

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

Tensores, Geometria Riemanniana e Relatividade Geral

Juiz de Fora

2020

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

Tensores, Geometria Riemanniana e Relatividade Geral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Roque, Gustavo Ribeiro de Oliveira.

Tensores, Geometria Riemanniana e Relatividade Geral / Gustavo
Ribeiro de Oliveira Roque. – 2020.

79 f. : il.

Orientadora: Valéria Mattos da Rosa

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora,
Faculdade de Matemática. Bacharelado em Matemática, 2020.

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. I. Rosa, Valéria
Mattos da, orient. II. Título.

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

Tensores, Geometria Riemanniana e Relatividade Geral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Valéria Mattos da Rosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Titulação Nome e sobrenome
Universidade ???

Titulação Nome e sobrenome
Universidade ??

Dedico este trabalho à meus familiares e amigos

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus professores que tanto me inspiraram e motivaram durante toda minha trajetória. Destaque especial para os professores Ciro, Onésima, Bernadette, Adilson, Daniel, Kelly, Fabrício, Claudia, Marta, Mariana, Lourdinha, Virna. Em particular, agradeço à três docentes da UFJF que foram de importância extrema para minha formação: Laura, Lucy e Valéria. Obrigado por sempre me orientarem e pela amizade construída. Deixo um agradecimento mais do que especial à Profa. Dra. Valéria Mattos da Rosa, por ter aceitado me orientar neste TCC e por todo o tempo que trabalhamos juntos e todos momentos bons que compartilhamos. Por último, mas não menos importante, agradeço à minha vó, minha mãe, meu pai, meus primos e irmãos, e meus amigos inseparáveis por todos momentos de apoio, comemoração, tristezas superadas e barreiras enfrentadas lado a lado. Sem vocês todos, eu nada seria.

“A morte realmente não importava para ele, mas a vida o fazia, e, portanto, a sensação que sentiu quando deu a sua decisão não foi um sentimento de medo, mas de nostalgia.”

Cem Anos de Solidão - Gabriel García Marquez.

RESUMO

Neste trabalho, tivemos dois objetivos principais: o primeiro deles, estudar a Geometria Riemanniana a partir dos conceitos vistos na Geometria Diferencial, com o uso de tensores, que elimina a necessidade de trabalharmos em um sistema de coordenadas fixo, e dessa forma podemos obter resultados mais gerais e equações que são equivalentes em todos sistemas de coordenadas. Em seguida, aplicamos estes conceitos ao estudo da Teoria da Relatividade Geral, tendo como foco principal estudarmos a Geometria de Schwarzschild, e órbitas planetárias neste contexto, a fim de podermos comparar com os resultados obtidos na Teoria Newtoniana. Além disso, estudamos o comportamento de órbitas em torno de um buraco negro na Geometria de Schwarzschild, no caso em que a partícula orbitando o buraco é descrita por um campo escalar e está sob influência de uma força auto-induzida por seu próprio campo gravitacional. Neste contexto, esta força auto-induzida promoverá uma perturbação na órbita da partícula.

ABSTRACT

In this thesis, we analyzed the behaviour of orbits around a black hole in the Schwarzschild's Geometry. For that, we studied concepts of Riemannian Geometry, Tensor and Relativity Theory, in order to provide a basis for further problems. After that, we focused on a paper that faces the problem of the influence of an auto-force in a particle, induced by its gravitational field, where the particle it's described by a scalar field. In this context, this auto-force will promote a perturbation in the particle's orbit. Keywords: Riemannian, Geometry, Schwarzschild, Relativity, Orbits, Particle, Differential, Tensors.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Hélice Circular, Fonte: Research Gate	26
Círculo Osculador, Fonte: Research Gate	27
Esfera Exemplo Acima, Fonte: Ref. 1	28
Seção Normal, Fonte: Ref. 1	29
Círculos Máximos, Fonte: Ref. 1	53

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
Fil.	Filosofia
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INMETRO	Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial

LISTA DE SÍMBOLOS

\forall	Para todo
\in	Pertence

SUMÁRIO

1	Geometria Diferencial	25
1.1	Curvas	25
1.2	Superfícies em E^3	27
1.3	Curvatura Gaussiana	28
1.4	A Primeira Forma Fundamental	30
1.5	A Segunda Forma Fundamental	31
1.6	Geodésicas	33
2	Geometria Riemanniana	39
2.0.1	Espaços N-dimensionais Generalizados	39
2.0.2	Derivadas Covariantes	41
2.0.3	Conexão Métrica	44
2.0.4	Símbolos de Christoffel	45
2.0.5	Tensor de Curvatura Covariante	46
2.0.6	Geodésicas	46
3	Relatividade Geral	49
3.1	O Princípio da Equivalência	49
3.2	Gravidade como Curvatura do Espaço-Tempo	52
3.3	Geodésicas	54
3.4	As Equações de Campo	55
3.5	A Solução de Schwarzschild	58
3.6	Órbitas na Teoria de Newton	60
3.7	Órbitas na Relatividade Geral	62
3.8	Buracos Negros	65
4	Efeitos da Auto-força na órbita de uma partícula em torno de um buraco negro	67
4.1	Introdução	67
4.2	Estabilidade de órbitas circulares	67
4.3	Efeitos do Campo Escalar no Movimento da Partícula	68
4.3.1	Descrição do Movimento	68
4.3.2	Modificações do Campo Escalar na Equação Geodésica	69
4.4	Efeitos da auto-força em órbitas circulares	70
4.5	Efeitos da auto-força em órbitas levemente excêntricas	71
4.5.1	Geodésicas Levemente Excêntricas	71
4.5.2	Efeitos da auto-força sobre J para órbitas levemente excêntricas	72
4.5.3	Efeitos da auto-força sobre Ω_r para órbitas levemente excêntricas	73
4.5.4	Efeitos da auto-força sobre Ω_{pr} para órbitas levemente excêntricas	75
4.6	Efeitos da auto-força na ISCO	76

5	Considerações Finais	77
	REFERÊNCIAS	79

1 Geometria Diferencial

Neste capítulo, usaremos, principalmente, a abordagem vista na referência (3), com algum auxílio da referência (1).

1.1 Curvas

Definição 1.1 *Uma curva em \mathbb{R}^3 é dada por uma função vetorial*

$$\begin{aligned}\alpha(t) : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \alpha(t) &= (x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

Por convêniência, assumimos que as funções coordenadas x , y e z têm segundas derivadas contínuas.

Seja $s = s(t)$ o comprimento de arco da curva em $[a, t]$.

O vetor derivada da curva α é dado por

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Tal vetor é tangente à curva e aponta na direção de crescimento de t .

Definição 1.2 *Seja $\alpha(s)$ uma curva suave qualquer, expressa em termos do comprimento de arco. A cada ponto $\alpha(s)$, $T(s)$ é o vetor tangente unitário apontando na direção do crescimento de s . A taxa de mudança de direção do vetor $T(s)$ é a medida da curvatura de α . Em outras palavras, a curvatura de α em $\alpha(s)$, denotada $k(s)$, é o comprimento do vetor $T'(s)$.*

$$k(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|.$$

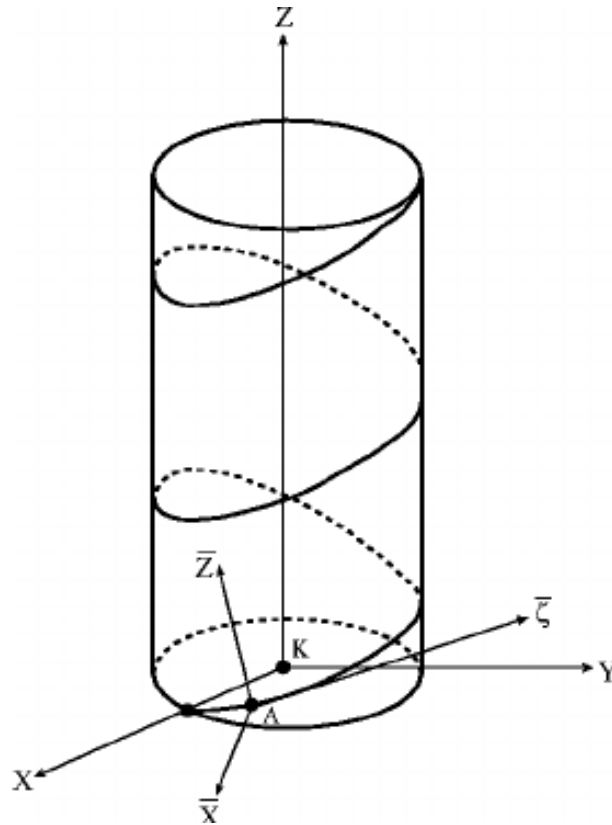
Se $T'(s) \neq 0$, o vetor unitário na direção de $T'(s)$ é chamado vetor normal principal, e denotado

$$N(s) = T'(s)/\|T'(s)\| = T'(s)/k(s)$$

Exemplo 1.1.1 *Uma hélice circular (fig. acima) é dada pela equação vetorial*

$$\beta(t) = (acost, asent, bt)$$

com a, b constantes. Se $b \neq 0$, então esta curva é uma espiral contida em um cilindro de raio a . Podemos reparametrizar a hélice em função do comprimento de arco, donde obtemos



– Hélice Circular, Fonte: Research Gate

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, a \sin \frac{s}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{bs}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

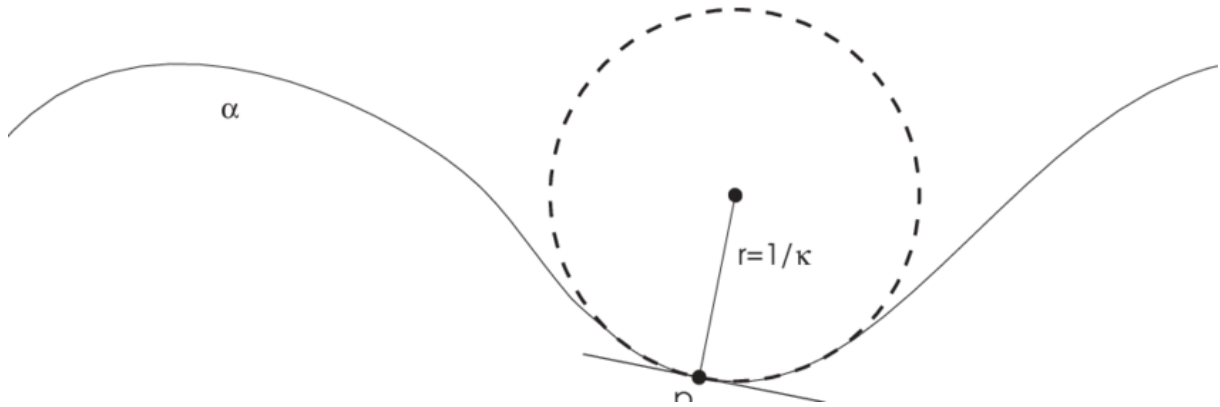
A partir daí, podemos facilmente calcular a curvatura :

$$k(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Portanto, a hélice tem curvatura constante. No caso em que $b = 0$ e $a > 0$, a curva é um círculo e $k = 1/a$. Daí, quanto menor o raio do círculo, maior a curvatura.

Onde $k(s) \neq 0$, a curva pode ser aproximada pelo círculo de raio $1/k(s)$, o qual é tangente a α em $\alpha(s)$. Tal círculo, chamado *círculo osculador* tem o mesmo vetor tangente, curvatura e vetor normal principal em $\alpha(s)$ que a própria curva. É o círculo que melhor aproxima a curva no ponto de tangência.

O plano do círculo osculador é chamado *plano osculador*, e é o plano determinado por $T(s)$ e $N(s)$.



– Círculo Osculador, Fonte: Research Gate

1.2 Superfícies em E^3

Uma superfície M pode ser descrita (localmente) como a imagem de uma função de duas variáveis dada por

$$X : D \rightarrow E^3$$

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$.

Assumimos que as funções coordenadas tem derivadas parciais contínuas até terceira ordem em D , e que X é regular, isto é ,

$$X_1 = \partial X / \partial u$$

$$X_2 = \partial X / \partial v$$

são linearmente independentes para cada par $(u, v) \in D$.

Exemplo 1.2.1 *Seja*

$$X(u, v) = (R \cos(u) \cos(v), R \sin(u) \cos(v), R \sin(v)).$$

Diferenciando, obtemos

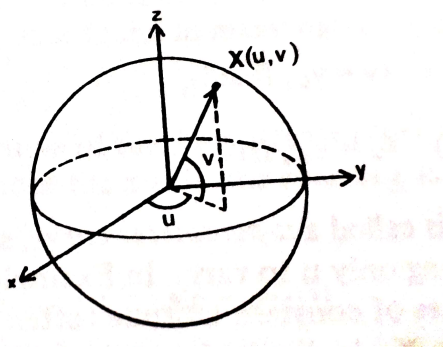
$$X_1 = (-R \sin(u) \cos(v), R \cos(u) \cos(v), 0)$$

$$X_2 = (-R \cos(u) \sin(v), -R \sin(u) \sin(v), R \cos(v))$$

Donde segue que

$$\|X_1 \times X_2\| = R^2 \cos(v)$$

Logo, X é regular exceto onde $\cos(v) = 0$, o que acontece apenas nos polos norte e sul da esfera.



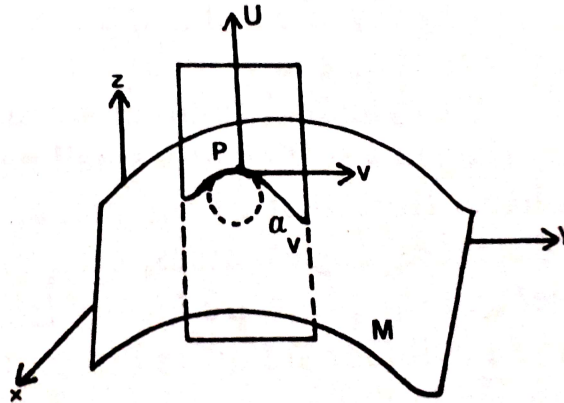
– Esfera Exemplo Acima, Fonte: Ref. 1

Definição 1.3 Um vetor v é chamado vetor tangente à superfície M no ponto P se existe uma curva em M que passa por P e tem vetor velocidade v em P . O conjunto de todos vetores tangentes à M em P é chamado plano tangente, e denotado por $T_P M$.

1.3 Curvatura Gaussiana

Seja U um vetor unitário normal à uma superfície suave $M \subset E^3$ em um ponto arbitrário P de M . Se v é um vetor tangente unitário qualquer de M em P , então o plano que passa por P determinado por v e U intersecta a superfície em uma curva, a qual denotaremos α_v . Tal curva α_v é chamada seção normal de M na direção v .

Se M é um plano, retas passando por P são seções normais de M em P . Se M é uma esfera, os círculos máximos passando por P são seções normais de M em P .



– Seção Normal, Fonte: Ref. 1

Cada seção normal α_v pode ser aproximada, quando próxima de P , por seu círculo osculador em P , cujo raio denotaremos por $R(v)$. A curvatura deste círculo osculador é chamada a *curvatura normal* de M em P na direção de v , e é dada por

$$k_n(v) = \pm \frac{1}{R(v)}$$

• Observação : O sinal da curvatura normal é determinado pela direção do vetor normal principal de α_v . Se α_v tem curvatura zero em P , deixamos $R(v)$ indefinido (ou chamamos de infinito), e tomamos $k_n(v) = 0$.

Em uma dada superfície, diferentes seções normais em P podem ter curvaturas normais diferentes. No entanto, sempre é possível encontrar duas direções ortogonais, chamadas *direções principais*, e especificadas por vetores tangentes unitários v_1 e v_2 em P , nos quais $k_n(v)$ assume valores de máximo e mínimo, denotados respectivamente por k_1 e k_2 . O produto destas duas curvaturas principais é chamado *Curvatura Gaussiana* K

$$K(P) = k_1 k_2.$$

1.4 A Primeira Forma Fundamental

Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$, é uma curva em uma superfície, e s é o comprimento de arco ao longo de α de a a t , sabemos que o comprimento total desta curva é obtido pela equação

$$L = s(b) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Como $\alpha'(t) = u'X_1 + v'X_2$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \|\alpha'\|^2 \\ &= u'^2(X_1 \cdot X_1) + 2u'v'(X_1 \cdot X_2) + v'^2(X_2 \cdot X_2) \end{aligned}$$

Denotaremos

$$E = X_1 \cdot X_1, \quad F = X_1 \cdot X_2, \quad G = X_2 \cdot X_2.$$

Daí, temos

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Como visto no início da seção, podemos calcular o comprimento de qualquer curva em uma superfície por meio da equação acima.

A expressão também pode ser abreviada da seguinte forma:

$$ds^2 = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2$$

Tal expressão é chamada *Primeira Forma Fundamental* ou *Forma Métrica* da superfície.

• A partir de agora, faremos mudanças pontuais na notação. Primeiramente, denotaremos

$$g_{ij} = X_i \cdot X_j$$

donde segue que

$$g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$$

e podemos escrever a matriz da forma métrica como

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Denotamos por g^{ij} os elementos da matriz inversa à matriz da forma métrica. Tais elementos satisfazem

$$\sum_j g_{ij} g_{jk} = \delta_i^k$$

Sendo $g = \det(g_{ij})$, obtemos

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{g_{22}}{g} \\ g^{12} &= \frac{-g_{12}}{g} \\ g^{22} &= \frac{g_{11}}{g} \end{aligned}$$

1.5 A Segunda Forma Fundamental

A notação de Einstein: A partir deste momento, é conveniente introduzirmos uma convenção de notação diferente. De agora em diante, o símbolo \sum será omitido em cada somatório onde o índice aparece tanto em cima quanto em baixo dos termos, por exemplo

Escreveremos $v^i X_i$ em vez de $\sum_i v^i X_i$

$g_{ij} v^i w^j$ em vez de $\sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j$

Em uma expressão onde um índice aparece apenas como subscrito ou superscrito (exemplo: g_{ii}), não somamos este índice.

Suponha que $A = (a_j^i)$ e $B = (b_k^j)$ são duas matrizes $n \times n$. Se superscritos são índices de linha e subscritos são índices de coluna, então o elemento da i -ésima linha e k -ésima coluna da matriz do produto AB é dada por $a_j^i b_k^j$.

Fórmulas de Gauss: Seja $\alpha(s) = X(u^1(s), u^2(s))$ uma curva em M , e assumamos que s é o comprimento de arco. Então, o vetor unitário tangente à α é dado por

$$T = \alpha' = u^{i'} X_i$$

Podemos decompor o vetor de curvatura em duas componentes, tangente e normal à superfície

$$\alpha'' = \alpha''_{tan} + \alpha''_{nor}.$$

Sabemos que

$$X_i = \frac{\partial X}{\partial u^i}.$$

De forma similar, podemos definir

$$X_{ij} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^j \partial u^i}.$$

Em seguida, quebramos X_{ij} em componentes tangente e normal. A componente tangente será uma combinação linear de X_1 e X_2 , e a componente normal, um múltiplo do vetor normal unitário U . Definimos as funções Γ_{ij}^r e L_{ij} por

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^r X_r + L_{ij} U$$

Para $i, j, r = 1, 2$. Estas são conhecidas como *fórmulas de Gauss*.

Fazendo algumas contas, podemos encontrar as componentes tangente e normal do vetor de curvatura

$$\begin{aligned}\alpha''_{tan} &= (u^{r''} + \Gamma_{ij}^r u^{i'} u^{j'}) X_r \\ \alpha''_{nor} &= (L_{ij} u^{i'} u^{j'}) U\end{aligned}$$

A Segunda Forma Fundamental: O coeficiente $L_{ij} u^{i'} u^{j'}$ é chamado *segunda forma fundamental* da superfície. Enquanto a primeira forma determina a geometria intrínseca de M , a segunda forma fundamental reflete a geometria extrínseca, como, por exemplo, a forma na qual M está inserida em um espaço tridimensional, e como M curva em relação a este espaço.

Tais coeficientes são dados pela equação

$$L_{ij} = X_{ij} \cdot U$$

$i, j = 1, 2$.

Definição 1.4 Seja $v = v^i X_i$ um vetor unitário tangente à M em P . A curvatura normal de M em P na direção v é definida por

$$k_n(v) = L_{ij} v^i v^j$$

1.6 Geodésicas

Uma curva $\alpha(s)$ em uma superfície M tem curvatura por duas razões. A primeira delas é que, se a superfície em si é curvada, então a curva "acompanha" a curvatura da superfície, se "dobrando" ou "esticando" em conjunto. Tal caso de curvatura é, em essência, a curvatura normal já apresentada.

A segunda razão é que, independente de M ser ou não uma superfície com curvatura, α pode se curvar dentro ou relativamente à M . Por exemplo, um círculo de raio r em um plano tem curvatura $1/r$, mesmo que a curvatura do plano seja zero. Neste caso, a curvatura de α vem da própria curva, não dependendo da superfície na qual ela está inserida. Este tipo de curvatura é chamada *curvatura geodésica*, e será definida mais precisamente abaixo.

Definição 1.5 *Seja $\alpha(s)$ uma curva em M , onde s é o comprimento de arco. A curvatura geodésica de α em $\alpha(s)$ é a função $k_g = k_g(s)$ definida por*

$$\alpha''_{tan} = k_g w = k_g U \times \alpha'$$

Da definição acima, podemos obter

$$k_g = U \cdot \alpha' \times \alpha''$$

Definição 1.6 *A curva α é chamada geodésica se $\alpha''_{tan} = 0$ em cada ponto de α .*

Da definição anterior e das equações de α''_{tan} e α''_{nor} , segue que α é uma geodésica se, e somente se, ambas as equações abaixo se verificam

$$u^{r''} + \Gamma_{ij}^r u^i u^j, \quad r = 1, 2$$

$$U \cdot \alpha' \times \alpha'' = 0$$

Geodésicas são, em superfícies, o equivalente à retas num plano, pois se uma curva realiza a menor distância entre seus pontos de partida e chegada, então ela é parte de uma geodésica. A fim de provar este fato, devemos definir certas quantidades, conhecidas como *Símbolos de Christoffel*, denotados por Γ_{ij}^r .

Inicialmente, definimos as funções Γ_{ijk} como

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^r g_{rk}, \quad i, j, k = 1, 2$$

Tais funções são conhecidas como Símbolos de Christoffel de primeira ordem, e, como $\Gamma_{ij}^r = \Gamma_{ji}^r$, temos $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$. Note também que $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ijk}g^{km}$.

A partir daí, obtemos

$$X_{ij} \cdot X_k = \Gamma_{ij}^r X_r \cdot X_k = \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \Gamma_{ijk}$$

Fazendo as derivadas indicadas e rearranjando as equações, obtemos

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

Multiplicando a equação acima por g^{kr} e somando sobre k , segue

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

Logo, os símbolos de Christoffel dependem apenas da primeira forma fundamental, e portanto, pertencem à geometria intrínseca da superfície M .

Exemplo 1.6.1 *Para o plano com coordenadas cartesianas*

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

e como E e G são constantes, todos símbolos de Christoffel somem. Logo, as geodésicas são dadas por $u'' = v'' = 0$, e como u e v são funções lineares de s , então

$$u = as + b, \quad v = cs + d$$

Consequentemente, as geodésicas do plano Euclidiano são retas.

Exemplo 1.6.2 *Para uma esfera com coordenadas*

$$ds^2 = R^2 \cos^2(v) du^2 + R^2 dv^2$$

Os únicos símbolos de Christoffel diferentes de zero são

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{E_v}{2E} = -tg(v)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G} = sen(v)cos(v)$$

Neste caso, as geodésicas serão os círculos máximos da esfera.

Teorema 1.1 *Seja $\alpha = \alpha(s)$, $a \leq s \leq b$, uma curva na superfície M , onde s denota o comprimento de arco. Se α é a menor curva possível em M que conecta $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, então α é uma geodésica.*

Demonstração 1 $\alpha(s) = X(u^1(s), u^2(s))$. Por hipótese, qualquer curva que conecta $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ é maior ou igual a α . Em particular, considere a família de curvas α_ϵ (onde ϵ é um número real) obtida substituindo u^i pelo seguinte:

$$U^i(s, \epsilon) = u^i(s) + \epsilon v^i(s)$$

para $i = 1, 2$, $a \leq s \leq b$, onde v^1, v^2 são curvas suaves que satisfazem $v^i(a) = v^i(b) = 0$.

Para cada ϵ , a curva $\alpha_\epsilon = X(U^1, U^2)$ conecta $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, e, para ϵ suficientemente pequeno, pode ser interpretado como uma pequena perturbação de α . Seja $L(\epsilon)$ o comprimento de arco ao longo de α_ϵ :

$$L(\epsilon) = \int_a^b \lambda(s, \epsilon) ds$$

onde

$$\lambda(s, \epsilon) = \left[g_{ij}(U^1, U^2) \frac{\partial U^i}{\partial s} \frac{\partial U^j}{\partial s} \right]^{1/2}$$

A minimalidade de $L(0)$ implica

$$L'(0) = \int_a^b \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}(s, 0) ds = 0$$

Agora, usando o fato de que $\partial U^k / \partial \epsilon = v^k$, obtemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} = \frac{1}{2\lambda} \int_a^b \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial U^k} v^k \frac{\partial U^i}{\partial s} \frac{\partial U^j}{\partial s} + 2g_{ij} \frac{\partial U^i}{\partial s} \frac{\partial^2 U^j}{\partial s \partial \epsilon} \right]$$

Tomando $\epsilon = 0$ e utilizando $\frac{\partial U^j}{\partial \epsilon} = v^j$, e $\lambda(s, 0) = 1$, obtemos

$$L'(0) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u^{i'} u^{j'} v^k + 2g_{ij} u^{i'} v^k \right) ds = 0$$

Como $v^k(a) = v^k(b) = 0$, integração do segundo termo por partes nos dá

$$L'(0) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u^{i'} u^{j'} - 2 \frac{\partial (g_{ik} u^{i'})}{\partial s} \right) v^k ds = 0$$

$L'(0)$ deve zerar para todas funções suaves v^k satisfazendo as condições $v^k(a) = v^k(b) = 0$. Como a escolha de v é arbitrária, logo a expressão dentro do parênteses deve zerar para todo s :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u^{i'} u^{j'} - 2 \frac{\partial (g_{ik} u^{i'})}{\partial s} = 0$$

A partir de manipulações algébricas da equação acima, e utilizando as identidades obtidas anteriormente, obtemos

$$u^{r''} + \Gamma_{ij}^r u^{i'} u^{j'} = 0$$

para $r = 1, 2$.

Como s é comprimento de arco, α é uma geodésica. Terminamos a demonstração

Duas observações devem ser feitas a respeito do Teorema

- A recíproca é falsa. Em geral, uma geodésica não necessariamente nos dá a distância mínima na superfície entre seus pontos de partida e chegada. Olhando para a demonstração, no caso inverso, $L'(0)$ seria zero tanto para comprimento máximo quanto mínimo, ou para quaisquer pontos críticos de $L(\epsilon)$.
- Dados dois pontos arbitrários \mathbf{P} e \mathbf{Q} de uma superfície, não necessariamente existe uma geodésica que conecte estes dois pontos. Por exemplo, se M é o plano cartesiano sem a origem, não existe uma geodésica que conecte os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Teorema 1.2 Dado um ponto \mathbf{P} de M e um vetor tangente unitário v de \mathbf{P} , existe uma única geodésica $\alpha(s)$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{P}$ e $\alpha'(0) = v$.

Demonstração 2 Seja $\mathbf{P} = \mathbf{X}(u_0^1, u_0^2)$ e $v = v^i \mathbf{X}_i(u_0^1, u_0^2)$. Pela definição de geodésica, devemos mostrar que existem únicas funções $u^r(s)$ satisfazendo

$$u^{r''} + \Gamma_{ij}^r u^{i'} u^{j'} = 0$$

$$u^r(0) = u_0^r, u^{r'}(0) = v^r$$

para $r = 1, 2$, e após, mostrar que s é comprimento de arco ao longo da curva $\alpha(s) = \mathbf{X}(u^1(s), u^2(s))$ determinada por estas equações.

Tais funções existem e são únicas, como consequência do Teorema de Peano, em uma vizinhança de (u_0^1, u_0^2) . A fim de mostrar que s é comprimento de arco, devemos mostrar que a função

$$f(s) = g_{ij} u^{i'} u^{j'}$$

é constante, já que seu valor em $s = 0$ é 1 (comprimento de v). Diferenciando e utilizando identidades já vistas, obtemos

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u^{i'} u^{j'} u^{k'} + g_{ij} u^{i''} u^{j'} + g_{ij} u^{i'} u^{j''} \\
&= (g_{jr} \Gamma_{ik}^r + g_{ir} \Gamma_{jk}^r) u^{i'} u^{j'} u^{k'} + g_{rj} u^{r''} u^{j'} + g_{ir} u^{i'} u^{r''} \\
&= g_{ir} u^{i'} (u^{r''} + \Gamma_{jk}^r u^{j'} u^{k'}) + g_{rj} u^{j'} (u^{r''} + \Gamma_{ik}^r u^{i'} u^{k'}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois as expressões dentro do parênteses zeram. Logo, $f(s) \equiv 1$.

2 Geometria Riemanniana

Em todo o desenvolvimento deste capítulo, foi usada a abordagem apresentada na referência 3.

2.0.1 Espaços N-dimensionais Generalizados

Na Geometria Diferencial, dependemos de trabalharmos com superfícies em um espaço euclidiano. Porém, a fim de passarmos ao estudo da Relatividade Geral, é conveniente que eliminemos a etapa de escolha de um espaço suporte pré-estabelecido, pois as equações são válidas em todos sistemas de coordenadas, logo, é interessante usarmos equações que não dependem da escolha de um tal sistema. Imediatamente, pensamos em tensores para esse trabalho, já que as equações tensoriais são válidas em todos sistema de coordenadas. Neste capítulo, estudaremos mais a fundo conceitos já vistos no capítulo passado com uma nova roupagem, a da Geometria Riemanniana, que nos permite utilizar equações tensoriais em nossas definições. Introduziremos a seguir a noção de Espaço Riemanniano e Tensores.

Definição 2.1 *Em um espaço euclidiano N-dimensional, sempre trabalhamos com um sistema de coordenadas, como visto no capítulo passado. Em coordenadas cartesianas, se x_i , $x_i + dx_i$ são as coordenadas de dois pontos vizinhos, a distância ds entre eles é dada por*

$$ds^2 = dx_i dx_i \quad (2.1)$$

Porém, na Geometria Riemanniana, introduzimos a noção mais ampla de um Espaço Riemanniano N-dimensional, denotado por R_N , onde não é necessário definirmos um sistema de coordenadas, e a distância entre dois pontos vizinhos é dada por:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.2)$$

Onde g_{ij} são os coeficientes métricos da forma quadrática. Um espaço euclidiano N-dimensional E_N é um caso particular de espaço riemanniano N-dimensional.

Agora, definiremos vetor contravariante e vetor covariante para, em seguida, obtermos o conceito de tensores. Sejam x^i as coordenadas de um ponto P em um espaço riemanniano R_N . Sejam \bar{x}^i as coordenadas do mesmo ponto relativas a outro sistema de coordenadas. Se o ponto vizinho P' tem coordenadas $x^i + dx^i$ no primeiro sistema e $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ no segundo sistema, temos

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \quad (2.3)$$

Os N valores dx^i são os componentes do vetor PP' no primeiro sistema, e os $d\bar{x}^i$ são os componentes deste vetor no segundo sistema, e o vetor PP' é o protótipo para todos vetores contravariantes. Assim, A^i são os componentes de um vetor contravariante no ponto x^i se os componentes do segundo sistema de coordenadas são dados pela equação

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j. \quad (2.4)$$

De forma parecida, B_i são as componentes de um vetor covariante no 1º sistema se os componentes no segundo sistema são dados por

$$\bar{B}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j. \quad (2.5)$$

Agora, partimos para a generalização de vetores para tensores. A partir deste momento, vetores serão vistos como componentes de um tensor. Se A^i, B^j são vetores contravariantes, os N^2 valores $A^i B^j$ são tomados como componentes de um tensor contravariante de segunda ordem. Sua equação de transformação é

$$\bar{A}^i \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l. \quad (2.6)$$

Qualquer conjunto de N^2 valores C^{ij} que se transformam dessa forma é um tensor contravariante. O mesmo pode ser feito generalizando vetores covariantes e vendo-os como componentes de um tensor covariante. Há ainda um outro tipo de tensor, chamado tensor misto, que possui propriedades contravariantes e covariantes. Um tensor misto é dado pela equação de transformação

$$\bar{A}^i \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k B_l. \quad (2.7)$$

É relativamente simples generalizarmos esses conceitos para tensores de ordens maiores. Um exemplo de ordem 3 será suficiente para verificarmos isto. A_{jk}^i é um tensor misto de ordem 3 se obedece à lei de transformação

$$\bar{A}_{jk}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A_{st}^r. \quad (2.8)$$

Os componentes de um tensor podem ser valores arbitrários dados em um sistema de coordenadas, e seus valores em outro sistema arbitrário serão determinados pela lei de transformação. Considere o tensor misto de segunda ordem cujos componentes no sistema x^i são o delta de Kronecker δ_j^i . Os componentes no sistema \bar{x}^i são $\bar{\delta}_j^i$, onde $\bar{\delta}_j^i = \delta_j^i$. Portanto, este tensor tem os mesmos componentes em qualquer sistema de coordenadas e é chamado tensor fundamental misto.

2.0.2 Derivadas Covariantes

Até este ponto, a álgebra de tensores foi estabelecida. Agora, devemos introduzir alguns conceitos de análise tensorial, principalmente, como trabalharemos com o conceito de derivação. Temos um problema inicial que deve ser tratado: se pegarmos ϕ um vetor covariante, temos que $\partial\phi/\partial x^i$ também é um vetor covariante. Mas, ao diferenciarmos um vetor covariante, o resultado obtido não é um tensor.

Sejam P, P' os pontos $x^i, x^i + dx^i$ e $A_i, A_i + dA_i$ vetores de um campo vetorial associados a esses pontos respectivamente. Como a lei de transformação de tensores varia de ponto a ponto em R_N , segue que dA_i não é um vetor. No entanto, temos

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j. \quad (2.9)$$

- Notação: A fim de agilizar a notação utilizada, denotaremos $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = A_{i,j}$.

Se $A_{i,j}$ fosse um tensor, dA_i seria vetor. Logo, $A_{i,j}$ não é um tensor. Para definirmos $A_{i,j}$ devemos comparar os valores assumidos pelo campo vetorial A_i em dois pontos vizinhos distintos. Tal comparação não nos leva a um tensor. Para resolver este problema, mudamos o procedimento.

Se comparamos dois vetores definidos no mesmo ponto, obteremos uma equação 2.9 modificada, com uma nova forma de derivada, que é um tensor. Para isso, precisamos do conceito de transporte paralelo. Suponha que A_i seja transportado do ponto P para o ponto vizinho P' sem mudança na magnitude e na direção, de forma que seja o mesmo vetor definido agora em outro ponto. Em R_N , componentes do vetor em P' serão $A_i + \delta A_i$. Podemos comparar este vetor com $A_i + dA_i$, também definido em P' . Como os dois vetores são definidos no mesmo ponto, sua diferença $dA_i - \delta A_i$ é um vetor neste ponto. A equação 2.9 modificada é

$$dA_i - \delta A_i = A_{i;j} dx^j \quad (2.10)$$

e $A_{i;j}$ é um tensor, chamado de derivada covariante de A_i .

Devemos nos certificar que nossa definição de transporte paralelo (infinitesimal) de A_i de P a P' está de acordo com a adotada em um sistema euclidiano E_N . Suponhamos, portanto, que nosso espaço é agora euclidiano, e que y^i são coordenadas cartesianas neste espaço. Sejam B_i as componentes do campo vetorial A_i com respeito à essas coordenadas, então

$$A_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} B_j, \quad B_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j.$$

Se fazemos transporte paralelo do vetor A_i ao ponto P' , as componentes cartesianas B_i não serão alteradas, isto é, $\delta B_i = 0$. Portanto, segue que

$$\delta A_i = \delta \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) B_j = \delta \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) B_j = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} dx^k B_j. \quad (2.11)$$

Substituindo isto na segunda equação de (2.0.2), obtemos

$$\delta A_i = \Gamma_{ik}^l A_l dx^k. \quad (2.12)$$

onde

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}. \quad (2.13)$$

Isto mostra que em um espaço euclidiano, δA_i são formas bilineares em A_l e dx^k . Em R_N , definiremos δA_i pela equação (2.12), determinando os N^3 coeficientes Γ_{ik}^l de forma arbitrária em cada ponto do espaço, desde que, claro, os Γ_{ik}^l sejam funções contínuas de x^i e possuam derivadas parciais contínuas nas ordens necessárias. O conjunto dos Γ_{ik}^l é chamado afinidade, e especifica uma conexão afim entre pontos de R_N . A conexão afim conecta espaços tangentes à uma variedade, permitindo que campos vetoriais tangentes possam ser diferenciados como se fossem funções sobre a variedade. Um espaço conectado afinamente possui estrutura que permite operações tensoriais. Agora, podemos escrever a equação da diferença entre os vetores da seguinte forma:

$$dA_i - \delta A_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k \right) dx^j \quad (2.14)$$

Como já explicado, o lado esquerdo desta equação é um vetor, donde $A_{i;j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k$ é um tensor covariante, a derivada covariante de A_i .

Feito isso, podemos estender o conceito de derivada covariante para tensores de qualquer ordem e tipo. Para isso, note que se V é um campo invariante, ao fazermos o transporte paralelo seu valor não se altera, e portanto, $\delta V = 0$. Logo,

$$dV - \delta V = \frac{\delta V}{\delta x^i} dx^i. \quad (2.15)$$

Neste caso, a derivada covariante é idêntica à derivada parcial ou gradiente do campo. Agora, seja B^i campo vetorial contravariante, e A_i um vetor contravariante arbitrário. Sabemos que $A_i B^i$ é invariante, logo

$$\delta(A_i B^i) = \delta A_i B^i + A_i \delta B^i = 0. \quad (2.16)$$

Como já sabemos a equação de δA_i , podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$A_k \delta B_k = -\Gamma_{ij}^k A_k dx^j B^i. \quad (2.17)$$

E, como A_k é arbitrário, seus coeficientes podem ser igualados de forma a obtermos o seguinte:

$$\delta B_k = -\Gamma_{ij}^k B^i dx^j. \quad (2.18)$$

A equação encontrada acima define o transporte paralelo de um vetor contravariante. De forma análoga à apresentada na seção anterior, podemos obter a derivada covariante deste vetor:

$$B_{;j}^k = \frac{\delta B^k}{\delta x^j} + \Gamma_{ij}^k B^i \quad (2.19)$$

é a derivada covariante do vetor B^k .

Se temos agora A_j^i um campo tensorial, procedendo da mesma forma, consideramos transporte paralelo do invariante $A_j^i B_i C^j$, onde B_i e C^j são vetores arbitrários. Da mesma forma, sabemos que $\delta(A_j^i B_i C^j) = 0$. Deduzimos, de forma análoga, a derivada covariante:

$$A_{j;k}^i = \frac{\delta A_j^i}{\delta x^k} - \Gamma_{jk}^l A_l^i + \Gamma_{lk}^i A_j^l. \quad (2.20)$$

A partir de análise desta equação, podemos obter a derivada covariante de qualquer tensor. Como, por exemplo, do Tensor Fundamental Misto (δ_j^i)

$$\delta_{j;k}^i = \Gamma_{rk}^i \delta_j^r - \Gamma_{jk}^r \delta_r^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i = 0. \quad (2.21)$$

Em um espaço euclidiano, um vetor A^i , quando transportado paralelamente para um ponto próximo, tem $\delta A^i = 0$. Numa curva fechada, se $A^i + \delta A^i$ é o retorno do vetor ao ponto inicial, então $\delta A^i = 0$. Se nosso espaço R_N conectado afinamente não é euclidiano, então não é possível, em geral, escolher um sistema de coordenadas onde as afinidades somem em cada ponto. Se A^i é transportado paralelamente na curva fechada C , não podemos assumir que seu retorno ao ponto inicial continua inalterado, isto é, $\delta A^i \neq 0$. Calculemos δA^i quando A^i é transportado paralelamente em torno de C , que engloba um ponto P , de coordenadas x^i . Seja U ponto na curva, de coordenadas $x^i + \epsilon^i$, onde ϵ^i é muito pequeno. Seja V um ponto vizinho de coordenadas $x^i + \epsilon^i + d\epsilon^i$. Fazendo transporte paralelo do vetor A^i de U para V , obtemos

$$\delta A^i = -\Gamma_{jk}^i A^j d\epsilon^k. \quad (2.22)$$

Onde a afinidade e o A^j são calculados em U . Usamos o Teorema de Taylor para centralizar a afinidade em P , e usando o fato de que A^j é o vetor após transporte paralelo de P a U ,

obtemos uma equação toda calculada em P , ponto dentro da curva C .

$$\delta A^i = - \left[\Gamma_{jk}^i A^j + \left(A^j \frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x^l} - \Gamma_{jk}^i \Gamma_{rl}^j A^r \right) \epsilon^l \right] d\epsilon^k. \quad (2.23)$$

Integrando esta equação em torno de C , obtemos o seguinte:

$$\Delta A^i = \left(\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \right) A^j \alpha^{kl}. \quad (2.24)$$

Onde α é um tensor antissimétrico arbitrário. O termo entre parênteses na equação acima não é um tensor. Para resolvermos este problema, basta uma conta simples. Trocando índices da equação, obtemos o seguinte:

$$\Delta A^i = \left(\Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} \right) A^j \alpha^{lk}. \quad (2.25)$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$\Delta A^i = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \right) A^j \alpha^{kl}. \quad (2.26)$$

Agora sim, a expressão que temos é um tensor. Este tensor é antissimétrico, e é chamado Tensor de Riemann-Christoffel, ou Tensor de Curvatura.

$$B_{jkl}^i = \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}. \quad (2.27)$$

Observação: Se contrairmos B_{jkl}^i com respeito à i e l , obtemos um tensor chamado Tensor de Ricci, dado pela equação $R_{jk} = B_{jki}^i$.

2.0.3 Conexão Métrica

No espaço Riemanniano R_N , a distância ds entre pontos vizinhos é dada por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.28)$$

Tal relação entre todos pares de pontos adjacentes é chamada conexão métrica, e ds^2 é chamada métrica. g_{ij} é chamado tensor covariante fundamental. Sejam B^i as componentes de um vetor no sistema cartesiano. Neste sistema, covariantes e contravariantes são indistinguíveis, isto é, $B_i = B^i$.

Porém, se olharmos para um sistema χ de coordenadas curvilineares, então podemos abaixar e subir índices de vetores da seguinte forma:

$$A_i = g_{ij} A^j \quad (2.29)$$

$$B^i = g^{ij} B_j. \quad (2.30)$$

Para tensores, definimos:

$$A_{jk}^i = g_{jr} A_k^{ir} \quad (2.31)$$

Como um exemplo, $g_j^k = g^{ki} g_{ij} = \delta_j^k$, g_{ij} , g^{ij} e δ_j^i são vistos, respectivamente, como os componentes covariante, contravariante e misto de um mesmo tensor fundamental.

2.0.4 Símbolos de Christoffel

Definição 2.2 *Um sistema de coordenadas é chamado **geodésico** em um ponto quando os componentes do tensor métrico são estacionários neste ponto, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ no ponto.*

Se $x^i = a^i$ são as coordenadas de um ponto A num sistema 1, suponha que transformamos para um novo sistema pela seguinte equação quadrática

$$x^i = a^i + \bar{x}^i + \frac{1}{2} a_{jk}^i \bar{x}^j \bar{x}^k \quad (2.32)$$

Onde $\bar{x}^i = 0$ em A e $a_{jk}^i = a_{kj}^i$. Diferenciando essa expressão e calculando no ponto A , obtemos

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_j^i \quad (2.33)$$

$$(2.34)$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = a_{jk}^i \quad (2.35)$$

Temos $\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} g_{rs}$. Diferenciando a expressão, obtemos

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} = a_{ik}^r g_{rj} + a_{jk}^s g_{is} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (2.36)$$

Como queremos trabalhar em um sistema geodésico, escolhemos os coeficientes a_{jk}^i de forma que a equação anterior se anule. Escrevendo $a_{ik}^r g_{rj} = a_{ikj}$, é necessário que tenhamos

$$a_{ikj} + a_{jki} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (2.37)$$

Agora, permutamos os índices e podemos obter três equações a partir da mostrada acima. Somando as expressões encontradas, temos

$$a_{ijk} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = -[ij, k]. \quad (2.38)$$

O colchete $[ij, k]$ é chamado Símbolo de Christoffel de primeira ordem. É simétrico em i, j , não é um tensor. Com a equação acima, podemos ver que a condição (2.37) é satisfeita. A partir disso, se subirmos o índice k da equação anterior, obtemos a expressão

$$a_{ij}^k = g^{kr} a_{ijr} = -g^{kr} [ij, r] = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\} \quad (2.39)$$

O termo $\left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\}$ é chamado Símbolo de Christoffel de segunda ordem.

Podemos destacar as seguintes relações:

$$[ij, k] = g_{kr} \Gamma_{ij}^r \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\} \quad (2.41)$$

Ou seja, o símbolo de Christoffel de segunda ordem coincide com as afinidades.

2.0.5 Tensor de Curvatura Covariante

Os coeficientes do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel B_{jkl}^i não são todos independentes. No entanto, se a afinidade é simétrica, é fácil verificar a relação

$$B_{jkl}^i + B_{klj}^i + B_{ljk}^i = 0 \quad (2.42)$$

Se a afinidade é métrica, podemos abaixar o índice i do Tensor de Riemann-Christoffel, e obteremos um tensor de curvatura completamente covariante, onde a mesma relação expressada acima vale. Assumindo um sistema geodésico, deduzimos a equação

$$B_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) \quad (2.43)$$

Além disso, é fácil verificar que o tensor de curvatura covariante satisfaz às seguintes relações: $B_{ijkl} = B_{jikl}$, $B_{ijkl} = -B_{ijlk}$ e $B_{ijkl} = B_{klij}$

2.0.6 Geodésicas

Seja C uma curva qualquer num espaço R_N com métrica como definida anteriormente, e s um parâmetro definido em C tal que, se $s, s + ds$ são seus valores nos pontos P, P' respectivamente, ds é o intervalo entre esses pontos. Se x^i são as coordenadas de qualquer ponto P em C , então a curva é definida por $x^i = x^i(s)$. Como dx^i é o comprimento de um vetor e ds é invariante, segue que $\frac{dx^i}{ds}$ é um vetor contravariante, chamado de vetor tangente unitário à curva em P .

Suponha que C possua a propriedade de que as tangentes em todos pontos da curva são paralelas, isto é, a direção da curva é constante ao longo de seu comprimento. Esta propriedade independe do sistema de coordenadas. Em E_3 , tal curva seria claramente uma reta. Em R_N tal curva é chamada uma geodésica. Nestas condições, se o vetor tangente unitário em P é transportado paralelamente a P' , será idêntico ao vetor tangente unitário de P' . Pela equação (2.18), as componentes do tangente unitário após transporte paralelo de P a P' são

$$\frac{dx^i}{ds} + \delta \left(\frac{dx^i}{ds} \right) = \frac{dx^i}{ds} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} dx^k \quad (2.44)$$

E o tangente unitário em P' tem componentes

$$\left(\frac{dx^i}{ds} \right)_{s+ds} = \frac{dx^i}{ds} + \frac{d^2x^i}{ds^2} ds \quad (2.45)$$

Igualando as equações 2.44 e 2.45, obtemos

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (2.46)$$

Se essas equações são satisfeitas em cada ponto da curva, ela é uma geodésica.

3 Relatividade Geral

Neste capítulo, mesclamos as abordagens usadas nas referências (3) e (2).

3.1 O Princípio da Equivalência

Sob influência da gravidade, todos os corpos caem com a mesma aceleração, se desconsideramos os efeitos da resistência do ar. Tal fato é uma simples consequência das leis da mecânica formulados por Isaac Newton. No ano de 1969, o astronauta Neil Armstrong realizou o experimento de soltar uma pena e um machado na lua, onde não há efeito de resistência do ar. Consequentemente, os dois objetos caíram ao mesmo tempo no solo.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, a força necessária para imprimir uma dada magnitude à aceleração de um objeto é proporcional à massa do objeto, isto é, demanda mais força para acelerar um objeto mais pesado. Todos os corpos caem com a mesma aceleração pois, de acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força exercida pela gravidade em um dado objeto é proporcional à massa do objeto.

Albert Einstein se sentia muito incomodado com estes conceitos de massa, pois a massa que aparece na Segunda Lei de Newton é massa inercial, a medida da resistência de um objeto à mudança no movimento, isto é, aceleração. Enquanto que a massa presente na Lei da Gravitação é massa gravitacional, medida da resposta de um objeto à atração gravitacional. A relação entre as duas massas jamais havia sido explicada satisfatoriamente. Einstein resolveu a questão da natureza dual da massa com um princípio elegante, a partir do que ele próprio chamava de "experimento mental".

Considere um prédio muito alto, no qual, em um dado momento, os cabos do elevador são cortados, e ele entra em movimento de queda livre. Ignoramos aqui o efeito da resistência do ar. Como o elevador e todos seus passageiros caem com a mesma aceleração relativa ao chão, eles não têm aceleração relativa um ao outro, isto é, em relação ao passageiro **B**, o passageiro **A** está em repouso. Imagine que um dos passageiros está carregando um bolo. Se ele soltar o bolo, este irá aparentar estar flutuando ao lado de seu dono. Se ele empurrar o bolo, este se afastará do passageiro em uma linha reta, com velocidade constante relativa ao passageiro.

Logo, o elevador em queda livre aparenta ser um sistema de referência inercial. Se os passageiros não soubessem onde estão, poderiam muito bem acreditar que estão flutuando em uma estação espacial. De acordo com o *Princípio da Equivalência* de Albert Einstein, o elevador em queda livre e a estação espacial flutuante são completamente equivalentes, pois nenhum experimento interno poderia determinar em qual dos lugares você realmente se encontra.

Como é impossível, pelo exemplo acima, determinar se o seu estado sem peso é provocado pelo movimento acelerado ou pela falta de campo gravitacional, então gravidade e aceleração não têm mais um significado absoluto, dependendo da escolha do observador, ou melhor, do sistema de coordenadas. Daremos um segundo exemplo a seguir.

Imagine uma equipe de cientistas dentro de um foguete sem janelas no espaço, longe de qualquer influência gravitacional. Agora, os motores do foguete são ligados, e este se move com aceleração constante, relativa à qualquer observador inercial. Graças à esta aceleração, os cientistas serão pressionados contra a parede da cabine, na direção oposta da aceleração. Tal parede se tornará, para eles, o "chão", e a parede oposta será o "teto". Se um deles estivesse segurando um bolo e o soltasse, este cairia para o "chão". Isto acontece devido à Lei da Inércia, pela qual o pacote continua, relativo à um observador inercial, em estado de movimento uniforme com a velocidade que tinha no momento em que foi solto, enquanto o foguete e seus passageiros estão constantemente ganhando velocidade.

Portanto, se a aceleração do foguete fosse a mesma do elevador em queda livre ($9,8m/s$), os cientista poderiam pensar que estão em um laboratório sem janelas na Terra, sob influência do campo gravitacional. Os resultados de qualquer experimento dentro do foguete serão iguais aos de tal laboratório na Terra.

Em suma, o Princípio da Equivalência nos diz que não há como distinguir os efeitos da aceleração aos da gravitação, isto é, aceleração e gravitação são equivalentes, donde a equivalência se verifica para a massa inercial e gravitacional.

Uma consequência importante do Princípio da Equivalência é que os raios de luz são curvados por um campo gravitacional. Suponha que o foguete acelerando tem uma janela, pela qual entra um raio de luz. Assumimos que a direção do raio é perpendicular à direção da aceleração do foguete. Para um observador em inércia fora do foguete, a luz viaja em linha reta até a parede oposta da cabine. No entanto, no tempo que leva para a luz viajar até a parede oposta, o foguete terá se movido uma distância muito pequena. Consequentemente, o raio de luz irá atingir a parede um pouco abaixo do que iria caso o foguete estivesse sem aceleração. Logo, para os cientistas no interior, o raio de luz se curvou. Pelo Princípio da Equivalência, o raio de luz também deve se curvar em um laboratório na Terra. Porém, tal curvatura é tão pequena que é imperceptível, por isso tal fato não era conhecido antes de Einstein formular sua nova Teoria da Gravitação.

Daremos agora uma demonstração matemática do Princípio da Equivalência no caso em que a aceleração relativa de dois observadores tem magnitude e direção constante. Considere uma coleção de partículas m_1, \dots, m_n interagindo de tal forma que cada partícula exerce uma força em cada uma das outras partículas. Para $i \neq j$, seja F_{ij} a força que exercida pela i -ésima partícula na j -ésima partícula. Assumimos que tal força tem mesma direção da reta entre as partículas, e que é uma função da distância entre elas. Neste caso, $F_{ij} = -F_{ji}, \forall i, j$.

O observador 1 trabalha no sistema de coordenadas x, y, z, t , enquanto o observador 2 no sistema de coordenadas x', y', z', t' . Assuma que as velocidades são pequenas, tal que possamos considerar $t = t'$, isto é, uma análise não relativística basta. Usemos a notação

$$\mathbf{X} = (x, y, z), \mathbf{X}' = (x', y', z')$$

e \mathbf{X}_i e \mathbf{X}'_i para denotar a localização da i -ésima partícula no sistema de coordenadas dos observadores 1 e 2, respectivamente.

Se o primeiro observador acredita estar sob presença de um campo gravitacional uniforme, tal que, relativo a ele, todas partículas livres caem com a mesma aceleração, dada por um vetor g de componentes constantes, então suas equações de movimento são, para o observador 1 :

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{X}_i}{dt^2} = m_i g + \sum_{j \neq i} F_{ji}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Agora suponha que o observador 2 está em queda livre relativa ao observador 1, de forma que

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \frac{1}{2} g t^2,$$

isso significa que o sistema 2 está acelerando em relação ao sistema 1, e vice-versa. Diferenciando duas vezes, obtemos que, para cada i ,

$$\frac{d^2 \mathbf{X}_i}{dt^2} + g \tag{3.1}$$

e então, substituindo a equação acima em (3.1), obtemos a equação de movimento em termos das coordenadas do observador 2

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{X}'_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} F_{ji}$$

Note que os efeitos da gravidade não aparecem na equação de movimento relativa às coordenadas do observador 2. De fato, para este observador, não há nenhum campo gravitacional atuando. O primeiro observador diria que isso acontece graças ao estado "sem peso" criado pela queda livre, logo, o observador 2 pensaria que não há gravidade atuando. Por outro lado, o observador 2 pensaria que, de fato, não há campo gravitacional, e a aceleração de 1 relativa ao observador 2 faz o observador 1 pensar que está em um campo gravitacional.

Neste caso, os dois observador estariam certos em sua argumentação, já que ambos pontos de vista são válidos pelo Princípio da Equivalência. Em suma, o Princípio da

Equivalência coloca todos os sistemas de referência em pé de igualdade, sejam eles inerciais ou não.

3.2 Gravidade como Curvatura do Espaço-Tempo

Nos exemplos de experimentos mentais dados no último capítulo, consideramos que o campo gravitacional é uniforme, isto é, para um observador inercial, todos os corpos caem com a mesma magnitude e direção de aceleração. No entanto, esta é apenas uma aproximação. Na realidade, a aceleração devida à gravidade varia de ponto a ponto.

Pense, por exemplo, em duas partículas teste separadas horizontalmente, inicialmente em repouso relativamente à uma cápsula caindo na superfície da Terra. Como ambas as partículas estão caindo em direção ao centro da Terra, a distância entre elas deve diminuir em uma taxa que aumenta gradativamente. Por consequência, ambas as partículas não permanecem em repouso em relação à cápsula.

De forma parecida, se elas estiverem separadas verticalmente, a partícula que estiver mais próxima do centro da Terra irá adquirir uma maior aceleração, e a distância vertical entre elas aumentará.

Tais efeitos, chamados de *efeitos de maré* da gravidade são devidos à não uniformidade no campo gravitacional da Terra, isto é, a gravidade varia de ponto a ponto. Em uma escala global, efeitos tidais são responsáveis pelas marés oceânicas, mas na escala do exemplo que apresentamos, tais efeitos são pequenos. Logo, se duas partículas estão muito próximas, e se observarmos a cápsula espacial apenas por um curto período de tempo, não é possível detectar a presença de um campo gravitacional, pois as mudanças na aceleração serão imperceptíveis à nossos aparelhos de medida. Neste caso, o sistema de referência da cápsula seria inercial.

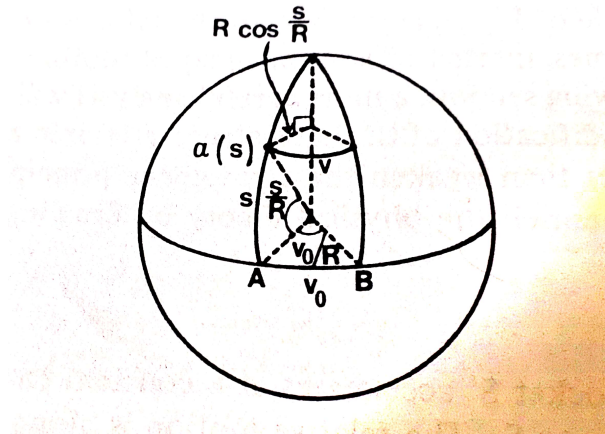
Enunciamos novamente o Princípio da Equivalência, desta vez da seguinte forma :

Para cada ponto no espaço tempo (eventos) e para um dado grau de precisão, existe um sistema de referência no qual, em uma certa região do espaço e para um certo intervalo de tempo (em outras palavras, em uma vizinhança suficientemente pequena de espaço-tempo do evento), os efeitos da gravidade podem ser negligenciados, e o sistema é inercial.

Tal sistema de referência será chamado *sistema localmente inercial*, e o observador em queda livre em repouso em tal sistema será chamado *observador localmente inercial*.

Como vimos, na presença de um campo gravitacional, duas partículas testes, inicialmente se movendo com mesma velocidade ao longo de caminhos paralelos irão ganhar aceleração uma em relação à outra, e não se moverão mais em caminhos paralelos. Podemos fazer uma analogia clara com uma situação geométrica, usando a esfera como superfície. Imagine duas partículas viajando em uma esfera, saindo de dois pontos distintos no Equador e partindo ao longo de grandes círculos. Inicialmente, o caminho traçado entre

as partículas é paralelo, no entanto, sabemos que as partículas irão se encontrar no Polo Norte, como mostra a figura abaixo:



– Círculos Máximos, Fonte: Ref. 1

Seja $\alpha(s)$ a parametrização por comprimento de arco de uma das geodésicas, onde $\alpha(0)$ está no equador, e seja $v(s)$ a distância das geodésicas a partir de $\alpha(s)$. Daí, podemos mostrar que

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} = 0$$

Como a curvatura Gaussiana da esfera é $1/R^2$, podemos reescrever a equação como

$$\frac{d^2v}{ds^2} + K v = 0$$

A equação obtida, chamada *Equação de Jacobi* ou *Equação do Desvio da Geodésica*, também se verifica para uma superfície arbitrária onde a curvatura varia de ponto a ponto, desde que v seja definido de forma apropriada. Em uma superfície de curvatura negativa, por exemplo, geodésicas inicialmente paralelas irão se distanciar em vez de aproximarem-se.

A semelhança entre a aceleração relativa das partículas livres em um campo gravitacional não uniforme e o distanciamento de geodésicas próximas em uma superfície

curvada não é mera coincidência. A partir de seu Princípio da Equivalência, Albert Einstein concluiu que a gravidade não é uma força, mas sim, a curvatura do espaço-tempo. Assim como uma ímã gera um campo magnético em seu entorno, um objeto massivo gera um campo gravitacional que distorce, ou "curva", o espaço-tempo ao seu redor.

3.3 Geodésicas

Como visto na seção anterior, a teoria da relatividade geral interpreta o movimento de um objeto livre não como resposta à uma força, mas como um movimento sem restrições ao longo de uma geodésica em 4 dimensões. O espaço-tempo é visto como uma 4-variedade semi-Riemanniana, com forma métrica

$$(d\tau)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

em cada sistema de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) .

- Observação: Poremos letras gregas para indicar índices que assumem os valores 1, 2, 3, 4.

Um vetor $v = v^\mu \partial/\partial x^\mu$ será chamado tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço se o número

$$\langle v, v \rangle = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

assume valor positivo, nulo ou negativo, respectivamente.

Definição 3.1 *Uma curva no espaço-tempo é uma geodésica se existe uma parametrização $x^\lambda(\rho)$ satisfazendo*

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\rho^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} = 0 \quad (3.2)$$

Teorema 3.1 *Seja α uma curva tipo tempo que minimiza a distância de espaço-tempo entre seus pontos inicial e final. Então, α é uma geodésica*

Teorema 3.2 *Dado um evento \mathbf{P} e um vetor não-nulo v em \mathbf{P} , existe uma única geodésica $\alpha = \alpha(\rho)$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{P}$ e $\alpha'(0) = v$.*

Para v tipo-tempo, o Teorema (3.2) acima incorpora o princípio de que todas partículas caem com a mesma aceleração quando em influência do mesmo campo gravitacional, já que o caminho de espaço-tempo depende apenas das condições iniciais $\alpha(0)$ e $\alpha'(0)$.

Einstein postulou que a trajetória de uma partícula livre é uma geodésica tipo tempo no espaço-tempo. Os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ na equação tensorial de geodésicas determinam o desvio do caminho "reto" $\frac{d^2x^\lambda}{d\rho^2} = 0$. Podemos, portanto, pensar nos símbolos de Christoffel como componentes do campo gravitacional.

3.4 As Equações de Campo

Na seção anterior, vimos que as partículas seguem geodésicas no espaço tempo. Assim, descrevemos como a geometria do espaço tempo influencia a matéria. A fim de completarmos a teoria, devemos descrever como a matéria determina a geometria, isto é, devemos apresentar um conjunto de equações relacionando os coeficientes métricos à distribuição de matéria. Estas são as famosas Equações de Campo de Einstein.

Faremos com maiores detalhes apenas o caso do campo gravitacional fora de uma massa \mathbf{M} com simetria esférica e isolada, como, por exemplo, o campo gravitacional gerado pelo sol, ignorando os efeitos perturbadores dos planetas em órbita. A fim de entendermos melhor porque Einstein escolheu tais equações, olhemos antes para a Lei da Gravitação de Isaac Newton.

Considere uma massa pontual \mathbf{M} na origem de um sistema de coordenadas cartesiano tridimensional, representado por (x, y, z) ou (x^1, x^2, x^3) . Seja $X = (x, y, z)$ e

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \|X\| \quad (3.3)$$

Seja u_r o vetor radial unitário, $u_r = \frac{1}{r}\|X\|$. Pela Lei da Gravitação de Newton, temos

$$F = -\frac{Mm}{r^2}u_r \quad (3.4)$$

Combinando com a Segunda Lei de Newton, dada por

$$F = m\frac{d^2X}{dt^2} \quad (3.5)$$

obtemos

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{M}{r^2}u_r \quad (3.6)$$

Definimos a função potencial $\Phi = \Phi(r)$ por

$$\Phi = -\frac{M}{r}, \quad r > 0$$

Como

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (X \cdot X)^{1/2} = \frac{2x^i}{2(X \cdot X)^{1/2}} = \frac{x^i}{r}, \quad i = 1, 2, 3$$

e $\partial\Phi/\partial x^i = (\partial\Phi/\partial r)(\partial r/\partial x^i)$, temos

$$-\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -\frac{M}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -\frac{M}{r^2} u_r = \frac{d^2 X}{dt^2}$$

ou, em coordenadas,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Agora, diferenciando a relação

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = \frac{Mx^i}{r^3}$$

obtemos

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i} = M \left[\frac{r^3 - 3(x^i)^2 r}{r^6} \right] = \frac{M}{r^5} (r^2 - 3(x^i)^2)$$

e somando, obtemos a equação de Laplace

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Tal equação é válida em todo ponto exceto na origem, onde a massa está localizada. Esta é a equação para a função potencial no "espaço vazio" em torno de uma massa pontual isolada.

Para uma distribuição contínua de matéria em uma região do espaço, a equação de Laplace é substituída pela equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho,$$

onde $\rho = \rho(X)$ é a densidade de matéria em X .

Em relatividade, podemos substituir a expressão

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3$$

pelas equações

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

com $\lambda = 0, 1, 2, 3$, que contém as derivadas parciais de primeira ordem dos coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$, pois

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

Aqui, os coeficientes métricos fazem o papel de funções potenciais gravitacionais na teoria de Einstein. Daqui pra frente, esperamos que as equações de campo no espaço vazio sejam um sistema de equações do tipo

$$G = 0$$

onde G é uma expressão envolvendo as derivadas parciais de segunda ordem dos potenciais $g_{\mu\nu}$. Como discutido anteriormente, é esperado também que G tenha algo a ver com curvatura, já que estamos olhando para a gravidade como curvatura do espaço-tempo.

Os únicos tensores construídos dessa maneira são os componentes do Tensor de Curvatura $R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}$, introduzidos no primeiro capítulo,

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\sigma}^{\lambda}$$

As equações de campo devem ter como possível solução o espaço-tempo plano considerado na Relatividade Especial. Em coordenadas apropriadas (Lorentz), todos $g_{\mu\nu}$ são constantes, e portanto,

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = 0$$

para $\lambda, \mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3$

Apesar deste sistema ser um bom candidato para as equações de campo, é muito restritivo exigir um sistema de coordenadas onde os coeficientes métricos são todos constantes. Daí, podemos tomar $\sigma = \lambda$ e somar a equação anterior sobre λ , e obtemos a equação do *Tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda}$$

Einstein escolheu, como suas equações de campo para campo gravitacional em espaço vazio,

$$R_{\mu\nu} = 0, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

Algumas observações devem ser feitas sobre as equações de campo

- O tensor de Ricci é simétrico, isto é, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

- A escolha de Einstein envolveu sim um certo "trabalho de adivinhação", mas algumas considerações matemáticas e físicas limitaram enormemente o número de possibilidades. No fim, a justificativa para tal escolha é a concordância entre as previsões teóricas e os fenômenos observados.

- Para uma partícula se movendo em um campo gravitacional fraco estático, as previsões da relatividade geral devem estar de acordo com as da Física Clássica.

3.5 A Solução de Schwarzschild

Nesta seção, iremos resolver as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 0, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

para um campo gravitacional fora de uma massa \mathbf{M} com simetria esférica e isolada, assumindo que ela está em repouso na origem de nosso sistema de coordenadas.

A forma da métrica da relatividade especial é dada por

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

onde nosso espaço é "plano". Se nossa massa \mathbf{M} é uma estrela convencional, como nosso Sol, o "desvio" da planicidade não é muito grande, logo, a métrica difere apenas ligeiramente da apresentada acima.

Faremos agora uma mudança de coordenadas usual para coordenadas esféricas ρ , ϕ e θ .

$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta)$$

$$z = \rho \cos(\phi)$$

Escrevendo a métrica em função das novas coordenadas, temos

$$d\tau^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - \rho^2 \operatorname{sen}(\phi)^2 d\theta^2$$

Esta ainda é a métrica do espaço-tempo plano. Devemos agora modificar a equação acima com o intuito de produzir a métrica do espaço-tempo curvo em torno de nossa massa \mathbf{M} .

Começemos por algumas informações imprescindíveis. Primeiro, sabemos que a nossa métrica deve ser estática, isto é, com coeficientes que não dependam de t . Além

disso, também devemos ter simetria esférica. Daí, podemos assumir que teremos uma expressão do tipo

$$d\tau^2 = U(\rho)dt^2 - V(\rho)d\rho^2 - W(\rho)(\rho^2d\phi^2 + \rho^2 \text{sen}^2\phi d\theta^2)$$

onde U , V e W são funções de ρ que diferem ligeiramente da unidade. Se definimos $r = \rho W(\rho)^{1/2}$, podemos escrever a expressão da métrica da seguinte forma

$$d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\phi^2 - r^2 \text{sen}^2\phi d\theta^2$$

Definimos as funções $m = m(r)$ e $n = n(r)$ por

$$e^{2m} = A \text{ e } e^{2n} = B$$

e daí temos

$$d\tau^2 = e^{2m}dt^2 - e^{2n}dr^2 - r^2d\phi^2 - r^2 \text{sen}^2\phi d\theta^2$$

Comparando esta com a expressão geral

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

e chamando

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = \theta$$

temos a matriz da métrica

$$\begin{pmatrix} e^{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\phi \end{pmatrix}$$

com determinante

$$g = -e^{2m+2n}r^4 \text{sen}^2\phi$$

Devemos agora determinar as funções m e n . Para isso, devemos calcular os símbolos de Christoffel em função de m e n e, em seguida, substituí-los nas equações de Einstein. Ocultaremos aqui as contas. O resultado que encontramos é o sistema de equações

$$\begin{aligned}
R_{00}/e^{2m-2n} &= \left(-m'' + m'n' - m'^2 - \frac{2m'}{r} \right) = 0 \\
R_{11} &= m'' - m'n' + m'^2 - \frac{2n'}{r} = 0 \\
R_{22} &= e^{-2n}(1 + rm' - rn') - 1 = 0 \\
R_{33} &= R_{22} \text{sen}^2\phi = 0
\end{aligned}$$

(Obs: todos outros $R_{\mu\nu}$ são zero)

onde, somando as duas primeiras, obtemos a expressão $m' + n' = 0$, donde segue que $m + n = b$, sendo b constante. No entanto, m e n devem sumir quando $r \rightarrow \infty$, pois a métrica se aproxima da métrica de Lorentz à grandes distâncias da massa \mathbf{M} . Por conseguinte, $b = 0$ e $n = -m$. Daí, da terceira equação do sistema obtemos

$$1 = (1 + 2rm')e^{2m} = (re^{2m})'$$

Então, resolvendo a EDO,

$$re^{2m} = r + C$$

para alguma constante C , ou, rearranjando,

$$g_{00} = e^{2m} = 1 + C/r$$

Como vimos na seção anterior, quando à longas distâncias da massa \mathbf{M} , onde o campo é fraco, a Teoria de Newton se sustenta, e devemos ter $g_{00} = 1 - 2M/r$. Logo, temos $C = -2M$. Finalmente, depois de muito trabalho, temos a solução

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \text{sen}^2\phi d\theta^2$$

Tal expressão foi obtida por Schwarzschild em 1916, apenas poucos meses após a publicação do artigo de Einstein sobre a Teoria da Relatividade Geral.

3.6 Órbitas na Teoria de Newton

Nesta seção, faremos uma breve abordagem sobre as órbitas na teoria newtoniana, isto é, sem efeitos relativísticos. Consideremos o caso de um planeta orbitando uma estrela. Newton mostrou que uma massa esféricamente simétrica age como uma "massa pontual" em relação à gravidade, como se toda sua massa estivesse concentrada no centro. Fixemos a estrela no centro de um sistema de coordenadas retangular, e consideremos r como a distância entre os centros da estrela e dos planetas.

Seja $\mathbf{X}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ a posição do planeta como função do tempo t , e sejam M e m as massas da estrela e do planeta, respectivamente. Como $F = M\mathbf{X}''$ (força no planeta) é radial, \mathbf{X}'' e \mathbf{X} são proporcionais, donde é fácil demonstrar que a órbita é planar.

Orientamos nossos eixos de modo que o planeta se mova no plano $x^1 x^2$, com a estrela na origem. Sejam r, θ as coordenadas polares correspondentes, sendo $x^1 = r \cos \theta$ e $x^2 = r \sin \theta$. Logo, r e θ são funções do tempo ao longo da órbita. Sejam u_r e u_θ os vetores unitários definidos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} u_r &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ u_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

Estes são os vetores unitários na direção radial e transversal, respectivamente. A partir de agora, omitiremos as contas mais longas, pois o objetivo é chegarmos na teoria relativística e apenas compararmos os resultados.

Escrevemos $\mathbf{X}(t) = ru_r$. Agora, usaremos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} u_\theta \\ \frac{du_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} u_r \end{aligned}$$

e diferenciaremos a expressão de $\mathbf{X}(t)$ duas vezes. O resultado que encontraremos, depois de uma certa manipulação algébrica, é

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \text{ (constante)}$$

Obs : $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ é a taxa na qual o vetor radial \mathbf{X} varre a área enquanto o planeta atravessa sua órbita, e portanto, está estabelecida a Segunda Lei de Kepler.

Mais manipulações algébricas nos dão a equação

$$-\frac{M}{r^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Combinando as duas últimas equações deduzidas e multiplicando o resultado por r^2/h^2 , obtemos

$$-\frac{r^2}{h^2} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{r} = \frac{M}{h^2}.$$

Faremos agora a mudança de variável $u = 1/r$, donde obtemos a EDO

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{M}{h^2}.$$

Note que temos uma solução particular dada por $u = M/h^2$. Combinamos esta com a solução da homogênea, e após mais manipulações algébricas, chegamos finalmente na equação orbital desejada

$$u = \frac{M}{h^2}(1 + k \cos \theta)$$

onde $k = h^2/(Md)$, e d é uma constante de integração.

3.7 Órbitas na Relatividade Geral

Finalmente chegamos à teoria orbital considerando os efeitos relativísticos. Alguém poderia pensar que, sendo as teorias da gravitação de Einstein e de Newton tão diferentes, jamais poderíamos chegar a resultados minimamente próximos quando se trata da órbita de um planeta. Porém, não é isto que veremos. Afinal, sabemos que para determinados casos a teoria newtoniana prevê muito bem os resultados encontrados na prática. Levando em conta isso, não nos espanta que as duas teorias cheguem em resultados tão similares.

Começamos pela métrica de Schwarzschild

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \phi d\theta^2$$

para descrevermos a geometria do espaço-tempo fora de uma massa M com simetria esférica. De acordo com a teoria de Einstein, um planeta segue uma trajetória de uma geodésica tipo tempo nessa geometria

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\rho^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} = 0 \quad (3.7)$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \phi$ e $x^3 = \theta$.

Como feito na seção *A Solução de Schwarzschild*, temos a equação

$$e^{2m} = 2 - \frac{2M}{r}.$$

Usando os mesmos símbolos de Christoffel diferentes de zero necessários para deduzirmos a métrica de Schwarzschild, e tomando primeiro $\lambda = 2$, obtemos

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - \sin \phi \cos \phi \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0.$$

Consideramos inicialmente o planeta no plano $\phi = \pi/2$. Devido à simetria esférica do campo, o planeta deve permanecer neste plano. Substituindo a equação encontrada

pelas equações geodésicas remanescentes, obtemos um sistema de EDO's, três equações para três variáveis

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\tau^2} + 2m' \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + m' e^{2m-2n} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + n' \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r e^{-2m} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema e manipulando algebricamente, encontramos a seguinte equação

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{M}{h^2} + 3Mu^2$$

onde $u = 1/r$ e $h = r^2 dr/d\theta$ é uma constante.

Note que a expressão encontrada é bem próxima à newtoniana encontrada no capítulo anterior, apenas adicionando o termo relativístico $3Mu^2$, que é normalmente bem pequeno quando comparado à M/h^2 , podendo ser desconsiderado em alguns casos. Isto explica porque a teoria de Newton funciona tão bem em alguns casos, mas é insuficiente em outros. Por exemplo, a razão destes termos para o planeta Mercúrio é de aproximadamente $7,4 \times 10^{-8}$. A órbita de Mercúrio, portanto, difere pouco daquela prevista por Newton. Porém, quando consideramos muitas revoluções, a discrepância entre as duas teorias aparece, com a de Einstein sendo mais precisa.

Podemos dar uma primeira aproximação para a equação acima, dada pela função $u_1 = u_1(\theta)$ e expressa por

$$u_1 = \frac{M}{h^2} (1 + k \cos \theta)$$

onde k é uma constante, como foi mostrado no último capítulo.

Para uma melhor aproximação, substituímos u_1 no termo relativístico $3Mu^2$. Isso nos dá a equação

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{M}{h^2} + \frac{3M^3}{h^4} + \frac{6M^3 k}{h^4} \cos \theta + \frac{3M^3 k^2}{2h^4} + \frac{3M^3 k^2}{2h^4} \cos 2\theta$$

a qual podemos resolver com a ajuda do seguinte resultado

Proposição 1 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

$$u = \alpha \text{ é uma solução de } \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \alpha$$

$$u = \frac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\theta \text{ é uma solução de } \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha \cos\theta$$

$$u = -\frac{\alpha}{3} \cos(2\theta) \text{ é uma solução de } \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha \cos 2\theta$$

Aplicando esta proposição na equação encontrada, temos

$$u = \frac{M}{h^2} \left[1 + \frac{3M^2}{h^2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \right) + k \cos\theta + \frac{3M^2k}{h^2} \theta \operatorname{sen}\theta - \frac{M^2k^2}{2h^2} \cos 2\theta \right]$$

Vamos analisar como os termos extras dentro dos colchetes afetam a órbita, antes elíptica. A constante $3M^2(1 + k^2/2)/h^2$ é bem pequena comparada à unidade (8×10^{-8} para Mercúrio). Por si, este termo não afeta muito a órbita do planeta. Com efeito, pondo

$$\beta = 1 + \frac{3M^2}{h^2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \right)$$

e definindo $k' = k/\beta$, podemos reescrever os primeiros termos da equação orbital como

$$\frac{M\beta}{h^2} (1 + k' \cos\theta).$$

Como $\beta \approx 1$, o efeito dessa constante é descartável, ou seja, não há nenhum efeito de precessão proveniente deste termo.

O termo final nos colchetes, envolvendo $\cos 2\theta$ é, da mesma forma, negligível, também por ser muito pequeno.

O termo crucial é o que envolve $\theta \operatorname{sen}\theta$. Como θ aparece de forma independente, este termo terá um efeito cumulativo sobre muitas revoluções, à medida em que θ aumenta. Tal efeito é chamado precessão do periélio. Isto é, a taxa em que o planeta se aproxima do sol em seu periélio, sua posição mais próxima ao sol. No caso de Mercúrio, tal precessão não podia ser prevista pela teoria de Newton, já que o planeta, a cada periélio, se aproxima mais do sol. Ao adicionarmos os efeitos relativísticos, vemos que a equação orbital dá conta de prever tais efeitos, sendo portanto, mais precisa.

Para uma aproximação, podemos escrever a equação orbital relativística como

$$u \approx \frac{M}{h^2} \left(1 + k \cos\theta + \frac{3M^2k}{h^2} \theta \operatorname{sen}\theta \right).$$

Usando as aproximações

$$\cos\left(\frac{3M^2\theta}{h^2}\right) = 1, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{3M^2\theta}{h^2}\right) = \frac{3M^2\theta}{h^2}$$

válidas pois $M^2/h^2 \approx 10^{-8}$, podemos reescrever a equação orbital como

$$u \approx \frac{M}{h^2} \left[1 + k \cos \left(\theta - \frac{3M^2}{h^2} \theta \right) \right].$$

Assim, o periélio ocorre quando $u = 1/r$ atinge seu valor máximo (ou seja, quando r atinge seu valor mínimo). Da equação, podemos ver que dois periélios vão ocorrer sucessivamente em $\theta = 0$ e em

$$\theta = \frac{2\pi}{1 - \frac{3M^2}{h^2}} \approx 2\pi \left(1 + \frac{3M^2}{h^2} \right).$$

Seja n a quantidade de revoluções num século. Então, a quantidade de avanço na precessão do periélio em 100 anos é dada por

$$\Delta\theta_{100} = n\Delta\theta = \frac{6\pi M^2 n}{h^2}.$$

Após calculado, convertemos o valor para segundos de arco por século, multiplicando-o por $3600 \cdot 180/\pi$. Nesta unidade, as previsões para o avanço na precessão do periélio de Mercúrio são de 43,03, e o observado é $43,11 \pm 0,45$, o que confirma novamente a precisão da teoria desenvolvida por Einstein.

3.8 Buracos Negros

A métrica de Schwarzschild é válida na região de fora de um corpo atraente esféricamente simétrico. Naturalmente, a métrica de Schwarzschild é inválida em $r = 2m$. No caso $0 < r < 2m$, considere um corpo movendo-se radialmente neste região. Neste caso, θ, ϕ são constantes. Por meio de contas simples, verificamos que é impossível para um corpo ser estacionário relativo à nosso sistema de coordenadas nesta região e nestas condições.

No caso em que $r > 2m$, consideramos um corpo caindo livremente ao longo de um raio em direção ao centro de atração da região considerada. Neste caso, observamos que na solução de Schwarzschild, o corpo necessitará de uma coordenada temporal infinita para atingir a esfera $r = 2m$. Por estes dois casos, vemos que nosso sistema de referência é inaceitável se estudamos movimentos através da esfera de Schwarzschild (onde $r = 2m$). Esperamos que o infinito possa ser removido da métrica por meio de uma transformação. Substituímos a coordenada temporal t por

$$u = t + f(r) \tag{3.8}$$

onde $f(r)$ se torna infinitamente negativo em $r = 2m$.

Substituindo, obtemos uma nova equação da métrica

$$ds^2 = F dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + c^2(1 - 2m/r)(2f' dr du - du^2). \quad (3.9)$$

No campo descrito por esta métrica, nenhum fóton ou partícula pode atravessar a esfera de Schwarzschild no sentido de crescimento de r . Por outro lado, qualquer fóton ou partícula que atravessar a esfera no sentido contrário é absorvido e não pode retornar ao mundo externo.

As condições dentro da esfera são usualmente chamadas de *buraco negro*. Astrofísicos dizem ser possível que algumas estrelas colapsam sob sua própria atração gravitacional para um raio menor que seu raio de Schwarzschild. Nestes casos, a estrela colapsaria para um ponto singular tendo infinita densidade.

4 Efeitos da Auto-força na órbita de uma partícula em torno de um buraco negro

4.1 Introdução

Aqui, estudamos o que foi feito na referência (4).

Consideramos uma massa pequena μ com carga escalar q orbitando um buraco negro de Schwarzschild. A interação da partícula com seu próprio campo gravitacional gera uma auto-força(ou força auto-induzida) na partícula.

Faremos uma análise perturbatória a fim de descobrir os efeitos dessa auto-força numa partícula, que é aqui descrita por um campo escalar, sobre órbitas circulares, órbitas levemente excêntricas e sobre a ISCO(innermost stable circular orbit), a última órbita estável em torno de um buraco negro, considerando a geometria de Schwarzschild.

4.2 Estabilidade de órbitas circulares

Considerações:

- Uma análise perturbatória de pequenas oscilações de um sistema muitas vezes nos revela as frequências naturais do sistema, que são autovalores complexos, dependendo de algum conjunto de parâmetros.
- Os casos mais simples ocorrem quando a frequência é puramente real ou imaginária. Uma frequência imaginária com sinal apropriado significava instabilidade.
- Para um sistema de uma pequena partícula de massa μ orbitando um buraco negro de massa m , a partícula se move ao longo de uma geodésica, se μ é considerado infinitesimal. Neste caso, é sabido que, para uma órbita circular na coordenada de Schwarzschild $r = r_o$, a frequência angular Ω_o , com respeito à coordenada temporal de Schwarzschild, é dada por

$$\Omega_o^2 = \frac{m}{r_o^3}. \quad (4.1)$$

- Se a órbita tem uma pequena excentricidade, então uma análise nos revela que a frequência Ω_r de oscilação radial é dada por

$$\Omega_r^2 = \frac{m}{r_o^4}(r_o - 6m). \quad (4.2)$$

- Se r_o é muito grande, então Ω_o e Ω_r são praticamente iguais, e a órbita levemente excêntrica é uma elipse que obedece às Leis de Kepler. A diferença entre as frequências nos dá a taxa de precessão da elipse

$$\Omega_{pr} = \Omega_o - \Omega_r. \quad (4.3)$$

- Para uma órbita dentro de $r = 6m$, as duas soluções para Ω_r na equação (4.3) são ambas imaginárias e uma corresponde a um modo instável.
- A órbita em $r_o = 6m$ é a última órbita circular estável que a partícula pode descrever a ISCO.

4.3 Efeitos do Campo Escalar no Movimento da Partícula

4.3.1 Descrição do Movimento

As funções $(T(s), r(s), \frac{\pi}{2}, \Phi)$ descrevem o movimento da partícula no plano equatorial de um buraco negro nas coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) . O tempo próprio s é medido ao longo da trajetória, e a 4-velocidade

$$u^a = \frac{dx^a}{ds} \quad (4.4)$$

é normalizada à unidade $u^a u_a = -1$

Sendo E a energia e J o momento angular, para o movimento em torno de uma geodésica, definimos

$$E = -t^a u_a, \quad (4.5)$$

$$J = \phi^a u_a. \quad (4.6)$$

Os componentes de u^a são, então

$$u^a = \left(\frac{E}{1-2m/R}, \dot{R}, 0, \frac{J}{R^2} \right)$$

onde o ponto denota derivada com respeito a s . Para qualquer trajetória, a frequência angular é

$$\Omega_\phi = \frac{\dot{\Phi}}{\dot{T}} = \frac{d\Phi}{dT} = \frac{J(R-2m)}{ER^3}. \quad (4.7)$$

A normalização de u^a implica

$$u^a u_a = -1 = -\frac{(E^2 - \dot{R}^2)}{1 - 2m/R} + \frac{J^2}{R^2} \quad (4.8)$$

ou

$$E^2 - \dot{R}^2 = (1 - 2m/R)(1 + J^2/R^2). \quad (4.9)$$

4.3.2 Modificações do Campo Escalar na Equação Geodésica

Considerando a interação de um campo escalar Ψ com uma partícula de massa μ_0 e carga escalar constante q , a equação de movimento é dada por

$$u^b \nabla_b (\mu u_a) = \dot{\mu} u_a + \mu u^b \nabla_b u_a = q \nabla_a \Psi, \quad (4.10)$$

onde $\mu = \mu_0 - q\Psi$

Assumimos que Ψ é o campo regular avaliado na partícula. Então, a quantidade μ muda quando o valor do campo escalar na partícula muda. A mudança fracional em μ é

$$\Delta\mu/\mu_0 = -q\Psi/\mu_0. \quad (4.11)$$

A projeção da equação de movimento ortogonal à u_a nos dá a aceleração da auto-força:

$$u^b \nabla_b u_a = (q/\mu)(g_a^b + u_a u^b) \nabla_b \Psi \quad (4.12)$$

o que modifica a trajetória da partícula no espaço tempo.

Em nossa análise perturbativa, consideraremos apenas os efeitos do campo escalar de primeira ordem. Portanto, para nosso propósito, é conveniente tratar μ como constante e definir $\psi = q\Psi/\mu$. Também assumimos que o campo escalar é simétrico por reflexão sobre o plano equatorial, e que a partícula permanece neste plano.

Os componentes da equação (4.12) nos dão

$$dE/ds = \dot{E} = -\partial_t\psi + Eu^b\nabla_b\psi, \quad (4.13)$$

$$dJ/ds = \dot{J} = \partial_\phi\psi + Ju^b\nabla_b\psi \quad (4.14)$$

e

$$\ddot{R} = -\frac{m(E^2 - \dot{R}^2)}{R(R-2m)} + \frac{R-2m}{R^4}J^2 + \frac{R-2m}{R}\partial_r\psi + \dot{R}u^b\nabla_b\psi. \quad (4.15)$$

Juntas, as equações (4.9) e (4.15) implicam

$$\ddot{R} = -\frac{m}{R^2} + \frac{R-3m}{R^4}J^2 + \frac{R-2m}{R}\partial_r\psi + \dot{R}u^b\nabla_b\psi, \quad (4.16)$$

o que é conveniente para analisar órbitas levemente excêntricas.

4.4 Efeitos da auto-força em órbitas circulares

O campo escalar ψ_o de uma partícula carregada em uma órbita circular rotaciona com a partícula e tem simetria descrita por

$$\partial_t\psi_o + \Omega_o\partial_\phi\psi_o = 0. \quad (4.17)$$

Em particular, isso implica que $u^a\nabla_a\psi_o=0$ na partícula, o que simplifica a descrição da auto-força para movimento circular.

Uma trajetória é instantaneamente circular num raio r_o se $\dot{R}=\ddot{R}=0$. Neste caso,

$$J^2 = \frac{r_o^4}{r_o - 3m} \left(\frac{m}{r_o^2} - \frac{r_o - 2m}{r_o} \partial_r\psi_o \right) \quad (4.18)$$

segue da equação (4.16), e

$$E^2 = \frac{(r_o - 2m)^2}{r_o(r_o - 3m)} (1 - r_o\partial_r\psi_o) \quad (4.19)$$

segue da equação (4.9). A frequência angular é dada pela equação (4.7)

$$\Omega_o^2 = \frac{m}{r_o^3} - \frac{r_o - 2m}{r_o^2} \partial_r \psi_o + O(\psi^2). \quad (4.20)$$

Tais equações são reduzidas às expressões usuais de geodésicas circulares da geometria de Schwarzschild quando o campo escalar ψ_o é removido. As mudanças fracionais resultantes em J , E , e Ω_o causada pela auto-força para uma órbita com raio r_o são

$$\frac{\Delta J}{J} = -\frac{r_o(r_o - 2m)}{2m} \partial_r \psi_o, \quad (4.21)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{2} r_o \partial_r \psi_o, \quad (4.22)$$

e

$$\frac{\Delta \Omega_o}{\Omega_o} = -\frac{r_o(r_o - 3m)}{2m} \partial_r \psi_o. \quad (4.23)$$

4.5 Efeitos da auto-força em órbitas levemente excêntricas

Uma partícula em órbita com pequena excentricidade, na geometria de Schwarzschild, possui movimento periódico na direção radial com frequência Ω_r dada, como visto no início, por

$$\Omega_r^2 = \frac{m}{r_o^4} (r_o - 6m). \quad (4.24)$$

Nesta seção, descreveremos os efeitos da auto-força sobre Ω_r e sobre a taxa de precessão da órbita Ω_{pr} .

4.5.1 Geodésicas Levemente Excêntricas

Nesta análise perturbativa, uma geodésica levemente excêntrica com raio fixo r_o com pequena amplitude $\delta R \ll q^2 \mu \ll r_o q^2 / \mu^2 \ll r_o$, é descrita por

$$R(T(s)) = r_o + \delta R \cos(\Omega_r T(s)) \quad (4.25)$$

e

$$\Phi(T) = \Omega_o T + \frac{d\Omega_\phi}{dR} \frac{\delta R}{\Omega_r} \text{sen}(\Omega_r T). \quad (4.26)$$

A frequência angular da órbita desta geodésica é uma função do tempo,

$$\Omega_\phi = \frac{d\Phi}{dT} = \Omega_o + \frac{d\Omega_\phi}{dR} \delta R \text{cos}(\Omega_r T). \quad (4.27)$$

As frequências Ω_o , Ω_r são dadas pelas equações descritas no início da apresentação. A quantidade $d\Omega_\phi/dR$ representa a variação na frequência angular de acordo com uma mudança no raio, enquanto E e J permanecem constantes,

$$\frac{d\Omega_\phi}{dR} = -\frac{2(R-3m)}{R(R-2m)} \Omega_\phi. \quad (4.28)$$

A velocidade radial é

$$\frac{dR}{dT} = -\Omega_r \delta R \text{sen}(\Omega_r T). \quad (4.29)$$

4.5.2 Efeitos da auto-força sobre J para órbitas levemente excêntricas

Para órbitas levemente excêntricas, com efeitos da auto-força incluídos, J não é uma constante do movimento, mesmo sem dissipação. O efeito da auto-força em J é dado na equação

$$dJ/ds = \dot{J} = \partial_\phi \psi + J u^a \nabla_a \Psi \quad (4.30)$$

ou

$$dJ/dT = (u^t)^{-1} \partial_\phi \psi + J(\partial_t + \Omega_\phi \partial_\phi) \psi + J \frac{dR}{dT} \partial_r \psi. \quad (4.31)$$

O campo escalar ψ é composto de duas partes :

- A maior parte ϕ_o é igual ao campo que resultaria de um movimento circular em r_o . Para uma órbita circular, em geral, $(\partial_t + \Omega_o \partial_\phi)\psi = 0$.
- A menor parte é proporcional a δR .

Para órbitas levemente excêntricas, uma expansão para ψ em torno de uma órbita circular em r_o nos dá

$$\partial_t \psi = -F_t \Omega_r \delta R \text{sen}(\Omega_r T), \quad (4.32)$$

$$\partial_\phi \psi = -F_\phi \Omega_r \delta R \text{sen}(\Omega_r T), \quad (4.33)$$

e

$$\partial_r \psi = [\partial_r \psi_o]_{r_o} + F_r \delta R \text{cos}(\Omega_r T), \quad (4.34)$$

onde F_t , F_ϕ e F_r dependem apenas de r_o e são independentes de ambos δR e t . Aqui, o subscript r_o em $[\partial_r \psi_o]_{r_o}$ implica que $[\partial_r \psi_o]$ deve ser avaliado na órbita circular r_o , e não na posição atual da partícula.

Na equação (4.31) o coeficiente de $\partial_r \psi$ já é primeira ordem em δR , e é suficiente usar apenas o valor $[\partial_r \psi_o]_{r_o}$ avaliado na partícula. Fazendo as contas, obtemos

$$\frac{dJ}{dR} = \frac{dJ}{dT} \left(\frac{dR}{dT} \right)^{-1} = JF_t + EF_\phi + J[\partial_r \psi_o]_{r_o}, \quad (4.35)$$

4.5.3 Efeitos da auto-força sobre Ω_r para órbitas levemente excêntricas

A equação de movimento radial, que inclui a auto-força, é

$$\ddot{R} = -\frac{m}{R^2} + \frac{R-3m}{R^4} J^2 + \frac{R-2m}{R} \partial_r \psi + \dot{R} u^b \nabla_b \psi. \quad (4.36)$$

Para descrevermos órbitas com pequena excentricidade, expandimos esta equação em torno de uma órbita circular em r_o fazendo $R \Rightarrow r_o + \delta R \text{cos}(\Omega_r T)$, e descartando os termos de ordem δR^2 . A parte da equação de movimento que é primeira ordem em δR é

$$\ddot{R} = \frac{d}{dR} \left[-\frac{m}{R^2} + \frac{R-3m}{R^4} J^2 + \frac{R-2m}{R} \partial_r \psi \right] \quad (4.37)$$

Usando a equação(4.34), que nos dá $d(\partial_r \psi)/dR = F_r$, obtemos

$$\ddot{R} = \left[-\frac{m(r_o - 6m)}{r_o^3(r_o - 3m)} + \frac{3(r_o - 4m)(r_o - 2m)}{r_o^2(r_o - 3m)} \right] [\partial_r \psi_o]_{r_o} \quad (4.38)$$

$$+ \frac{2m}{r_o^2} [\partial_r \psi_o]_{r_o} + \frac{(r_o - 3m)}{r_o^4} \frac{dJ^2}{dR} \quad (4.39)$$

$$+ \frac{(r_o - 2m)}{r_o} F_r] \delta R \cos(\Omega_r T) \quad (4.40)$$

A equação de geodésica (4.25) implica que

$$\ddot{R} = -\frac{\Omega_r^2 E^2 \delta R \cos(\Omega_r T)}{(1 - 2m/r_o)^2} \quad (4.41)$$

Usando a expressão que havíamos encontrado para E^2 :

$$E^2 = \frac{(r_o - 2m)^2}{r_o(r_o - 3m)} (1 - r_o \partial_r \psi_o) \quad (4.42)$$

podemos encontrar, finalmente, uma expressão para Ω_r^2

$$\Omega_r^2 = \frac{m}{r_o^4} (r_o - 6m) - \frac{2J}{r_o^5} (r_o - 3m)^2 (JF_t + EF_\phi) \quad (4.43)$$

$$- \frac{1}{r_o^3} (r_o - 2m)(r_o - 3m) (3[\partial_r \psi_o]_{r_o} + rF_r) \quad (4.44)$$

Tal equação nos dá a mudança que a auto-força causa em Ω_r^2 , lembrando que a equação para a frequência angular da partícula, sem a influência da auto-força, é

$$\Omega_r^2 = \frac{m}{r_o^4} (r_o - 6m). \quad (4.45)$$

Para examinar o efeito da auto-força em Ω_r , seja f uma função que representa todos, menos o primeiro termo do lado direito da equação para Ω_r^2 (4.43). Assim,

$$\Delta(\Omega_r^2) = f + f_0 + f_1(r_o - 6m) + \dots, \quad (4.46)$$

De forma geral,

$$\Delta\Omega_r = \left[\frac{m}{r_o^4}(r_o - 6m) + f \right]^{1/2} - \left[\frac{m}{r_o^4}(r_o - 6m) \right]^{1/2} \quad (4.47)$$

Uma análise numérica indica que, ao fazermos $r_o \rightarrow 6m$, isto é, ao aproximarmos da ISCO, a mudança $\Delta\Omega_r$ aumenta. Quando fazemos $r_o - 6m \gg q^2/\mu$, ou seja, quando a órbita da partícula se afasta da ISCO, $\Delta\Omega_r$ diminui.

Como a frequência angular nos fornece a velocidade de rotação da partícula, concluimos que, ao se aproximar da ISCO, com influência da auto-força, a velocidade de rotação sofre grande influência, enquanto que, longe da ISCO, não é notada tanta influência da auto-força na velocidade de rotação da partícula

4.5.4 Efeitos da auto-força sobre Ω_{pr} para órbitas levemente excêntricas

A taxa de precessão para uma órbita com pequena excentricidade

$$\Omega_{pr} = \Omega_o - \Omega_r \quad (4.48)$$

pode ser escrita como

$$\Omega_{pr} = \frac{m^{1/2}}{(6m)^{3/2}} - f_0^{1/2} \quad (4.49)$$

para $r_o = 6m$.

Em geral,

$$\Delta\Omega_{pr} = \Delta\Omega_o - \Delta\Omega_r, \quad (4.50)$$

onde

$$\frac{\Delta\Omega_o}{\Omega_o} = -\frac{r_o(r_o - 3m)}{2m} \partial_r \psi_o \quad (4.51)$$

$$\Delta\Omega_r = \left[\frac{m}{r_o^4}(r_o - 6m) + f \right]^{1/2} - \left[\frac{m}{r_o^4}(r_o - 6m) \right]^{1/2} \quad (4.52)$$

4.6 Efeitos da auto-força na ISCO

- A ISCO é caracterizada por ser a órbita onde $\Omega_r = 0$.
- A auto-força altera o raio da ISCO de $6m$ para ΔR , onde

$$\Delta R_{is} = R_{is} - 6m = 180m^2 \partial_r \psi_o + (3/2)dJ^2/dR + 432m^3 F_r. \quad (4.53)$$

Este resultado segue de equacionar os coeficientes em colchetes na equação (4.38) à zero, fazendo $r_o = 6m$ em todos termos, e resolvendo para $(r_o - 6m)$. A correção da frequência angular da ISCO pela auto-força é dada pela equação

$$\Omega_o^2 = \frac{m}{r_o^3} - \frac{r_o - 2m}{r_o^2} \partial_r \psi_o + O(\psi^2). \quad (4.54)$$

quando avaliada em $r_o = 6m + \Delta R_{is}$,

$$\Omega_{is}^2 = r_o^{-4} m (r_o - 3\Delta R_{is}) - r_o^{-2} (r_o - 3m) \partial_r \psi_o \quad (4.55)$$

$$= m(6m)^{-3} - 3m\Delta R_{is}(6m)^{-4} \quad (4.56)$$

$$- (12m)^{-1} \partial_r \psi_o \quad (4.57)$$

A mudança fracional em Ω_{is} causada pela auto-força do campo escalar é

$$\Delta\Omega_{is}/\Omega_{is} = -\Delta R_{is}/4m - 9m\partial_r \psi_o. \quad (4.58)$$

5 Considerações Finais

- Vemos que o efeito da auto-força de um campo escalar na ISCO da geometria de Schwarzschild é mover a órbita da ISCO para dentro , isto é, $r_o < 6m$, e aumentar a frequência angular nesta órbita
- Uma boa formulação da estabilidade da ISCO requer imposição de quantidades iguais de radiação de entra e sai do buraco negro.
- Entretanto, o que observamos na realidade é que um movimento espiral em direção à um buraco negro tem apenas radiação saindo do buraco.
- Outros trabalhos cuidam deste problema, fazendo um tratamento cuidadoso da evolução de um objeto espiralando em direção à um buraco negro, e envolvendo os efeitos da auto-força de um campo escalar.

REFERÊNCIAS

- [1] Manfredo Perdigão do Carmo. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 6 ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [2] Richard L. Faber. Differential Geometry and Relativity Theory : An Introduction. Department of Mathematics Boston College Chestnut Hill, Massachusetts.
- [3] D. F. Lawden. Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology. Third Edition - University of Aston in Birmingham, U.K.
- [4] Luz Maria Diaz-Rivera, Eirini Messaritaki, Bernard F. Whiting and Steven Detweiler. Scalar field self-force effects on orbits about a Schwarzschild black hole - 2004.