Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Michel Yukiti Okuma

Técnicas para soluções de Equações Diferenciais

Juiz de Fora

2019

Michel Yukiti Okuma

Técnicas para soluções de Equações Diferenciais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Okuma, Michel.
Técnicas para soluções de Equações Diferenciais / Michel Yukiti Okuma. – 2019.
?? f. : il.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2019.

1. Equações Diferenciais lineares e não-lineares. 2. Espaço de Sobolev. 3. Teorema de Lax-Milgram. 4. Teorema do Passo da Montanha. I. Pereira, Fábio Rodrigues, orient. II. Título.

Michel Yukiti Okuma

Técnicas para soluções de Equações Diferenciais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovada em: 11 de março de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Orestes Piermatei Filho
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

A Deus que me deu força para chegar até este momento.

Ao meu orientador professor Fábio Rodrigues Pereira que com paciência e competência me auxiliou durante minha jornada acadêmica.

Aos professores Luiz Fernando de Oliveira Faria e Orestes Piermatei Filho que aceitaram o convite para participarem da minha banca.

Aos professores Beatriz Casulari da Motta Ribeiro e Frederico Sercio Feitosa que me ajudaram em projetos de iniciação científica e me orientaram no trabalho de conclusão de curso no Bacharelado em Ciências Exatas.

A minha família que me apoiou e incentivou durante todo este tempo.

A minha namorada, Maeli Nascimento da Silva, que esteve ao meu lado desde o início me incentivando, apoiando e me dando forças durante toda esta trajetória.

Ao CNPQ \ INCT-MAT e BIC-UFJF que contribuíram financiando minhas pesquisas.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos métodos variacionais para encontrar soluções de equações diferenciais lineares e não-lineares. Para o caso linear utilizamos o *Teorema de Lax-Milgram*, já para o caso não-linear há dois momentos: o primeiro utilizando ainda o *Teorema de Lax-Milgram* munido de teoremas de ponto fixo para resolver equações do tipo

$$(P_2)\begin{cases} -\Delta u + f(u) = g(x), & \text{em } \ \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ e $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$. O segundo momento utilizamos o *Teorema do Passo da Montanha* a fim de solucionar equações tais como

$$(P_3)\begin{cases} -u'' = u^2, & \text{em } \ (0,\pi), \\ u(0) = 0 = u(\pi). \end{cases}$$

Palavras-chave: Equações diferenciais lineares e não-lineares. Espaço de Sobolev. Teorema de Lax-Milgram. Teorema do Passo da Montanha.

ABSTRACT

In this work, we study variational methods to find solutions of linear and nonlinear differential equations. For the linear case we use the Lax-Milgram Theorem, for the nonlinear case there are two moments: the first one we use the Lax-Milgram Theorem together fixed-point theorems to solve equations of the type

$$(P_2)\begin{cases} -\Delta u + f(u) = g(x), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a open and limited subset $\mathbb{R}^n$, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ and $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$. The second moment we use the Mountain Pass Theorem in order to solve equations such as

$$(P_3)\begin{cases} -u'' = u^2, & \text{in } (0,\pi), \\ u(0) = 0 = u(\pi). \end{cases}$$

Key-words: Linear and nonlinear differential equations. Sobolev Space. Lax-Milgram theorem. Mountain Pass Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

(PS)	Palais-Smale
(P_0)	Problema 0 (página 10).
(P_1)	Problema 1 (página 29).
(P_2)	Problema 2 (página 40).
(P_w)	Problema auxiliar w (página 40).
(P_3)	Problema 3 (página 50).
$q.s.$	Quase sempre (a menos de um conjunto de medida nula).

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Subconjunto aberto não vazio e limitado.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω.
∇u	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$D^\alpha u$	$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

$\mathrm{L}^p(\Omega)$ Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\mathrm{supess}_{x\in\Omega}|u(x)| < \infty$ com norma

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ Subespaço de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ cujas funções derivadas (no sentido fraco) de primeira ordem e as próprias funções pertencem a $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

$\mathrm{H}^1(\Omega)$ Espaço $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ tal que $p = 2$.

$\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ Fecho de $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ com respeito ao espaço $\mathrm{H}^1(\Omega)$ com norma dada por

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx\right]^{1/2}.$$

A norma equivalente considerada em $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ é dada por $\|u\|_{\mathrm{H}^1_0} = \left[\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{1/2}$.

$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y}$	Imersão contínua de X em Y.
$\mathrm{X} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{Y}$	Imersão compacta de X em Y.
X'	Espaço dual de X.
$\to$	Convergência forte.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nosso objetivo final é estudar sob quais condições determinados tipos de equações diferenciais possuem soluções, para isso precisamos conhecer bem o espaço que estamos estudando, com este intuito no Capítulo 2 estudaremos algumas propriedades dos espaços de funções, espaços L^p, espaços de Sobolev e ferramentas que nos auxiliarão nos capítulos seguintes. Gostaríamos de resolver problemas do tipo

$$(P_0)\begin{cases} -u'' = f(u), & \text{em } (a,b), \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

Definição 1.0.1. Uma solução fraca deste problema (P_0) é uma função $u \in \mathrm{X}$, X um espaço "adequado", tal que

$$\int_a^b -u''\varphi = \int_a^b f(u)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{X}.$$

Dizer que X é adequado significa dizer que todas as integrais acima estão bem definidas.

Integrando por parte, temos

$$\int_a^b -u''\varphi = -u'\varphi\Big|_a^b + \int_a^b u'\varphi', \quad \forall \varphi \in \mathrm{X}.$$

Gostaríamos ainda que todas as funções $\varphi \in \mathrm{X}$ anulassem sobre a e b. Desta forma $-u'\varphi\Big|_a^b = 0$. Portando uma função $u \in \mathrm{X}$ que é solução fraca de (P_0) é tal que

$$\int_a^b u'\varphi' = \int_a^b f(u)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{X}.$$

Por outro lado, se associarmos o problema (P_0) a um funcional linear específico temos algumas propriedades.

Neste caso, o funcional I associado a (P_0) é da forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2 - \int_a^b F(u), \quad u \in \mathrm{X} \text{ e } F'(u) = f(u).$$

Derivando I na direção de $\varphi \in \mathrm{X}$, temos

$$I'(u)\varphi = \int_a^b u'\varphi' - \int_a^b f(u)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{X}.$$

Note que um ponto crítico do funcional I é solução fraca de (P_0), reciprocamente, uma solução fraca de (P_0) é ponto crítico de I.

Desta forma, nosso objetivo será associar um funcional a uma equação diferencial e descobrir seus pontos críticos que nos levará a uma solução do problema dado.

2 ESPAÇO DE FUNÇÕES

O espaço $\mathbb{F} = \Big\{u \mid u : \Omega \to \mathbb{R}\Big\}$ define o espaço de funções de Ω em $\mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Desta forma o espaço $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Além disso, este espaço tem dimensão infinita.

De fato, considere $\mathrm{C}([0,1])$ o conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$.

Note que $\mathrm{C}([0,1]) \subset \mathbb{F}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}$, pois a 0 função nula pertence a $\mathrm{C}([0,1])$ e soma de funções contínuas são também funções contínuas. Iremos provar que $\mathrm{C}([0,1])$ tem dimensão infinita, daí $\mathbb{F}$ terá dimensão infinita.

Suponha que $\mathrm{C}([0,1])$ tem dimensão finita igual a $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\mathrm{P}_n = \{x, x^2, ..., x^n\}$ subconjunto de $\mathrm{C}([0,1])$, onde cada uma das funções $u^k(x) = x^k$, $1 \geq k \geq n$, são funções polinomiais (contínuas) de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$.

A partir da combinação linear dos elementos de P_n, obtemos

$$a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e 0 é a função nula.

Daí, $a_i = 0$, $\forall i = \{1, 2, ..., n\}$. Portanto P_n é linearmente independente.

Agora, adicionando a função polinomial $u^{k+1}(x) = x^{n+1}$ ao conjunto P_n, obtemos um novo conjunto $\mathrm{P}_{n+1} = \{1, 2, ..., n, n+1\}$ que também é subconjunto de $\mathrm{C}([0,1])$.

Fazendo a combinação linear dos elementos de P_{n+1}, temos

$$b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} = 0.$$

O que implica que $b_j = 0$, $\forall j = \{1, 2, ..., n, n+1\}$. Desta forma P_{n+1} também é linearmente independente.

Absurdo! Pois consideramos que $\mathrm{C}([0,1])$ tem dimensão igual a n e encontramos um subconjunto linearmente independente de $n+1$ vetores. $\square$

Note que $\mathbb{F}$ tem dimensão infinita mesmo se $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, ou seja, $n = 1$.

Uma consequência significativa deste fato é que resultados do Cálculo podem não ser verdadeiros em $\mathbb{F}$, já que este tem dimensão infinita.

Definição 2.0.1. Uma norma $\|\cdot\|$ é uma aplicação que associa um vetor de V a um número real não negativo, onde V é um espaço vetorial. Satisfazendo

(i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in \mathrm{V}$;

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathrm{V}$;

(iii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Exemplo 2.0.2. Em $\mathbb{F} = \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ podemos definir a norma

$$\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

De fato, (i) Seja $u, v \in \mathbb{F}$.

$$\|u+v\| = \sup_{x\in\Omega} |(u+v)(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x\in\Omega} |v(x)| = \|u\| + \|v\|.$$

(ii) Seja $u \in \mathbb{F}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\|\alpha u\| = \sup_{x\in\Omega} |\alpha u(x)| = |\alpha| \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = |\alpha| \cdot \|u\|.$$

(iii) Se $u(x) = 0, \forall x \in \Omega$, é claro que $\|u\| = 0$.

Por outro lado, considere $u \in \mathbb{F}$ tal que $\|u\| = 0$. Como $\|u\| = 0 = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$, consequentemente $|u(x)| = 0 = u(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Daí, concluímos que $\| \cdot \|_{C(\overline{\Omega})}$ é uma norma em $\mathbb{F}$.

Definição 2.0.3. Seja V um espaço métrico. Uma sequência $(x_n) \subset \mathrm{V}$, é uma sequência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $d(x_n, x_m) < \epsilon$, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Onde $d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|$. A função d é chamada de distância de x_n a x_m.

Definição 2.0.4. Um espaço V é dito completo se toda sequência de Cauchy converge para algum elemento do espaço.

Um problema que encontramos com a norma $\| \cdot \|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})}$ definida acima é que o espaço $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ não é um espaço completo, ou seja, existe uma sequência $(u_n) \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u \notin \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$. Verificaremos este fato com o exemplo a seguir.

Tome $u_n \in \mathrm{C}^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ definido por

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se} \quad -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ x^3, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Temos que $u_n(x) \in \mathrm{C}^2\left(\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]\right)$.

De fato,

$$u_n'(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & \text{se} \quad -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ 3x^2, & \text{se} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Daí,

$$u_n''(x) = \begin{cases} n(n-1)x^{n-2}, & \text{se} \quad -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ 6x, & \text{se} \quad 0 < x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Agora, para concluir se $u_n \in \mathrm{C}^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ basta verificar a continuidade de u_n''.

Nosso problema seria somente em $x = 0$ para $n \geq 3$, pois em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ são funções polinomiais, logo continuas.

Mas

$$\lim_{x \to 0^+} u_n''(x) = \lim_{x \to 0^+} 6x = 0 = \lim_{x \to 0^-} n(n-1)x^{n-2} = \lim_{x \to 0^-} u_n''(x).$$

Logo $u_n(x) \in \mathrm{C}^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$.

Por outro lado, temos

$$u_n(x) \to u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ x^3, & \text{se} \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

E, claramente, $u(x)$ não é de classe C^2. Portanto encontramos uma sequência $u_n(x) \in \mathrm{C}^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$ (isto porquê convergência pontual em um compacto implica em convergência uniforme), mas $u(x) \notin \mathrm{C}^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$.

Daí, $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ não é um espaço de completo sob a norma $\|\cdot\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})}$.

Definição 2.0.5. Um espaço V é dito *espaço de Banach* se ele é normado e completo para alguma norma de V.

2.1 PRINCÍPIO DE DIRICHLET

Considere uma equação diferencial da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $f \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1.

É possível mostrar que a equação (2.1) possui exatamente uma solução de classe $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$.

Nosso objetivo inicial será mostrar que esta solução é um ponto de mínimo absoluto do funcional $I : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right)dx, \tag{2.2}$$

onde $\mathrm{A} = \left\{u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega\right\}$.

Teorema 2.1.1. ***(Princípio de Dirichlet)*** *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Uma função u é solução da equação diferencial (2.1) se, e somente se, u é ponto de mínimo absoluto do funcional $I : A \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right)dx.$$

Demonstração. Seja u uma função em $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ solução da equação diferencial. Note que $u \in \mathrm{A}$.

Dado $v \in \mathrm{A}$, temos

$$\int_\Omega -\Delta u(x)[u(x) - v(x)]dx = \int_\Omega f(x)[u(x) - v(x)]dx.$$

Usando integração por partes

$$-[u(x) - v(x)]\nabla u(x) \Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla[u(x) - v(x)]dx = \int_\Omega f(x)[u(x) - v(x)]dx.$$

Note que $-[u(x) - v(x)]\nabla u(x) \Big|_{\partial\Omega} = 0$, pois $u = v = 0$ em $\partial\Omega$.

Daí,

$$\int_\Omega [\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - f(x)u(x)]dx = \int_\Omega [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)]dx.$$

Por Cauchy-Schwarz,

$$\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \leq |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| \leq |\nabla u(x)||\nabla v(x)| \leq \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega [|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)]dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 dx \ + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)v(x)\right)dx.$$

Portanto

$$I(u) \leq I(v).$$

Como v é arbitrário em A, segue que u é mínimo absoluto de I.

Por outro lado, se u é mínimo absoluto de I. Fixe $v \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$.

Defina

$$i(\lambda) = I(u + \lambda v).$$

Note que se i for derivável em $\lambda = 0$, então $i'(0) = 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} i(\lambda) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x) + \lambda \nabla v(x)|^2 - f(x)[u(x) + \lambda v(x)] \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \lambda \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \frac{\lambda^2}{2} |\nabla v(x)|^2 - f(x)[u(x) + \lambda v(x)] \right) dx. \end{aligned}$$

Derivando i e fazendo $\lambda = 0$.

$$0 = i^{'}(0) = \int_\Omega [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)] dx = \int_\Omega [-\Delta u(x) - f(x)] v(x) dx.$$

Esta sentença é válida para todo $v \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, consequentemente $-\Delta u = f$ em Ω. Como $u \in \mathrm{A}$, segue que u é solução da equação. $\square$

O funcional I ter ínfimo não é suficiente afirmar que ele é solução de $-\Delta u = f$ nas condições do teorema anterior.

Exemplo 2.1.2. Um exemplo para isso é o funcional definido por $I : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$

$$I(u) = \int_{-1}^{1} |x u'(x)|^2 dx,$$

onde $\mathrm{A} = \Big\{ u \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) \;\Big|\; u(-1) = -1 \text{ e } u(1) = 1 \Big\}$.

Claramente $I(u) \geq 0$.

Primeiramente mostraremos que não existe $u_0 \in \mathrm{A}$ tal que $I(u_0) = 0$. Suponha que exista tal u_0 tal que $I(u_0) = 0$.

Com isso, temos

$$I(u_0) = \int_{-1}^{1} (x u_0'(x))^2 dx = 0.$$

Daí $(x \cdot u_0'(x))^2 = 0$, segue que $x u_0'(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Em particular, se $x \neq 0$ então $u_0'(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Consequentemente $u_0(x) = c, \forall x [-1, 1]$ e $c \in \mathbb{R}$. Absurdo! Pois $u_0(-1) = -1$ e $u_0(1) = 1$.

Portanto $I(u) > 0, \forall u \in \mathrm{A}$.

Tome $u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{\arctan(n)} \in \mathrm{A}$.

Portanto

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_{-1}^{1} |x \cdot u_n'|^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left| x \frac{n}{[1 + (nx)^2] \arctan(n)} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando $t = nx$,

$$I(u_n) = \frac{n}{n\arctan^2(n)}\int_{-n}^{n}\frac{t^2}{[1+t^2]^2}dt \leq \frac{1}{n\arctan^2(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{[1+t^2]^2}dt.$$

Como $\arctan^2(n)$ é limitado segue que $\dfrac{1}{n\arctan^2(n)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{[1+t^2]^2}dt = 0.$

Logo $I(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Desta forma encontramos um funcional que possui um ínfimo em A, porém ele não é atingido.

2.2 ESPAÇO $\mathrm{L}^p(\Omega)$

Seja $\mathrm{C}(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de Ω em $\mathbb{R}^n$. Definimos a norma

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1} := \int_{\Omega}|f(x)|dx. \tag{2.3}$$

Definimos $\mathrm{C}_{\mathrm{L}^1}(\Omega) := \{u \in \mathrm{C}(\Omega); \|u\|_{\mathrm{L}^1} < \infty\}$.

Afirmação: $\mathrm{C}_{\mathrm{L}^1}(\Omega)$ não é completo sob a norma $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1}$.

De fato:

Tome $u_n(x) \in \mathrm{C}_{\mathrm{L}^1}([-1,1])$, definido por

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Primeiramente observe que u_n é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ temos

$$\|u_n - u_m\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{-1}^{0}|x^n - x^m| + \int_{0}^{1}|x - x| = \int_{-1}^{0}|x^n - x^m| \leq 1 = n_0.$$

Observe que $0 < \epsilon < 1$, temos que $n_0 = 1 < \dfrac{1}{\epsilon}$ e, para $\epsilon \geq 1 = n_0$. Daí,

$$\|u_n - u_m\|_{\mathrm{L}^1} \leq 1 = n_0 \leq \epsilon \text{ ou } n_0 = 1 < \frac{1}{\epsilon}.$$

Note que em $x = 0$ temos

$$\lim_{x\to 0^+} u_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = u_n(0) \text{ e}$$

$$\lim_{x\to 0^-} u_n(x) = \lim_{x\to 0^-} x^n = 0 = u_n(0).$$

Portanto u_n é contínua em $x = 0$. Em $x \neq 0$ u^n é contínua, pois u^n é uma função polinomial. Assim u_n, de fato, pertence a $\mathrm{C}_{\mathrm{L}^1}([-1,1])$.

Se $x = -1$, temos

$$u^n(-1) = (-1)^n \text{ diverge.}$$

Portanto $u(x) \notin \mathrm{C}_{\mathrm{L}^1}(\Omega)$.

Definição 2.2.1. O conjunto $\mathrm{L}^1(\Omega)$, ou simplesmente L^1, é o conjunto das funções f definidas em Ω aberto tal que $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = \displaystyle\int_\Omega |f(x)|dx < \infty$, isto é,

$$\mathrm{L}^1 = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\Big|\, \int_\Omega |f(x)|dx < \infty \Big\}.$$

Analogamente podemos construir $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(\Omega)$ a partir da norma $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$, onde $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \left(\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

A princípio o espaço L^p que irá nos interessar mais será o L^2 e sua norma, $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2}$, é gerada pelo produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \cdot g(x) dx = \int_\Omega fg.$$

Por último, definimos $\mathrm{L}^\infty(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R};$ mensuráveis tal que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq k$ $q.s.$ em $\Omega \Big\}$ com a norma

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \inf \Big\{ k \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq k \;\; q.s. \text{ em } \Omega \Big\}.$$

Definição 2.2.2. Podemos definir ainda os espaços das funções localmente L^p, denotado por L^p_{loc}, que são as funções que são L^p em qualquer compacto k contido em Ω, ou seja,

$$\mathrm{L}^p_{loc} := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; \;\; \int_k |u(x)|^p dx < \infty, \forall k \subset \Omega \text{ compacto} \Big\},$$

para $1 \leq p < \infty$.

Lema 2.2.3. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1$ e vale*

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}. \tag{2.4}$$

Demonstração. Ver [1] Teo. 4.6, pág. 92. □

Pela inequação de Hölder, temos

$$\mathrm{L}^p(\Omega) \subset \mathrm{L}^p_{loc}(\Omega) \subset \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega) \text{ para todo } 1 \leq p \leq \infty,$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2.4. Um típico exemplo de função L^1_{loc} que não é L^p é a função $u(x) = 1$. De fato,

Temos que para qualquer valor de p onde $1 \leq p < \infty$.

$$\|u\|_{L^p} = \infty.$$

Ou seja, $u \notin L^p(\mathbb{R})$. Por outro lado, seja K compacto, $K \subset \mathbb{R}$.

Note que, para qualquer que seja K compacto

$$\int_k |u(x)|dx \text{ existe.}$$

Ou seja, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Para nós Ω sempre será um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}$. Esta suposição nos garantirá que o conjunto das funções teste, $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Além disso, a noção clássica de derivada parcial está bem definida para funções em Ω.

2.3 CONVERGÊNCIA FRACA

Seja X um espaço de Banach. Seja $x_n \in X$ uma sequência tal que $x_n \to x$ em X no sentido clássico, isto é,

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Dizemos que a convergência é clássica (ou forte) se existe a convergência na norma. Por outro lado, há outra noção canônica de convergência em X que podemos definir da seguinte forma.

Definição 2.3.1. Seja $x_n \in X$, onde X é um espaço de Banach. Dizemos que x_n *converge fraco* em X se

$$f(x_n) \to f(x), \forall f \in X', \text{ onde } X' \text{ é o dual de X.}$$

Notação: $x_n \rightharpoonup x$ em X.

Definição 2.3.2. O dual de um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$, denotado por X', é um espaço vetorial sobre o mesmo corpo com as operações definidas:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Para todo $f, g \in X'$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$.

Note que $x_n \to x$ em X, então $x_n \rightharpoonup x$ em X.

De fato,

Tome $x_n \to x$ em X e $f \in \mathrm{X}'$. Então, pela linearidade e limitação de f, temos

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq c\|x_n - x\|_{\mathrm{X}\to 0.}$$

O contrário não é verificado.

Podemos nos perguntar:

- A convergência fraca, se existir, ela é única, isto é, se $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup y$ então $x = y$?
- A convergência fraca é limitada, isto é, se $x_n \rightharpoonup x$ temos $\|x_n\|_X \leq C$, $\forall n$?

Na verdade a resposta é sim para um espaço de Banach geral. No entanto a prova não nos interessa no momento (ver [5], pág. 40).

Teorema 2.3.3. ***(Teorema da representação de Riesz)*** *Para $1 \leq p < \infty$, temos $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$, desde que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Isto é, cada $f \in (L^p(\Omega))'$ possui a forma $f(u) = \displaystyle\int_\Omega u(x) \cdot v(x)dx$ para algum $v \in L^q(\Omega)$ único. Além disso, $\|f\|_{(L^p(\Omega))'} = \|v\|_{L^q}$.*

Demonstração. Ver [5] Theorem 5.4, pág. 47. □

Definição 2.3.4. Um espaço de Banach é dito reflexivo quando $\mathrm{X}'' = \mathrm{X}$.

Observação 2.3.5. Usando o teorema acima, temos $(\mathrm{L}^2(\Omega))' = \mathrm{L}^2(\Omega)$ Daí, $(\mathrm{L}^2(\Omega))'' = \mathrm{L}^2(\Omega)' = \mathrm{L}^2(\Omega)$. Logo $\mathrm{L}^2(\Omega)$ é reflexivo.

Observação 2.3.6. No caso de $p = 1$, temos que $q = \infty$, logo

$$(\mathrm{L}^1(\Omega))' = \mathrm{L}^\infty(\Omega).$$

No entanto, o dual de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ não é $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Portanto $\mathrm{L}^1(\Omega)$ não é reflexivo.

Teorema 2.3.7. ***(Banach-Alaoglu em L^p)*** *Seja $1 < p < \infty$. Então cada sequência limitada em $L^p(\Omega)$ possui subsequência fracamente convergente, isto é, se $u_n \in L^p(\Omega)$ e $\|u_n\|_{L^p} \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$, então existe uma subsequência u_{n_j}, de u_n, e existe $u \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ quando } j \to \infty.$$

Demonstração. Ver [5] Theorem 5.6, pág. 51. □

Note que este teorema é uma versão, em L^p, do *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que diz que toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui subsequência convergente.

Definição 2.3.8. Um espaço de Banach X é dito separável se existe um subconjunto $\mathrm{F} \subset \mathrm{X}$ denso e enumerável.

Exemplo 2.3.9. O conjunto dos número reais, $\mathbb{R}$, é separável pois $\mathbb{Q}$ é denso e enumerável.

Teorema 2.3.10. *Seja Ω um espaço separável mensurável. O conjunto $L^p(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [1] Teo. 4.13, pág. 98. □

Observação 2.3.11. $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ não é separável.

2.4 SEMICONTINUIDADE INFERIOR FRACA

Seja $F : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ uma função, onde X é um espaço de Banach. Sabemos que F é contínua em $x \in \mathrm{X}$ se $x_n \to x$ em X então $F(x_n) \to F(x)$.

Podemos nos questionar se $x_n \rightharpoonup x$ em X, a propriedade acima é verificada? Ou seja, se $x_n \rightharpoonup x$, então $F(x_n) \to F(x)$?

Se a sentença é verificada dizemos que F é fracamente contínua.

Exemplo 2.4.1. Seja $F \in \mathrm{X}'$. Temos, por definição de convergência fraca, que $u_n \rightharpoonup u$ em X se, e somente se, $F(u_n) \to F(u)$, $\forall F \in \mathrm{X}'$. Neste caso, F é fracamente contínua trivialmente.

Observação 2.4.2. No caso geral, F nem sempre é fracamente contínua.

Exemplo 2.4.3. Seja $X = \mathrm{L}^p(\Omega)$ e considere a função $F : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, onde $F(u) = \|u\|_{\mathrm{L}^p}$.

Note que F é contínua, pois se $u_n \to u$ em $\mathrm{L}^p(\Omega)$, isto é, $\|u_n - u\|_{\mathrm{L}^p} \to 0$.

Agora,

$$|F(u_n) - F(u)| = \big| \|u_n\|_{\mathrm{L}^p} - \|u\|_{\mathrm{L}^p} \big| \leq \|u_n - u\|_{\mathrm{L}^p} \to 0.$$

Então $F(u_n) \to F(u)$, quando $u_n \to u$ em L^p.

No entanto, $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathrm{L}^p(\Omega)$ não implica $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$.
De fato, seja $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ com $\|g\|_{\mathrm{L}^p} = 1$. Defina a sequência $u_n(x) = g(x+n)$. Não é difícil ver que $u_n \rightharpoonup 0$ em L^p.

Por outro lado, $\|u_n\|_{\mathrm{L}^p} = \|g\|_{\mathrm{L}^p} = 1$. Logo $\|u_n\|_{\mathrm{L}^p} \not\to \|0\|_{\mathrm{L}^p}$. Portanto F não é fracamente contínua.

2.5 DERIVADA FRACA

Considere $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice.

Definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \text{ a norma de } \alpha,$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha^1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha^n}} \text{ a } \alpha\text{-ésima derivada parcial de } f,\ f \in \mathrm{C}^k,\ k = |\alpha|.$$

Note que, pelo *Teorema de Schwarz*, a ordem de tomar as derivadas parciais é irrelevante se f é de classe C^k com $k = |\alpha|$.

Exemplo 2.5.1. Seja $u(x) = x^2y^3$. Vamos calcular sua α-ésima derivada de u.

- $\alpha = (0, 1) \Rightarrow D^\alpha u = \dfrac{\partial^{(1+0)}u}{\partial x^1 \partial y^0} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2y^3)}{\partial x} = 2xy^3.$
- $\alpha = (1, 0) \Rightarrow D^\alpha u = \dfrac{\partial^{(0+1)}u}{\partial x^0 \partial y^1} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2y^3)}{\partial y} = 3x^2y^2.$
- $\alpha = (1, 1) \Rightarrow D^\alpha u = \dfrac{\partial^{(1+1)}u}{\partial x^1 \partial y^1} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2(x^2y^3)}{\partial x \partial y} = 6xy^2.$

Para $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ função teste, utilizando integração por partes $|\alpha|$ - vezes, temos

$$\int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u(x) \cdot \varphi(x) dx.$$

Esta última sentença é sempre verificada nas condições acima. Iremos mostrar que ela é válida para $\alpha = 1$, isto é, $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Suponha $\alpha = 1$, então

$$\int_\Omega u \cdot D\varphi = \int_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \int_\Omega Du \cdot \varphi.$$

Por outro lado, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$, pois $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$.

Logo,

$$\int_\Omega u \cdot D\varphi = -\int_\Omega Du \cdot \varphi.$$

Caso $u \notin \mathrm{C}^k$ ou se u não possuir derivadas parciais, a expressão acima não faz sentido. A fim de "melhorar" isso definiremos a derivada fraca que nos auxiliará daqui em diante.

Definição 2.5.2. Seja $u \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Dizemos que u tem a α - ésima derivada fraca, denotado por $D^\alpha u$, se existir $v \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x) dx \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) \cdot \varphi(x) dx, \;\; \forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega). \tag{2.5}$$

Denotamos por v a α - ésima derivada fraca de u e escrevemos $v = D^\alpha u$, mantendo a mesma notação utilizada para a derivada clássica.

Lema 2.5.3. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0, \; \forall \in C^\infty_c(\Omega). \tag{2.6}$$

Então, $f = 0$ q.s.

Demonstração. Ver [5] Lemma 6.1, pág. 57. □

Proposição 2.5.4. ***(Unicidade da derivada fraca)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice.*

Suponha que $v, v' \in L^1_{loc}(\Omega)$ sejam uma α - ésima derivada fraca de u. Então,

$$v = v' \;\; q.s. \;\; x \in \Omega.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v'\varphi, \; \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Assim,

$$\int_\Omega (v - v')\varphi = 0, \; \forall \in C^\infty_c(\Omega).$$

Pelo lema anterior, $v = v'$ em *q.s.* □

Podemos “enxergar”a derivada fraca Du sendo o gradiente de u, pois u é uma função de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

Embora a derivada clássica e a derivada fraca não sejam a mesma coisa, gostaríamos que elas tivessem algo em comum para facilitar nossos estudos. Para isso veremos algumas propriedades que aproxima ambas as derivadas.

Proposição 2.5.5. ***(Propriedades)*** *Sejam u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que existam a derivada fraca.*

- ***Linearidade:*** *Seja λ, $\mu \in \mathbb{R}$, temos $\nabla^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda \nabla^\alpha u + \mu \nabla^\alpha v$;*
- ***Derivadas alternadas:*** *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-índices, então $\nabla^\alpha(\nabla^\beta u) = \nabla^\beta(\nabla^\alpha u) = \nabla^{\alpha+\beta} u$;*

- ***Regra do produto:*** *Para $|\alpha| = 1$ multi-índice, $\nabla(uv) = \nabla u \cdot v + \nabla v \cdot u$;*

- ***Igualdade da derivada fraca e a derivada clássica:*** *Seja $u \in C^k(\Omega)$. A derivada fraca e a clássica coincidem quase sempre.*

Demonstração.

- **Linearidade:** Para $|\alpha| = 1$ multi-índice, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(\lambda u + \mu v)\varphi &= -\int_\Omega (\lambda u + \mu v)\nabla\varphi \\
&= -\lambda \int_\Omega u\nabla\varphi - \mu \int_\Omega v\nabla\varphi \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u\varphi + \mu \int_\Omega \nabla v\varphi \\
&= \int_\Omega (\lambda\nabla u + \mu\nabla v)\varphi, \ \forall\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto $\nabla(\lambda u + \mu v) = \lambda\nabla u + \mu\nabla v$.

- **Derivadas alternadas:**
Para $|\alpha| = 1$ multi-índice as derivadas alternadas é análogo a derivada segunda (no sentido clássico). Daí,

$$\nabla(\nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \Delta u.$$

- **Regra do produto:**

$$\begin{aligned}
\nabla(uv) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \Big((uv)_1, ..., (uv)_n\Big) \\
&= \frac{\partial (uv)_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial (uv)_n}{\partial x_n} \\
&= \nabla u \cdot v + \nabla v \cdot u.
\end{aligned}$$

A identidade da derivada fraca e clássica não iremos provar. □

Exemplo 2.5.6. Seja $u(x) = |x|$ definido em $\Omega = (-1, 1)$. Claro que $u \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$, mas $u \notin \mathrm{C}^1(\Omega)$, uma vez que u não é diferenciável no sentido clássico em $x = 0$. Porém u possui derivada fraca, dada por

$$u'(x) = v(x) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad x > 0 \\ -1, & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

Observe que v não precisa estar definido em todo Ω.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Note que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} x\varphi(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi(x)dx \\
&= -x\varphi(x)\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + x\varphi(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Agora veremos um exemplo de uma função que não possui derivada fraca.

Exemplo 2.5.7. Considere novamente $v(x) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad x > 0 \\ -1, & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$

Afirmação: v não possui derivada fraca.

Suponha que exista $w \in \mathrm{L}^2$ tal que $w = Dv$, derivada fraca de v. Como $v(x)$ é uma função constante no aberto $\Omega - \{0\}$, concluímos que $v'(x) = w(x) = 0$, $x \in \Omega - \{0\}$. Além disso, como $\{x = 0\}$ é um conjunto de medida nula é possível definir $w(0)$ de forma arbitrária. Tome $w(0) = 0$.

Para todo $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1} w(x)\varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi'(x)dx = -\varphi(-1) + \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(0) = 2\varphi(0).
\end{aligned}$$

Daí, $\varphi(0) = 0$.

Porém, é possível encontrar $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(0) \neq 0$. Absurdo!

Logo, v não possui derivada fraca.

2.6 ESPAÇO DE SOBOLEV

Definição 2.6.1. O *espaço de Sobolev* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, $\Omega = (a, b)$, é definido por

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^1_{loc}(\Omega); \exists Du \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega Du\varphi, \ \ \forall \varphi \in \mathrm{C}_c^1(\Omega) \Big\},$$

onde $1 \leq p \leq \infty$, com a norma $\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|Du\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$.

Note que $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, isto pode ser facilmente verificado usando a definição de $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

Como consequência segue a proposição.

Proposição 2.6.2. *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, possui as seguintes propriedades*

- *Se $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ é separável.*
- *Se $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [1] Prop. 8.1, pág. 203. □

Denotamos o espaço $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ por $\mathrm{H}^1(\Omega)$ indicando o *espaço de Hilbert*, fato que iremos provar. Em $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}} = \|u\|_{\mathrm{H}^1} := \|u\|_{\mathrm{L}^2} + \|Du\|_{\mathrm{L}^2}$$

que é provém do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{W}^{1,2}} = \langle u, v\rangle_{\mathrm{H}^1} = \langle u, v\rangle + \langle Du, Dv\rangle,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em L^2.

Teorema 2.6.3. *O espaço $(W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}})$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$. Com isso, (u_n) e (Du_n) são sequências de Cauchy em $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Daí, existem $u, v \in \mathrm{L}^2$ tais que $u_n \to u$ e $Du_n \to v$. Note que é possível encontrar u e v acima pois L^2 é um espaço completo.

Por definição, temos

$$\int_\Omega u_n D\varphi = -\int_\Omega Du_n\varphi, \forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Fazendo $n \to \infty$

$$\int_\Omega uD\varphi = -\int_\Omega v\varphi, \forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Portanto $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$.

Pela unicidade da derivada, temos que $v = Du$ em L^2, o que prova que o espaço é de Banach.

Como $\|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,2}}$ provém de um produto interno segue o resultado.

□

Lema 2.6.4. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se $\int_\Omega f \cdot D\varphi = 0, \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então existe uma constante c tal que $f = c$ quase sempre em Ω.*

Demonstração. Ver [1] Lema 8.1, pág. 204. □

Definição 2.6.5. Uma função $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ é fracamente C^1 se sua derivada fraca for contínua em Ω, isto é, se $Du \in \mathrm{C}^0(\Omega)$.

Proposição 2.6.6. *Uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é de classe C^1 se, e somente se, u for fracamente C^1.*

Demonstração. Seja $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$. Como Du é contínua, podemos integrar por partes

$$\int_\Omega uD\varphi = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dS - \int_\Omega Du\varphi, \forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Isto nos mostra que a derivada fraca de u é Du que é contínua.

Portanto, u é fracamente $\mathrm{C}^1(\Omega)$.

Por outro lado, se $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ for fracamente $\mathrm{C}^1(\Omega)$ existe $v \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega uD\varphi = -\int_\Omega v\varphi, \forall \in C_c^\infty(\Omega).$$

Pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, defina $w \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ por

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds \text{ tal que } Dw(t) = v(t).$$

Assim,

$$\int_\Omega wD\varphi = -\int_\Omega Dw\varphi = -\int_\Omega v\varphi = \int_\Omega uD\varphi, \forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Daí,

$$\int_\Omega (u-w)D\varphi = 0, \forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Consequentemente, pelo *Lema* anterior, $(u - w) = c$ em $q.s.$ Portanto $u = w + c$ em $q.s.$, ou seja, existe um representante C^1 na classe da função u. □

Teorema 2.6.7. ***Teorema de Banach-Alaoglu em*** $W^{1,p}(\Omega)$

Seja $1 < p < \infty$. Suponha que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então existe uma sequência u_{n_k} e algum $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ quando $k \to \infty$.

Demonstração. Ver [5] Theorem 6.3, pág. 62. □

2.7 SUBESPAÇO $W_0^{1,2}(\Omega)$

Definição 2.7.1. Definimos $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ como o fecho de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$.

Proposição 2.7.2. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Para todo $u \in W_0^{1,2}([0,1])$ vale*

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty([0,1])$. Temos que, para $t \in [0,1]$

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t)-\varphi(0)| = \Big|\int_0^t d\varphi(s)ds\Big| = \langle d\varphi, 1\rangle \leq \left[\int_0^1 |d\varphi|^2 ds\right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^1 1^2 ds\right]^{1/2} = \|D\varphi\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Daí,

$$\|\varphi\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \|D\varphi\|_{L^2}^2 dt\right)^{1/2} = \|D\varphi\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Como $u \in \mathrm{W}_0^{1,2}([0,1])$, existe $\varphi_n \in \mathrm{C}_c^\infty([0,1])$ tal que $\varphi_n \to u$ e $\varphi_n' \to u'$ ambos convergindo em L^2.

Assim, obtemos

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2} = \|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\varphi_n'\|_{\ \mathrm{L}^2} = \|u'\|_{\mathrm{L}^2}, \text{ quando } n \to \infty.$$

□

A partir da *desigualdade de Poincaré*, podemos concluir

$$\|u'\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}} = \|u\|_{\mathrm{L}^2} + \|u'\|_{\mathrm{L}^2} \leq 2\|u'\|_{\mathrm{L}^2}. \tag{2.8}$$

Ou seja, as normas $\|u\|_{\mathrm{H}^1} := \|u'\|_{\mathrm{L}^2}$ e $\|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}}$, $u \in \mathrm{W}_0^{1,2}([0,1])$, são equivalentes.

A norma $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1}$ é gerada pelo seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}^1} = \int_0^1 u'v'. \tag{2.9}$$

O que nos leva que $W_0^{1,2}([0,1])$ é um *espaço de Hilbert.*

2.8 IMERSÃO

Agora apresentaremos as últimas definições e resultados para chegarmos no nosso objetivo final, o *Teorema do Passo da Montanha.*

Definição 2.8.1. Sejam X e Y são espaços de Banach tais que X ⊂ Y. Considere as seguintes afirmações.

1. $\|x\|_{\mathrm{Y}} \leq \lambda \|x\|_{\mathrm{X}}, \forall x \in \mathrm{X}, \lambda > 0,$

2. se sequências limitadas em X possuem subsequência convergente na norma de Y .

Dizemos que a X está *imerso continuamente* em Y, ou X possui uma imersão contínua em Y, se a afirmação (1) é verificada. E que, X é *imerso compactamente* em Y, ou X possui uma imersão compacta em Y, se as afirmações (1) e (2) são verificadas.

Denotaremos por

$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y} \text{ , a imersão contínua de X em Y}$$
$$\mathrm{X} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{Y} \text{ , a imersão compacta de X em Y .}$$

Teorema 2.8.2. *Seja I um intervalo limitado de $\mathbb{R}$.*

Então $H_0^1(I) = W_0^{1,2} \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{I})$.

Teorema 2.8.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $p, n \in \mathbb{N}$, com $p > n$.*

Então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty]$.

Em particular, se $p = 2$ e $n = 1$, segue que $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, +\infty]$.

3 TEOREMA DE LAX-MILGRAM

O estudo de equações diferenciais pode, muitas das vezes, ser algo trabalhoso e árduo. Para o caso não-linear a dificuldade é ainda mais elevada, encontrar suas soluções pode diferir em cada tipo de equação. A técnica que apresentaremos é bastante útil para obtermos soluções de equações diferenciais lineares.

3.1 TEOREMA DE LAX-MILGRAM

O principal objetivo desta seção é estudar equações lineares do tipo

$$(P_1)\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado aberto suave e f uma função fixa que pertence a um espaço que não nos impedirá de realizarmos as estimativas necessárias para a aplicação do Teorema a seguir.

Teorema 3.1.1. ***(Teorema de Lax-Milgram)*** *Seja H um espaço de Hilbert real e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ um forma bilinear tal que*

(i) $|B(u,v)| \leq \|B\|\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$;

(ii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|v\|^2 \leq B(v,v)$, $\forall v \in H$.

Então, para $f \in H'$ fixo, existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

Observação 3.1.2. A propriedade (ii) nos garante a coercividade e a propriedade (i) a continuidade da forma bilinear B.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que se existe $u \in$ H satisfazendo tais condições então ele é único. De fato,

Suponha que existam $u_1, u_2 \in$ H tais que

$$B(u_1, v) = \langle f, v\rangle \ , \forall v \in \text{H}$$

$$B(u_2, v) = \langle f, v\rangle \ , \forall v \in \text{H}.$$

Daí,

$$B(u_1, v) - B(u_2, v) = \langle f, v\rangle - \langle f, v\rangle = 0 \ , \forall v \in \text{H}.$$

E, consequentemente, $B(u_1 - u_2, v) = 0$, $\forall v \in \mathrm{H}$.

Como v é um vetor genérico em H e $u_1, u_2 \in \mathrm{H}$, podemos tomar $v = u_1 - u_2 \in \mathrm{H}$.

Assim,

$$B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Por (ii), temos

$$0 \leq \alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Logo,

$$\|u_1 - u_2\| = 0 \text{ e, assim, } u_1 = u_2.$$

Por fim, mostraremos a existência de $u \in \mathrm{H}$ satisfazendo a afirmação do teorema. Pelo *Teorema de Riesz*, dado $u \in \mathrm{H}$ fixo, existe um único $w \in \mathrm{H}$ tal que

$$B(u, v) = (w, v) \ , \forall v \in \mathrm{H}.$$

Assim, podemos definir uma função $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ tal que $w = Au$. Então

$$B(u, v) = (Au, v).$$

Para concluirmos o teorema teremos que provar os seguintes itens itens:

(1) A é linear;

(2) A é contínua;

(3) A é injetiva;

(4) vale a desigualdade $\alpha \|v\| \leq \|Av\|$, $\forall v \in H$ e Im(A) é fechada em A;

(5) Im(A) = H.

(1) A é linear.

De fato, como B é linear na primeira variável, para cada $v \in \mathrm{H}$, nós temos.

$$\begin{aligned}
(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) \\
&= \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v) \\
&= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \\
&= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v) \ , \forall v \in \mathrm{H}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) = (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v) \ , \forall v \in \mathrm{H}. \tag{3.1}$$

Daí,

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2. \tag{3.2}$$

Assim está provada a linearidade de A.

(2) A é contínua.

Lembrando que continuidade e limitação de A são equivalentes se A é um funcional linear, temos por (i) que

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B(u, Au) \leq \|B\|\|u\|\|Au\|.$$

Daí,

$$\|Au\| \leq \|B\|\|u\|, \forall u \in \mathrm{H}.$$

Portanto A é contínua.

(3) A é injetiva.

Suponha $Au_1 = Au_2$. Assim, $A(u_1 - u_2) = 0$.

Daí,

$$(A(u_1 - u_2), v) = (0, v) = 0 \ , \forall v \in \mathrm{H}.$$

Tomando $v = u_1 - u_2$, por (ii) segue que

$$0 = (A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha\|u_1 - u_2\|^2 \geq 0.$$

Portanto $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$. Logo $u_1 = u_2$ e consequentemente A é injetiva.

(4) Agora mostraremos a desigualdade $\alpha\|v\| \leq \|Av\|$ e que Im(A) é fechada em A.

Por (ii), para cada $v \in \mathrm{H}$,

$$\alpha\|v\|^2 \leq B(v, v) = (Av, v) \leq \|Av\|\|v\|.$$

Logo

$$\alpha\|v\| \leq \|Av\|. \tag{3.3}$$

Para provar que a imagem de A é fechada em H, basta mostrar que $\overline{\mathrm{Im(A)}} \subset \mathrm{Im(A)}$, para isso tome $\{h_n\} \subset \mathrm{Im(A)}$ tal que $h_n \to h$ em H.

Mostraremos que $h \in \mathrm{Im(A)}$.

Como $\{h_n\} \subset \mathrm{Im(A)}$, existem $v_n \in \mathrm{H}$ tais que $Av_n = h_n$. Por outro lado $\{h_n\}$ é de Cauchy em H, pois $h_n \to h$ em H. Além disso, por (3.3), temos

$$\alpha\|v_n - v_m\| \leq \|A(v_n - v_m)\| = \|Av_n - Av_m\| = \|h_n - h_m\|.$$

Como $\{h_n\}$ é de Cauchy segue que $\{v_n\}$ é de Cauchy em H Hilbert. Assim, v_n converge para algum $v \in$ H.

Daí, pela continuidade de A,

$$v_n \to v \text{ em } H \Rightarrow Av_n \to Av.$$

Mas $Av_n = h_n \to h$. Logo, $Av = h \in \mathrm{Im(A)}$.

Por fim, mostraremos o item (5).

Suponha que $\mathrm{Im(A)} \neq \mathrm{H}$, então existe $0 \neq w \in \mathrm{Im(A)}^{\perp}$ (pois Im(A) é fechado). Logo,

$$(Aw, w) = 0.$$

Por (ii), temos

$$\alpha \|w\|^2 \leq B(w, w) = (Aw, w) = 0.$$

Portanto, $w = 0$. Absurdo! Logo, $\mathrm{Im(A)} = \mathrm{H}$.

Note que se tomarmos $v = A^{-1}u$ temos a continuidade de A^{-1}.

Desta forma

$$A : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \text{ é bijetora.}$$

Portanto, pelo *Teorema de Riesz*, dado $f \in \mathrm{H}'$ existe um único $w \in$ H tal que

$$\langle f, v \rangle = \langle w, v \rangle \ , \forall v \in \mathrm{H}. \tag{3.4}$$

Por outro lado, para $w \in$ H obtido acima existe um único $u \in$ H tal que $w = Au$, pela bijetividade de A.

Assim, existe um único $u \in$ H tal que

$$B(u, v) = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v \rangle,$$

provando assim o teorema.

□

Exemplo 3.1.3. Voltemos ao problema (P_1).

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um conjunto limitado aberto e f é pertence a um espaço X adequado.

Nosso objetivo neste momento é mostrar que o problema (P_1) tem solução. Para isso, multiplique a equação por uma função teste v que não nos impedirá obter as estimativas e integrando sobre Ω, temos

$$-\int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \ , \forall v \in \mathrm{X}.$$

Pelo *Teorema de Green*, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Vamos supor que X é um espaço de funções que se anulam em $\partial\Omega$.

Assim,

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS = 0$$

e consequentemente

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Escolhendo o espeço X sendo o espaço de Sobolev $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ e $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, as integrais acima estão bem definidas.

Isto nos leva a uma formulação fraca do problema original, encontrar $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle \ , \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega),$$

onde $B : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv \quad \text{e} \quad \langle f, v\rangle = \int_\Omega fv, \ f \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Para aplicarmos o *Teorema de Lax-Milgram* temos que fazer duas verificações

(i) $|B(u,v)| \leq \|B\|\|u\|\|v\|, \forall u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$;

(ii) existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|v\|^2 \leq B(v,v), \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Prova (i): Usando a desigualdade de *Hölder* e *Shwartz*, temos que

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \int_\Omega |u||v| \\
&\leq \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2} + \|u\|_{\mathrm{L}^2}\|v\|_{\mathrm{L}^2} \\
&= (\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}, \|u\|_{\mathrm{L}^2}) \cdot (\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2}, \|v\|_{\mathrm{L}^2}) \\
&\leq (\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|u\|_{\mathrm{L}^2}^2)^{1/2}(\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|v\|_{\mathrm{L}^2}^2)^{1/2} \\
&= \|u\|\|v\|, \forall u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo B é contínua.

Prova (ii): Para o par $(v,v) \in \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^1$, temos

$$\begin{aligned} B(v,v) &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v + \int_\Omega v \cdot v \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |v|^2 \\ &= \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|v\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \|v\|_{\mathrm{H}_0^1}^2. \end{aligned}$$

Fato que garante a coerxividade de B.

Logo, pelo *Teorema de Lax-Milgram*, para cada função $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ existe um único $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle \ , \forall v \in \mathrm{H}_0^1,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega f \cdot v.$$

Ou seja, (P_1) tem solução única em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Definição 3.1.4. Considerando novamente o problema (P_1)

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um conjunto limitado aberto e $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Uma solução fraca do problema (P_1) é uma função $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega f \cdot v, \, \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Agora, podemos notar que a solução dada no exemplo anterior é uma solução fraca de (P_1).

3.2 CASO PARTICULAR DO TEOREMA DE LAX-MILGRAM

Algumas variações do Teorema de Lax-Milgram podem ser úteis na solução de certas equações diferenciais. Assim, nesta seção trataremos do caso em que a forma bilinear B é simétrica, isto é, $B(u,v) = B(v,u)$. Neste caso, a prova do Teorema torna-se mais simples do que a feita na seção anterior.

Teorema 3.2.1. ***(Teorema de Lax-Milgram no caso de simetria da forma bilinear)*** *Seja H um espaço de Hilbert real e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ um forma bilinear simétrica tal que* *(i)* $|B(u,v)| \leq \|B\|\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$;

(ii) *Existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\alpha\|v\|^2 \leq B(v,v)$, $\forall v \in H$.

Então, para $f \in H'$ *fixo, existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

Demonstração. (Unicidade): A prova da unicidade é idêntica ao já demonstrado.

(Existência): Mostraremos a existência do $u \in \mathrm{H}$ no caso em que B é uma forma bilinear.

De fato, por (ii), para todo $v \in \mathrm{H}$,

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_{\mathrm{H}} \leq B(v,v)^{1/2} = |B(v,v)|^{1/2}.$$

Além disso, por (i),

$$|B(v,v)|^{1/2} \leq \|B\|^{1/2}\|v\|_{\mathrm{H}}.$$

A partir destas equações, temos

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_{\mathrm{H}} \leq B(v,v)^{1/2} = |B(v,v)|^{1/2} \leq \|B\|^{1/2}\|v\|_{\mathrm{H}}.$$

Visto isso podemos definir uma nova norma para H como $\|v\|_{\mathrm{B}} := B(v,v)^{1/2}$ equivalente a norma B.

Assim, $(\mathrm{H}, \|\cdot\|_{\mathrm{B}})$ é um espaço de Hilbert associado ao produto interno dado por B. Denote $((v,w)) = B(v,w)$ este produto interno. Daí, devemos encontrar $u \in \mathrm{H}$ tal que

$$B(u,v) = ((u,v)) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in \mathrm{H}.$$

De fato, pelo *Teorema de Riesz*, existe um único $R_f \in \mathrm{H}$ tal que

$$\langle f, v\rangle = ((R_f, v)), \ \forall v \in \mathrm{H}.$$

Agora, seja $u = R_f$. Assim,

$$\langle f, v\rangle = ((u,v)), \ \forall v \in \mathrm{H}.$$

□

Observação 3.2.2. Note que qualquer solução u de $B(u,v) = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in \mathrm{H}$ satisfaz

$$\alpha\|u\|^2 \leq B(u,u) = \langle f, u\rangle \leq \|f\|_{\mathrm{H}'}\|u\|.$$

Assim, $\|u\| \leq \dfrac{\|f\|_{\mathrm{H}'}}{\alpha}$.

Daí, segue que a solução deve estar contida em uma bola de raio $\dfrac{\|f\|_{\mathrm{H}'}}{\alpha}$. Neste caso, dizemos que a solução u tem uma *estimativa a Priori*.

3.3 TEOREMA DE LAX-MILGRAM VIA TÉCNICA DE GALERKIN

O Método de Galerkin, ou Técnica de Galerkin, consiste na busca de aproximações $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ de vetores $u \in \mathrm{H}$ no subespaço de dimensão finita $\mathrm{H}_n = span\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathrm{H}$ gerado pelos n primeiros vetores de uma base de Schauder.

Neste momento adicionaremos outra hipótese ao *Teorema de Lax-Milgram.* Vamos supor que H, definido pelo teorema, seja um espaço separável.

Segue o novo Teorema.

Teorema 3.3.1. ***(Teorema de Lax-Milgram)*** *Seja H um espaço de Hilbert real e separável, ou seja, existe uma base de Schauder $\{v_n\} \subset H$, com os $v_{n's}$ linearmente independente e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ um forma bilinear tal que*

(i) $|B(u, v)| \leq \|B\|\|u\|\|v\|, \forall u, v \in H$ *;*

(ii) Existe $\alpha > 0$ *tal que* $\alpha\|v\|^2 \leq B(v, v), \forall v \in H$ *.*

Então, para $f \in H'$ fixo, existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H.$$

Demonstração. (Unicidade): A prova da unicidade de u é igual ao do Teorema original.

(Existência): Defina os subespaços

$$\mathrm{H}_n = span\{v_1, ..., v_n\}.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere os problemas (P_n), de encontrar $u_n \in \mathrm{H}_n$ tal que $B(u_n, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in \mathrm{H}_n$.

Note que, se $u_n \in \mathrm{H}_n$, então $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Desta forma, resolver o problema (P_n) equivale a resolver o sistema linear

$$A_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, v_n \rangle \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

onde $A_n := A_{n\times n} = [B(v_i, v_j)]$, com $1 \leq i, \, j \leq n$.

Vamos encontrar $u_n \in \mathrm{H}_n$ tal que

$$B(u_n, v) = \langle f, v \rangle, \, \forall v \in \mathrm{H}_n.$$

Para mostrar a igualdade acima, basta verificarmos que ela é verdadeira para os elementos da base de H_n, isto é,

$$B(u_n, v_j) = \langle f, v_j \rangle,\ j = 1,\ ...,\ n.$$

Note que $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Daí, como B é bilinear, para cada j, temos que

$$\begin{aligned} B(u_n, v_j) &= B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j\right) \\ &= \alpha_1 B(v_1, v_j) + ... + \alpha_n B(v_n, v_j) \\ &= \langle f, v_j \rangle. \end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever a expressão acima na forma:

$$(B(v_1, v_j), ..., B(v_n, v_j)) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \langle f, v_j \rangle, \quad j = 1, ..., n.$$

Assim, o sistema (3.5), é escrito da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} B(v_1, v_1) & ... & B(v_n, v_1) \\ B(v_1, v_2) & ... & B(v_n, v_2) \\ \vdots & & \vdots \\ B(v_1, v_n) & ... & B(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, v_1 \rangle \\ \langle f, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, $B(v, v) = (A_n v, v)$, $\forall v \in \mathrm{H}_n$.

De fato:

Se $v \in H_n$, então $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Da bilinearidade de B, temos

$$\begin{array}{rcccccc} B(v, v) &=& B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \\ &=& \alpha_1^2 B(v_1, v_1) & + & ... & + & \alpha_1 \alpha_n B(v_1, v_n) \\ &+& ... & & ... & & ... \\ &+& \alpha_n \alpha_1 B(v_n, v_1) & + & ... & + & \alpha_n^2 B(v_n, v_n). \end{array}$$

Além disso, temos

$$\begin{array}{rcccccc} (A_n v, v) &=& \multicolumn{5}{l}{\left(\begin{pmatrix} B(v_1, v_1) & ... & B(v_n, v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B(v_1, v_n) & ... & B(v_n, v_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)} \\ &=& \alpha_1^2 B(v_1, v_1) & + & ... & + & \alpha_1 \alpha_n B(v_1, v_n) \\ &+& & & ... & & \\ &+& \alpha_n \alpha_1 B(v_n, v_1) & + & ... & + & \alpha_n^2 B(v_n, v_n). \end{array}$$

Destes fatos, temos

$$B(v,v) = (A_n v, v), \quad \forall v \in \mathrm{H}_n.$$

Note que, se $v \in \mathrm{H}_n$ e $A_n v = 0$, temos que $v = 0$. Pois,

$$\alpha \|v\|^2 \leq B(v,v) = (A_n v, v) = 0$$

donde $v = 0$.

Logo, A_n é uma matriz de uma transformação linear injetiva. Como H_n é de dimensão finita, segue a sobrejetividade de A_n.

Além disso, queremos encontrar $A_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$A_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Desta forma, pela bijetividade de A_n, dado

$$V = \begin{pmatrix} \langle f, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, v_n \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ existe um único } \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ , tal que } A_n U = V.$$

Logo os $\alpha_i' s$ são únicos. Daí, existem únicos

$$u_n = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i v_i \in \mathrm{H}_n \quad \text{ tais que } \quad B(u_n, v) = \langle f, v \rangle \text{ , } \forall v \in \mathrm{H}_n. \ (*)$$

Portanto temos uma sequência de soluções aproximadas $\{u_n\}$ de (P_n). Tomando $v = u_n$ em $(*)$.

Daí,

$$\alpha \|u_n\|^2 \leq B(u_n, u_n) = \langle f, u_n \rangle \leq \|f\| \cdot \|u_n\|, \text{ para } \alpha > 0.$$

Da inequação acima, segue que

$$\|u_n\| \leq \frac{\|f\|}{\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a sequência de soluções (u_n) é limitada.

Assim, pelo *Teorema de Banach-Alaoglu*, existe uma subsequência de (u_n), que denotaremos por u_k, tal que $u_k \rightharpoonup u$ em H.

Note que, para cada $v \in \mathrm{H}$, $B(\cdot, v)$ é um funcional linear contínuo tal que

$$\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_2 \cdots \subset \mathrm{H}_m \subset \mathrm{H}_{m+1} \subset \cdots .$$

Observe que, se $k \geq m_0$, então $\mathrm{H}_{m_0} \subset \mathrm{H}_k$. Daí,

$$B(u_k, v_0) = \langle f, v_0 \rangle, \quad \forall v_0 \in \mathrm{H}_k, \text{ em particular } \quad \forall v_0 \in \mathrm{H}_{m_0}.$$

Logo, se $k \geq m_0$, $B(u_k, v_0) = \langle f, v_0 \rangle$, $\forall v_0 \in \mathrm{H}_{m_0}$.

Como m_0 e v_0 foram escolhidos arbitrariamente segue que

$$k \geq m, \;\; B(u_k, v) = \langle f, v \rangle, \;\; \forall v \in \mathrm{H}_m.$$

Tomando o limite $u_k \rightharpoonup u$, temos que $B(u, v) = \langle f, v \rangle$, $\forall v \in \mathrm{H}_m$.

Portanto, $B(u, v) = \langle f, v \rangle$, $\forall v \in \bigcup \mathrm{H}_m$, que é denso em H.

Logo, para $v \in \mathrm{H}$, existe uma sequência $v_j \in \bigcup \mathrm{H}_m$ tal que $v_j \to v$ em H.

Assim, $B(u, v_j) = \langle f, v_j \rangle$.

Portanto, da continuidade de B e como $v_j \to v$ em H, segue que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in \mathrm{H}.$$

Assim, concluímos o Teorema. □

3.4 TEOREMAS DE PONTO FIXO

Nesta seção apresentaremos alguns resultados topológicos que, com o apoio do *Teorema de Lax-Milgram*, são utilizados para atacar problemas de equações diferenciais não-lineares.

Definição 3.4.1. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um funcional linear. Dizemos que T é um funcional linear compacto se $\overline{\mathrm{T(B)}} \subset \mathrm{Y}$ é compacto sempre que $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ for limitado.

Teorema 3.4.2. ***(Teorema de Shaefer)*** *Toda aplicação contínua e compacta de um conjunto X de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo tem ponto fixo.*

Demonstração. Ver [2] Theorem 4, pág. 504. □

Teorema 3.4.3. ***(Teorema de Shauder)*** *Seja A é um convexo, compacto em um espaço de Banach X. Se $f : A \to A$ é contínua, então existe ponto fixo de f em A.*

Demonstração. Ver [2] Theorem 3, pág. 502. □

Corolário 3.4.4. *Se A é convexo, fechado, limitado no espaço de Banach X e $f : A \to A$ é completamente contínua (contínua e compacta) então f tem um ponto fixo em A.*

Aplicação: Usaremos o corolário acima para resolver problemas do tipo:

$$(P_2)\begin{cases} -\Delta u + f(u) = g, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ e $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$.

Para resolvermos o problema (P_2) usaremos um problema auxiliar (P_w) dado por:

$$(P_w)\begin{cases} -\Delta v = g - f(w), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Denotando $g - f(w) = h$, temos que o problema (P_w) é um problema linear, logo, por Lax-Milgram, dado $w \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, existe único $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ solução de (P_w).

Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathrm{L}^2(\Omega) &\rightarrow \mathrm{L}^2(\Omega) \\ w &\mapsto v = Tw, \end{aligned} \tag{3.6}$$

solução de (P_w).

Observação 3.4.5. Para adequar o problema (P_w) nas condições do teorema de *Lax-Milgram* tínhamos que escolher h e $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Observação 3.4.6. A aplicação T está bem definida, pois (P_w) tem solução única $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Note que se T possui um ponto fixo v, então $v = Tv$ é solução de (P_v), ou seja, v satisfaz o problema não-linear (P_2). A recíproca também é verdadeira, isto é, a solução de (P_2) é um ponto fixo de T.

Assim, nosso objetivo é mostrar que se T tem ponto fixo, então ele será solução do problema (P_2). Agora vamos trabalhar com o problema (P_w) para podermos usar o Corolário 3.4.4 a fim de obter o ponto fixo.

Note que, a partir da formulação fraca, $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ satisfaz

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \eta = \int_\Omega g \cdot \eta - \int_\Omega f(w) \cdot \eta \ , \ \forall \eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Reescrevendo a equação acima na forma de produto interno, temos

$$(\nabla v, \nabla \eta)_{\mathrm{L}^2} = (g, \eta)_{\mathrm{L}^2} - (f(w), \eta)_{\mathrm{L}^2}.$$

Tomando $\eta = v$, por *Cauchy-Schwartz*, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= (g, v)_{\mathrm{L}^2} - (f(w), v)_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq \|g\|_{\mathrm{L}^2} \|v\|_{\mathrm{L}^2} + \|f(w)\|_{\mathrm{L}^2} \|v\|_{\mathrm{L}^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, buscaremos estimativas para a desigualdade acima usando as desigualdades de *Young e Poincaré*. Assim, dado $\epsilon > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2}\|v\|_{L^2} &\leq c_\epsilon\|g\|_{L^2}^2 + \epsilon\|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_\epsilon\|g\|_{L^2}^2 + \epsilon k'\|\nabla v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f(w)\|_{L^2}\|v\|_{L^2} &\leq c_\epsilon\|f(w)\|_{L^2}^2 + \epsilon\|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_\epsilon\|f(w)\|_{L^2}^2 + \epsilon k'\|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &= c_\epsilon\int_\Omega |f(w)|^2 dx + \epsilon k'\|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_\epsilon\|f\|_{L^\infty}^2\int_\Omega dx + \epsilon k'\|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &= c_\epsilon\|f\|_{L^\infty}^2 med(\Omega) + \epsilon k'\|\nabla v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Portanto, por (3.7), temos

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq c_\epsilon\|g\|_{L^2}^2 + c_\epsilon\|f\|_{L^\infty}^2 med(\Omega) + 2\epsilon k'\|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon k' = \dfrac{1}{2}$, pela estimativa acima, segue que

$$\frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \tilde{k}\|g\|_{L^2}^2 + \tilde{k}\|f\|_{L^\infty}^2 med(\Omega).$$

Observação 3.4.7. A constante k a seguir será usada em diversos momentos, mesmo que ela não permaneça a mesma sempre. Usaremos ela para simplificar a notação.

Daí,

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2} &\leq k\sqrt{\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^\infty}^2 med(\Omega)} \\ &\leq k\sqrt{\|g\|_{L^2}^2 + (\|f\|_{L^\infty}(med(\Omega))^{1/2})^2} \\ &\leq k\sqrt{\|g\|_{L^2}^2 + 2\|g\|_{L^2}(\|f\|_{L^\infty}(med(\Omega))^{1/2}) + (\|f\|_{L^\infty}(med(\Omega))^{1/2})^2} \\ &= k\sqrt{[\|g\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty}(med(\Omega))^{1/2}]^2} \\ &= k\Big[\|g\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty}(med(\Omega))^{1/2}\Big]. \end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$\|v\|_{L^2} \leq c\|\nabla v\|_{L^2} \leq k\Big[\|g\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}}\Big]. \tag{3.8}$$

Logo,

$$\|Tw\|_{\mathrm{L}^2} = \|v\|_{\mathrm{L}^2} \leq k\Big[\|g\|_{\mathrm{L}^2} + \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}}\Big]. \tag{3.9}$$

Defina $R = k\Big[\|g\|_{\mathrm{L}^2} + \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}}\Big]$.

Assim, como toda solução de (P_w) está na bola $B_R(0)$ de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ temos que o contradomínio da aplicação dada por (3.6), pode ser restringida da forma $T : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{B}_R(0)$.

Fazendo a restrição de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à bola $\mathrm{B}_R(0)$, temos

$$T\Big|_{\mathrm{B}_R(0)} : \mathrm{B}_R(0) \to \mathrm{B}_R(0).$$

Agora, vamos mostrar que $T\big|_{\mathrm{B}_R(0)}$ é contínua.

Seja $w_n \to w$ em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (com $\{w_n\}$ e $w \in \mathrm{B}_R(0)$). Sejam $Tw_n = v_n$ e $Tw = v$.

Mostraremos que $Tw_n = v_n \to v = Tw$ em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ o que resultará na continuidade de T.

Para prosseguirmos precisaremos usar um resultado de espaços métricos:

"Se $\{a_n\}$ é uma sequência (em um espaço métrico) com a propriedade de qualquer de suas subsquências, por sua vez, tem uma outra subsequência convergindo para a, e o limite a é o mesmo independentemente das subsequências tomadas, então a sequência toda converge para a".

Com isto em mente, tome uma subsequência $\{w_k\}$ qualquer de $\{w_n\}$.

Como $w_k \to w$ em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ e $\{w_k\}$ é limitado em $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Logo, $\{w_k\}$ possui subsequência $w_l \to w$ em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ e $w_l \to w$ em $q.s.$ de Ω.

Assim, existe uma outra subsequência $\{w_j\}$ de $\{w_k\}$ tal que

$$\begin{array}{lcll} w_j & \to & w & \text{em } \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ e} \\ w_j & \to & w & q.s. \text{ de } \Omega. \end{array}$$

Portanto, $f\big(w_j(x)\big) \to f\big(w(x)\big)$ em $q.s.$ de $\mathbb{R}$ pois f é contínua.

Afirmação: Mostraremos que

$$(\nabla v_n, \nabla \eta) = (g, \eta) + (f(w_n), \eta)\ ,\ \forall \eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \tag{3.10}$$

converge a

$$(\nabla v, \nabla \eta) = (g, \eta) + (f(w), \eta) \ , \forall \eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega). \tag{3.11}$$

De fato, para $\eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ considere

$$(f(w_j), \eta) = \int_\Omega f(w_j)\eta dx \ .$$

Sabemos que

$$f(w_j(x))\eta(x) \to f(w(x))\eta(x) \ \ q.s., \forall \eta \in \mathrm{H}_0^1.$$

Além disso,

$$|f(w_j)\eta| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}|\eta| \in \mathrm{L}^2.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$(f(w_j), \eta) = \int_\Omega f(w_j)\eta \to \int_\Omega f(w)\eta = (f(w), \eta). \tag{3.12}$$

Por outro lado, as estimativas (3.8) e (3.9) garantem que

$$\|v_j\|_{\mathrm{H}_0^1} = \|\nabla v_j\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{R}{c},$$

onde cada v_j é a única solução de (P_{w_j}) associada ao w_j.

Logo, $\{v_j\}$ é limitado em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Pelo Teorema de *Banach-Alaoglu*, existe uma subsequência de $\{v_j\}$, sem perda de generalidade utilizaremos a mesma notação v_j para tal subsequência, tal que $v_j \rightharpoonup \tilde{v}$ em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Como $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$, podemos tomar

$$v_j \to \tilde{v} \text{ em } \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Passando (3.10) ao limite, temos

$$(\nabla v_j, \nabla \eta) \to (\nabla \tilde{v}, \nabla \eta). \tag{3.13}$$

Além disso, por (3.12), temos que

$$(f(w_j), \eta) \to (f(w), \eta). \tag{3.14}$$

Donde

$$(\nabla \tilde{v}, \nabla \eta) = (g, \eta) + (f(w), \eta), \forall \eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Desta forma $\tilde{v}$ é solução fraca de (P_w).

Porém v também é solução fraca de (P_w), como a solução fraca é única, temos $\tilde{v} = v$.

Como as subsequências foram obtidas de forma arbitrárias, buscando nosso resultado de espaços métricos, segue que

$$Tw_n = v_n \rightharpoonup v = Tw \text{ em } \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Como $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ segue

$$Tw_n = v_n \to v = Tw \text{ em } \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Assim, T é contínua.

Por fim, T se encaixa nas condições do corolário 3.4.4, logo tem ponto fixo solução do problema (P_2).

4 TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Imagine que você é a origem 0 de um sistema cartesiano, está cercado por uma cadeia de montanhas e gostaria de sair desta cadeia com o menor esforço possível. Ou seja, sair do ponto em que você está, chegar a colina em seu ponto mais baixo, dentre todos os caminhos possíveis, e atingir um ponto u_1 fora dessa cadeia. O *Teorema do Passo da Montanha* retrata este tipo de situação, dentre todos caminhos, gostaríamos de obter o caminho cuja altura seja a menor possível. Este caminho ótimo é chamado de PASSO e o nível crítico da forma $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u) \right\}$, onde I é o funcional altura da cadeia e Γ é o conjunto de todos os caminhos contínuos que ligam o ponto 0 ao ponto u_1 no espaço X, é conhecido na literatura como nível minimax. A imagem abaixo ilustra este tipo de situação.

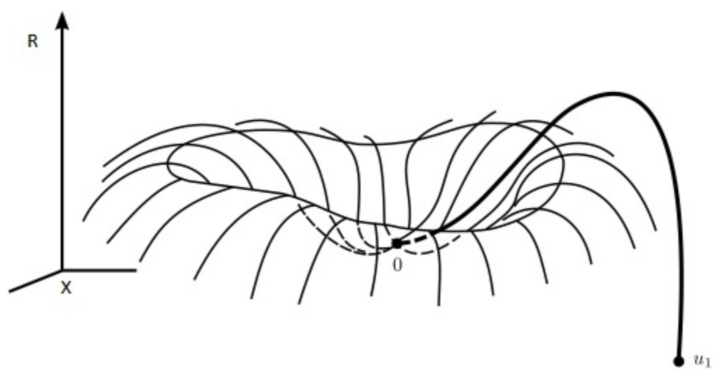

Figura 1 – Teorema do Passo da Montanha.

4.1 TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Boa parte do que foi visto até agora, seja definições, exemplos, teoremas e outros, foi para chegarmos a este momento. Antes de apresentarmos nosso principal teorema, precisamos de uma condição de compacidade, a *condição de Palais-Smale*, ou simplesmente condição *(PS)*.

Definição 4.1.1. Seja X um espaço de Banach.

Um funcional $I \in \mathrm{C}^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a *condição de Palais-Smale* se qualquer sequência $(u_n) \subset$ X tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$ possui subsequência convergente.

Se $\forall (u_n) \in$ X, $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ possui subsequência convergente, dizemos que o funcional I satisfaz a *condição de Palais-Smale no nível c*, que denotaremos por condição $(PS)_c$.

A prova do próximo Lema pode ser encontrada em [2] Theorem 1 (Deformation Theorem), pág. 478.

Lema 4.1.2. ***(Lema de Deformação)*** *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que φ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de φ, então para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*

(1) $\eta(0, u) = u$;

(2) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(3) $\eta(1, \varphi^{c+\epsilon}) \subset \varphi^{c-\epsilon}$, *onde se* $k \in \mathbb{R}$, *definimos* $\varphi^k = \{u \in X; \varphi(u) \leq k\}$;

(4) $\eta(1, \cdot) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

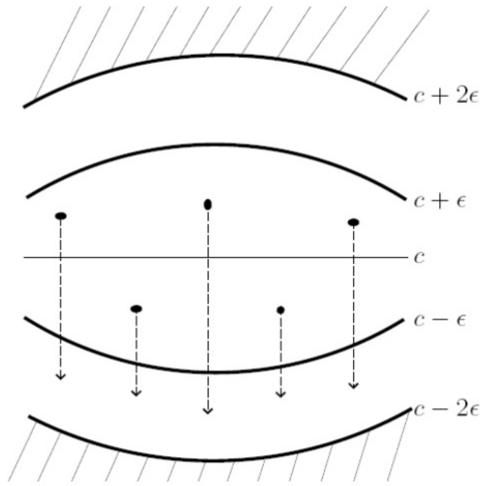

Figura 2 – Homeomorfismo de $\eta(1, \cdot)$.

Agora usaremos o Lema de Deformação para provarmos o famoso resultado de *Ambrosetti-Rabinowitz* (1973) que garante a existência de pontos críticos do tipo sela.

Teorema 4.1.3. ***(Teorema do Passo da Montanha)*** *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Considere ainda que I satisfaça*

(a) $I(0) = 0$;

(b) *existem* $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I\big|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(c) *existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e* $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \Big\{ \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u) \Big\},$$

onde $\Gamma = \big\{ \gamma : [0,1] \to X$ *contínuas tais que* $\gamma(0) = 0$ *e* $\gamma(1) = e \big\}$.

As condições (a), (b) e (c) são chamadas de geometria do passo da montanha.

Demonstração. Afirmamos que $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \{ \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \}$ está bem definido.

De fato, seja $\gamma \in \Gamma$, como $I \in \mathrm{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $\gamma \in \mathrm{C}([0,1], \mathrm{X})$, temos que $I \circ \gamma \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$. Desde que $I \circ \gamma$ é uma aplicação contínua no compacto $[0,1]$, então $I \circ \gamma$ possui máximo em $[0,1]$, isto é, existe $\max\limits_{t \in [0,1]} (I \circ \gamma)(t) = \max\limits_{u \in \gamma([0,1])} I(u)$.

Para cada $\gamma \in \Gamma$, definimos

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad h(t) = \|\gamma(t)\|.$$

Vemos que h é uma composição de funções contínuas, assim h é contínua. Além disso, desde que $e \in \mathrm{X} \backslash \overline{\mathrm{B}}_\rho$, temos que

$$h(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho$$

e

$$h(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 < \rho.$$

Logo, como $h \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ e $h(0) < \rho < h(1)$, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, existe $t_0 = t_0(\gamma) \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho$, ou seja, $\gamma(t_0) \in \partial \mathrm{B}_\rho$.

Da hipótese **(b)**, segue que, $I(\gamma(t_0)) \geq \alpha$. Logo,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \alpha, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{4.1}$$

Portanto, o conjunto $\mathrm{A} := \left\{ \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \ : \ \gamma \in \Gamma \right\}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim, pelo *Postulado de Dedekind*, existe o ínfimo de A. Portanto, $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in \gamma([0,1])} I(u)$ está bem definido.

De (4.1), como α é uma cota inferior para A, pela definição de c, segue que $c \geq \alpha > 0$.

Agora vamos provar que c é um valor crítico para I.

Suponha, por contradição, que c não seja um valor crítico de I. Então, pelo Lema 4.1.2 (*Lema de Deformação*), temos que dado $0 < \epsilon < \dfrac{\alpha}{2}$ e, consequentemente, $c \geq \alpha > 2\epsilon$. Além disso, existe $\eta \in \mathrm{C}([0,1] \times \mathrm{X}, \mathrm{X})$ tal que para qualquer $u \in \mathrm{X}$ e $t \in [0,1]$ tem-se:

(i) $\eta(t,u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\epsilon])$, e

(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)) < c + \epsilon. \tag{4.2}$$

Considere $\tilde{h}(t) = \eta(1, \tilde{\gamma}(t))$. Como $\eta \in \mathrm{C}([0,1] \times \mathrm{X}, \mathrm{X})$ e $\tilde{\gamma} \in \mathrm{C}([0,1], \mathrm{X})$, afirmamos que $\tilde{h} \in \Gamma$.

De fato, pela hipótese **(c)** e pela escolha de ϵ, temos $I(e) \leq 0 = I(0) < c - 2\epsilon$, logo $I(0)$ e $I(e) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, o que implica 0 e $e \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$.

Assim, de (i), temos que

$$\tilde{h}(0) = \eta(1, \tilde{\gamma}(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\tilde{h}(1) = \eta(1, \tilde{\gamma}(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde concluímos que $\tilde{h} \in \Gamma$. De (4.2), segue que

$$I(\tilde{\gamma}(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)) < c + \epsilon,$$

o que implica $\tilde{\gamma}(t) \in I^{c+\epsilon}, \ \ \forall\, t \in [0, 1]$.

Assim, de (ii), temos que

$$\tilde{h}(t) = \eta(1, \tilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}, \ \ \forall\, t \in [0, 1];$$

isto é,

$$I(\tilde{h}(t)) \leq c - \epsilon, \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\tilde{h}(t)) \leq c - \epsilon.$$

Como $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$ e $\tilde{h} \in \Gamma$, segue que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\tilde{h}(t)) \leq c - \epsilon.$$

Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, c é um valor crítico para I. $\square$

Podemos nos questionar quanto a necessidade da condição *(PS)* para garantir que c seja valor crítico. A resposta é sim, segue o exemplo.

Exemplo 4.1.4. Considere a função

$$I(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2.$$

O funcional I satisfaz a geometria do *Teorema do Passo da Montanha*, pois:
(a) $I(0,0) = 0$.
(b) Se $\|(x,y)\| = \rho = 1/2$, então $I(x,y) \geq \alpha = 1/32$.
(c) $\|(2,2)\| > 1/2$ e $I(2,2) = 0$.

Suponhamos que a função I verifica a condição $(PS)_c$ para algum $c \in \mathbb{R}^+$ definido por $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \big\{ \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \big\}$. Obteremos uma contradição. De fato, seja $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ uma sequência tal que:

1. $I(x_n, y_n) = x_n^2 + (1-x_n)^3 y_n^2 \to c > 0$,
2. $\dfrac{\partial I}{\partial x}(x_n, y_n) = 2x_n - 3(1-x_n)^2 y_n^2 \to 0$,
3. $\dfrac{\partial I}{\partial y}(x_n, y_n) = 2(1-x_n)^3 y_n \to 0$.

Assim, se a sequência for convergente, isto é, $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, pelos itens 2 e 3 acima, resulta que

$$(x_0, y_0) = (0,0).$$

Por outro lado, $I(x_n, y_n) \to I(x_0, y_0) = I(0,0) = 0$, o que é uma contradição pelo item 1.

Concluímos que o único ponto crítico da função I é o ponto $O = (0,0)$ que é um ponto de mínimo local, e que a função I não possui um valor crítico do tipo minimax.

O resultado a seguir irá nos auxiliar a mostrar que o funcional associado a uma equação diferencial possui derivada e sua derivada é contínua, isto é, este funcional é de classe C^1.

Teorema 4.1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suponha que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e que existam constantes $r, q > 0$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^r + b|s|^q, \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$$

e que as imersões abaixo sejam contínuas

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}, \ \ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}.$$

Então o funcional

$$J(s) = \int_\Omega F(x,s),$$

onde $F(x,s) = \int_0^u f(x,s)ds$ *satisfaz*

$$J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}), \quad J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se as imersões acima forem compactas, então $J' : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)'$ *é compacto.*

Demonstração. Ver [7] Teorema A.4, pág. 50. □

O exemplo abaixo é uma aplicação do *Teorema do Passo da Montanha.*

Exemplo 4.1.6. Considere o seguinte problema.

$$(P_3)\begin{cases} -u'' = u^2, & \text{em } (0,\pi), \\ u(0) = 0 = u(\pi). \end{cases}$$

Uma solução fraca do problema (P_3) é uma função $u \in \mathrm{H}_0^1(0,\pi)$ tal que

$$\int_0^\pi u'\varphi' = \int_0^\pi u^2\varphi \ , \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(0,\pi).$$

O funcional associado é $I : \mathrm{H}_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$, onde

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'|^2 - \frac{1}{3}\int_0^\pi u^3.$$

Derivando o funcional aplicando no vetor $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(0,\pi)$, temos

$$I'(u)\varphi = \int_0^\pi u'\varphi' - \int_0^\pi u^2\varphi.$$

Assim, um ponto crítico u de I é solução fraca do problema (P_3), reciprocamente, uma solução fraca de (P_3) é ponto crítico de I. Além disso, pelo Teorema 4.1.5, segue que o funcional $I \in \mathrm{C}^1(\mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Começaremos mostrando que I satisfaz a condição (PS). De fato, seja $(u_n) \in \mathrm{H}_0^1(0,\pi)$ tal que:

$$\begin{cases} |I(u_n)| = \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi |u_n'|^2 dx - \frac{1}{3}\int\limits_0^\pi u_n^3 dx\right| \leq C, \ \text{ e} \\ |\langle I'(u_n), \varphi\rangle| = \left|\int\limits_0^\pi u_n'\varphi' dx - \int\limits_0^\pi u_n^2\varphi dx\right| \leq \epsilon_n \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}, \\ \forall\ \varphi \in \mathrm{H}_0^1, \text{ onde } \epsilon_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{cases}$$

A sequência (u_n) é limitada. Tomando $\varphi = u_n$ na segunda estimativa, obtemos

$$\Big|\int_0^\pi |u_n'|^2 dx - \int_0^\pi u_n^3\, dx\Big| \leq \epsilon_n \|u_n\|_{\mathrm{H}^1}. \tag{4.3}$$

Note que

$$\int_0^\pi |u_n'|^2 dx = \int_0^\pi u_n^3\, dx + I'(u_n)u_n = \frac{3}{2}\int_0^\pi |u_n'|^2 dx - 3I(u_n) + I'(u_n)u_n. \tag{4.4}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_{\mathrm{H}^1}^2 = 3I(u_n) - I'(u_n)u_n \leq 3C + \epsilon_n \|u_n\|_{\mathrm{H}^1} \tag{4.5}$$

e consequentemente, $\|u_n\|_{\mathrm{H}^1}$ é limitado.
Portanto, existe uma subsequência (ainda representada por (u_n)) tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathrm{H}_0^1(0,\pi)$.

Como $\mathrm{H}_0^1(0,\pi) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}^2(0,\pi)$, segue que

$$u_n \to u \text{ em } \mathrm{L}^2(0,\pi). \tag{4.6}$$

Tomando $\varphi = u_n - u$ na estimativa da derivada, obtemos:

$$\Big|\int_0^\pi u_n'(u_n - u)' dx - \int_0^\pi u_n^2(u_n - u) dx\Big| \leq \epsilon_n \|u_n - u\|_{\mathrm{H}^1}. \tag{4.7}$$

Como $\|u_n - u\|_{\mathrm{H}^1}$ é limitada e $\epsilon_n \to 0$, segue que o lado direito tende a 0.
Além disso, por (4.6)

$$\Big|\int_0^\pi u_n^2(u_n - u) dx\Big| \leq \|u_n^2\|_{\mathrm{L}^2}\|u_n - u\|_{\mathrm{L}^2} \to 0,$$

pois $\|u_n^2\|_{\mathrm{L}^2}$ é limitado. De fato, note que $\|u_n^2\|_{\mathrm{L}^2} = \|u_n\|_{\mathrm{L}^4}^2$ e como $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $\mathrm{L}^4(\Omega)$, temos que $\|u_n\|_{\mathrm{L}^4}^2 \leq \lambda \|u_n\|_{\mathrm{H}^1}$. Assim, como a sequência (u_n) é limitada em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, segue sua limitação em $\mathrm{L}^4(\Omega)$ e, consequentemente, a limitação de (u_n) em $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Logo,

$$\int_0^\pi u_n'(u_n' - u')dx \to 0. \tag{4.8}$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathrm{H}_0^1(0,\pi)$,

$$\int_0^\pi u'(u_n' - u')dx \to 0. \tag{4.9}$$

Finalmente, por (4.8) e (4.9), obtemos

$$\int_0^\pi |u_n' - u'|^2 dx \to 0,$$

isto é, $\|u_n - u\|_{\mathrm{H}^1} \to 0$ e I satisfaz a condição (PS).

Agora queremos encontrar pontos críticos do funcional I.

Vamos mostrar que o funcional I é ilimitado tanto inferiormente quanto superiormente.

Primeiramente vamos mostrar que I é ilimitado inferiormente.

De fato, tome $u_0 \in \mathrm{H}_0^1(0,\pi)$ tal que $u_0 > 0$ em $(0,\pi)$. Seja $u_n(x) = nu_0(x) \in \mathrm{H}_0^1(0,\pi)$. Temos

$$\begin{aligned} I(nu_0) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi [(nu_0)']^2 - \frac{1}{3}\int_0^\pi (nu_0)^3 \\ &= \frac{1}{2}n^2\int_0^\pi (u_0')^2 - \frac{1}{3}n^3\int_0^\pi (u_0)^3. \end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^\pi (u_0')^2 > 0 \quad \text{ e } \quad \int_0^\pi (u_0)^3 > 0 \text{ são constantes.}$$

Daí, $I(nu_0) \to -\infty$, quando $n \to \infty$.

Agora, mostraremos que I é ilimitado superiormente. Considere a sequência $u_n(x) = \sin(nx)$.

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi [(\sin(nx))']^2 - \frac{1}{3}\int_0^\pi (\sin(nx))^3 \\ &= \frac{n^2}{2}\int_0^\pi (\cos(nx))^2 - \frac{1}{3}\int_0^\pi (\sin(nx))^3 \\ &\geq \frac{n^2\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Por fim, iremos ver se I verifica a geometria do passo da montanha.

(a) $I(0) = 0$;

(b) Considerando o funcional I, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'|^2 - \frac{1}{3}\int_0^\pi u^3 \geq \frac{1}{2}\|u'\|_{\mathrm{L}^2}^2 - \frac{1}{3}\|u\|_{\mathrm{L}^3}^3 \geq \frac{1}{2}\|u\|_{\mathrm{H}_0^1}^2 - C\|u\|_{\mathrm{H}_0^1}^3 \\ &= \|u\|_{\mathrm{H}_0^1}^2\left(\frac{1}{2} - C\|u\|_{\mathrm{H}_0^1}\right). \end{aligned}$$

Tomando $\rho = \|u\|_{\mathrm{H}_0^1} < \dfrac{1}{2C}$ suficientemente pequeno e $\alpha = \rho^2 \left(\dfrac{1}{2} - C\rho\right) > 0$.

Então $I(u) \geq \rho^2 \left(\dfrac{1}{2} - C\rho\right) = \alpha > 0$, $\forall u \in \mathrm{B}_\rho(0)$.

(c) Seja $u_0 \in \mathrm{H}_0^1(0, \pi)$, onde $u_0 > 0$ em $(0, \pi)$. Então,

$$\begin{aligned} I(tu_0) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi [(tu_0)']^2 - \frac{1}{3}\int_0^\pi (tu_0)^3 \\ &= \frac{t^2}{2}\int_0^\pi |u_0'|^2 - \frac{t^3}{3}\int_0^\pi u_0^3 \\ &= \frac{t^2}{2}\|u_0\|_{\mathrm{H}_0^1}^2 - \frac{t^3}{3}\int_0^\pi u_0^3 \to -\infty, \text{ quando } t \to \infty. \end{aligned}$$

Logo existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0 u_0) < 0$.

Desta forma, I possui um valor crítico c do tipo minimax e, consequentemente, o ponto crítico $\tilde{u}$ associado a esse valor crítico é solução do problema (P_3). Note que a solução obtida não é nula, pois $I(\tilde{u}) = c \geq \alpha > 0 = I(0)$, e consequentemente $\tilde{u} \neq 0$.

REFERÊNCIAS

[1] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New York: Springer, 2010.

[2] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, vol. 19, (1998).

[3] FIGUEIREDO, D. G. *Métodos Variacionais em Equações Diferenciais,* Matemática Universitária, no. 7, (1988)

[4] GRAJEDA, L. *Teoria Geométrica dos pontos críticos,* 1^o Workshop em Análise Não-Linear e EDPs, UFMG, (2002).

[5] LENZMANN, E. *Variationsrechnung (Calculus of Variations).* Disponível em $< https : //math.unibas.ch/uploads/x4epersdb/files/VariationalCalculus2014_14.pdf >$. Acessado em 06 de junho de 2018.

[6] MITROVIĆ, D. and ŽUBRINIĆ, D. *Fundamentals of applied functional analysis,* Addison Wesley Longman Limited, (1988).

[7] SANTOS, C. K. S. *Problemas Superlineares e não Quadráticos no infinito via Teorema do Passo da Montanha.* Disponível em $< http : //repositorio.unb.br/handle/10482/3601 >$. Acessado em 27 de março de 2019.

APÊNDICE A – Espaço $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

Não é difícil notar que o espaço $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções continuamente indefinidamente diferenciáveis é bem numeroso, por exemplo, a função nula, funções polinomiais e funções trigonométricas são exemplos de funções pertencentes a $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Por outro lado, também não é difícil encontrar exemplos de funções que tem suporte compacto. Podemos apenas atribuir uma expressão analítica para alguma função em um intervalo $(-a, a)$ e em seu complementar atribuir o valor zero.

Podemos nos questionar, se uma função definida em $(-a, a)$ for de classe $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, será esta uma função $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$? A resposta é: em geral, não.

O problema se encontra basicamente em descobrir se esta função é indefinidamente diferenciável nos pontos $x = -a$ e $x = a$.

Exemplo A.0.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Vamos verificar se $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Note que f é contínua em $\mathbb{R} - \{x = -1 \text{ e } x = 1\}$. Primeiramente vamos verificar se f é contínua em $x = 1$.

Calculando o limite, temos

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - 1^2} = 0$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 0 = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Como $f(1) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, segue que f é contínua em $x = 0$.

Observe que, o suporte da função f é compacto, pois o fecho do conjunto de pontos em que f não se anula é $\overline{(-1, 1)} = [-1, 1]$, que um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}$.

Agora, vamos calcular derivada de f.

Para $-1 < x < 1$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(1 - x^2)^{-1/2} = x(1 - x^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Para calcular as derivadas de f sobre $x = -1$ e $x = 1$ devemos calcular as derivadas laterais nestes pontos, iremos calcular apenas para $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Por outro lado, para valores à esquerda de 1, temos

$$
\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2}-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{1-(1+h)^2}}{\sqrt{1-(1+h)^2}} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-(1+h)^2}{h\sqrt{1-(1+h)^2}} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-1-2h-h^2}{h\sqrt{1-1-2h-h^2}} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(-2-h)}{h\sqrt{-2h-h^2}} \\
&= \lim_{h\to 0^-} -\frac{2+h}{\sqrt{-2h-h^2}} = \infty.
\end{aligned}
$$

Como $f'(1^+) = 0$ e $f'(1^-) = \infty$, segue que $f'(1)$ não existe. Portanto f não é diferenciável em $x = 1$. Desta forma $f \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Lema A.0.2. *Tem-se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A função $f(x) = e^x$ é difenrenciável em todo $\mathbb{R}$ e sua derivada é dada por $f'(x) = e^x$. Fixado $x > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediária, existe $x_0 \in [0, x]$ tal que

$$f(x) = f(0) + f'(x_0)(x-0), \qquad 0 < x_0 < x.$$

Daí,

$$e^x = 1 + e^{x_0}x.$$

Além disso, como $x_0 > 0$ segue que $e^{x_0} > 1$. Logo,

$$e^x = 1 + e^{x_0}x > 1 + 1x = 1 + x, \quad \text{para todo } x > 0.$$

Fazendo uma mudança de variável $x \mapsto {}^{t}/_{(n+1)}$ na desigualdade acima, segue que

$$e^{t/(n+1)} > 1 + \frac{t}{(n+1)} > \frac{t}{(n+1)}, \quad \text{para todo } x > 0.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade por $(n+1)$, temos

$$\left[e^{t/(n+1)}\right]^{n+1} > \left(\frac{t}{(n+1)}\right)^{n+1}.$$

Daí,

$$e^t > \frac{t^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Fazendo $k = (n+1)^{n+1}$, segue que

$$e^t > \frac{t^{n+1}}{k}.$$

Donde,

$$\frac{t^n}{e^t} < \frac{k}{n}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

□

Lema A.0.3. *Para qualquer polinômio $p(x)$, temos*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

Demonstração. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a^1 x + a^0$, onde $a^n \neq 0$.

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{x^n} &= a_n\frac{x^n}{x^n} + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n} + ... + a_1\frac{x}{x^n} + a_0\frac{1}{x^n} \\ &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}. \end{aligned}$$

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^n}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \lim_{x\to\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{x^n} \\ &= a_n + 0 + ... + 0 + 0 = a_n. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Note que é possível escrevermos $\frac{p(x)}{e^x}$ da seguinte forma

$$\frac{p(x)}{e^x} = \left[\frac{p(x)}{x^n}\right]\left[\frac{x^n}{e^x}\right].$$

Agora, calculando $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x}$, utilizando (A.1) e o Lema A.0.2, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{p(x)}{x^n}\right]\left[\frac{x^n}{e^x}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{p(x)}{x^n}\right] \cdot \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^n}{e^x}\right] \\ &= a_n \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir irá nos permitir construir uma função não nula que pertença ao espaço $C_0^\infty(a,b)$.

Proposição A.0.4. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & se \ \ x > 0, \\ 0, & se \ \ x \leq 0. \end{cases}$$

Então $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Decorre do Teorema do Valor Médio que:

Considerando $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, exceto, possivelmente, em um ponto $x_0 \in (a,b)$, onde f é contínua. Se existir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então existirá $f'(x_0)$. Além disso, tem-se que $f'(x_0) = L$.

Mostraremos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ utilizando o resultado acima. Por uma mudança de variável $t = 1/x$, temos que $t \to \infty$ quando $x \to 0$.

Além disso,

$$e^{-1/x} = e^{-t} = \frac{1}{e^t}.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x} = \lim_{t\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x} = 0$ e como $f(0) = 0$, temos que f é contínua em $x = 0$ e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$.

Para $x \neq 0$ a derivada é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}.$$

A partir da mesma mudança de variável acima $f'(x)$ pode ser reescrita como t^2/e^t e que, pelo Lema A.0.2, tem limite igual a 0 quando $t \to \infty$. Assim,

$$\lim_{x0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} e^{-1/x} \right) = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$

Pelo resultado enunciado no início da demonstração, $f'(0)$ existe e é igual a zero. Analogamente, para cada $k = 2, 3, ...$, k-ésima derivada de f é da forma

$$f^{(k)}(x) = P(1/x) e^{-1/x},$$

se $x \neq 0$, onde $P(1/x)$ é um polinômio na variável x^{-1}. Fazendo $t = 1/x$, segue que

$$f^{(k)}(x) = \frac{P(t)}{e^t}$$

e, assim, pelo Lema A.0.3, podemos concluir que existe limite para $x \to 0$ e que este vale 0 para cada $k \in \mathbb{R}$. Isto é, tem-se $\lim\limits_{x \to 0} f^{(k)}(0) = 0$, de modo que todas as derivadas $f^{(k)}(0)$ existem e são igual a zero.

Assim, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. □

Proposição A.0.5. *Existe uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $supp(\varphi) = [-1, 1]$.*

Demonstração. Considere $f(x) = e^{-1/x}$ e defina $\varphi_1(x) = f(x+1)$, isto é, φ_1 é uma translação à esquerda de f. Assim, tem-se que $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1+x}}, & \text{se } x > -1, \\ 0, & \text{se } x \leq -1, \end{cases}$$

e, pela Proposição A.0.4, $\varphi_1 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Tomando $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x)$, temos

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x}}, & \text{se } x < 1, \\ 0, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

que também é tal que $\varphi_2 \in \mathrm{C}^(\mathbb{R})$.

É possível mostrar que as funções φ_1 e φ_2 não tem suporte compacto.

Seja $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$.

Note que, para $|x| \geq 1$, temos que $\varphi_0(x) = 0$. Para $|x| < 1$, temos

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = e^{-\frac{1}{1+x}} \cdot e^{-\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{-1+x-1-x}{(1+x)(1-x)}} = e^{-\frac{2}{1-x^2}}.$$

Defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = [\varphi_0(x)]^{1/2}$, isto é,

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Note que $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Além disso, φ possui suporte igual a $[-1, 1]$. Logo, $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, desta forma encontramos uma função não nula em $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. □

Proposição A.0.6. *Existe pelo menos uma coleção não enumerável de funções $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_\epsilon \geq 0$, $supp(\varphi_\epsilon) = [-\epsilon, \epsilon]$.*

Demonstração. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada na Proposição A.0.5, isto é,

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$, considere a função $\Psi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}}, & \text{se } |x| < \epsilon, \\ 0, & \text{se } |x| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Note que Ψ_ϵ foi construída a partir da função φ da Proposição A.0.5, de modo que $\varphi_\epsilon \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Além disso, temos que $supp(\Psi_\epsilon) = [-\epsilon, \epsilon]$, logo o suporte de cada Ψ_ϵ é compacto. Podemos observar ainda que, para cada $\epsilon > 0$, $\varphi_\epsilon \geq 0$.

Fazendo uma mudança de variável $t = x/\epsilon$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Psi_\epsilon(x)dx &= \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_{-1}^{1} \epsilon\varphi(t)dt = \int_{-1}^{1}\varphi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} \Psi_\epsilon(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx} = 1.$$

Seja $k = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$. Defina $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{k}\Psi_\epsilon(x).$$

Note que φ_ϵ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\varphi_\epsilon(x)\begin{cases} \frac{1}{k\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-x^2}}, & \text{se } |x| < \epsilon, \\ 0, & \text{se } |x| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Portanto construímos uma coleção não enumerável de funções φ_ϵ tais que

$$\varphi_\epsilon \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{com} \quad supp(\varphi_\epsilon) = [-\epsilon, \epsilon],$$

satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(x)dx = 1.$$

□

Ao mostrarmos que o espaço $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ possui pelos menos uma família não enumerável de funções, mostramos que este espaço tem abundância de funções. Porém isto ainda não nos garante resultados de convergência. Isto não será mostrado aqui.