & \text{tais que} \\ \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi & \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}$$

Definimos também

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega);$$

diremos que $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e escreveremos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Observação 11. Note que $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ está bem definido.

Demonstração. De fato, se $w_i \in L^p(\Omega)$ é tal que $\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega w_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\int_\Omega (g_i - w_i)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pelo corolário 4.24 ([16], página 110), $u_i = w_i$ q.t.p em Ω.

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p$$

ou com a norma

$$\|u\| = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p\right)^{1/p},$$

no espaço $H^1(\Omega)$ é definido o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=i}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2}$$

cuja norma associada é

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{H^1}} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Proposição B.0.1. *A norma $\|u\|_{W^{1,p}}$ é equivalente a norma $\|u\|$.*

Demonstração. **(i)**

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,p}} &= \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p \\
&= \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p} + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^p + \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|\right)^{1/p} + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p\right)^{1/p} \\
&\leq [n+1] \left(\int_\Omega |u|^p + \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|\right)^{1/p} = (n+1)\|u\|.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\|u\| = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p\right)^{1/p}$$

Considere $A_0 = \|u\|_p^p$, $A_i = \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p$ e $A_M = Max\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, então:

$$\begin{aligned}
\|u\| =& (A_0 + A_1 + \cdots + A_n)^{1/p} \leq [(n+1)A_M]^{1/p} \\
=& (n+1)^{1/p} A_M^{1/p} \leq (n+1) \sum_{i=0}^{n} (A_i)^{1/p} = (n+1)\|u\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

□

Proposição B.0.2. *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e é separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. **(i)** $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}$ uma sequência de Cauchy. Então (u_n) e $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})$ são sequências de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, existem u e h_i, $1 \leq i \leq n$, elementos de $L^p(\Omega)$ tais que $u_n \to u$ e $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to h_i$. Pelo teorema (B.0.1) existem subsequências u_{n_k} de u_n e $\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}$ de$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ (que serão denotadas apenas pelo índice k) e funções $\Psi, \Phi \in L^p(\Omega)$ tais que:

$$\begin{cases} u_k \to u \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to h_i \end{cases}$$

e $|u_k(x)| \leq \Psi(x)$, $|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)| \leq \Phi(x)$ q.t.p .

Além disso, por definição

$$\int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega h_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dai segue que $h_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i \leq i \leq n$, implicando que $u \in W^{1,p}$ e $u_n \to u$ em $W^{1,p}$.

(ii) $W^{1,p}$ é separável, $1 \leq p < \infty$

Seja $T : W^{1,p} \to (L^p(\Omega))^{1+n}$, $T(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = (u, \nabla u)$.Considere em $(L^p(\Omega))^{1+n}$ a norma da soma. Assim temos que T é uma imersão isométrica; note também que para $1 \leq p < \infty$ $L^p(\Omega)$ é separável, implicando que $(L^p(\Omega))^{1+n}$ é separável.

Portanto, $T(W^{1,p}) \subset (L^p(\Omega))^{1+n}$ é separável. Visto que $T : W^{1,p} \to T(W^{1,p})$ é uma isometria, segue que $W^{1,p}$ é separável.

(iii) Para a demonstração da reflexividade veja ([16], página 264, proposição 9.1) □

Corolário B.0.1. $H^1(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert separável e reflexivo.*

Definição B.0.3. Definiremos $H_0^1(\Omega)$ como o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

Teorema B.0.2 (Imersões de Sobolev)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são contínuas:*

- $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)\,, s \in [1, 2^*]$*,* $N \geq 3$ *,* $2^* = \frac{2N}{N-2}$*;*
- $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$*,* $s \in [1, +\infty]$ *,* $N = 1, 2$*.*

Assim existe $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_s \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\,, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstração. Veja o corolário 9.14 [16], página 284 □

Teorema B.0.3 (Imersões de Rellich)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são compactas:*

- $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $s \in [1, 2^*)$, $N \geq 3$;
- $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $s \in [1, +\infty)$, $N = 1, 2$.

Demonstração. Veja o teorema 9.16 [16], página 285. □

Proposição B.0.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante C>0 tal que*

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração. Veja [16],página 290 corolário 9.19 □

Observação 12. Devido a desigualdade de Poincaré podemos considerar em $H_0^1(\Omega)$ a norma

$$\|u\|_0 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Proposição B.0.4 (Desigualdade de Hardy-Sobolev)**.** *Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, ϕ uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$,$\tau \in [0, 1]$ e $1/q = 1/2 - (1 - \tau)/n$. Então $u/\phi^\tau \in L^q(\Omega)$ e existe C>0 tal que*

$$\|\frac{u}{\phi^\tau}\|_q \leq C\|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Veja [19]. □

Definição B.0.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$, $p \in \mathbb{R}$ e o inteiro $m \geq 2$.O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \qquad \text{tal que} \\ \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $\alpha_i \geq 0$ e inteiros. Além disto

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{e} \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição B.0.5. $W_{loc}^{m,p}(\Omega)$ é o espaço das funções que estão em $W^{m,p}(\Omega')$ para todo Ω' compactamente contido em Ω.