

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Curso de Matemática

**Caio Rezende Marques dos Santos**

**A configuração das 27 retas em uma cúbica não singular**

Juiz de Fora  
2018

Caio Rezende Marques dos Santos

**A configuração das 27 retas em uma cúbica não singular**

Trabalho apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Caio Rezende Marques dos.

A configuração das 27 retas em uma cúbica não singular / Caio Rezende  
Marques dos Santos. – 2018.

52 f. : il.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Universidade Federal de Juiz  
de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Curso de Matemática, 2018.

1. cúbicas. 2. retas. 3. variedades. I. Feitosa, Frederico Sercio, orient.  
II. Título.

Caio Rezende Marques dos Santos

A configuração das 27 retas em uma cúbica não singular

Trabalho apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professora Dra. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professora Dra. Joana Darc Antônia Santos da Cruz  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a *Deus*, por me permitir realizar mais um sonho, por guiarme e iluminar-me em cada passo que dei nessa vida, abençoando-me e dando-me a forma necessária para lutar e enfrentar todos os obstáculos, sem nunca desistir. Sem dúvidas, dando-me além do que mereço, permitindo que eu errasse, aprendesse e crescesse como pessoa ao longo desses anos.

Aos meus pais, *Mary* e *Anderson*, deixo um agradecimento especial. Por toda a dedicação e amor que tiveram por mim, por terem sempre me incentivado a dar o meu melhor em todos os aspectos da vida. Pela compreensão aos meus momentos de ausência e, ainda assim, me apoiando e estimulado nos momentos mais difíceis. Nunca conseguirei colocar em palavras a intensidade do orgulho e o tamanho do privilégio de ter pais tão especiais. Serei eternamente grato pelo seu apoio. Ainda, agradecer a minha querida irmã, *Nina*, e à minha avó, *Lessy*, sempre prontas a me ajudar e por serem pilares na minha vida.

À minha companheira de curso e, sem dúvidas, amiga para toda a vida, *Franciele*, com quem compartilhei inúmeros momentos de estudos, loucuras e devaneios matemáticos, por todas as dicas e infinitas ajudas nos momentos certos. Além dos trabalhos, disciplinas e sufocos passados em conjunto, agradeço por toda a preocupação e apoio constantes.

Aos meus amigos, *Davi*, *Dabson* e *Elisa*, com quem compartilhei diversas conversas livres e contagiantes; às garotas da minha vida, *Sandra*, *Eveline* e *Raíssa*, pelas palavras de apoio, incentivo e conforto em momentos cruciais, ainda antes da vida na faculdade; e meu muito obrigado à pessoa que mudou o curso da minha vida da melhor maneira possível, *Daniel*.

Ao meu orientador, professor *Frederico*, pela competência, profissionalismo e dedicação. Sem sua orientação e confiança, não somente nesse trabalho, mas em todas as disciplinas como professor e como orientador do projeto de Iniciação Científica, nada disso seria possível.

À *Universidade Federal de Juiz de Fora* e, em especial, a cada um dos integrantes do *Departamento de Matemática*, pelas muitas oportunidades, pelos ensinamentos e pela contribuição na minha vida acadêmica. Um agradecimento particular às professoras *Beatriz* e *Joana Darc*, pela participação na banca examinadora e por despenderem algum tempo à leitura deste trabalho.

Aos profissionais do *Colégio Santa Catarina* de Juiz de Fora – MG, pela base acadêmica, cultural e cidadã que me deram durante todo o ensino básico.

Por fim, a todos os demais que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desse trabalho e os quais foram importantes nessa caminhada.

## RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma prova elementar do fato que qualquer superfície cúbica não-singular em  $\mathbb{P}_k^3$ , sobre um corpo algebricamente fechado  $k$  de característica diferente de 2 e 3, contém exatamente 27 retas. Durante o curso da prova, exibimos um modo de rotular estas retas em termos de uma reta  $\ell$  fixada e de uma outra reta  $m$ , disjunta de  $\ell$ , de tal modo que possamos determinar qual das outras retas intersectará uma reta dada. A fim de desenvolver essa prova, primeiro discorreremos sobre alguns pontos da teoria básica da Geometria Algébrica, introduzindo os conceitos de espaços afim e projetivo e como definir as variedades algébricas em cada um, estabelecendo as noções de irredutibilidade e suavidade (ou não-singularidade) de uma curva e explicitamos alguns resultados sobre superfícies quadráticas e retas em  $\mathbb{P}_k^3$ .

Palavras-chave: Cúbicas. Retas. Variedades.

## ABSTRACT

In this paper we present an elementary proof of the fact that any nonsingular cubic surface in  $\mathbb{P}_k^3$  over an algebraically closed field  $k$  not of characteristic 2 or 3 contains exactly 27 lines. During the course of this proof, we show a way to label these lines in terms of a fixed line  $\ell$  and another fixed line  $m$  which is disjoint from  $\ell$  in such a way that we can determine which of the other lines a given line will intersect. In order to develop this proof, we first discuss some basic points of the theory of Algebraic Geometry, introducing the concepts of affine space and projective space and how to define algebraic varieties in each one of those spaces, establishing the notions of a curve's irreducibility and smoothness and we explain some facts about quadric surfaces and lines in  $\mathbb{P}_k^3$ .

Key-words: Cubics. Lines. Varieties.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – $\mathcal{V}(y^2 - x^3)$ . . . . .   | 10 |
| Figura 2 – <i>Construção do plano projetivo <math>\mathbb{P}^2</math></i> . . . . .   | 15 |
| Figura 3 – $y^2 = x^3 + x^2$ ( <i>Curva cúbica com uma singularidade tipo nó</i> ) . . . . .  | 24 |
| Figura 4 – $y^2 = x^3$ ( <i>Curva cúbica com uma singularidade tipo cúspide</i> ) . . . . .   | 24 |
| Figura 5 – <i>Superfície Cúbica Diagonal de Clebsch: é não-singular e foi estudada por Clebsch (1871) e Klein (1873), onde todas as 27 retas podem ser desenhadas em um modelo real da superfície, como observado na figura.</i>  | 31 |
| Figura 6 – <i>A configuração de 10 retas em uma cúbica intersectando uma dada reta <math>\ell</math> da cúbica.</i> . . . . .   | 41 |
| Figura 7 – <i>A configuração de 18 das 27 retas em uma superfície cúbica. Os 20 pontos de intersecção da forma <math>\ell'_i \cap \ell''_j</math> para <math>1 \leq i &lt; j \leq 5</math> não estão representados.</i> . . . . . | 51 |



## SUMÁRIO

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                    | <b>8</b>  |
| <b>2</b> | <b>VARIEDADES . . . . .</b>                                    | <b>10</b> |
| 2.1      | VARIEDADES ALGÉBRICAS AFINS . . . . .                          | 10        |
| 2.2      | VARIEDADES ALGÉBRICAS PROJETIVAS . . . . .                     | 15        |
| 2.3      | HIPERSUPERFÍCIES E MUDANÇA DE COORDENADAS PROJETIVAS . . . . . | 17        |
| 2.4      | MULTIPLICIDADE E TEOREMA DE BÉZOUT . . . . .                   | 19        |
| 2.5      | IRREDUTIBILIDADE E SUAVIDADE . . . . .                         | 21        |
| 2.6      | ALGUNS RESULTADOS SOBRE QUÁDRICAS . . . . .                    | 25        |
| 2.7      | ALGUNS RESULTADOS SOBRE CURVAS . . . . .                       | 27        |
| <b>3</b> | <b>SUPERFÍCIE CÚBICA . . . . .</b>                             | <b>31</b> |
| 3.1      | A EXISTÊNCIA DE RETAS EM UMA CÚBICA . . . . .                  | 31        |
| 3.2      | A CONFIGURAÇÃO DAS 27 RETAS . . . . .                          | 38        |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                   | <b>52</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, abordaremos o problema clássico da Geometria Algébrica que estuda retas contidas em uma superfície cúbica suave. Para introduzir o assunto, considere a cúbica de Fermat  $X$ , sobre  $\mathbb{P}^3 := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , dada pelos zeros do polinômio

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Sabemos que, a menos da permutação das coordenadas, toda reta em  $\mathbb{P}^3$  é dada por duas equações lineares da forma  $x_0 = a_2x_2 + a_3x_3$  e  $x_1 = b_2x_2 + b_3x_3$  com  $a_2, a_3, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$ . Além disso, esta reta está contida  $X$  se, e somente se,

$$(a_2x_2 + a_3x_3)^3 + (b_2x_2 + b_3x_3)^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

como um polinômio em  $\mathbb{C}[x_2, x_3]$ . Logo, comparando coeficientes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a_2^3 + b_2^3 &= -1 \\ a_3^3 + b_3^3 &= -1 \\ a_2^2a_3 &= -b_2^2b_3 \\ a_2a_3^2 &= -b_2b_3^2. \end{cases}$$

Se  $a_2, a_3, b_2, b_3$  forem todos não-nulos, então  $\frac{(a_2^2a_3 + b_2^2b_3)^2}{a_2a_3^2 + b_2b_3^2} = 0$  implica em  $a_2^3 = -b_2^3$ , em contradição com a primeira equação do sistema. Portanto, para uma reta nesta superfície cúbica, ao menos um dos coeficientes deve ser nulo. Supondo que  $a_2 = 0$ , concluímos, com facilidade, que  $b_2^3 = -1, b_3 = 0$  e  $a_3^3 = -1$ . Logo, obtemos 9 retas fazendo  $b_2 = -w^i$  e  $a_3 = -w^j$  para  $0 \leq i, j \leq 2$  onde  $w$  é uma raiz primitiva de ordem 3 da unidade. Permitindo a permutação das coordenadas, obtemos 27 retas na superfície  $X$ , a saber

$$\begin{aligned} x_0 + x_3w^j &= x_1 + x_2w^i = 0, 0 \leq i, j \leq 2 \\ x_0 + x_2w^j &= x_3 + x_1w^i = 0, 0 \leq i, j \leq 2 \\ x_0 + x_1w^j &= x_3 + x_2w^i = 0, 0 \leq i, j \leq 2 \end{aligned}$$

Este exemplo simples é suficiente para perguntarmos se toda cúbica contém retas e, em caso afirmativo, qual seria a quantidade destas retas.

Em 1849, Salmon e Cayley publicaram o resultado sobre a quantidade de retas em uma superfície cúbica. Primeiramente, Cayley, em uma carta a Salmon, mostrou que só poderiam existir uma quantidade finita de retas contidas em uma superfície cúbica e, posteriormente, Salmon provou que, em geral, uma cúbica continha exatamente 27 retas. Em seu tratado "The Geometry of Three Dimensions" de 1865, Salmon descreveu como foi a colaboração dos dois para provar o Teorema de Cayley-Salmon.

Embora seja possível uma abordagem moderna deste problema utilizando variedades grasmanianas e variedades de incidência, seguiremos a apresentação elementar de [4] e [8] para a prova do fato de que qualquer superfície cúbica suave em  $\mathbb{P}^3$  contém exatamente 27 retas.

No Capítulo 2, introduzimos alguns conceitos básicos de Geometria Algébrica, como a definição de variedade e suavidade, necessários para a compreensão do problema, e estudamos alguns resultados sobre curvas, objetivando a prova do resultado principal.

No Capítulo 3, fazemos primeiramente a prova da existência de retas em cúbicas e, finalmente, provamos o resultado principal.

## 2 VARIEDADES

### 2.1 VARIEDADES ALGÉBRICAS AFINS

Fixe um corpo  $k$  algebricamente fechado. O **espaço afim** de dimensão  $n$  sobre  $k$  é definido por

$$k^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in k\}.$$

Todo polinômio  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  define uma aplicação

$$\begin{aligned} f : k^n &\longrightarrow k \\ p = (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto f(p) = f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

e um ponto  $p = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$  é denominado um **zero** de  $f$  se  $f(p) = 0$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $C$  uma coleção qualquer de polinômios em  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Definimos a **variedade algébrica afim associada a  $C$**  como sendo*

$$\mathcal{V}(C) = \{p \in k^n : \forall f \in C, f(p) = 0\},$$

o conjunto dos zeros em comum de todos os polinômios em  $C$ . Mais geral, uma **variedade algébrica afim** é qualquer subconjunto de  $k^n$  da forma  $\mathcal{V}(D)$  para alguma coleção  $D$  de polinômios.

**Exemplo 2.2.** *A chamada **parábola de Neile** ou **cúbica cuspidal** é dada pela equação*

$$C : y^2 = x^3 \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

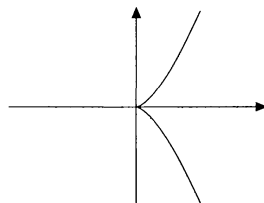


Figura 1 –  $\mathcal{V}(y^2 - x^3)$ .

A união finita ou a interseção arbitrária de variedades algébricas afins são, também, variedades algébricas afins. Especificamente, temos os seguintes resultados:

**Proposição 2.3.** (1) *A união de duas variedades é dada por*

$$\mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathcal{V}(\{g_j\}_{j \in J}) = \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J}) \quad (2.1)$$

(2) A interseção arbitrária de variedades associada a coleções  $C_i$  de polinômios é dada por

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(C_i) = \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right). \quad (2.2)$$

*Demonstração.* (1) Seja  $p \in \mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathcal{V}(\{g_j\}_{j \in J})$ . Então, temos que  $f_i(p) = 0$ , para todo  $i \in I$ , e  $g_j(p) = 0$ , para todo  $j \in J$ . Consequentemente, segue que  $(f_i g_j)(p) = f_i(p)g_j(p) = 0$ , para todos  $i \in I$ ,  $j \in J$ , donde resulta que  $p \in \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J})$ . Como  $p$  foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathcal{V}(\{g_j\}_{j \in J}) \subseteq \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J}).$$

Por outro lado, seja  $p \in \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J})$ . Suponhamos, por absurdo, que  $p \notin \mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathcal{V}(\{g_j\}_{j \in J})$ . Então, existem  $i_0 \in I$  e  $j_0 \in J$  tais que

$$f_{i_0}(p) \neq 0 \quad e \quad g_{j_0}(p) \neq 0.$$

No entanto, observemos que, por construção,

$$f_{i_0} g_{j_0} \in \{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J}.$$

Além disso,

$$f_{i_0} g_{j_0}(p) = f_{i_0}(p)g_{j_0}(p) \neq 0.$$

Porém, essa relação contradiz o fato de que  $p \in \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J})$ , tendo em vista que, nessas condições, deveríamos ter  $f_i g_j(p) = 0$ , para todos  $i \in I$ ,  $j \in J$ .

Logo, concluímos que  $p \in \mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathcal{V}(\{g_j\}_{j \in J})$  e, pela arbitrariedade de  $p$ , temos:

$$\mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathcal{V}(\{g_j\}_{j \in J}) \supseteq \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i \in I, j \in J}).$$

(2) Seja  $p \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(C_i)$ . Então  $p \in \mathcal{V}(C_i)$ , para todo  $i \in I$ . Consequentemente, temos que, para todo polinômio  $f \in C_i$ , com  $i \in I$  arbitrário, é válida a igualdade  $f(p) = 0$ , para todo  $f \in C_i$ ,  $i \in I$ .

Tomemos um polinômio arbitrário  $g$  em  $\bigcup_{i \in I} C_i$ . Temos que  $g \in C_{i_0}$ , para algum  $i_0 \in I$ . Logo  $g(p) = 0$  e, então,  $p \in \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right)$ .

Reciprocamente, seja  $p \in \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $p \notin \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(C_i)$ . Então, existe  $i_0 \in I$  de forma que  $p \notin \mathcal{V}(C_{i_0})$ .

Por outro lado, como  $p \in \mathcal{V}(C_{i_0})$ , existe polinômio  $h_{i_0} \in C_{i_0}$  tal que  $h_{i_0}(p) \neq 0$ . No entanto, como  $C_{i_0} \in \bigcup_{i \in I} C_i$ , segue que  $h_{i_0}$  é um polinômio em  $\bigcup_{i \in I} C_i$  que não se anula em  $p$ . Logo, concluímos que  $p \in \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right)$ , gerando uma contradição com a hipótese inicial. Segue, assim, o resultado.  $\square$

Mais ainda, os conjuntos  $k^n = \mathcal{V}(\emptyset)$  e  $\emptyset = \mathcal{V}(1)$ , onde 1 denota o polinômio constante de valor 1, são variedades algébricas afins. Portanto, podemos, naturalmente, conceber uma topologia em  $k^n$ .

**Definição 2.4.** A **topologia de Zariski** em  $k^n$  é a topologia cujos conjuntos fechados são as variedades algébricas afins em  $k^n$ . Sob essa topologia, denotamos  $k^n$  por  $\mathbb{A}_k^n$ . Um subconjunto de  $\mathbb{A}_k^n$  é dito **aberto de Zariski** se seu complementar é um conjunto fechado de Zariski.  $\mathbb{A}_k^n$  é denominado ***n*-espaço afim**.

Qualquer variedade algébrica afim  $V$  é um subconjunto de  $\mathbb{A}_k^n$  e, portanto, herda a topologia do subespaço de  $\mathbb{A}_k^n$ . Sob essa topologia, os conjuntos fechados de  $V$  são precisamente as *subvariedades* de  $V$ , isto é, qualquer subconjunto de  $V$  que seja o conjunto dos zeros comuns de alguma coleção de polinômios em  $V$ .

Observemos, agora, uma correspondência entre variedades e ideais no anel de polinômios  $k[x_1, \dots, x_n]$ :

**Definição 2.5.** Seja  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  uma variedade algébrica afim. Definimos o **ideal de  $V$**  sendo

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : \forall p \in V, f(p) = 0\},$$

o conjunto dos polinômios que se anulam em  $V$ .

O conjunto  $\mathcal{I}(V)$  é um ideal de  $k[x_1, \dots, x_n]$ : a soma de polinômios que se anulam em  $V$  também se anula em  $V$  e o produto de um polinômio que se anula em  $V$  por qualquer outro polinômio se anula em  $V$ .

**Definição 2.6.** Para um ideal  $J$  em um anel  $R$ , o **radical** de  $J$  é definido por

$$\sqrt{J} = \{r \in R : \text{existe } k \geq 1 \text{ com } r^k \in J\}.$$

Denominamos um ideal  $J$  como sendo **ideal radical** se  $J = \sqrt{J}$ .

Temos que  $\sqrt{J}$  é um ideal e temos  $\sqrt{J} \subset J$ . Ideais radicais têm um papel significativo na relação entre ideais e variedades, uma vez que qualquer ideal da forma  $\mathcal{I}(V)$  é um ideal radical. De fato, dado  $p \in V$  arbitrário, se  $f^m \in \mathcal{I}(V)$ , para algum  $m \geq 1$ , então  $[f(p)]^m = 0$ . Assim, como estamos trabalhando em  $k$ -corpo, segue que  $f(p) = 0$ . Logo  $f \in \mathcal{I}(V)$ .

**Lema 2.7. (1)**  $X \subset Y \subseteq \mathbb{A}_k^n \implies \mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$ .

**(2)** Para todo subconjunto  $X \subset \mathbb{A}_k^n$ , temos  $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ . Vale a igualdade se, e somente se,  $X$  é algébrico.

(3) Se  $J \subset k[x_1, \dots, x_n]$  é um ideal, então  $J \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ .

*Demonstração.* (1) Tomando  $f \in \mathcal{I}(Y)$ , temos  $f(p) = 0$ , para todo  $p \in Y$ . Em particular, como  $X \subset Y$ ,  $f(p) = 0$  vale para todo  $p \in X$ . Portanto,  $f \in \mathcal{I}(X)$  e  $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$ .

(2) Se  $p \in X$ , temos que  $g(p) = 0$ , para todo  $g \in \mathcal{I}(X)$ . Assim,  $g \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ . Agora, seja  $p \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ . Então, por definição, para cada  $f \in \mathcal{I}(X)$ , temos que  $f(p) = 0$ . Portanto, escrevendo  $X = \mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I})$ , certamente temos que  $f_i(p) = 0$ , para cada  $i \in I$ , já que, necessariamente, cada  $f_i$  se anula em  $X$  e, assim, está em  $\mathcal{I}(X)$ . Ou seja,  $p \in \mathcal{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \subseteq X$ .

(3) Sejam  $p \in \mathcal{V}(J)$  e  $f \in J$ . Então  $f(p) = 0$ . Agora, observe que  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$  contém polinômios que se anulam para todos os pontos de  $\mathcal{V}(J)$ ; em particular, polinômios que se anulam em  $p$ , ou seja,  $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ .

□

De forma intuitiva, deveríamos esperar, similarmente, que se  $J$  é um ideal radical de  $k[x_1, \dots, x_n]$ , então  $J = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ . Entretanto, este nem sempre é o caso: por exemplo, se  $k = \mathbb{R}$  e  $J = \langle x^2 + 1 \rangle$ , então temos  $\mathcal{V}(J) = \emptyset$  e, portanto,  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \mathbb{R}[x] \neq \langle x^2 + 1 \rangle$ .

Entretanto, se  $k$  é algebricamente fechado, então a conjectura acima é, de fato, verdadeira:

**Teorema 2.8** (Teorema dos Zeros de Hilbert). *Suponha  $k$  um corpo algebricamente fechado. Então, para cada ideal  $J$  de  $k[x_1, \dots, x_n]$ , temos que  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$ . Mais ainda, se  $J$  é radical, então  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = J$ .*

*Demonstração.* [4, Theorem 1.16 (Hilbert's Nullstellensatz), p. 23-26]

□

Note que se  $V$  é qualquer variedade algébrica afim, então  $\mathcal{I}(V)$  é um ideal radical. Portanto, o *Teorema dos Zeros de Hilbert (Teorema 2.8)* nos dá uma correspondência bijetora entre o conjunto  $A$  dos ideais radicais em  $k[x_1, \dots, x_n]$  e o conjunto  $B$  das variedades algébricas afins em  $\mathbb{A}_k^n$ . Assim, temos funções  $\mathcal{V} : A \rightarrow B$  e  $\mathcal{I} : B \rightarrow A$  que são inversas uma da outra.

**Definição 2.9.** *Um anel  $R$  é **Noetheriano** se, equivalentemente:*

1. Cada ideal de  $R$  é **finitamente gerado**;
2. Toda cadeia ascendente  $I_1 \subset I_2 \subset \dots$  de ideais de  $R$  é estacionária, isto é, existe  $n \geq 1$  tal que  $I_n = I_{n+\ell}$ , para todo  $\ell \geq 0$ ;
3. Cada conjunto não-vazio de ideais de  $R$  tem um elemento maximal.

Note, agora, que toda variedade algébrica afim pode, de fato, ser escrita como  $\mathcal{V}(C)$ , para alguma coleção *finita*  $C$  de polinômios. Esse resultado segue do teorema a seguir.

**Teorema 2.10** (Teorema da Base de Hilbert). *Seja  $R$  um anel Noetheriano. Então o anel de polinômios  $R[x]$  também é Noetheriano.*

*Demonstração.* [3, Teorema III.5.2, p. 105-107] □

**Corolário 2.11.** *Se  $R$  é um anel Noetheriano, então  $R[x_1, \dots, x_n]$  é Noetheriano.*

Uma vez que qualquer corpo é Noetheriano, temos que  $k[x_1, \dots, x_n]$  será sempre Noetheriano. Portanto, sendo  $V$  uma variedade algébrica afim qualquer em  $\mathbb{A}_k^n$ , o ideal  $\mathcal{I}(V)$  deve ser finitamente gerado, digamos  $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Logo,

$$V = \mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = \mathcal{V}(\langle f_1, \dots, f_r \rangle) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r),$$

onde a última igualdade segue do fato que se  $f_1, \dots, f_r$  todos se anulam em um ponto  $p \in \mathbb{A}_k^n$ , então todo polinômio do ideal gerado por  $f_1, \dots, f_r$  deve também se anular em  $p$ .

**Definição 2.12.** *Sejam  $V \subset \mathbb{A}_k^m$ ,  $W \subset \mathbb{A}_k^n$  variedades algébricas afins. Um **morfismo de variedades algébricas afins** é uma função  $F : V \rightarrow W$  a qual é a restrição a  $V$  de algum mapa polinomial  $G : \mathbb{A}_k^m \rightarrow \mathbb{A}_k^n$  (isto é, a restrição de um mapa  $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ , onde cada  $g_i \in k[x_1, \dots, x_m]$ ). Tal função é um **isomorfismo** se apresenta uma inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$ , de forma que  $F^{-1}$  também seja um morfismo de variedades algébricas afins.*

**Definição 2.13.** *Seja  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  uma variedade algébrica afim. O **anel de coordenadas** de  $V$  é definido por*

$$k[V] := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\mathcal{I}(V)}.$$

O anel de coordenadas de  $V$  é a coleção de polinômios em  $V$ , isto é,

$$k[V] = \{f : V \rightarrow k; f \text{ é polinomial}\}.$$

De fato, em  $\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\mathcal{I}(V)}$ , dois polinômios  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  são equivalentes quando  $f - g$  se anula em  $V$ . Ou seja, dois polinômios em  $\mathbb{A}_k^n$  são equivalentes em  $\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\mathcal{I}(V)}$  quando os dois polinômios são os mesmos em  $V$ .



## 2.2 VARIEDADES ALGÉBRICAS PROJATIVAS

**Definição 2.14.** Considerando  $k$  um corpo algebricamente fechado e de característica zero, o  $n$ -**espaço projetivo**  $\mathbb{P}_k^n$  é o conjunto  $k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  módulo a seguinte relação de equivalência: se  $x \in k^{n+1}$  é um múltiplo escalar não-nulo de  $y \in k^{n+1}$ , então  $x$  e  $y$  são equivalentes.

Escrevemos os pontos de  $\mathbb{P}_k^n$  em **coordenadas homogêneas**: os pontos denotados por  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  representam a classe de equivalência do ponto  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . De forma mais clara, temos a regra:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (y_0 : y_1 : \dots : y_n) \iff (x_0, x_1, \dots, x_n) = \lambda(y_0, y_1, \dots, y_n) \quad \text{onde } \lambda \in k^*.$$

Em particular, como mostrado na *Figura 2*, considerando o plano afim mergulhado no espaço tridimensional como o plano  $\pi$  de equação  $x_3 = 1$ , cada ponto do plano  $\pi$  determina uma reta passando pela origem e pelo dado ponto. Cada reta de  $\pi$  determina um plano pela origem. Se as retas  $\ell$  e  $\ell' \subset \pi$  se encontram, seu ponto de interseção dá lugar à reta de interseção dos dois planos associados a  $\ell, \ell'$ . Quando as retas  $\ell, \ell' \subset \pi$  são paralelas, os planos que elas definem ainda se cruzam, desta feita ao longo de uma reta passando pela origem e contida no plano  $x_3 = 0$ , usualmente chamada de *reta no infinito*. Seu complementar ( $x_3 \neq 0$ ) é o plano  $\mathbb{A}_k^2$ , cujos pontos são ditos estarem a *distância finita*.

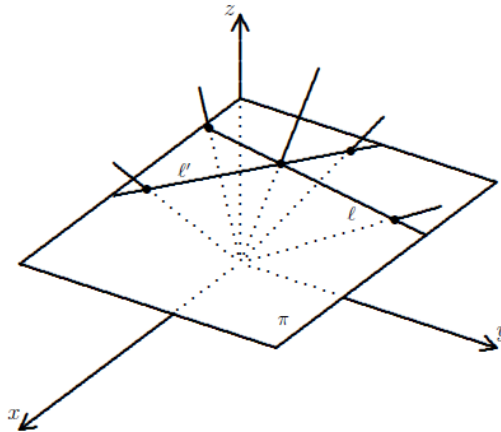


Figura 2 – Construção do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$

**Definição 2.15.** Um **polinômio homogêneo de grau  $d$**  é um polinômio da forma

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|I|=i_0+\dots+i_n=d} a_I x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}.$$

**Observação 2.16.** Tal polinômio também pode ser denominado como **forma** de grau  $d$ . Por exemplo, as **formas lineares** são polinômios homogêneos de grau 1 e as **formas quadráticas** são polinômios homogêneos de grau 2.

**Exemplo 2.17.** O polinômio  $f(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_0^3$  é um polinômio homogêneo.

**Definição 2.18.** O conjunto dos polinômios homogêneos de grau  $d$  nas variáveis  $x_0, \dots, x_n$  será denotado por  $k^d[x_0, \dots, x_n]$ .

Nosso objetivo, agora, é definir o conceito de *variedades* no espaço projetivo. É fato que não podemos defini-lo precisamente da mesma forma como antes: o "conjunto dos zeros" de um polinômio, em geral, pode não estar bem definido no espaço projetivo. Por exemplo, o polinômio  $y - x + 1$  tem  $(1, 0)$  como um zero, porém não tem o ponto equivalente  $(2, 0)$  também como um zero (sob a relação de equivalência definida). Entretanto, restringindo a atenção aos *polinômios homogêneos*, este problema não mais existe.

Para observar que o conjunto dos zeros em  $\mathbb{P}_k^n$  de um polinômio homogêneo está, de fato, bem definido, seja  $f$  homogêneo de grau  $d$  e seja  $\lambda \in k$ . Então, para cada  $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ , temos que  $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0, \dots, x_n)$ . Assim, se  $\lambda \neq 0$ , então temos  $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0 \iff f(x_0, \dots, x_n) = 0$ .

**Definição 2.19.** Seja  $C$  uma coleção arbitrária de polinômios homogêneos em  $k[x_1, \dots, x_n]$ . A *variedade algébrica projetiva associada a  $C$*  é

$$\mathcal{V}(C) = \{p \in \mathbb{P}_k^n : \forall f \in C, f(p) = 0\}.$$

Ou seja, uma *variedade algébrica projetiva* é um subconjunto de  $\mathbb{P}_k^n$  da forma  $\mathcal{V}(D)$  para alguma coleção  $D$  de polinômios homogêneos.

**Definição 2.20.** Seja  $V \subset \mathbb{P}_k^n$  uma variedade projetiva. O *ideal* de  $V$  é

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n] : \forall p \in V, f(p) = 0\}.$$

Uma vez que um ponto em  $\mathbb{P}_k^n$  é, de fato, uma classe de equivalência de pontos de  $k^{n+1}$ , note que a definição acima implica que para uma escolha *arbitrária* de representante  $(y_0, \dots, y_n)$  para o ponto  $p = (x_0 : \dots : x_n)$ , deve-se ter  $f(y_0, \dots, y_n) = 0$ .

Como no caso afim, pode-se observar que, para cada variedade projetiva  $V$ , temos que  $\mathcal{I}(V)$  é um ideal radical e que  $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$ . Além disso, já que  $f \in \mathcal{I}(V)$  deve se anular em qualquer representante de cada ponto  $p \in V$ , então sempre existe um conjunto de polinômios homogêneos o qual gera  $\mathcal{I}(V)$  em  $k[x_0, \dots, x_n]$ . Isso sugere o seguinte resultado:

**Teorema 2.21** (Teorema dos Zeros de Hilbert, Caso Projetivo). *Suponha  $k$  um corpo algebricamente fechado. Se  $J$  é um ideal radical de  $k[x_0, \dots, x_n]$  que apresenta um conjunto de geradores homogêneos e se  $J \neq \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ , então  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = J$ .*

*Demonstração.* [4, Theorem 2.18 (Projective Nullstellensatz), p. 72]

□

A razão da exclusão do ideal  $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  é o fato de que este ideal define um único ponto  $(0, \dots, 0) \in k^{n+1}$  e, por definição,  $(0 : \dots : 0)$  não é um elemento de  $\mathbb{P}_k^n$ .

Como consequência deste último resultado, observamos que, se  $k$  é um corpo algebricamente fechado, existe uma correspondência bijetora entre as variedades projetivas em  $\mathbb{P}_k^n$  e os ideais radicais gerados por polinômios homogêneos de  $k[x_0, \dots, x_n]$ , excluindo o ideal  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ .

Assim como no caso afim, temos que o conjunto das variedades projetivas em  $\mathbb{P}_k^n$  é fechado sob uniões finitas e interseções arbitrárias. Portanto, pode-se definir a **topologia de Zariski** em  $\mathbb{P}_k^n$  considerando-se as variedades projetivas como conjuntos fechados.

**Definição 2.22.** *Sejam  $V \subset \mathbb{P}_k^m$  e  $W \subset \mathbb{P}_k^n$  variedades algébricas projetivas. Uma função  $F : V \rightarrow W$  é um **morfismo de variedades projetivas** se, para cada  $p \in V$ , existem polinômios homogêneos  $f_0, \dots, f_n \in k[x_0, \dots, x_m]$ , todos de mesmo grau, e existe um aberto de Zariski  $U \subset V$  contendo  $p$  tal que, para todo  $x \in U$ :*

- (i) *pelo menos um dos valores  $f_0(x), \dots, f_n(x)$  é não nulo; e*
- (ii)  $F(x) = (f_0(x) : \dots : f_n(x))$ .

Note que, na definição acima, os polinômios podem variar de acordo com  $p$ .

### 2.3 HIPERSUPERFÍCIES E MUDANÇA DE COORDENADAS PROJATIVAS

**Definição 2.23.** *Uma **hipersuperfície** de grau  $d$  é uma variedade de  $\mathbb{P}_k^n$  definido por um único polinômio homogêneo de grau  $d$ .*

*Em  $\mathbb{P}_k^2$ , uma hipersuperfície é denominada **curva**. Uma curva de grau 1 é denominada **reta**, uma curva de grau 2 é denominada **cônica** e uma curva de grau 3 é denominada **cúbica**.*

*Em  $\mathbb{P}_k^3$ , uma hipersuperfície é denominada simplesmente **superfície**, onde uma superfície de grau 1 é denominada **plano**. A interseção de duas superfícies é denominada **curva** e, em particular, a interseção de dois planos é denominada **reta**.*

Qualquer plano em  $\mathbb{P}_k^3$  é isomorfo a uma variedade projetiva de  $\mathbb{P}_k^2$ . De fato, pode-se sempre mudar as coordenadas de forma que a forma linear a qual define um dado plano em  $\mathbb{P}_k^3$  é, simplesmente, a forma  $x_3$ , isto é, podemos considerar um plano como um conjunto de pontos  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  com  $x_3 = 0$ .

**Definição 2.24.** *Seja  $GL_{n+1}(k)$  o grupo formado pelas matrizes  $(n+1) \times (n+1)$  invertíveis. Uma **mudança de coordenadas projetiva** (ou **projetividade**) é uma função  $\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ , tal que  $\phi(x) = Ax$ , onde  $A \in GL_{n+1}(k)$  e  $x$  é considerado um vetor coluna  $(n+1) \times 1$ .*

Tal função é, de fato, bem definida: suponha que um ponto  $p \in \mathbb{P}_k^n$  é representado por  $x \in k^{n+1}$ , onde pelo menos uma das coordenadas de  $x$  é não-nula. Então, já que  $A$  é invertível e, portanto, tem núcleo trivial, observemos que as coordenadas de  $\phi(x) = Ax$  em  $k^{n+1}$  não podem ser todas nulas, ou seja,  $\phi(x)$  de fato define uma representação de um ponto em  $\mathbb{P}_k^n$ . Além disso, para cada  $\lambda \in k$ , temos  $\phi(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax = \lambda\phi(x)$ ; logo, em  $\mathbb{P}_k^n$ , os pontos  $\phi(x)$  e  $\phi(\lambda x)$  são iguais. Por isso,  $\phi$  envia *qualquer* representante do ponto  $p$  para o mesmo ponto em  $\mathbb{P}_k^n$ .

É claro que uma mudança de coordenadas projetiva  $\phi$  é um mapa polinomial de  $\mathbb{P}_k^n$  em  $\mathbb{P}_k^n$  e, portanto, é um morfismo entre variedades projetivas. Ademais,  $\phi$  apresenta uma mudança de coordenadas inversa dada por  $\phi^{-1}(x) = A^{-1}(x)$ . Portanto, uma mudança de coordenadas projetiva é um automorfismo da variedade projetiva  $\mathbb{P}_k^n$ .

A *imagem de uma variedade projetiva*  $V$  por uma projetividade  $\phi$  é a variedade definida por  $\phi(V)$ . As variedades  $V$  e  $\phi(V)$  são ditas *congruentes*.

**Definição 2.25.** *Uma propriedade  $\mathcal{P}$  relativa à variedade projetiva  $V$  é **invariante** ou **independente das coordenadas** se  $V$  satisfaz  $\mathcal{P}$  somente se  $\phi(V)$  a satisfaz para toda projetividade  $\phi$ .*

São exemplos de propriedades invariantes o grau de uma variedade projetiva, a colinearidade de pontos e a redutibilidade de uma variedade.

**Proposição 2.26.** *Sejam  $p_1, p_2, p_3$  (respectivamente,  $q_1, q_2, q_3$ ) três pontos em  $\mathbb{P}_k^2$  não-colineares. Então existe uma única mudança de coordenadas projetiva  $\phi : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  de forma que  $\phi(p_i) = q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demonstração.* Escrevendo  $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})$  e  $q_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3})$ , para  $1 \leq i, j \leq 3$ , queremos encontrar  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , onde  $\phi_k = a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z$ ,  $k = 1, 2, 3$ , tal que  $\phi(p_i) = q_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Portanto, temos três sistemas de equações (escritos em forma de matrizes):

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \end{pmatrix}$$

para  $i = 1, 2, 3$ . De fato, podemos escrever a equação acima como

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

Uma vez que  $p_\alpha = (p_{\alpha 1}, p_{\alpha 2}, p_{\alpha 3})$  (respectivamente,  $q_\beta = (q_{\beta 1}, q_{\beta 2}, q_{\beta 3})$ ) não são colineares, onde  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ,  $p_1, p_2, p_3$  (respectivamente,  $q_1, q_2, q_3$ ) são linearmente independentes como vetores. Portanto, a matriz  $P = (p_{j,i})_{i,j}$  (respectivamente,  $Q = (q_{j,i})_{i,j}$ ) é invertível. Assim,  $\phi = P^{-1}Q$  é invertível e é unicamente determinado.  $\square$

**Proposição 2.27.** *Sejam  $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$  e  $\{h_1, h_2, h_3\}$  conjuntos de três retas de  $\mathbb{P}_k^2$  não concorrentes, isto é,  $\cap \ell_i = \cap h_j = \emptyset$ . Então existe uma mudança de coordenadas  $\phi$  tal que  $\phi(\ell_i) = h_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demonstração.* Cada reta de  $\mathbb{P}_k^2$  corresponde a um plano de  $k^3$  passando pela origem. Seja  $u_i$  (respectivamente,  $v_i$ ) um vetor não-nulo na interseção dos planos  $L_j, L_k$  (respectivamente,  $H_j, H_k$ ) para  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Então os  $u_i$  (respectivamente,  $v_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ , formam uma base de  $k^3$ . Assim, existe um isomorfismo linear  $\phi$  definido pela condição  $\phi(u_i) = v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Visto que  $u_i, u_j$  geram  $L_k$ , temos efetivamente  $\phi(\ell_i) = h_i$ .  $\square$

## 2.4 MULTIPLICIDADE E TEOREMA DE BÉZOUT

A fim de definir funções em variedades projetivas  $V \subset \mathbb{P}_k^n$ , observemos que, apesar de polinômios homogêneos não determinarem funções bem definidas em  $\mathbb{P}_k^n$ , se  $f$  e  $g$  forem ambos polinômios homogêneos de grau  $d$ , então

$$\frac{f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}{g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d f(x_0, \dots, x_n)}{\lambda^d g(x_0, \dots, x_n)} = \frac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)},$$

e, portanto, o quociente é uma função bem definida em  $V$ . Assim, para uma variedade projetiva irredutível  $V$ , definimos

$$k(V) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in k[x_0, \dots, x_n] \text{ homogêneos, } \deg f = \deg g, g \notin \mathcal{I}(V) \right\} / \sim,$$

onde

$$\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \iff fg' - gf' \in \mathcal{I}(V).$$

**Definição 2.28.**  $k(V)$  é denominado **corpo de funções** de  $V$ . Os elementos de  $k(V)$  são chamados de **funções racionais**.

**Definição 2.29.** Uma função racional  $f \in k(V)$  é denominada **regular** em um ponto  $p$  se existe uma representação  $f = \frac{g}{h}$  com  $h(p) \neq 0$ .

**Definição 2.30.** O **anel local** de  $V$  em um ponto  $p \in V$  é definido por

$$\mathcal{O}_{V,p} = \{f \in k(V) : f \text{ é regular em } p\}.$$

**Definição 2.31.** Sejam  $f, g$  polinômios homogêneos e  $\mathcal{V}(f), \mathcal{V}(g)$  sem componentes em comum, a **multiplicidade de interseção** de  $\mathcal{V}(f)$  e  $\mathcal{V}(g)$  em um ponto  $p \in \mathbb{P}_k^2$  é definido por

$$I_p(\mathcal{V}(f), \mathcal{V}(g)) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, p}}{\langle f, g \rangle}.$$

**Observação 2.32.** A dimensão considerada na definição anterior é a dimensão como  $k$ -espaço vetorial. Se  $V = \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g) = \{p_1, \dots, p_r\}$ , então  $\sum_{p \in V} I_p(V) = \dim_k \frac{k[x, y]}{\langle f, g \rangle}$  (Veja [2, Propriedade 9, p. 40]).

**Exemplo 2.33.** *Seja a parábola semicuspidal  $C$ , dada em coordenadas projetivas por  $x_0^2x_2 - x_1^3 = 0$ , ou em coordenadas afins em uma vizinhança do ponto  $p = (0 : 0 : 1)$  como  $x^2 - y^3 = 0$ .*

*Sejam  $\ell_1$  e  $\ell_2$  retas dadas por  $\mathcal{V}(x_0)$  e  $\mathcal{V}(x_1)$ , respectivamente.*

*Então*

$$I_p(C, \ell_1) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, p}}{\langle x^2 - y^3, x \rangle} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, p}}{\langle x, y^3 \rangle} = 3,$$

e

$$I_p(C, \ell_2) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, p}}{\langle x^2 - y^3, y \rangle} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, p}}{\langle x^2, y \rangle} = 2.$$

Assumindo que o corpo trabalhado seja algebricamente fechado, uma das principais razões para se trabalhar no espaço projetivo em comparação com o espaço afim é o fato de que as variedades projetivas sempre se intersectam em um "número correto" de pontos. Essa noção é capturada de forma mais precisa no chamado *Teorema de Bézout*.

**Teorema 2.34** (Teorema de Bézout). *Sejam  $\mathcal{V}(f)$  e  $\mathcal{V}(g)$  curvas projetivas de graus  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente, em um corpo  $k$  algebricamente fechado, as quais não apresentam componentes em comum. Então  $\mathcal{V}(f)$  e  $\mathcal{V}(g)$  se intersectam em  $d_1 \cdot d_2$  pontos, contadas as multiplicidades, isto é*

$$\sum_p I_p(\mathcal{V}(f), \mathcal{V}(g)) = dd'.$$

*Demonstração.* [4, Theorem 6.24, p. 182-183] □

Para nossos propósitos, nesse contexto, o seguinte caso especial já é o suficiente:

**Proposição 2.35.** *Sejam  $C \in \mathbb{P}_k^2$  uma curva de grau  $d$  e  $L$  uma reta não contida em  $C$ . Então  $C$  e  $L$  se intersectam em  $d$  pontos, contando-se suas multiplicidades.*

*Demonstração.* Seja  $L = \mathcal{V}(x_2)$  e  $C = \mathcal{V}(f)$ , onde  $f = f(x_0, x_1, x_2)$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$ . Então

$$f|_L = f(x_0, x_1, 0) = a_0x_0^d + a_1x_0^{d-1}x_1 + \cdots + a_dx_1^d$$

é um polinômio homogêneo de grau  $d$  em duas variáveis. Podemos assumir que as coordenadas foram escolhidas de forma que  $(1 : 0 : 0) \in L$  não seja um zero de  $f|_L$ . Como o número de pontos onde  $C$  e  $L$  se intersectam é obtido pela contagem, considerando as multiplicidades, dos zeros do polinômio

$$f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d,$$

pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*, há exatamente  $d$  zeros. □

**Proposição 2.36. (1)** *Em um plano projetivo, duas retas distintas  $\ell_1, \ell_2$  sempre se intersectam em um único ponto.*

**(2)** *Em  $\mathbb{P}_k^3$ , se  $P$  é um plano e  $\ell$  é uma reta tal que  $\ell \not\subset P$ , então  $\ell$  intersecta  $P$  em um único ponto.*

*Demonstração. (1)* Por uma mudança de coordenadas adequada, podemos tomar o plano projetivo como sendo  $\mathbb{P}_k^2$ . Uma vez que  $\ell_1 \neq \ell_2$ , por uma outra mudança de coordenadas adequada, podemos tomar  $\ell_1 = \mathcal{V}(x_2)$  e  $\ell_2 = \mathcal{V}(x_1)$ . Assim, o ponto  $(1 : 0 : 0)$  é o único ponto em  $\ell_1 \cap \ell_2$ .

**(2)** Já que  $\ell \not\subset P$ , por uma mudança de coordenadas adequada, podemos tomar  $P = \mathcal{V}(x_3)$  e  $\ell = \mathcal{V}(x_1, x_2)$ . Portanto,  $(1 : 0 : 0 : 0)$  é o único ponto em  $\ell \cap P$ .  $\square$

## 2.5 IRREDUTIBILIDADE E SUAVIDADE

**Definição 2.37.** *Seja  $V$  uma variedade afim ou projetiva.  $V$  é **reduzível** se existem subvariedades não-vazias  $V_1, V_2 \subset V$  tais que  $V_1 \neq V_2$  e  $V = V_1 \cup V_2$ . Caso contrário,  $V$  é dita **irreduzível**.*

Pela relação 2.1, podemos observar que uma hipersuperfície é irreduzível quando seu polinômio de definição é uma potência de um polinômio irreduzível.

**Definição 2.38.** *Seja  $V = \mathcal{V}(f) \subset \mathbb{A}_k^n$  uma hipersuperfície irreduzível afim e seja  $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$ . O **espaço tangente** a  $V$  em  $p$  é a variedade (hiperplano) afim*

$$T_p V := \mathcal{V} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) \right),$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  denota a derivada (formal) de  $f$  com respeito a  $x_i$ .

**Lema 2.39.** *Seja  $\ell \subset \mathbb{A}_k^n$  uma reta afim passando por um ponto  $p$ . Então  $p$  é uma raiz múltipla de  $f|_{\ell}$  se, e somente se,  $\ell \subset T_p V$ .*

*Demonstração.* A reta  $\ell$  tem uma parametrização dada por

$$\ell : x_i = a_i + b_i t,$$

onde  $p = (a_1, \dots, a_n)$  e  $(b_1, \dots, b_n)$  é um vetor na direção de  $\ell$ . Seja  $g = f|_{\ell}$ , isto é,

$$g(t) = f(a_1 + b_1 t, \dots, a_n + b_n t).$$

Uma vez que  $p = (a_1, \dots, a_n) \in V$ , temos  $g(0) = f(p) = 0$ . Então,  $g$  tem uma raiz múltipla em 0 se, e somente se,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0) = 0 \iff \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \iff \ell \subset T_p V,$$

onde a última equivalência segue da equação de definição de  $T_p V$ .  $\square$

**Definição 2.40.**  $p$  é um **ponto suave** da hipersuperfície  $\mathcal{V}(f)$  se existe algum  $i$  para o qual  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$ . Do contrário  $p$  é um **ponto singular** de  $\mathcal{V}(f)$

Essa definição nos dá a seguinte caracterização para pontos suaves e pontos singulares em uma hipersuperfície afim:

$$\begin{aligned} p \text{ é um ponto suave de } V &\iff T_p V \text{ é uma hipersuperfície afim.} \\ p \text{ é um ponto singular de } V &\iff T_p V = \mathbb{A}_k^n. \end{aligned}$$

**Observação 2.41.** De forma geral se  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  é uma variedade irredutível afim qualquer e  $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$ , então o espaço tangente a  $V$  em  $p$  é definido como a interseção de hiperplanos afins

$$T_p V := \bigcap_{f \in \mathcal{I}(V)} \mathcal{V} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) \right).$$

Se  $V$  for uma hipersuperfície então esta definição é a mesma da Definição 2.38. O critério da Definição 2.40 para o caso geral em que  $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_n)$  é feito utilizando o posto da matriz  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij}$  conforme pode ser visto em [4, p. 101].

Vamos agora definir o espaço tangente para variedades projetivas.

**Definição 2.42.** Seja  $V \subset \mathbb{P}_k^n$  uma variedade projetiva e seja  $p \in V$ . O **espaço tangente** a  $V$  em  $p$  é a variedade projetiva

$$T_p V := \bigcap_{f \in \mathcal{I}(V)} \mathcal{V} \left( \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_i \right).$$

**Observação 2.43.** Este espaço tangente projetivo é o fecho projetivo do espaço tangente afim definido anteriormente, ou seja, se  $V$  é uma variedade irredutível afim, então a projetivização do espaço tangente afim coincide com o espaço tangente da projetivização da variedade  $V$ .

Para uma reta  $\ell \subset \mathbb{P}_k^2$  passando por um ponto  $p$  em em uma curva, digamos  $C$ , temos

$$I_p(C, \ell) = \text{mult}_p(f|_{\ell}),$$

onde  $\text{mult}_p(f|_{\ell})$  denota a multiplicidade de  $p$  como raiz de  $f|_{\ell}$ .

A fim de se observar esse fato, primeiro utilizamos uma mudança de coordenadas adequada tal que  $p = (0 : 0 : 1)$  e  $\ell$  seja dada por  $\mathcal{V}(x_1)$ . Então, em termos de coordenadas afins  $x = \frac{x_0}{x_2}$  e  $y = \frac{x_1}{x_2}$  para o subespaço afim  $\mathbb{A}_k^2$  de  $\mathbb{P}_k^2$ , onde  $x_2 \neq 0$ , a reta  $\ell \cap \mathbb{A}_k^2$  é dada



por  $y = 0$  e, assim:

$$\begin{aligned} I_p(C, \ell) &= \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{\langle f, x_1 \rangle} \\ &= \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, p}}{\langle f(x, y, 1), y \rangle} \\ &= \text{mult}_p(f|_{\ell}). \end{aligned}$$

**Exemplo 2.44.** *Uma reta projetiva  $\ell$  é seu próprio espaço tangente em qualquer ponto de  $\ell$ .*

De fato, após uma mudança de coordenadas, podemos supor que uma reta de  $\mathbb{P}_k^n$  é definida pelos polinômios  $x_2, \dots, x_n$ ; isto é,  $\ell = \mathcal{V}(x_2, \dots, x_n) = \mathcal{V}(\langle x_2, \dots, x_n \rangle)$ , onde esta última denota a variedade associada ao ideal gerado por  $x_2, \dots, x_n$ . Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (Teorema 2.21) para o caso projetivo, vemos, além disso, que

$$\mathcal{I}(\ell) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\langle x_2, \dots, x_n \rangle)) = \langle x_2, \dots, x_n \rangle.$$

Consequentemente,

$$T_p \ell = \bigcap_{f \in \{x_2, \dots, x_n\}} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) = \bigcap_{j=2}^n \mathcal{V}(x_j) = \mathcal{V}(x_2, \dots, x_n) = \ell.$$

**Definição 2.45.** *Seja  $V = \mathcal{V}(f)$  uma hipersuperfície irredutível em  $\mathbb{P}_k^n$  (analogamente, em  $\mathbb{A}_k^{n+1}$ ).  $V$  é **singular** em um ponto  $p \in V$  se*

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(p) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

*Se  $V$  é não-singular em cada um de seus pontos, então dizemos que  $V$  é **suave**.*

Essa definição também nos dá uma caracterização para pontos suaves em uma hipersuperfície projetiva  $V \subset \mathbb{P}^2$  a saber, um ponto  $p \in V$  é um ponto suave se, e somente se,  $T_p V$  é uma reta (a chamada **reta tangente**).

**Exemplo 2.46.** *Em coordenadas afins, ou seja, tomando  $x_2 = 1$  e trabalhando nas variáveis  $x = \frac{x_0}{x_2}$  e  $y = \frac{x_1}{x_2}$ , consideremos a curva  $y^2 = x^2(x+1)$ .*

*A fim de calcular suas singularidades, tomemos a curva em coordenadas projetivas e seu polinômio homogêneo*

$$f = x_1^2 x_2 - x_0^3 - x_0^2 x_2.$$

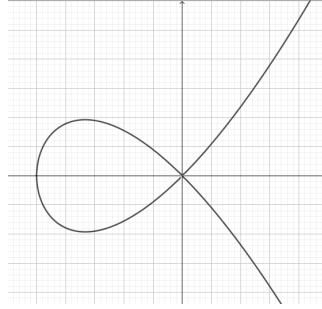


Figura 3 –  $y^2 = x^3 + x^2$  (Curva cúbica com uma singularidade tipo nó)

As derivadas parciais deste polinômio serão

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0} &= -3x_0^2 - 2x_0x_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2x_1x_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1^2 - x_0^2.\end{aligned}$$

Pela definição, os pontos singulares são encontrados igualando todas as derivadas parciais a zero. Assim, a segunda equação, para um corpo de característica diferente de 2, implica em valores  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$ . Caso  $x_2 = 0$ , então a primeira equação resulta em  $x_0 = 0$  (em um corpo de característica diferente de 3) e a terceira equação resulta em  $x_1 = 0$ . Entretanto, esse resultado nos dá um ponto não pertencente ao plano projetivo. Portanto,  $x_1 = 0$  e, assim,  $x_0 = x_1 = 0$ , donde o ponto singular será  $(0 : 0 : 1)$ .

Essa singularidade é denominada **nó**, onde há duas retas tangentes distintas passando nesse ponto.

**Exemplo 2.47.** Em coordenadas afins, ou seja, tomando  $x_2 = 1$  e trabalhando nas variáveis  $x = \frac{x_0}{x_2}$  e  $y = \frac{x_1}{x_2}$ , consideremos a curva  $y^2 = x^3$ .

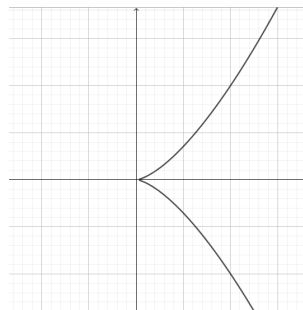


Figura 4 –  $y^2 = x^3$  (Curva cúbica com uma singularidade tipo cúspide)

A fim de calcular suas singularidades, tomemos a curva em coordenadas projetivas e seu polinômio homogêneo

$$f = x_2x_1^2 - x_0^3.$$

As derivadas parciais deste polinômio serão

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0} &= -3x_0^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2x_1x_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1^2.\end{aligned}$$

Pela definição, os pontos singulares são encontrados igualando todas as derivadas parciais a zero. Consideremos o corpo de trabalho com característica diferente de 2 e 3. Nesse caso, a primeira equação implica em  $x_0 = 0$  e a terceira equação implica em  $x_1 = 0$ . Observe que com o valor  $x_1 = 0$ , a segunda equação também já se anula, como gostaríamos, independente do valor de  $x_2$ . Assim, o ponto singular será  $(0 : 0 : 1)$ .

Essa singularidade é denominada **cúspide**, onde as duas retas tangentes são coincidentes nesse ponto.

É claro que singularidade em  $p \in V$  é bem definida, mesmo no caso projetivo (já que as derivadas parciais de um polinômio homogêneo ainda são homogêneas) e é invariante se trocarmos  $f$  por qualquer múltiplo escalar não-nulo de  $f$ . Portanto, a definição de singularidade é uma propriedade da hipersuperfície. Uma mudança de coordenadas, tanto para o caso afim, quanto para o caso projetivo, não afeta a irreduzibilidade e a suavidade de uma variedade.

## 2.6 ALGUNS RESULTADOS SOBRE QUÁDRICAS

Nesta seção colecionamos alguns resultados que serão utilizados mais adiante.

**Lema 2.48.** *Seja  $f \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$  uma forma quadrática definindo uma superfície quádrlica  $Q$  em  $\mathbb{P}_k^3$ . Então existe uma matriz simétrica  $M \in M_4(k)$  tal que, para cada  $\mathbf{x} \in k^4$ , temos  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ . Além disso,  $Q$  é singular (i.e.,  $\det Q = 0$  ou, equivalentemente,  $Q$  não admite inversa) se, e somente se,  $M$  é singular.*

*Demonstração.* Escreva

$$\begin{aligned}f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= Ax_0^2 + Bx_1^2 + Cx_2^2 + Dx_3^2 + Ex_0x_1 + Fx_0x_2 + Gx_0x_3 + Hx_1x_2 \\ &\quad + Ix_1x_3 + Jx_2x_3.\end{aligned}$$

Para qualquer matriz  $(a_{ij}) \in M_4(k)$ , temos que para cada  $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in k^4$ ,

$$\begin{aligned}
(x_0, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + \cdots + a_{14}x_3 \\ \vdots \\ a_{41}x_0 + \cdots + a_{44}x_3 \end{pmatrix} = \\
&= (a_{11}x_0 + \cdots + a_{14}x_3)x_0 + \cdots + (a_{41}x_0 + \cdots + a_{44}x_3)x_3 = \\
a_{11}x_0^2 + a_{22}x_1^2 + a_{33}x_2^2 + a_{44}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_0x_1 + (a_{13} + a_{31})x_0x_2 + (a_{14} + a_{41})x_0x_3 + \\
&+ (a_{23} + a_{32})x_1x_2 + (a_{24} + a_{42})x_1x_3 + (a_{34} + a_{43})x_2x_3.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo  $a_{11} = A, \dots, a_{44} = D, a_{12} = a_{21} = \frac{E}{2}, \dots, a_{34} = a_{43} = \frac{J}{2}$  e tomando  $M = (a_{ij})$ , temos uma matriz simétrica tal que, para cada  $\mathbf{x} \in k^4$ , temos  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ .

Por fim, note que  $Q$  é singular se, e somente se, existem  $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 \in k$ , não todos nulos, tais que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto ocorre se, e somente se, existem  $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 \in k$ , não todos zeros, tais que

$$\begin{pmatrix} 2(a_{11}x'_0 + \cdots + a_{14}x'_3) \\ \vdots \\ 2(a_{41}x'_0 + \cdots + a_{44}x'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Porém, isso significa precisamente que existe um vetor não-trivial  $(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \in k^4$  tal que  $2M(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)^T = \mathbf{0}$ , ou seja,  $M$  tem nulidade, no mínimo, 1 e, portanto, é singular. Com isso,  $Q$  é singular se, e somente se,  $M$  é singular.  $\square$

**Lema 2.49.** *Seja  $Q$  uma superfície quádrlica suave em  $\mathbb{P}_k^3$ . Então o conjunto de retas de  $\mathbb{P}_k^3$  que estão contidas em  $Q$  é dividido em duas famílias disjuntas,  $F_1$  e  $F_2$ , tais que*

- (1) *duas retas distintas da mesma família não se intersectam;*
- (2) *se  $\ell_1 \in F_1$  e  $\ell_2 \in F_2$ , então  $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$ ; e*
- (3)  $\bigcup_{\ell_1 \in F_1} \ell_1 = Q = \bigcup_{\ell_2 \in F_2} \ell_2$ .

*Demonstração.* [8, Lemma 2.5, p. 12]  $\square$

**Lema 2.50.** *Sejam  $\ell_1, \dots, \ell_4$  retas duas a duas disjuntas em  $\mathbb{P}_k^3$  tais que  $\ell_1, \dots, \ell_4$  não estão todas em alguma superfície quádrlica suave  $Q \subset \mathbb{P}_k^3$ .*

*Então o número de retas em  $\mathbb{P}_k^3$  que intersectam todas as  $\ell_1, \dots, \ell_4$  é 1 ou 2.*

*Demonstração.* [8, Lemma 2.6, p. 13] □

## 2.7 ALGUNS RESULTADOS SOBRE CURVAS

Os seguintes resultados serão utilizados em algumas demonstrações do próximo capítulo.

**Proposição 2.51.** *Seja  $f \in k[x, y]$  um polinômio homogêneo não-nulo de grau  $d$ . Então  $f$  tem, no máximo,  $d$  zeros em  $\mathbb{P}_k^1$ .*

*Se  $k$  é algebricamente fechado, então  $f$  tem exatamente  $d$  zeros em  $\mathbb{P}_k^1$ , quando estes zeros são contados com suas respectivas multiplicidades.*

*Demonstração.* Os pontos de  $\mathbb{P}_k^1$  são todos da forma  $(a : 1)$ , para  $a \in k$ , juntamente com o único "ponto no infinito"  $(1 : 0)$ . Portanto, a noção de multiplicidade de uma raiz de  $f$  é natural: para qualquer raiz da forma  $(a : 1)$ , a sua multiplicidade é a maior potência de  $(x - ay)$  que divide  $f$ ; e se  $f$  tem  $(1 : 0)$  como raiz, então a multiplicidade da raiz é a maior potência de  $y$  dividindo  $f$ .

Agora, seja  $r$  a multiplicidade do ponto  $(1 : 0)$  como uma raiz de  $f$ , onde esta multiplicidade é 0 se  $(1 : 0)$  não for raiz de  $f$ . Seja  $g$  o polinômio (não mais necessariamente homogêneo) em uma variável obtido a partir de  $f$  substituindo  $y = 1$ . Assim, uma vez que  $f$  é homogêneo de grau  $d$ , por definição temos que  $\deg(g) = d - r$ . Agora, já que  $g$  é um polinômio em  $k[x]$  de grau  $d - r$ , sabemos que  $g$  tem, no máximo,  $d - r$  raízes em  $k$  e tem exatamente  $d - r$  raízes contadas com suas respectivas multiplicidades, quando  $k$  é algebricamente fechado. Combinando todos esses fatos e a definição de multiplicidade apresentada, chega-se ao resultado. □

Baseado nos Exemplos 2.46 e 2.47 podemos classificar as cúbicas irredutíveis singulares na próxima proposição.

**Proposição 2.52.** *Seja  $C$  uma curva cúbica irredutível singular. Então  $C$  tem exatamente uma singularidade e é projetivamente equivalente a uma das seguintes curvas:*

1.  $C = \mathcal{V}(x_1^2 x_2 - x_0^3 - x_0^2 x_2),$

2.  $C = \mathcal{V}(x_2 x_1^2 - x_0^3).$

*Demonstração.* A curva  $C$  tem, no máximo, uma singularidade. Caso contrário, a reta passando pelas duas singularidades intersectaria a curva  $C$  em, pelo menos, 4 pontos, quando contados com suas multiplicidades, contradizendo a *Proposição 2.35*.

Podemos assumir que a singularidade de  $C$  é o ponto  $p = (0 : 0 : 1)$ . Isto significa que o polinômio que define  $C$  tem a forma:

$$f = x_2 \cdot q(x_0, x_1) + bx_0^3 + cx_0^2x_1 + dx_0x_1^2 + ex_1^3,$$

com  $q(x_0, x_1) \not\equiv 0$ , uma vez que, caso contrário,  $f$  poderia ser fatorado em três formas lineares.

A forma quadrática  $q$  fatora-se em formas lineares

$$q(x_0, x_1) = \ell_0(x_0, x_1) \cdot \ell_1(x_0, x_1),$$

e há dois casos a serem considerados:

**I)** O caso  $\ell_0(x_0, x_1) \neq c \cdot \ell_1(x_0, x_1)$ . Aplicando uma mudança de coordenadas adequada, podemos assumir

$$\begin{aligned} \ell_0(x_0, x_1) &= x_0, \\ \ell_1(x_0, x_1) &= x_1, \end{aligned}$$

donde  $f$  tem a forma

$$f = x_2x_0x_1 + b'x_0^3 + c'x_0^2x_1 + d'x_0x_1^2 + e'x_1^3.$$

Uma vez que  $f$  é irredutível,  $b'e' \neq 0$ .

Definindo

$$\begin{aligned} x_2 &= \beta\gamma(x_2' - 6x_0') + \frac{c'}{\beta}(x_0' + x_1') + \frac{d'}{\gamma}(x_0' - x_1'), \\ x_0 &= -\frac{1}{\beta}(x_0' + x_1'), \\ x_1 &= -\frac{1}{\gamma}(x_0' - x_1'), \end{aligned}$$

com  $\beta^3 = b'$  e  $\gamma^3 = e'$ , obtemos

$$f = x_2' \left( (x_0')^2 - (x_1')^2 \right) - 8(x_0')^3,$$

que é projetivamente equivalente a  $x_1^2x_2 - x_0^2x_2 - x_0^3$ .

**II)** O caso  $\ell_0(x_0, x_1) = c \cdot \ell_1(x_0, x_1)$ . Podemos assumir  $\ell_0(x_0, x_1) = \ell_1(x_0, x_1) = x_1$ , donde

$$f = x_2x_1^2 + b'x_0^3 + c'x_0^2x_1 + d'x_0x_1^2 + e'x_1^3.$$

Temos  $b' \neq 0$ , pois, caso contrário,  $x_1$  dividiria  $f$ .

Definindo

$$x_0 = x'_0 - \frac{c'}{3b'}x_1,$$

temos

$$f = x_2x_1^2 + b'(x'_0)^3 + d''x'_0x_1^2 + e''x_1^3,$$

com  $b' \neq 0$ , e considerando

$$x_2 = -b'x'_2 - d''x'_0 - e''x_1,$$

segue que

$$f = -b'(x_2x_1^2 - (x'_0)^3),$$

que é projetivamente equivalente a  $x_2x_1^2 - x_0^3$ .

□

**Lema 2.53.** *Seja  $f \in k[x, y, t]$  uma forma quadrática em  $\mathbb{P}_k^2$ . Então  $f$  define em  $\mathbb{P}_k^2$  uma das seguintes variedades:*

- (1) *uma cônica suave e não-degenerada (isto é, uma curva cônica definida por uma forma quadrática irredutível); ou*
- (2) *duas retas distintas (necessariamente se intersectando em um único ponto); ou*
- (3) *uma reta "dupla".*

*Demonstração.* Primeiramente, suponha que  $f$  se fatore como  $f = gh$ , para algumas formas lineares  $g, h \in k[x, y, t]$ . Se  $g$  é um múltiplo não-nulo de  $h$ , então  $f$  é o produto de uma constante não-nula e o quadrado de uma única forma linear e, portanto, o seu conjunto dos zeros é o mesmo dessa forma linear. Essa análise implica no caso (3).

Agora, se  $g$  não for um múltiplo de  $h$ , então, pela relação (2.1), sabemos que  $f$  é a união de duas retas distintas definidas por  $g$  e por  $h$ , respectivamente. Essa análise implica no caso (2).

Assim, precisamos considerar o caso onde  $f$  não se fatora em um produto de duas formas lineares, ou seja, considerar o caso de  $f$  ser irredutível. Similar à demonstração do Lema 2.48, sob uma mudança de coordenadas apropriada, podemos escrever

$$f(x, y, t) = ax^2 + by^2 + ct^2$$

para  $a, b, c \in k$  não todos nulos. De fato, se ao menos um dentre  $a, b$  e  $c$  for 0, então podemos utilizar do fato que  $k$  é algebricamente fechado para observar que podemos fatorar  $f$ . Por exemplo,  $ax^2 + by^2$  fatora-se em  $(\sqrt{ax} + i\sqrt{by})(\sqrt{ax} - i\sqrt{by})$  e  $ax^2$  fatora-se

em  $(\sqrt{ax})^2$ . Portanto, no caso onde  $f$  é irredutível,  $f$  é equivalente a  $ax^2 + by^2 + ct^2$ , com todos  $a, b, c$  não-nulos. Porém, nesse caso, observando as derivadas parciais com respeito a  $x, y$  e  $t$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2ax \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2by \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= 2ct\end{aligned}$$

temos que  $f$  é não-singular. Essa análise implica no caso (1), finalizando a demonstração.  $\square$

**Lema 2.54.** *Seja  $f \in k[x, y, t]$  uma forma quadrática em  $\mathbb{P}_k^2$ , digamos*

$$f(x, y, t) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxt + Eyt + Ft^2.$$

*Então a cônica  $c = \mathcal{V}(f) \subset \mathbb{P}_k^2$  é suave se, e somente se, seu discriminante*

$$\Delta = 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2$$

*é não-nulo.*

*Demonstração.* Seja

$$M = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix}.$$

Pelo mesmo argumento utilizando no *Lema 2.48*, podemos escrever

$$f(x, y, t) = (x, y, t)M \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}.$$

Observamos ainda que  $c$  será não-singular se, e somente se, a matriz  $M$  não for singular. Porém, temos  $\Delta = 4 \det M$ . Assim,  $\Delta$  é não-nulo precisamente quando  $M$  é não-singular.  $\square$



### 3 SUPERFÍCIE CÚBICA

O objetivo desse capítulo é mostrar que toda cúbica suave em  $\mathbb{P}_k^3$  contém 27 retas. Na primeira seção, mostraremos que realmente existem retas em uma superfície cúbica e, na segunda seção, mostraremos que existem exatamente 27 retas e determinaremos suas configurações. Este é um clássico tema em Geometria Algébrica, historicamente remetendo-se ao século XIX. Assumimos aqui que o corpo de base  $k$  é algebricamente fechado e com característica diferente de 2 e 3.

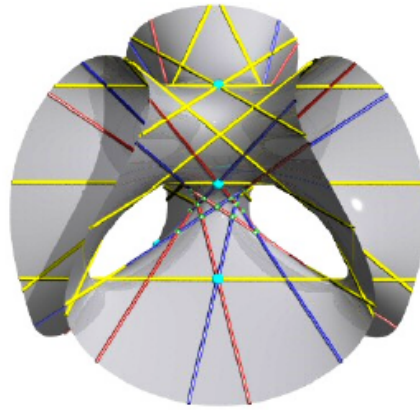


Figura 5 – *Superfície Cúbica Diagonal de Clebsch*: é não-singular e foi estudada por Clebsch (1871) e Klein (1873), onde todas as 27 retas podem ser desenhadas em um modelo real da superfície, como observado na figura.

#### 3.1 A EXISTÊNCIA DE RETAS EM UMA CÚBICA

Seja  $f = f(x_0, x_1, x_2, x_3) \in k^3[x_0, x_1, x_2, x_3]$  um polinômio homogêneo de grau 3. Consideremos a *superfície cúbica* correspondente

$$S = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_k^3 : f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Assumimos, a partir de agora, que  $S$  é suave, o que equivalente a assumir que a cúbica  $f$  é geral. Mais precisamente, existe um subconjunto aberto de Zariski de polinômios cúbicos  $f$  tal que  $S$  é suave. O principal resultado desta seção é o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.** *Toda superfície cúbica suave  $S \subset \mathbb{P}_k^3$  contém uma reta.*

Há duas etapas para a demonstração do teorema. Primeiramente, mostra-se que, para algum ponto  $p \in S$ , a interseção  $C_p := S \cap T_p S$  contém uma reta ou é uma cúbica plana com uma cúspide. No primeiro caso, o resultado nos dá a reta procurada. No segundo caso, prova-se que existe uma reta em  $S$  passando por um ponto em  $C_p$ .

**Lema 3.2.** *Duas superfícies em  $\mathbb{P}_k^3$  têm interseção não-vazia.*

*Demonstração.* [6, Proposition after Corollary 1.7, p. 71] □

**Lema 3.3.** *Seja  $S$  uma superfície cúbica suave. Então, para cada ponto  $p \in S$ , a interseção  $C_p := S \cap T_p S$  é uma curva plana cúbica singular.*

*Existe um ponto  $p$  em  $S$  tal que  $C_p$  é redutível ou uma cúbica plana com uma cúspide (uma parábola cúbica ou cúbica cuspidal).*

*Demonstração.* Primeiramente, nota-se que  $C_p$  é, de fato, uma curva, uma vez que uma superfície cúbica redutível é singular, portanto, sendo suave,  $S$  é irredutível e, assim, não contém  $T_p S$ . Já que  $S$  é definida por uma cúbica, a restrição a um subespaço linear é também dado por uma cúbica e, dessa forma,  $C_p$  é uma curva cúbica plana.

Provaremos, agora, que  $p$  é uma singularidade de  $C_p$ . Escolhemos coordenadas tais que  $p = (0 : 0 : 0 : 1) \in S$  e  $T_p S = \mathcal{V}(x_2)$ . Em coordenadas afins  $x, y, z$ , ou seja, fazendo  $x_3 = 1$  e denominando  $x = \frac{x_0}{x_3}, y = \frac{x_1}{x_3}, z = \frac{x_2}{x_3}$ , a equação  $f$  de  $S$  é dada por

$$f = z + q(x, y, z) + h(x, y, z),$$

onde  $q$  é um polinômio homogêneo de grau 2 e  $h$  é um polinômio homogêneo de grau 3. Em coordenadas homogêneas, temos

$$f = x_2 x_3^2 + q(x_0, x_1, x_2) x_3 + h(x_0, x_1, x_2).$$

Consequentemente,  $f|_{\{x_2=0\}}$  anula-se em  $p$ . Portanto,  $C_p$  é singular em  $p$ .

Agora, suponha que  $C_p$  seja irredutível para todos os pontos  $p \in S$ . Então devemos mostrar que, para algum  $p$ , a curva  $C_p$  é uma cúbica cuspidal (isto é, tem uma cúspide). As tangentes de  $C_p$  no ponto  $p$  são dadas pelos fatores lineares da forma quadrática

$$\tilde{q}(x_0, x_1) = q(x_0, x_1, 0),$$

e  $C_p$  tem uma cúspide se, e somente se, as duas retas tangentes são iguais, isto é, se, e somente se,  $q$  é o quadrado de uma forma linear. Se escrevermos

$$q(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j, \text{ com } a_{ij} = a_{ji},$$

então  $\tilde{q}$  é um quadrado se, e somente se, a matriz  $\tilde{A} = (a_{ij})_{i,j=0,1}$  apresenta posto 1. Uma vez que  $\tilde{q}$  não é identicamente nulo, isto é equivalente a  $\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = 0$ .

Consideremos, agora, a Hessiana de  $f$ ,

$$H_f := \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}.$$

Seja a transformação

$$M : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad M \in GL(4, k).$$

Para qualquer polinômio  $f \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , denotamos o polinômio transformado  $f \circ M$  por  $f^*$ . Pela Regra da Cadeia, temos o comportamento dessa Hessiana sob essa mudança de coordenadas:

$$H_{f^*} = (\det M)^2 (H_f)^*,$$

onde  $(H_f)^* = H_f \circ M$ .

No nosso caso,  $f$  tem a forma  $f = x_2 x_3^2 + q(x_0, x_1, x_2)x_3 + h(x_0, x_1, x_2)$  com  $q(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j$ , com  $a_{ij} = a_{ji}$ . Assim, temos

$$H_f(p) = \det \begin{pmatrix} 2a_{00} & 2a_{01} & 2a_{02} & 0 \\ 2a_{10} & 2a_{11} & 2a_{12} & 0 \\ 2a_{20} & 2a_{21} & 2a_{22} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da forma dessa matriz, temos

$$H_f(p) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = 0.$$

Portanto,  $C_p$  é uma cúbica com uma cúspide se, e somente se,  $p \in S \cap H$ , onde  $H = \mathcal{V}(H_f)$ .

Resta provar que  $S \cap H$  é não-vazio. Como  $f$  é uma cúbica, ou  $H$  é  $\mathbb{P}_k^3$  (neste caso,  $S \cap H = S \neq \emptyset$ ), ou  $H$  é uma superfície cúbica (neste caso, o resultado segue do *Lema 3.2*).  $\square$

Queremos saber quando uma reta está contida em uma superfície cúbica. Posto que qualquer reta pode ser dada como uma reta  $\overline{pq}$  passando por dois pontos,  $p$  e  $q$ , introduzimos o seguinte conceito, que auxiliará na determinação de quando uma reta  $\overline{pq}$  está contida na superfície  $\mathcal{V}(f)$ .

**Definição 3.4.** Para um polinômio cúbico homogêneo  $f$  nas variáveis  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , a **polar** de  $f$  é definida por

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3; y_0, y_1, y_2, y_3) := \sum_{i=0}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i.$$

Para explicar o significado geométrico da polar, notemos, primeiramente, que para  $p \in S$  e pela definição de espaço tangente, temos

$$\overline{pq} \subset T_p S \iff f_1(p; q) = 0.$$

Para pontos arbitrários  $p = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $q = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ , escrevendo

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) := \sum_{0 \leq i, j, k \leq 3} a_{ijk} x_i x_j x_k,$$

temos a polar da seguinte maneira:

$$f_1(p; q) = \sum_{0 \leq i, j, k \leq 3} a_{ijk} (y_i x_j x_k + x_i y_j x_k + x_i x_j y_k)$$

e

$$f_1(q; p) = \sum_{0 \leq i, j, k \leq 3} a_{ijk} (x_i y_j y_k + y_i x_j y_k + y_i y_j x_k).$$

Portanto,

$$f(\lambda p + \mu q) = \lambda^3 f(p) + \lambda^2 \mu f_1(p; q) + \lambda \mu^2 f_1(q; p) + \mu^3 f(q).$$

Dessa forma, concluímos que

$$\overline{pq} \subset S \iff f(p) = f_1(p; q) = f_1(q; p) = f(q) = 0.$$

Dada essa condição, será útil determinar quando dois ou mais polinômios apresentam um zero em comum. Este é um problema clássico resolvido em termos da *resultante*.

**Definição 3.5.** Para polinômios homogêneos  $r$  e  $s$  em variáveis  $u$  e  $v$ , dados por

$$\begin{aligned} r(u, v) &= a_0 u^2 + a_1 uv + a_2 v^2, \\ s(u, v) &= b_0 u^3 + b_1 u^2 v + b_2 uv^2 + b_3 v^3, \end{aligned}$$

a **resultante** de  $r$  e  $s$  é dada por

$$R(r, s) := \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

onde as entradas nulas estão sendo representadas pelos espaços vazios.

A importância da resultante é observada no fato a seguir.

**Lema 3.6.** *Dois polinômios homogêneos  $r$  e  $s$  de grau 2 e grau 3, respectivamente, tem um zero em comum em  $\mathbb{P}_k^1$  se, e somente se,  $R(r, s) = 0$ .*

*Demonstração.* Considere o espaço vetorial  $V$  de dimensão 5 constituído de todos os polinômios homogêneos de grau 4 em  $u$  e  $v$ . Uma base para este espaço é constituído pelos monômios  $u^4, u^3v, u^2v^2, uv^3, v^4$ . As linhas da matriz (3.1) são somente os coeficientes dos cinco polinômios

$$\begin{aligned} u^2 \cdot r &= a_0u^4 + a_1u^3v + a_2u^2v^2 \\ uv \cdot r &= a_0u^3v + a_1u^2v^2 + a_2uv^3 \\ v^2 \cdot r &= a_0u^2v^2 + a_1uv^3 + a_2v^4 \\ u \cdot s &= b_0u^4 + b_1u^3v + b_2u^2v^2 + b_3uv^3 \\ v \cdot s &= b_0u^3v + b_1u^2v^2 + b_2uv^3 + b_3v^4 \end{aligned}$$

em termos da base canônica de monômios para este espaço. O determinante é zero se, e somente se, existe uma relação linear entre estes polinômios. Tal relação pode ser escrita como

$$q \cdot r = \ell \cdot s,$$

onde  $q = q(u, v)$  é homogêneo de grau 2 e  $\ell = \ell(u, v)$  é linear. Essa igualdade implica que  $q \cdot r$  e  $\ell \cdot s$  têm os mesmos zeros, o que somente é possível se  $r$  e  $s$  têm um zero comum. Por outro lado, se  $r$  e  $s$  têm um zero comum, então os cinco polinômios também, ou seja, eles certamente não podem gerar  $V$  e, portanto, devem ser linearmente dependentes.  $\square$

Agora, estamos em condição de demonstrar o resultado principal dessa seção.

***Demonstração do Teorema 3.1.*** Se  $C_p = S \cap T_p S$  é redutível para algum ponto  $p \in S$ , então  $C_p$ , e portanto  $S$ , contém uma reta, conforme pedido. Caso contrário, pelo *Lema 3.3*, podemos assumir que existe um ponto  $p$  tal que  $C_p$  possui uma cúspide. Por uma mudança de coordenadas, podemos assumir que  $p = (0 : 0 : 1 : 0)$  e  $T_p S = \mathcal{V}(x_3)$  e, pela *Proposição 2.52*, podemos assumir ainda que

$$C_p = \mathcal{V}(x_0^2x_2 - x_1^3, x_3).$$

Portanto, o polinômio  $f$  de  $S$  apresenta a forma

$$f = x_0^2x_2 - x_1^3 + x_3 \cdot g$$

para algum polinômio homogêneo  $g = g(x_0, x_1, x_2, x_3)$  de grau 2. Uma vez que  $S$  é suave em  $p$ , temos  $g(0, 0, 1, 0) \neq 0$  e, trocando  $f$  por  $cf$ , se necessário, podemos assumir que  $g(0, 0, 1, 0) = 1$ .

Provaremos, agora, que  $S$  contém uma reta passando por um ponto de  $C_p$ . Os pontos em  $C_p - \{p\}$  são parametrizados por  $p_\alpha := (1 : \alpha : \alpha^3 : 0)$ , para  $\alpha \in k$ . Note que podemos representar qualquer reta através de  $p_\alpha$  pela reta  $\overline{p_\alpha q}$  passando por  $p_\alpha$  e  $q = (0 : x_1 : x_2 : x_3)$ , para algum ponto  $q$  no plano  $\mathcal{V}(x_0)$ . Já que  $f(p_\alpha) = 0$ , nesse caso, temos

$$\overline{p_\alpha q} \subset S \iff f_1(p_\alpha; q) = f_1(q; p_\alpha) = f(q) = 0.$$

Denotaremos  $f_1(p_\alpha; q), f_1(q; p_\alpha), f(q) \in k[\alpha][x_1, x_2, x_3]$  por  $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ , respectivamente. Estes são polinômios homogêneos em  $x_1, x_2, x_3$  de graus 1, 2 e 3, respectivamente, com coeficientes dados por polinômios em  $\alpha$ . Como discutido, a teoria de resultantes pode ser utilizada para determinar quando dois polinômios tem um zero comum. Nesse caso, definimos um polinômio  $R_{27}(\alpha)$  para ser a resultante

$$R_{27}(\alpha) := R\left(B_\alpha(x_1, \tilde{A}_\alpha(x_1, x_3), x_3), C_\alpha(x_1, \tilde{A}_\alpha(x_1, x_3), x_3)\right),$$

onde  $x_2 = \tilde{A}_\alpha(x_1, x_3)$  é a relação determinada pelo polinômio linear  $A_\alpha$  explicitado adiante. O *Lema 3.6* implica que  $R_{27}(\alpha)$  satisfaz a seguinte propriedade:

$$R_{27}(\alpha) = 0 \iff A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \text{ tem um zero comum } (\eta_\alpha : \xi_\alpha : \tau_\alpha).$$

Para provar o teorema, é suficiente mostrar que  $R_{27}$  tem uma raiz, visto que, para toda raiz  $\alpha_0$  de  $R_{27}(\alpha)$ , a reta  $\overline{p_{\alpha_0} q}$  com  $q = (0 : \eta_{\alpha_0} : \xi_{\alpha_0} : \tau_{\alpha_0})$  está em  $S$ .

Com o objetivo de mostrar que  $R_{27}$  possui uma raiz, é suficiente provar que  $R_{27}$  é não constante. Faremos isso explicitamente calculando  $R_{27}$ .

Na nossa situação, a polar da equação

$$f = f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 x_2 - x_1^3 + x_3 \cdot g$$

é dada por

$$f_1 = 2x_0 x_2 y_0 - 3x_1^2 y_1 + x_0^2 y_2 + g(x_0, x_1, x_2, x_3) y_3 + x_3 g_1(x_0, x_1, x_2, x_3; y_0, y_1, y_2, y_3),$$

onde  $g_1$  é a polar da equação quadrática  $g$ . Os polinômios  $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$  são, então, dados por

$$\begin{aligned} A_\alpha &= -3\alpha^2 x_1 + x_2 + g(1, \alpha, \alpha^3, 0) x_3, \\ B_\alpha &= -3\alpha x_1^2 + x_3 \cdot g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

$$C_\alpha = -x_1^3 + x_3 \cdot g(0, x_1, x_2, x_3).$$

Uma vez que  $g$  é de grau 2 e  $g(0, 0, 1, 0) = 1$ , segue que

$$g(1, \alpha, \alpha^3, 0) = \alpha^6 + \text{termos de grau inferior.}$$

Definamos

$$a^{(6)} := g(1, \alpha, \alpha^3, 0).$$

De  $A_\alpha = 0$ , temos a relação

$$x_2 = 3\alpha^2 x_1 - a^{(6)} x_3.$$

Substituindo em  $B_\alpha$ , temos a expressão

$$B_\alpha = -3\alpha x_1^2 + x_3 \cdot g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, x_1, 3\alpha^2 x_1 - a^{(6)} x_3, x_3).$$

Já que  $g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, x_1, x_2, x_3)$  é linear em  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , temos

$$B_\alpha = b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_3 + b_2 x_3^2$$

com

$$\begin{aligned} b_0 &= -3\alpha, \\ b_1 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 1, 3\alpha^2, 0) = 6\alpha^5 + \dots, \\ b_2 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 0, -a^{(6)}, 1) = -2\alpha^9 + \dots, \end{aligned}$$

onde as reticências denotam termos de ordem inferior. Analogamente, fazendo a mesma substituição em  $C_\alpha$ , temos

$$C_\alpha = -x_1^3 + x_3 \cdot g(0, x_1, 3\alpha^2 x_1 - a^{(6)} x_3, x_3),$$

e obtemos

$$C_\alpha = c_0 x_1^3 + c_1 x_1^2 x_3 + c_2 x_1 x_3^2 + c_3 x_3^3,$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= -1, \\ c_1 &= g(0, 1, 3\alpha^2, 0) = 9\alpha^4 + \dots, \\ c_2 &= g_1(0, 1, 3\alpha^2, 0; 0, 0, -a^{(6)}, 1) = -6\alpha^8 + \dots, \\ c_3 &= g(0, 0, -a^{(6)}, 1) = \alpha^{12} + \dots. \end{aligned}$$

Por definição, temos

$$R_{27}(\alpha) = \det \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

O termo líder de  $R_{27}$  é dado pelo termo líder do determinante da matriz dos termos líderes, isto é, a matriz obtida substituindo  $b_i$  e  $c_j$  por seus termos líderes, assumindo este determinante sendo não nulo. Portanto, o termo líder de  $R_{27}$  é dado por

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & & \\ & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & \\ & & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 \\ -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} & \\ & -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} \end{pmatrix} \\ &= \alpha^{27} \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 & & \\ & -3 & 6 & -2 & \\ & & -3 & 6 & -2 \\ -1 & 9 & -6 & 1 & \\ & -1 & 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^{27}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $R_{27}$  é um polinômio de grau 27 e, em particular, não constante.  $\square$

**Observação 3.7.** *Se  $S$  é uma superfície cúbica contendo um ponto  $p$  tal que  $S \cap T_p S$  é uma cúbica cuspidal, então a prova acima mostra que existe um polinômio  $R_\alpha$  de grau 27 tal que toda raiz de  $R_\alpha$  dá origem a, ao menos, uma reta em  $S$ . Portanto, se as raízes de  $R_\alpha$  são distintas, devemos esperar que  $S$  contenha, no mínimo, 27 retas.*

### 3.2 A CONFIGURAÇÃO DAS 27 RETAS

Ao longo dessa seção, consideraremos  $f \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$  um polinômio cúbico homogêneo irredutível o qual define uma superfície não-singular  $S$  em  $\mathbb{P}_k^3$ . Lembrando que estamos assumindo  $k$  um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3.

Nosso objetivo é demonstrar o notável fato que, independente de sua forma, uma superfície cúbica não-singular  $S$  em  $\mathbb{P}_k^3$  sempre conterá precisamente 27 retas.

**Lema 3.8.** *Seja  $E \subset \mathbb{P}_k^3$  um plano. Então a interseção da superfície cúbica  $S$  com o plano  $E$  será:*

- (1) *uma curva cúbica não-degenerada (isto é, uma curva cúbica definida por uma forma cúbica irredutível); ou*



- (2) a união de uma curva cônica não-degenerada e uma reta; ou
- (3) três retas distintas.

*Demonstração.* Através de uma mudança de coordenadas adequada, podemos assumir o plano  $E = \mathcal{V}(x_3)$ . Sob essa mudança de coordenadas,  $S$  é definido a partir de  $\mathbb{P}_k^3$  por algum polinômio  $g$  homogêneo de grau 3. A interseção de  $S$  com  $E$  é a cúbica plana definida pelo polinômio  $h$  em  $k[x_0, x_1, x_2]$  o qual é obtido a partir de  $g$  substituindo  $x_3$  por 0, ou seja,  $h(x_0, x_1, x_2) = g(x_0, x_1, x_2, 0)$ . Tal polinômio  $h$  é (i) irredutível, (ii) produto de uma forma quadrática irredutível (digamos  $q$ ) e uma forma linear (digamos  $l$ ), ou (iii) produto de três formas lineares (digamos  $l_1, l_2$  e  $l_3$ ).

O caso (i) corresponde, claramente, ao caso (1) descrito no enunciado deste *Lema*. Pela relação (2.1),  $\mathcal{V}(ql) = \mathcal{V}(q) \cup \mathcal{V}(l)$ , podemos observar que o caso (ii) corresponde ao caso (2). Por último, novamente pela relação (2.1),  $\mathcal{V}(l_1 l_2 l_3) = \mathcal{V}(l_1) \cup \mathcal{V}(l_2) \cup \mathcal{V}(l_3)$ , vemos que o caso (iii) corresponde ao caso (3), exceto pelo fato de que, a priori, não sabemos que todas as três formas lineares são, de fato, distintas; isto é, não sabemos que  $S \cap E$  será a união de três retas *distintas* sempre que a interseção for uma união de retas. Logo, é suficiente mostrar que todas as vezes que  $h$  puder ser fatorado em três formas lineares, essas formas devem ser distintas entre si.

Desse modo, seja  $\ell$  uma reta arbitrária em  $S \cap E$ . É suficiente provar que a forma linear em  $k[x_0, x_1, x_2]$  a qual define  $\ell$  não aparece na fatoração de  $h$  mais de uma única vez. Agora, utilizando uma mudança de coordenadas conveniente, podemos supor  $\ell = \mathcal{V}(x_2, x_3)$ , isto é, a forma linear definindo  $\ell$  em  $E$  é simplesmente  $x_2$ . Agora, suponhamos, por contradição, que podemos, de fato, escrever

$$h(x_0, x_1, x_2) = x_2^2 \cdot a(x_0, x_1, x_2)$$

para alguma forma linear  $a$ . Dessa forma, revertendo o processo pelo qual obtemos  $h$  a partir de  $g$ , observa-se que  $g$  pode ser expresso como

$$g(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2^2 \cdot b(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_3 \cdot c(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

para alguma forma linear  $b$  e alguma forma quadrática  $c$ . Calculando as derivadas parciais de  $g$ , vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_0} &= x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_0} + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_0} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} &= x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 2x_2 b + x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} &= x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_3} + c + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Consequentemente, em qualquer ponto  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  tal que  $x_2 = x_3 = 0$  e tal que  $c(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ , teremos que  $S = \mathcal{V}(g)$  é singular.

Entretanto, no mínimo um tal ponto  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  existe, de fato, em  $S$ : requerer  $x_2 = x_3 = 0$  significa, simplesmente, restringir à reta  $\ell$  o plano  $E$  e, quando substituirmos  $x_2 = x_3 = 0$  em  $c$ , obtemos um polinômio  $c_1$  que  $(A)$  é identicamente nulo ou  $(B)$  é uma quádriga homogênea nas variáveis  $x_0, x_1$ . No primeiro caso, *qualquer* ponto  $(x_0 : x_1)$  é uma raiz de  $c_1$ . No segundo caso, sabemos que  $c_1$  apresenta, no mínimo, uma raiz  $(x_0 : x_1)$ . Ou seja, em todo caso,  $\mathcal{V}(c_1) \neq \emptyset$ , isto é,  $c$  tem alguma raiz  $(x_0 : x_1 : 0 : 0)$  ao longo de  $\ell$ . Conclusão:  $S$  apresenta um ponto singular, contradizendo o fato de  $S$  ser uma superfície não-singular.  $\square$

**Lema 3.9.** *Seja  $p$  um ponto de  $S$ . Então o número de retas que estão contidas em  $S$  e contém  $p$  é, no máximo, 3. Além disso,  $T_p S$  é um plano contendo todas estas retas.*

*Demonstração.* Seja  $\ell$  uma reta contida em  $S$ . Pelo Exemplo 2.44, sabemos que  $\ell = T_p \ell$ . Também, como  $\ell \subset S$ , temos  $\mathcal{I}(S) \subset \mathcal{I}(\ell)$ . Portanto,

$$T_p \ell = \bigcap_{g \in \mathcal{I}(\ell)} \mathcal{V} \left( \sum_{i=0}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right) \subset \bigcap_{g \in \mathcal{I}(S)} \mathcal{V} \left( \sum_{i=0}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right) = T_p S,$$

uma vez que a interseção à esquerda é sobre um conjunto maior que a interseção à direita.

Além disso, já que  $S = \mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(\langle f \rangle)$ , pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, Caso Projetivo, temos  $\mathcal{I}(S) = \langle f \rangle$ , ou seja

$$T_p S = \mathcal{V} \left( \sum_{i=0}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right).$$

Isto é, a variedade projetiva  $T_p S$  é definida em  $\mathbb{P}_k^3$  por uma única forma linear e esta forma é não-nula, já que ao menos uma das derivadas  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  deve ser não-nula, dado que  $S$  é suave. Esta é a definição de  $T_p S$  ser um plano.

Em resumo:  $\ell \subset T_p \ell \subset T_p S$ , de modo que  $\ell$  é uma reta passando por  $p$  contida no plano  $T_p S$ . Porém, também  $\ell \subset S$ , de modo que  $\ell \subset T_p S \cap S$ . Ou seja, *qualquer* reta passando por  $p$  que está contida em  $S$  deve, também, estar contida em  $T_p S \cap S$ . E, pelo Lema 3.8, sabe-se que existem, no máximo, 3 retas em  $T_p S \cap S$ .  $\square$

Agora, procedemos para demonstrar que existem exatamente 27 retas em  $S$ .

**Lema 3.10.** *Seja  $\ell$  uma reta contida em  $S$ . Então existem exatamente 10 retas em  $S$  que intersectam  $\ell$ . Podemos escrever essas 10 retas como  $\{\ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5\}$  de tal forma que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ ,*

(1)  $\ell, \ell_i$  e  $\ell'_i$  estão em algum plano  $P_i$ ; e

(2) se  $j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}$ , então  $(\ell_i \cup \ell'_i) \cap (\ell_j \cup \ell'_j) = \emptyset$ .

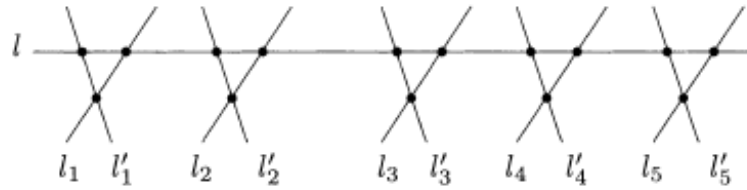


Figura 6 – A configuração de 10 retas em uma cúbica intersectando uma dada reta  $\ell$  da cúbica.

*Demonstração.* Qualquer reta  $m \neq \ell$  que intersecta  $\ell$  determina um único plano  $P_m$  contendo  $\ell$  e  $m$ . Portanto, podemos observar que se  $m \subset S$  é uma reta qualquer tal que  $m \neq \ell$  e tal que  $\ell \cap m \neq \emptyset$ , então  $P_m$  deve conter exatamente três retas distintas de  $S$  (uma vez que duas retas é impossível de acordo com o Lema 3.8):  $\ell, m$  e alguma outra reta  $m'$ . E, já que quaisquer duas retas em um plano projetivo sempre se intersectam, vemos que  $m$  e  $m'$  intersectam  $\ell$ . Em resumo: (i) qualquer reta  $m$  contida em  $S$  e intersectando  $\ell$  dá origem a uma outra reta  $m'$ , a qual também intersecta  $\ell$  de forma tal que  $\ell, m, m'$  são coplanares; (ii) qualquer plano contendo  $\ell$  e, ao menos, uma outra reta de  $S$  deve conter exatamente 3 retas de  $S$ . Para estabelecer (1) e (2) como desejado, nos resta provar, portanto, dois fatos:

- (I) Há exatamente 5 planos contendo  $\ell$  que também contêm uma outra reta de  $S$ , significando que podemos enumerar todos os possíveis pares de retas  $(m, m')$  acima como  $(\ell_1, \ell'_1), \dots, (\ell_5, \ell'_5)$ ; e
- (II) Se  $i \neq j$ , então  $(\ell_i \cup \ell'_i) \cap (\ell_j \cup \ell'_j) = \emptyset$ .

Antes de provarmos (I), vamos assumir o resultado (I) a fim de provar (II). Reenumerando, se necessário, suponha, por contradição, que  $(\ell_1 \cup \ell'_1) \cap (\ell_2 \cup \ell'_2) \neq \emptyset$ . Seja  $p$  um ponto dessa interseção. Então  $p$  está em  $\ell_1$  ou em  $\ell'_1$ ; sem perda de generalidade, assumo  $p$  em  $\ell_1$ . Mais ainda, sem perda de generalidade, suponha  $p$  em  $\ell_2$ . Dessa forma,  $\ell_1$  intersecta  $\ell_2$  e, por hipótese, ambas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  intersectam  $\ell$ . Afirmamos que isso implica em  $\ell_1, \ell_2, \ell$  serem coplanares.

De fato, seja  $P$  o único plano contendo  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Se  $\ell \subset P$ , segue o resultado. Então, suponha  $\ell \not\subset P$ . Consequentemente, como  $\ell$  somente pode intersectar  $P$  em um ponto, necessariamente temos que  $\ell$  intersecta  $P$  em  $p$ . Dado isso:  $p \in \ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell$ . Entretanto, pelo Lema 3.9, isto significa que  $T_p S$  é um plano contendo  $\ell, \ell_1, \ell_2$ . Portanto,  $\ell_1, \ell_2, \ell$  seriam coplanares e teríamos uma contradição. Então, de fato,  $\ell_1, \ell_2, \ell$  devem ser coplanares. Porém, sabemos que  $\ell'_1$  é uma reta coplanar a  $\ell$  e a  $\ell_1$ , significando que  $\ell'_1$  é uma reta de  $S$  que está no plano contendo  $\ell, \ell_1$  e  $\ell_2$  tal que  $\ell'_1$  é, por hipótese, distinta de todas as três

retas  $\ell, \ell_1, \ell_2$ . Ou seja, o plano contendo  $\ell, \ell_1, \ell_2$  contém, no mínimo, quatro retas distintas de  $S$ , uma contradição com (ii).

Devemos, agora, provar **(I)**. Primeiro, suponha  $P$  um plano contendo  $\ell$ . Utilizando uma mudança de coordenadas conveniente, podemos supor que  $P = \mathcal{V}(x_3)$ , observamos que  $S \cap P$  é uma subvariedade de  $P = \mathbb{P}_k^2$  definida por uma forma cúbica; e, uma vez que  $\ell \subset S \cap P$ , podemos extrair o fator linear definindo  $\ell$  dessa forma cúbica. Pela Equação 2.1, concluímos que  $S \cap P$  é a união da reta  $\ell$  e uma cônica plana  $c$ . Agora, pelo Lema 2.53, sabemos que  $c$  é exatamente uma das seguintes: (A) uma curva cônica não-singular e não-degenerada, (B) a união de duas retas distintas, ou (C) uma única reta. Já que  $S \cap P = \ell \cup c$ , pelo Lema 3.8, sabemos que o caso (C) é impossível. Portanto, precisamente uma das seguintes opções é verdadeira: (a)  $c$  é não-singular e não contém retas, ou (b)  $c$  é a união de duas retas distintas e, assim, singular.

Agora, qualquer plano  $P$  contendo  $\ell$  dá origem a uma cônica  $c$  correspondente tal que  $S \cap P = \ell \cup c$ . Para provar **(I)**, devemos mostrar que existem exatamente 5 planos  $P$  tal que  $S \cap P$  contém uma reta distinta de  $\ell$ . Pela conclusão do parágrafo anterior, é suficiente mostrar que existem exatamente 5 planos  $P$  cuja cônica  $c$  correspondente seja singular. Isto posto, para provar **(I)** e, assim, completar nossa demonstração do Lema, é suficiente provar o resultado seguinte (Lema 3.11).

**Lema 3.11.** *Seja  $\mathcal{P}$  o conjunto dos planos em  $\mathbb{P}_k^3$  que contêm  $\ell$ . Então existem exatamente 5 elementos  $P \in \mathcal{P}$  tal que  $S \cap P$  é a união de  $\ell$  e uma cônica plana  $c$ , onde  $c$  é singular.*

*Demonstração.* Através de uma mudança de coordenadas conveniente, assumimos  $\ell = \mathcal{V}(x_2, x_3)$ .

Como  $\mathcal{V}(x_2, x_3) = \ell \subset S$ , sabemos que  $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$  é identicamente nulo sempre que  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 0$ . Portanto, sob nossa mudança de coordenadas, podemos escrever

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = A(x_2, x_3)x_0^2 + B(x_2, x_3)x_0x_1 + C(x_2, x_3)x_1^2 + D(x_2, x_3)x_0 + E(x_2, x_3)x_1 + F(x_2, x_3), \quad (3.2)$$

onde  $A, B, C, D, E, F \in k[x_2, x_3]$  tal que  $A, B, C$  são formas lineares,  $D, E$  são formas quadráticas e  $F$  é uma forma cúbica.

Segue da nossa definição que  $\mathcal{P}$  é, precisamente, o conjunto de todas as variedades da forma  $\mathcal{V}(a_0x_2 - b_0x_3)$  com  $a_0, b_0 \in k$  não ambos nulos. Seja  $\mathcal{Q}$  o conjunto de todas as variedades da forma  $\mathcal{V}(a_0x_2 - b_0x_3)$  com  $a_0 \neq 0$  e seja  $\mathcal{Q}' = \mathcal{V}(x_3)$  de forma que  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}'$  e  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$  disjuntos.

Consideremos, primeiro, o caso onde  $P \in \mathcal{Q}$ . Então, escrevemos  $P = \mathcal{V}(a_1x_2 - b_1x_3)$ . Uma vez que  $a_1 \neq 0$ , temos  $P = \mathcal{V}\left(x_2 - \frac{b_1}{a_1}x_3\right)$ . Seja  $b = \frac{b_1}{a_1}$  para que  $P = \mathcal{V}(x_2 - bx_3)$ . Observe que  $b$  é unicamente determinado pela nossa escolha de  $P \in \mathcal{Q}$ :

as únicas escolhas de  $(a_0, b_0)$  tal que  $\mathcal{V}(a_0x_2 - b_0x_3) = \mathcal{V}(a_1x_2 - b_1x_3)$  são pares da forma  $(a_0, b_0) = (c_0a_1, c_0b_1)$  para algum  $c_0 \in k$  não nulo. Em todo caso, o quociente  $\frac{b_0}{a_0}$  é simplesmente  $\frac{c_0b_1}{c_0a_1} = \frac{b_1}{a_1} = b$ . Observe também que diferentes valores de  $b \in k$  correspondem a diferentes planos  $P \in \mathcal{Q}$  e, inversamente: vemos que

$$\mathcal{V}(x_2 - bx_3) = \mathcal{V}(x_2 - b'x_3) \iff b = b'.$$

Vemos que, em  $P = \mathcal{V}(x_2 - bx_3)$ , temos sempre  $x_2 = bx_3$ . Consequentemente, substituindo  $x_2 = bx_3$ , observamos que, no plano  $P$ , a reta  $\ell$  é dada simplesmente por  $\mathcal{V}(x_3)$ . Além disso, a restrição de  $f$  a  $P$  é dada substituindo  $x_2 = bx_3$  na expressão de  $f$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} f|_P(x_0, x_1, x_2, x_3) &= A(bx_3, x_3)x_0^2 + B(bx_3, x_3)x_0x_1 + C(bx_3, x_3)x_1^2 + D(bx_3, x_3)x_0 \\ &\quad + E(bx_3, x_3)x_1 + F(bx_3, x_3). \end{aligned}$$

Como  $A, B, C$  são formas lineares,  $D, E$  são formas quadráticas e  $F$  uma forma cúbica, podemos fatorar as potências de  $x_3$  de tal forma que

$$\begin{aligned} f|_P(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_3 \left[ A(b, 1)x_0^2 + B(b, 1)x_0x_1 + C(b, 1)x_1^2 + x_3D(b, 1)x_0 \right. \\ &\quad \left. + x_3E(b, 1)x_1 + x_3^2F(b, 1) \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que  $x_3$  é o polinômio definidor de  $\ell$  em  $P$  e  $f|_P$  é o polinômio definidor de  $S \cap P$ , observamos, pela relação (2.1) que  $S \cap P$  é a união de  $\ell$  e a curva cônica  $c$  em  $P$  definida por

$$g_b(x_0, x_1, x_3) = A(b, 1)x_0^2 + B(b, 1)x_0x_1 + C(b, 1)x_1^2 + D(b, 1)x_0x_3 + E(b, 1)x_1x_3 + F(b, 1)x_3^2.$$

Em resumo: todo plano  $P \in \mathcal{Q}$  dá origem a um único valor  $b \in k$  tal que o polinômio de definição da "parte cônica"  $c$  de  $S \cap P$  é  $g_b(x_0, x_1, x_3)$ ; além disso, os valores de  $b \in k$  estão em correspondência bijetora com os possíveis planos  $P \in \mathcal{Q}$ .

Agora, pelo Lema 2.54, sabemos que a cônica  $c$  será singular exatamente quando o discriminante de  $g_b$  for zero, i.e., quando

$$\begin{aligned} 0 &= 4A(b, 1)C(b, 1)F(b, 1) + B(b, 1)D(b, 1)E(b, 1) - A(b, 1)E^2(b, 1) \\ &\quad - B^2(b, 1)F(b, 1) - C(b, 1)D^2(b, 1). \end{aligned}$$

Seja  $h$  o polinômio homogêneo de grau 5 em  $k[x_2, x_3]$  dado por

$$\begin{aligned} h(x_2, x_3) &= 4A(x_2, x_3)C(x_2, x_3)F(x_2, x_3) + B(x_2, x_3)D(x_2, x_3)E(x_2, x_3) \\ &\quad - A(x_2, x_3)E^2(x_2, x_3) - B^2(x_2, x_3)F(x_2, x_3) - C(x_2, x_3)D^2(x_2, x_3). \end{aligned}$$

Então, pelo exposto acima, vemos que diferentes  $P \in \mathcal{Q}$  nos quais a parte cônica de  $S \cap P$  é singular correspondem bijectivamente às diferentes raízes de  $h$  (em  $k^2$  ou, nesse caso, equivalentemente em  $\mathbb{P}^1$ ) da forma  $(b, 1)$ , para algum  $b \in k$ .

Consideremos, agora, o outro caso, onde  $P \in \mathcal{Q}'$ . Então, necessariamente,  $P = \mathcal{V}(x_3)$  para que a reta  $\ell = \mathcal{V}(x_2, x_3)$  seja definida em  $P$  simplesmente por  $x_2 = 0$ . E, análogo ao feito anteriormente, encontramos  $f|_P$  substituindo  $x_3 = 0$  em  $f$ , como dado na equação

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = A(x_2, x_3)x_0^2 + B(x_2, x_3)x_0x_1 + C(x_2, x_3)x_1^2 + D(x_2, x_3)x_0 \\ + E(x_2, x_3)x_1 + F(x_2, x_3).$$

Com isso, temos

$$f|_P(x_0, x_1, x_2, x_3) = A(x_2, 0)x_0^2 + B(x_2, 0)x_0x_1 + C(x_2, 0)x_1^2 + D(x_2, 0)x_0 \\ + E(x_2, 0)x_1 + F(x_2, 0).$$

Fatorando as potências de  $x_2$  de  $A, B, C, D, E, F$  de acordo com seus respectivos graus, encontramos

$$f|_P(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2 \left[ A(1, 0)x_0^2 + B(1, 0)x_0x_1 + C(1, 0)x_1^2 + D(1, 0)x_0x_2 \right. \\ \left. + E(1, 0)x_1x_2 + F(1, 0)x_2^2 \right],$$

donde a parte cônica  $c$  de  $S \cap P$  é simplesmente dada por

$$g(x_0, x_1, x_2) = A(1, 0)x_0^2 + B(1, 0)x_0x_1 + C(1, 0)x_1^2 + D(1, 0)x_0x_2 + E(1, 0)x_1x_2 + F(1, 0)x_2^2.$$

Pelo Lema 2.54, sabemos que a cônica  $c$  será singular exatamente quando

$$0 = 4A(1, 0)C(1, 0)F(1, 0) + B(1, 0)D(1, 0)E(1, 0) - A(1, 0)E^2(1, 0) \\ - B^2(1, 0)F(1, 0) - C(1, 0)D^2(1, 0).$$

Portanto, vemos que o (único) plano  $P \in \mathcal{Q}'$  resultará em uma parte cônica  $c$  singular de  $S \cap P$  justamente quando o polinômio  $h$  tiver  $(1, 0) \in k^2$  como raiz. Porém, já que  $h$  é homogêneo, sabemos que  $h$  terá  $(1, 0)$  como raiz se, e somente se,  $h$  tiver todos os pontos da forma  $(d, 0)$ , com  $d \in k \setminus \{0\}$ , como raiz. Ou seja, o plano  $P \in \mathcal{Q}'$  resultará em  $c$  singular quando  $h$  tiver  $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1$  como raiz.

Combinando este fato com o caso quando  $P \in \mathcal{Q}$  e recapitulando que  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}'$ , observamos que os planos distintos  $P \in \mathcal{P}$ , nos quais a parte cônica  $c$  de  $S \cap P$  será singular, correspondem bijetivamente às distintas raízes em  $\mathbb{P}_k^1$  do polinômio homogêneo de grau 5  $h(x_2, x_3)$ . Uma vez que queremos provar que existem exatamente 5 planos distintos  $P \in \mathcal{P}$  nos quais  $c$  é singular, é, portanto, suficiente mostrar que existem exatamente 5 raízes distintas de  $h$  em  $\mathbb{P}_k^1$ . Pela Proposição 2.51, sabemos que  $h$  tem exatamente 5 raízes em  $\mathbb{P}_k^1$  quando essas raízes forem contadas com suas respectivas multiplicidades. Concluindo: basta provar que  $h$  não tem raiz múltipla. Ou seja, precisamos somente demonstrar o seguinte resultado (Lema 3.12):

**Lema 3.12.** *Com a notação acima, o polinômio homogêneo  $h$  de grau 5 não apresenta raiz múltipla em  $\mathbb{P}_k^1$ .*

*Demonstração.* Note que cada elemento de  $\mathbb{P}_k^1$  tem uma representação na forma  $(b : 1)$ , para algum  $b \in k$ , ou na forma  $(1 : 0)$ . Recapitulando a *Proposição 2.51*, em todos os casos onde  $h$  tem uma raiz da forma  $(b : 1)$ , podemos fatorar o termo  $x_2 - bx_3$  de  $h$ ; analogamente, sempre que  $h$  tiver uma raiz  $(1 : 0)$ , podemos fatorar  $x_3$  de  $h$ . Portanto, para provar o resultado desejado, é suficiente mostrar que, para qualquer  $b \in k$  dado, não podemos fatorar mais que de uma vez o termo  $x_2 - bx_3$  ou o termo  $x_3$  de  $h$ .

Note que, como feito no início da demonstração do *Lema 3.11*, por uma mudança de coordenadas conveniente de forma que troca-se  $x_2$  por  $x_3$  e vice-versa, não afetará o fato de que  $\ell = \mathcal{V}(x_2, x_3)$  e, portanto, não afetará o fato de que

$$h(x_2, x_3) = 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2$$

para  $A, B, C$  formas lineares,  $D, E$  formas quadráticas e  $F$  forma cúbica, todas em função das variáveis  $x_2, x_3$ . Então, pela mudança de coordenadas que comuta  $x_2$  e  $x_3$ , se necessário, precisamos somente demonstrar que nenhum termo da forma  $x_2 - bx_3$  pode ser fatorado de  $h$  mais de uma vez.

Agora, fixado  $b \in k$ , podemos, ainda, utilizar uma mudança de coordenadas adequada tal que  $x_2 - bx_3$  seja  $x_2$  e  $x_3$  seja  $x_3$ . Esta é a mudança de coordenadas inversa da mudança que manda  $x_2$  em uma combinação linear de  $x_2$  e  $x_3$ ; logo, pelo início da demonstração do *Lema 3.11*, essa mudança de coordenadas não afeta o que sabemos até aqui. Portanto, é, de fato, suficiente provar que não podemos fatorar mais de uma vez uma potência de  $x_2$  a partir de  $h$ .

Uma vez que podemos fatorar um  $x_2$  (ou seja, fatorar  $x_2 - bx_3$ , com  $b = 0$ ) a partir de  $h$ , sabemos que  $h$  tem  $(0 : 1)$  como uma raiz. Recapitulando a correspondência estabelecida na demonstração do *Lema 3.11*, sabemos que essa raiz corresponde ao plano  $P \in \mathcal{P}$  dado por  $P = \mathcal{V}(x_2)$ , no qual  $\ell$  é dada, simplesmente, por  $\mathcal{V}(x_3)$ . Ou seja, a interseção de  $S$  com este dado plano  $P$  é a união de  $\ell$  e uma cônica *singular*  $c$ . Pelo *Lema 3.8*, temos, portanto, que  $S \cap P$  é um conjunto formado por 3 retas distintas de  $P$ , que inclui  $\ell$ ; digamos que tais retas são  $\ell, m, m'$ .

Temos que ou (A) todas  $\ell, m, m'$  se intersectam em algum ponto  $p \in P$  ou (B)  $\ell \cap m \cap m' = \emptyset$ . Uma vez que  $\ell, m, m'$  estão no plano projetivo  $P$ , então as interseções duas a duas de  $\ell, m, m'$  são não-vazias. Portanto, no caso (B), necessariamente, existem três pontos distintos  $p_1, p_2, p_3 \in P$  tais que  $\ell \cap m = p_1$ ,  $\ell \cap m' = p_2$  e  $m \cap m' = p_3$ . Agora, mudamos as coordenadas convenientemente em  $P$  a fim de arranjar  $\ell, m, m'$  de maneira simples. Isto é, no caso (A), podemos mudar as coordenadas de forma que, em  $P$ , tenhamos  $m = \mathcal{V}(x_0)$  e  $m' = \mathcal{V}(x_0 - x_3)$ ; no caso (B),  $m = \mathcal{V}(x_0)$  e  $m' = \mathcal{V}(x_1)$ . Tal

mudança de coordenadas ocorre somente no plano  $P$ , não atingindo o fato de  $P = \mathcal{V}(x_2)$ ; além disso, não atinge, também, o fato de  $\ell = \mathcal{V}(x_3)$  em  $P$ . Portanto, esta mudança de coordenadas não afetará o que sabemos sobre  $h$ .

Consideremos o caso (B). Como  $\ell, m, m' \subset S = \mathcal{V}(f)$ , sempre que (i)  $x_3 = 0$  ou  $x_0 = 0$  ou  $x_1 = 0$  e (ii)  $x_2 = 0$  ambos ocorrem, devemos ter  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ . Então, dado que  $f$  é um polinômio cúbico homogêneo, podemos escrever

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_1x_3 + x_2 \cdot q(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

para alguma forma quadrática  $q$ . Com as notações da *Equação 3.2*, temos ainda que  $B(x_2, x_3) = x_3 + ax_2$ , para algum  $a \in k$ , e que  $x_2$  divide  $A, C, D, E$  e  $F$ . Utilizando este último fato e lembrando que

$$h(x_2, x_3) = 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2,$$

vemos que cada termo de  $h$ , exceto talvez  $-B^2F$ , é divisível por  $x_2^2$ . Então, utilizando do fato que  $B(x_2, x_3) = x_3 + ax_2$ , vemos que

$$-B^2(x_2, x_3)F(x_2, x_3) = -(x_3^2 + 2ax_2x_3 + a^2x_2^2)F(x_2, x_3).$$

Assim, para demonstrar que  $x_2^2$  não divide  $-B^2F$  (e, portanto, não divide  $h$ , como desejado), é suficiente mostrar que  $x_2^2$  não divide  $F$ . Para isso, note que, sob nosso sistema de coordenadas, o ponto  $p = (0 : 0 : 0 : 1)$  satisfaz  $f$  e, logo, pertence a  $S$ . Uma vez que  $S$  deve ser suave em  $p$ , sabemos que pelo menos uma das derivadas parciais de  $f = 0$  em  $(0, 0, 0, 1)$  deve ser não-nula. Agora, usando o fato de  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_1x_3 + x_2 \cdot q(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , observamos que as derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0} &= x_1x_3 + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_0x_3 + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= x_0x_1 + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_3} \end{aligned}$$

se anulam em  $(0, 0, 0, 1)$ . Dessa forma, sabemos que  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 0, 1)$  deve ser não-nulo. Agora, recapitulando a expressão de  $f$  na *Equação 3.2*, sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial A}{\partial x_2}x_0^2 + \frac{\partial B}{\partial x_2}x_0x_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2}x_1^2 + \frac{\partial D}{\partial x_2}x_0 + \frac{\partial E}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Calculando em  $(0, 0, 0, 1)$  e tendo em mente que  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 0, 1)$  deve ser não-nulo, temos

$$0 \neq \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 0, 1) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(0, 1).$$



Agora, como  $F$  é uma forma cúbica homogênea e é divisível por  $x_2$ , podemos escrever

$$F(x_2, x_3) = \alpha x_2^3 + \beta x_2^2 x_3 + \gamma x_2 x_3^2, \text{ para } \alpha, \beta, \gamma \in k.$$

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 3\alpha x_2^2 + 2\beta x_2 x_3 + \gamma x_3^2,$$

e, então,  $0 \neq \frac{\partial F}{\partial x_2}(0, 1)$  implica em  $\gamma \neq 0$ . Ou seja,  $F$  apresenta um termo  $x_2 x_3^2$  não-nulo e, portanto, não é divisível por  $x_2^2$ , como desejado.  $\square$

**Corolário 3.13.** *Existe um par  $(m, n)$  de retas de  $S$  tal que  $m \cap n = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Com as notações do *Lema 3.10*, tome  $m = \ell_1$  e  $n = \ell_2$ . O resultado segue do *Lema 3.10 (2)*.  $\square$

Pelo *Corolário 3.13*, fixemos retas  $\ell, m$  de  $S$  tais que  $\ell \cap m = \emptyset$ . Pelo *Lema 3.10*, sabemos que as únicas outras retas de  $S$  intersectando  $\ell$  são as correspondentes 10 retas  $\ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5$ . Podemos nos perguntar: quantas retas de  $S$  existem que não intersectam  $\ell$ ? Para responder a essa questão, primeiro, notemos que, sob as notações do *Lema 3.10*,  $m$  não pode estar em qualquer um dos 5 planos  $P_1, \dots, P_5$ : pelo *Lema 3.8*, isto significaria que  $m \in \{\ell, \ell_i, \ell'_i\}$ , uma contradição a  $\ell \cap m = \emptyset$ . Além disso,  $m$  intersecta cada plano  $P_1, \dots, P_5$  em somente um ponto. Já que  $m \subset S$  e, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , sabemos que  $S \cap P_i = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$ , vemos que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , a reta  $m$  deve intersectar  $\ell_i$  ou intersectar  $\ell'_i$ , uma vez que não intersecta  $\ell$ . Ainda, para qualquer  $i \in \{1, \dots, 5\}$  em particular, sabe-se que  $m$  não pode intersectar  $\ell_i$  e  $\ell'_i$ , pois implicaria que (i)  $m$  está em  $P_i$ , ou (ii)  $m$  não está no mesmo plano  $P_i$  que  $\ell_i$  e  $\ell'_i$ , mas existe um ponto  $p$  o qual pertence a todas as três  $\ell_i, \ell'_i$  e  $m$ . A conclusão (i) contradiz o fato de  $S \cap P_i = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$ ; a conclusão (ii) contradiz o *Lema 3.9*, uma vez que encontramos 3 retas não-coplanares de  $S$  as quais contêm um ponto  $p \in S$ . Portanto, observamos que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , há um único elemento de  $\{\ell_i, \ell'_i\}$  que  $m$  intersecta. Reindexando, se necessário, podemos assumir que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , a reta  $m$  intersecta  $\ell_i$  e não intersecta  $\ell'_i$ .

Agora, aplicando o *Lema 3.10* à reta  $m$ , sabe-se que existem 10 retas distintas de  $S$  que intersectam  $m$ . Já contabilizamos 5 retas,  $\{\ell_1, \dots, \ell_5\}$ , e sabemos que, se  $i \neq j$ , então as retas  $\ell_i$  e  $\ell_j$  não podem ser coplanares, dado que  $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$ . Pelo *Lema 3.10*, com  $m$  no lugar de  $\ell$ , concluímos que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , deve existir uma reta (chamemos de  $\ell''_i$ ), distinta de todas as retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$ , que é coplanar à  $m$  e  $\ell_i$ . Mais especificamente, com a notação utilizada, temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.14.** *Há exatamente 10 retas em  $S$  que intersectam  $m$ . Cinco dessas retas são  $\ell_1, \dots, \ell_5$ ; as outras cinco são  $\ell'_1, \dots, \ell'_5$ . Temos que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$*

- (1)  $m, \ell_i$  e  $\ell''_i$  estão, todas, em algum plano  $Q_i$ ; e
- (2) se  $j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}$ , então  $(\ell_i \cup \ell''_i) \cap (\ell_j \cup \ell''_j) = \emptyset$ .

Observemos também que não podemos ter  $\ell''_i = \ell'_j$ , com  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ . De fato, por absurdo, suponhamos que  $\ell''_i = \ell'_j$  para algum  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ . Primeiramente, vamos assumir  $i \neq j$ . Então, pelo *Lema 3.10 (2)*, sabemos que  $\ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$  e, mais ainda, que  $\ell'_j$  não pode ser coplanar a  $\ell_i$ . Assim,  $\ell''_i$  não pode ser coplanar a  $\ell_i$ . Entretanto, sabe-se que  $Q_i$  contém  $\ell_i$  e  $\ell''_i$ : uma contradição. Portanto, vamos assumir, agora,  $i = j$ . Assim  $\ell''_i = \ell'_i$ . Então, dado que  $\ell''_i$  intersecta  $m$ , sabemos que  $\ell'_i$  intersecta  $m$ . Porém, isto contradiz o fato de termos indexado  $\ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5$  de tal que forma que, para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ ,  $m$  intersecta  $\ell_i$ , mas não  $\ell'_i$ .

Concluimos, assim, que cada reta da forma  $\ell''_i$  é distinta de todas as retas da forma  $\ell'_j$ . Juntando essa informação com os fatos estabelecidos no *Corolário 3.14* que cada reta  $\ell''_i$  é disjunta de cada  $\ell_j$  quando  $i \neq j$  e que cada reta  $\ell''_i$  é distinta de  $\ell_i$ , observamos que cada uma das retas na lista  $\ell, m, \ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5, \ell''_1, \dots, \ell''_5$  é distinta de todas as outras listadas. Logo, o conjunto

$$A := \{\ell, m, \ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5, \ell''_1, \dots, \ell''_5\}$$

contém 17 elementos distintos.

**Corolário 3.15.** *Sejam  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$  com  $i \neq j$ . Então  $\ell''_j \cap \ell = \emptyset$  e  $\ell''_j \cap \ell_i = \emptyset$ . Entretanto,  $\ell''_j$  deve intersectar  $\ell'_i$ .*

*Demonstração.* Primeiro, se  $\ell''_j$  intersectasse  $\ell$ , então, pelo *Lema 3.10*, teríamos que  $\ell''_j \in \{\ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5\}$ , uma contradição com o fato de o conjunto  $A$  definido acima apresentar 17 elementos distintos.

Segundo, o fato de  $\ell''_j \cap \ell_i = \emptyset$  segue, imediatamente, do *Corolário 3.14 (2)*.

Terceiro, uma vez que  $\ell''_j$  não intersecta  $\ell$ , pelo mesmo argumento utilizado para provar que  $m$  intersecta exatamente uma  $\ell_i$  ou  $\ell'_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , vemos que  $\ell''_j$  deve intersectar somente uma  $\ell_i$  ou  $\ell'_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . Então, como  $\ell''_j \cap \ell_i = \emptyset$ , concluímos que  $\ell''_j$  deve intersectar  $\ell'_i$ .  $\square$

**Lema 3.16.** *Seja  $A = \{\ell, m, \ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5, \ell''_1, \dots, \ell''_5\}$  como definido acima. Seja  $n$  uma reta de  $S$  tal que  $n \notin A$ . Então  $n$  intersecta exatamente três dentre as retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, note que, dadas quaisquer quatro retas disjuntas  $m_1, m_2, m_3, m_4$  de  $S$ , não podemos ter  $m_1, m_2, m_3, m_4$  todas em alguma superfície quádrlica não-singular  $Q$ . Por contradição, suponha que  $m_1, m_2, m_3, m_4$  estão, de fato, em uma quádrlica não-singular  $Q$ .

Afirmamos que  $Q \subset S$ . Para isso, basta provarmos que  $f|_Q$  é identicamente nula. Como  $Q$  é não-singular, sabemos, pelo *Lema 2.49*, que suas retas são divididas em duas famílias,  $F_1$  e  $F_2$ . Uma vez que  $m_1, m_2, m_3, m_4$  são disjuntas, pelo *Lema 2.49 (2)*, elas devem pertencer a uma mesma família. Então, sem perda de generalidade, assumimos  $m_1, m_2, m_3, m_4 \in F_1$ . Pelo *Lema 2.49 (3)*, sabe-se que  $Q = \bigcup_{K \in F_2} K$ . Para mostrar que  $f$  é identicamente nula em toda  $Q$ , é suficiente mostrar que  $f$  é identicamente nula ao longo de qualquer reta  $K \in F_2$ . Portanto, seja  $K \in F_2$ . Por uma mudança de coordenadas adequada, podemos assumir  $K = \mathcal{V}(x_2, x_3)$ . Além disso,  $f|_K$  é uma forma cúbica em  $x_0, x_1$ ; ou seja,  $f$  é uma forma cúbica em  $\mathbb{P}_k^1$ . Agora, como  $m_1, m_2, m_3, m_4 \subset S = \mathcal{V}(f)$ , sabemos que  $f$  é identicamente nulo ao longo de cada  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Pelo *Lema 2.49 (2)*,  $K$  intersecta cada uma das distintas retas  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , e, portanto, observamos que  $f|_K$  tem, no mínimo, 4 zeros distintos. Entretanto, pela *Proposição 2.51*, isto significa que  $f|_K$  deve ser identicamente nulo, como desejado.

Conclusão:  $Q \subset S$ . Então, podemos dividir  $f$  pelo polinômio definidor de  $Q$ , implicando que  $S$  é a união de  $Q$  e um plano definido pelo outro fator de  $f$ , uma contradição com o fato de  $S$  ser irredutível e não-degenerado. Assim, não há quatro retas de  $S$  pertencentes a uma mesma superfície quádrlica não-singular.

Agora, note que  $\ell$  e  $m$  são retas distintas em  $\mathbb{P}_k^3$  tal que ambas intersectam cada uma das retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$ . Portanto, se  $n$  intersecta, no mínimo, quatro das retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$ , então, pelo *Lema 2.50*, sabe-se que  $n \in \{\ell, m\}$ , uma contradição, pois  $n \notin A$ . Consequentemente, devemos descartar somente o caso onde  $n$  intersecta duas ou menos retas dentre  $\ell_1, \dots, \ell_5$ . Assim, como (pelo mesmo argumento usado para provar que  $m$  intersecta exatamente uma de cada  $\ell_i$  ou  $\ell'_i$ , para  $1 \leq i \leq 5$ )  $n$  intersecta exatamente uma das  $\ell_i, \ell'_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , vemos que  $n$  intersecta, no máximo, duas de  $\ell_1, \dots, \ell_5$ . Então, necessariamente,  $n$  intersecta, ao menos, três de  $\ell'_1, \dots, \ell'_5$ . Nesse caso, assumimos, sem perda de generalidade, que  $n$  intersecta  $\ell'_1, \ell'_2$  e  $\ell'_3$ . Neste instante, somente uma das afirmações seguintes será verdadeira: (i)  $n$  intersecta  $\ell_4$  e  $\ell_5$ ; (ii)  $n$  intersecta  $\ell'_4$  e  $\ell'_5$ ; (iii)  $n$  intersecta  $\ell'_4$  e  $\ell_5$ ; ou (iv)  $n$  intersecta  $\ell_4$  e  $\ell'_5$ .

Pelo *Lema 3.10*,  $\ell$  intersecta  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4$  e  $\ell_5$ . Além disso, pelo *Corolário 3.14*,  $\ell''_5$  intersecta  $\ell_5$ , pois essas duas retas pertencem ao plano  $Q_5$ . E, pelo *Corolário 3.15*,  $\ell''_5$  também intersecta todas as  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4$ . Portanto, pelo *Lema 2.50*, se  $n$  intersecta, ao menos, quatro das retas  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4, \ell_5$ , então  $n \in \{\ell, \ell''_5\}$ . Assim, nos casos (i), (ii) e (iii), temos  $n \in \{\ell, \ell''_5\}$ , uma contradição a  $n \notin A$ .

Devemos, assim, considerar somente o caso (iv). Por um argumento similar ao do parágrafo anterior, sabe-se que  $\ell$  e  $\ell''_4$  intersectam  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4, \ell'_5$ . Pelo *Lema 2.50*, no caso (iv), deve-se ter  $n \in \{\ell, \ell''_4\}$ , uma contradição a  $n \notin A$ .  $\square$

**Lema 3.17. (1)** *Qualquer reta de  $S$ , que não pertence ao conjunto  $A$ , intersecta exatamente três das cinco retas  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$  e é unicamente determinada por essas três retas que as intersecta.*

**(2)** *Para qualquer possível escolha de distintos  $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$ , existe, de fato, uma reta de  $S$  não pertencente a  $A$  e que intersecta  $\ell_i, \ell_j$  e  $\ell_k$ .*

*Demonstração.* Pelo *Lema 3.16*, qualquer reta de  $S$ , que não pertence ao conjunto  $A$ , intersectará exatamente três das retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$ . Agora, sejam  $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$  distintos dois a dois. A fim de provar **(1)**, devemos mostrar que, se  $n_1, n_2$  são retas de  $S$  não pertencentes a  $A$  tal que ambas intersectem  $\ell_i, \ell_j$  e  $\ell_k$ , então deve-se ter  $n_1 = n_2$ . Sem perda de generalidade, assumimos  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

Sabemos que  $n_1$  e  $n_2$  intersectam  $\ell'_4$  e  $\ell'_5$ : para qualquer reta  $n$  não intersectando  $\ell$ , intersectará um único elemento de  $\{\ell_i, \ell'_i\}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , e toda tal reta  $n$  intersectará exatamente três das  $\ell_1, \dots, \ell_5$ . Especificamente, isso significa que cada uma dentre  $\ell, n_1, n_2$  intersecta todas as quatro  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell'_4$ , duas a duas disjuntas. Pela demonstração do *Lema 3.16*,  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell'_4$  não estão todas em uma mesma superfície quadrática; além disso, pelo *Lema 2.50*, no máximo duas retas distintas em  $\mathbb{P}_k^3$  podem intersectar todas as retas  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell'_4$ . Portanto, o conjunto  $\{\ell, n_1, n_2\}$  contém, no máximo, dois elementos. Entretanto, pela suposição de  $n_1, n_2 \notin A$ , temos  $n_1, n_2 \neq \ell$ . Assim,  $n_1 = n_2$ , como desejado.

Demonstremos, agora, a afirmação **(2)**. Fixe  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . É suficiente mostrar que, para cada escolha de  $j, k \in \{1, \dots, 5\}$  tal que  $i, j, k$  sejam todos distintos, temos que há uma reta de  $S$  não pertencente a  $A$  e que intersecta  $\ell_i, \ell_j$  e  $\ell_k$ . Note que há estritamente  $\binom{4}{2} = 6$  possibilidades de  $j, k \in \{1, \dots, 5\}$  tal que  $i, j, k$  sejam todos distintos. Consequentemente, será suficiente provar que há exatamente 6 retas de  $S$  não pertencentes a  $A$  e que intersectam  $\ell_i$ : cada tal reta intersecta exatamente duas dentre  $\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, \ell_{i+1}, \dots, \ell_5$  e é unicamente determinada por essas duas retas, de forma que se existem exatamente 6 tais retas, essas 6 retas devem cobrir todas as  $\binom{4}{2}$  escolhas de  $\ell_j$  e  $\ell_k$  para intersectar. Assim sendo, devemos provar que há exatamente 6 retas de  $S$  que não estão em  $A$  e que intersectam  $\ell_i$ .

Sabemos que  $\ell, m, \ell'_i, \ell''_i$  todas intersectam  $\ell_i$ :  $\ell'_i$  intersecta  $\ell_i$ , já que são coplanares, e, similarmente, para  $\ell''_i$ . Além disso, pelo *Lema 3.10*, para cada  $j \neq i$ , as retas  $\ell_j$  e  $\ell'_j$  não intersectam  $\ell_i$ ; e, analogamente, pelo *Corolário 3.14*, se  $j \neq i$ , então  $\ell''_j$  não intersecta  $\ell_i$ . Portanto,  $\ell, m, \ell'_i, \ell''_i$  são todos os elementos de  $A$  que intersectam  $\ell_i$ . Ou seja, existem

quatro elementos de  $A$  que intersectam  $\ell_i$ . Agora, pelo *Lema 3.10*, há exatamente 10 retas de  $S$  que intersectam  $\ell_i$ . Isso significa que há estritamente  $10 - 4 = 6$  retas de  $S$  que não estão em  $A$  e que intersectam  $\ell_i$ , como desejado.  $\square$

**Teorema 3.18** (Cayley-Salmon). *Existem exatamente 27 retas em  $S$ .*

*Demonstração.* O conjunto das retas em  $S$  se divide em dois subconjuntos: o conjunto

$$A = \{\ell, m, \ell_1, \dots, \ell_5, \ell'_1, \dots, \ell'_5, \ell''_1, \dots, \ell''_5\}$$

e o conjunto  $B$  das retas de  $S$  que não pertencem a  $A$ .

Pelo *Lema 3.16*, todo elemento de  $B$  intersecta exatamente três das retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$ . E, pelo *Lema 3.17*, os diferentes elementos de  $B$  correspondem, precisamente, às diferentes escolhas das distintas  $\ell_i, \ell_j, \ell_k \in \{\ell_1, \dots, \ell_5\}$  a se intersectar; ou seja, eles correspondem às diferentes possibilidades de escolher  $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$  distintos.

Há, exatamente,  $\binom{5}{3} = 10$  possíveis escolhas de elementos de  $\{\ell_1, \dots, \ell_5\}$ . Então, devem existir exatamente 10 elementos em  $B$ .

Conclusão: o número de retas em  $S$  é  $|A| + |B| = 17 + 10 = 27$ .  $\square$

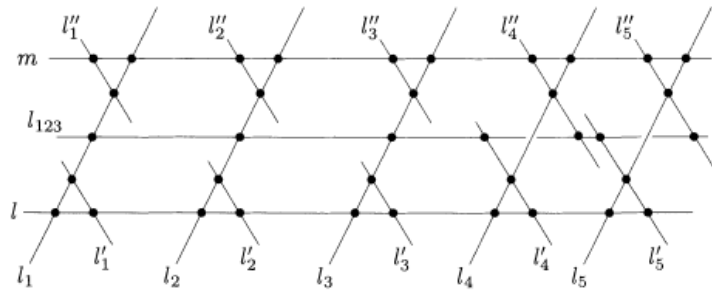


Figura 7 – A configuração de 18 das 27 retas em uma superfície cúbica. Os 20 pontos de intersecção da forma  $\ell'_i \cap \ell''_j$  para  $1 \leq i < j \leq 5$  não estão representados.

**Observação 3.19.** *A característica do corpo  $k$  é tomada sendo diferente de 2 e 3 para que alguns termos nas demonstrações do Teorema 3.1, do Lema 3.8 e do Lema 3.12 não se anulem diretamente.*

## REFERÊNCIAS

- [1] Fischer, G., *Plane Algebraic Curves*, Student Mathematical Library - Volume 15. Providence: AMS, 2001.
- [2] Fulton, W. *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*. <<http://www.math.lsa.umich.edu/wfulton/CurveBook.pdf>>. Acessado em 04/12/2018
- [3] Garcia, A., Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [4] Hulek, K., *Elementary Algebraic Geometry*, Student Mathematical Library - Volume 20. Providence: AMS, 2003.
- [5] Lazarus, S., *Basic Algebraic Geometry and the 27 lines on a cubic surface*. <<http://math.uchicago.edu/may/REU2014/REUPapers/Lazarus.pdf>>. Acessado em 01/10/2018
- [6] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry 1: varieties in projective space*, 3rd. edition, Berlin: Springer-Verlag, 2013.
- [7] Vainsencher I., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [8] Lazarus, S., *Basic Algebraic Geometry and the 27 lines on a cubic surface*. <<http://math.uchicago.edu/may/REU2014/REUPapers/Lazarus.pdf>>. Acessado em 01/10/2018