UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Sandra Machado de Souza Lima

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos usando a Aplicação Fibração

Juiz de Fora

2014

RESUMO

A variedade de Nehari para a equação

$$-\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x)^q + b(x)u(x)^p,$$

com $x \in \Omega$, junto com a condição de fronteira de Dirichlet é investigada no caso em que $a(x) = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $q = 1$ e $0 < p < 1$. Explorando a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração (isto é, aplicações da forma $t \to J(tu)$ onde J é o funcional de Euler associado ao problema em questão), iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções não negativas.

Palavras-Chave: Variedade de Nehari; Aplicação Fibração; Problema elíptico semilinear.

ABSTRACT

The Nehari Manifold for the equation

$$-\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x)^q + b(x)u(x)^p,$$

for $x \in \Omega$ together with Dirichlet boundary conditions is investigated in which case $a(x) = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $q = 1$ and $0 < p < 1$. Exploring the relationship between the Nehari manifold and fibering maps (i.e., maps of the form $t \to J(tu)$ where J is the Euler functional associated to the above equation), we will discuss the existence and multiplicity of non negative solutions.

Key-words: Nehari manifold; Fibrering map; Semilinear elliptic problems.

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$\rightarrow$: convergência forte;

$u_n \rightarrow u$: u_n converge forte para u quando $n \rightarrow \infty$;

$\rightharpoonup$: convergência fraca;

$u_n \rightharpoonup u$: u_n converge fraco para u quando $n \rightarrow \infty$; q.t.p. : quase todo ponto;

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$;

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;

$\partial\Omega$ é a fronteira de Ω;

$\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u$ é continuamente k vezes diferenciável$\}$;

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u$ é mensurável e $\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty\}$;

$W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$;

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u D^\alpha u = \int_\Omega g\phi, \ \forall \phi \in C_c^1(\Omega)\}$;

$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$: Munido da norma $||u|| = ||u||_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$, denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Explorando a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções não triviais e não negativas para uma classe de problemas elíticos de Equações Diferenciais Parciais (EDP) a qual foi estudada por Brown (2004). Essa classe de problemas elípticos modela vários problemas da física matemática e da dinâmica das populações, como pode ser visto no artigo de Chen (2009).

No início dos anos 1960 Nehari introduziu um método que se tornou muito útil na teoria de pontos críticos e que atualmente recebe o nome de método da var iedades de Nehari. A idéia original de Nehari consiste em estudar um problema de valor de fronteira para certas equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem em um intervalo aberto (a, b) e mostrar que a equação possui uma solução não trivial que pode ser obtida através de um problema de minimização com vínculo.

O método da aplicação fibração introduzido por Drabek e Pohozaev (1997) e discutida por Brown e Zhang (2003) relaciona o funcional de Euler Lagrange com uma função real. As informações sobre esta função nos levam à uma demonstração simples do resultado que buscamos.

No capítulo 1, iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções não triviais e não negativas do seguinte problema:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é uma região limitada do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave, e $b : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função regular que pode mudar de sinal em Ω. Vamos considerar λ um parâmetro real e assumir γ como sendo um número real tal que $1 < \gamma < 2$.

Problemas semelhantes foram estudados por Binding, Drábek e Huang (1997) e Binding, Drábek e Huang (2000), usando métodos variacionais, e por Amann e Lopez-Gomez (1998) usando a teoria de bifurcação global. Em um trabalho anterior, Brown e Zhang (2003) consideraram um problema semelhante, no caso em que $\gamma > 2$. A mudança neste parâmetro altera completamente a natureza da solução do problema (P_1). Quando $\gamma > 2$, a curva da solução positiva bifurca da solução nula até $\lambda = \lambda_1$, onde λ_1 é o autovalor principal do problema linear

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A direção da bifurcação é determinada pelo sinal de $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx$, onde ϕ_1 é a autofunção positiva associada ao principal autovalor positivo λ_1 do operador $-\Delta$. Quando $1 < \gamma < 2$ o problema (P_1) se torna assintoticamente linear, e neste caso, a bifurcação no infinito ocorre quando $\lambda = \lambda_1$. Iremos mostrar exatamente como isso acontece e o importante papel desempenhado por $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx$, investigando como a variedade de Nehari varia com λ.

Definiremos, o funcional J_λ associado ao problema inicial, bem como a variedade de Nehari e veremos como eles se relacionam. Mostraremos como o funcional é melhor comportado sobre a variedade de Nehari, mas não é limitado em geral sobre seu domínio todo $W_0^{1,2}(\Omega)$. Trabalharemos a relação entre a variedade de Nehari e o comportamento das funções na forma $\phi_u : t \to J_\lambda(tu)$; $(t > 0)$. Por fim, usando a teoria de regularidade Gilbard e Trudinger (1983), provaremos que as soluções fracas são, de fato, soluções clássicas do problema em questão.

1 O PROBLEMA (P_1)

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Iremos discutir neste capítulo a existência e multiplicidade de soluções não negativas para a seguinte classe de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x), & \text{se } x \in \Omega; \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é uma região limitada do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave e $b : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função regular, que pode mudar de sinal em Ω. Vamos considerar λ um parâmetro real e assumir γ como sendo um número real tal que $1 < \gamma < 2$.

Inicialmente iremos definir a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração a partir do funcional J_λ associado ao problema (P_1). Na segunda parte, mostraremos a importância da condição $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ na determinação da natureza da variedade de Nehari. Na terceira seção, provaremos a existência de minimizadores sobre a variedade de Nehari e em seguida discutiremos como todos esses resultados nos dão informações sobre as soluções não negativas de (P_1) com as variações de λ e em particular sobre a bifurcação no infinito. Na seção seguinte, investigaremos a natureza da variedade de Nehari nos casos onde não há soluções não negativas e não triviais de (P_1). Por fim, iremos observar que nossos resultados são assegurados somente no caso onde a não linearidade é a função homogênea. Isto assegura que a Aplicação Fibração envolve somente atribuições a t e a simplicidade das nossas provas dependem fortemente deste fato.

1.2 O MÉTODO DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO E A VARIEDADE DE NEHARI

Nesta seção definiremos o funcional J_λ associado ao problema (P_1) mostraremos sua relação com e a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração.

1.2.1 Definições

O Funcional de Euler $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P_1) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.1}$$

Mostraremos em 1.8 que o funcional $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e que sua derivada de Gateaux é dada por

$$J'_\lambda(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx - \int_\Omega b|u|^{\gamma-2}uv dx, \;\; \forall\, u, v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

e em particular

$$J'_\lambda(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega b|u|^\gamma dx.$$

Afirmação: J_λ está bem definido.

Prova: De fato, sejam

$$J_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$
$$J_2(u) = \int_\Omega |u|^2 dx \text{ e}$$
$$J_3(u) = \int_\Omega b|u|^\gamma dx.$$

Iremos mostrar que cada um dos termos de J_λ está bem definido.

i) $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = ||u||^2 < \infty$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

ii) Consideremos λ_1 o autovalor principal do problema linear

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{se } x \in \Omega; \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que
$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2}; \text{ para } u \neq 0.$$

Logo,
$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

iii)
$$\begin{aligned}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \leq |\int_\Omega b|u|^\gamma dx| \leq \int_\Omega |b(x)||u|^\gamma dx \leq \\ \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} |b(x)| \int_\Omega |u|^\gamma dx < \infty\end{aligned}$$

já que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. De fato, pelas imersões contínuas de Sobolev como em 2.10 , $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, com $r \in [1, 2^*]$, segue que $u \in L^\gamma(\Omega)$.

Assim, J_λ está bem definido para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Podemos observar que
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda\int_\Omega u^2 dx \geq (\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega u^2 dx, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1.2}$$

e ainda
$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u^2 dx - \frac{\overline{b}}{\gamma}\int_\Omega 1\cdot|u|^\gamma dx, \text{ onde } \overline{b} = \sup_{x\in\Omega} b(x)$$

Tomando $p = \frac{2}{\gamma} < 1$ e $p' = \frac{2}{2-\gamma}$, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u^2 dx - \frac{\overline{b}}{\gamma}\left(\int_\Omega |1|^{\frac{2}{2-\gamma}} dx\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\int_\Omega |u|^{\gamma\frac{2}{\gamma}} dx\right)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u^2 dx - \frac{\overline{b}}{\gamma}|\Omega|^{1-\frac{\gamma}{2}}\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

onde $\overline{b} = \sup_{x\in\Omega} b(x)$.

Assim, J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando $\lambda < \lambda_1$ e $1 < \gamma < 2$. Entretanto, se $\lambda > \lambda_1$, então $\lim_{t\to\infty} J_\lambda(t\phi_1) = -\infty$. De fato, quando $t \to \infty$,
$$J_\lambda(t\phi_1) = t^2\left(\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |\phi_1|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\phi_1|^2 dx - \frac{1}{\gamma t^{2-\gamma}}\int_\Omega b|\phi_1|^\gamma\right) dx \to -\infty.$$

Assim J_λ não é limitado inferiormente em $W_0^{1,2}(\Omega)$, se $\lambda > \lambda_1$. Estamos procurando um subconjunto de $W_0^{1,2}(\Omega)$ onde o funcional J_λ seja melhor comportado, mais especificamente, onde este funcional seja, em geral, limitado inferiormente.

1.2.2 Variedade de Nehari

Para obter resultados de existência neste caso, introduzimos a variedade de Nehari:

$$S(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota a dualidade usual.

Vamos mostrar que $S(\lambda)$ é de fato uma variedade.

Proposição 1.1. *A variedade de Nehari $S(\lambda)$ é não vazia e é uma subvariedade de $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Prova: Seja $\psi : W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \langle J_\lambda{}'(u), u\rangle.$$

Assim

$$\psi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega b|u|^\gamma dx.$$

Como veremos na seção 1.8, fazendo

$$J_1 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

$$J_2 = \int_\Omega u^2 dx \ \ e$$

$$J_3 = \int_\Omega b|u|^\gamma dx,$$

temos que cada um destes termos são de classe $C^1(\Omega)$, e por conseguinte observa-se que são também de classe $C^2(\Omega)$, logo temos que $\psi \in C^1(\Omega)$. Além disso,

$$\psi'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - 2\lambda \int_\Omega uv dx - \gamma \int_\Omega b|u|^{\gamma-2} uv dx.$$

Seja $v \neq 0; v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e considere a função

$$t \mapsto \psi(tv); t \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ t > 0.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\psi(tv) &= t^2\int_\Omega |\nabla v|^2dx - t^2\lambda\int_\Omega v^2dx - t^\gamma\int_\Omega b|v|^\gamma dx\\ &= t^2\left(\int_\Omega |\nabla v|^2dx - \lambda\int_\Omega v^2dx\right) - t^\gamma\left(\int_\Omega b|v|^\gamma dx\right).\end{aligned}$$

Se $\int_\Omega |\nabla v|^2dx - \lambda\int_\Omega v^2dx > 0$ e $\int_\Omega b|v|^\gamma dx > 0$, como $1 < \gamma < 2$, segue que

$$\lim_{t\to\infty}\psi(tv) = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{t\to 0}\psi(tv) = 0, \quad \text{por valores menores que zero.}$$

Com isso, para algum $\bar{t} > 0$ a função $\psi(\bar{t}v)$ é igual a zero, ou seja, $\bar{t}v \in S(\lambda)$. Dessa forma mostramos que $S(\lambda) \neq \emptyset$.

Vejamos agora que ψ não possui ponto crítico em $S(\lambda)$.

Observe que

$$\psi'(u)u = 2\int_\Omega |\nabla u|^2dx - 2\lambda\int_\Omega u^2dx - \gamma\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.3}$$

Para $u \in S(\lambda)$ com $u \neq 0$, temos

$$\psi(u) = 0 \Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx = \int_\Omega b|u|^\gamma dx.$$

Substituindo em (1.3), segue que

$$\psi'(u)u = (2-\gamma)\int_\Omega b|u|^\gamma dx.$$

Portanto, como $1 < \gamma < 2$ e $b \neq 0$, obtemos que $\psi'(u) \neq 0$ para todo $u \neq 0$ em $S(\lambda)$.

Seja $M = W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}$. Como $\int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0$, vemos que 0 é o único ponto crítico em $\psi^{-1}(0)$ e $0 \notin M$. Logo, 0 é um valor regular de $\psi|_M$. Pelo Teorema 2.1, segue que $\psi^{-1}|_M(0)$ é uma subvariedade de M. Portanto, $S(\lambda)$ é uma C^1 subvariedade de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$\blacksquare$

Observação 1.1. *Temos que $u \in S(\lambda)$ se e somente se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \lambda\int_\Omega u^2dx - \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0$$

De fato,

$$u \in S(\lambda) \Leftrightarrow J'_\lambda(u)u = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0$$

Podemos perceber que $S(\lambda) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ e que $S(\lambda)$ é um conjunto mais restrito que $W_0^{1,2}(\Omega)$, deste modo iremos estudar nosso funcional J_λ restrito a $S(\lambda)$.

Note que em $S(\lambda)$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.4}$$

Substituindo em (1.1) ficamos com

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega b|u|^\gamma dx - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \end{aligned}$$

1.2.3 Aplicação Fibração

Apresentaremos agora as funções da forma $\phi_u : t \to J_\lambda(tu)$; $(t > 0)$, analisaremos seu comportamento e mostraremos sua relação com a variedade de Nehari.

Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \frac{t^\gamma}{\gamma}\int_\Omega b|u|^\gamma dx, \tag{1.5}$$

$$\phi'_u(t) = t\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - t^{\gamma-1}\int_\Omega b|u|^\gamma dx, \tag{1.6}$$

$$\phi''_u(t) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - (\gamma-1)t^{\gamma-2}\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.7}$$

A proposição abaixo relaciona a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração.

Proposição 1.2. *Seja ϕ_u a aplicação definida acima e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então:*

(i) $u \in S(\lambda)$ se, e somente se, $\phi'_u(1) = 0$;

(ii) Mais geralmente $tu \in S(\lambda)$ se, e somente se, $\phi'_u(t) = 0$.

Prova: (i) Note que

$$\phi_u'(1) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - \int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx = J_\lambda'(u)u.$$

(ii) $(\Leftarrow)$

$$0 = \phi_u'(t) = t\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - t^{\gamma-1}\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx.$$

Multiplicando esta equação por t,

$$0 = t^2\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - t^{\gamma}\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx = J_\lambda'(tu)tu.$$

$(\Rightarrow)$

Como $tu \in S(\lambda)$, temos

$$0 = J_\lambda'(tu)tu = t^2\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - t^{\gamma}\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx,$$

dividindo esta equação por $t > 0$,

$$0 = t\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2)dx - t^{\gamma-1}\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx = \phi_u'(t).$$

■

Desta forma, os elementos em $S(\lambda)$, correspondem aos pontos estacionários da Aplicação Fibração. Assim é natural subdividir $S(\lambda)$ em subconjuntos, onde para cada $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ fixada, o número 1 é um ponto crítico de ϕ_u.

Segue de (1.6) e (1.7) que se $\phi_u'(t) = 0$ então

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx = t^{\gamma-2}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_u''(t) = t^{\gamma-2}\int_\Omega b|u|^\gamma dx(2-\gamma), \tag{1.8}$$

e como $t > 0$ e $1 < \gamma < 2$, temos

$$\phi_u''(t) > 0 \Leftrightarrow \int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0,$$

$$\phi_u''(t) < 0 \Leftrightarrow \int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0 \text{ e}$$

$$\phi_u''(t) = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Podemos agora definir os subconjuntos de $S(\lambda)$:

$$S^+(\lambda) = \{u \in S(\lambda); \phi_u''(1) > 0\}$$

$$S^-(\lambda) = \{u \in S(\lambda); \phi_u''(1) < 0\}$$

$$S^0(\lambda) = \{u \in S(\lambda); \phi_u''(1) = 0\}.$$

Assim, S^+, S^- e S^0 correspondem ao conjunto de pontos de mínimo local, máximo local e de inflexão, respectivamente.

Observação 1.2. *Note que se $u \in S(\lambda)$, isto é, $\phi_u'(1) = 0$ então*

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx = \int_\Omega b|u|^\gamma dx \ e$$

$$\Rightarrow \phi_u''(1) = (2-\gamma)\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.9}$$

Iremos mostrar a existência de soluções de (P_1) investigando a existência de minimizadores em $S(\lambda)$. Entretanto, $S(\lambda)$ é apenas um pequeno subconjunto de $W_0^{1,2}(\Omega)$, mas verifica-se que os minimizadores de J_λ em $S(\lambda)$ são também pontos críticos de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. De fato, como provado em Binding, Drábek e Huang (1997) ou em Brown e Zhang (2003), temos o resultado a seguir.

Lema 1.1. *Suponhamos que u_0 é um mínimo ou máximo local para J_λ em $S(\lambda)$, então se u_0 não pertence a $S^0(\lambda)$, u_0 é um ponto crítico de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Prova: Seja u_0 um ponto de máximo ou de mínimo local de J_λ em $S(\lambda)$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver apêndice, Teorema 2.6), existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J_\lambda'(u) = \delta F'(u), \tag{1.10}$$

onde

$$F(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \int_\Omega b|u|^\gamma dx = J_\lambda'(u)u = 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx = \int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.11}$$

Derivando F temos

$$F'(u)h = \lim_{t\to 0}\frac{F(u+th)-F(u)}{t}.$$

Tomando $h = u_0$ e usando L'Hospital, obtemos

$$F'(u_0)u_0 = 2\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)dx - \gamma \int_\Omega b|u_0|^\gamma dx.$$

Substituindo em (1.11)

$$F'(u_0)u_0 = (2-\gamma)\int_\Omega b|u_0|^\gamma dx = \phi_u''(1).$$

Como $u_0 \in S(\lambda)$, por (1.10) obtemos

$$0 = J_\lambda'(u_0)u_0 = \delta F'(u_0)u_0.$$

Como u_0 não pertence à $S^0(\lambda)$ então $\phi_u''(1) \neq 0$. Daí $F'(u_0)u_0 \neq 0$, nos dando que $\delta = 0$ e assim $J_\lambda'(u_0) = 0$. Portanto, u_0 é ponto crítico de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

1.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO

Faremos nesta seção uma descrição da Aplicação Fibração associada ao problema elíptico (P_1).

1.3.1 Descrição da função m_u

Veremos que a natureza essencial da Aplicação Fibração ϕ_u é determinada pelo sinal de $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx$ e de $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$. Para isso, vamos definir

$$m_u(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - t^{\gamma-2}\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.12}$$

Observação 1.3. *Note que, para $t > 0$, $tu \in S(\lambda)$ se, e somente se, t é solução de*

$$m_u(t) = \lambda \int_\Omega u^2 dx. \tag{1.13}$$

De fato, pela equação (1.13),

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - t^{\gamma-2}\int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por t^2

$$t^2\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - t^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0,$$

ou equivalentemente

$$J'_\lambda(tu)tu = 0,$$

logo

$$tu \in S(\lambda).$$

Derivando (1.12) ficamos com

$$m'_u(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-3}\int_\Omega b|u|^\gamma dx. \tag{1.14}$$

E ainda

$$m''_u(t) = (2-\gamma)(\gamma-3)t^{\gamma-4}\int_\Omega b|u|^\gamma dx.$$

Podemos observar que m' e m'' não estão definidas para $t = 0$, já que $-3 < \gamma - 4 < \gamma - 3 < -1$.

Vejamos que

$$\lim_{t\to 0} m'_u(t) = \pm\infty;$$

dependendo do sinal de $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$, e além disso

$$\lim_{t\to\infty} m'_u(t) = 0.$$

Para construir um esboço de m_u dividiremos em dois casos.

(i) Se $\int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0$, sendo $t > 0$ e $1 < \gamma < 2$, teremos que m_u é uma função estritamente crescente.

De fato, se $t = 0$ então $m'_u(0)$ não está definida, mas se $t > 0$, então

$$m'_u(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-3}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \geq 0,$$

e ainda

$$m''_u(t) = (2-\gamma)(\gamma-3)t^{\gamma-4}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \leq 0.$$

Com $\lim_{t\to\infty} m_u(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\lim_{t\to 0^+} m_u(t) = -\infty$, m_u tem o gráfico como na figura 1, onde $A = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

Se $\lambda\int_\Omega u^2 dx > \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, então $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda\int_\Omega u^2 dx < 0$. Assim não há nenhum valor de t que satisfaça (1.13). Neste caso observamos que os sinais de $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$ e de $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda\int_\Omega u^2 dx$ são opostos.

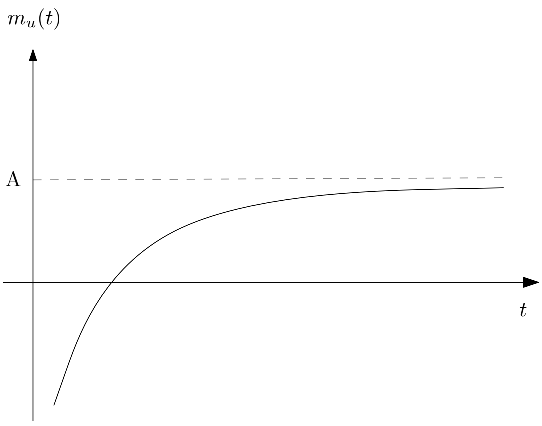

Figura 1: Possível forma de m_u quando $\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx > 0$

Já no caso em que $\lambda \int_\Omega u^2 dx < \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, temos que $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx > 0$ e assim há um único valor de t que satisfaz (1.13). Neste caso observamos que $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$ e $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx$ tem sinais positivos.

(ii) Se $\int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0$, sendo $t > 0$ e $1 < \gamma < 2$, teremos que m_u é uma função estritamente decrescente.

De fato, se $t = 0$ então $m'_u(0)$ não está definida, mas se $t > 0$, então

$$m'_u(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-3} \int_\Omega b|u|^\gamma dx \leq 0,$$

e ainda

$$m''_u(t) = (2-\gamma)(\gamma-3)t^{\gamma-4} \int_\Omega b|u|^\gamma dx \geq 0.$$

Analogamente ao caso anterior, m_u tem o gráfico como na figura 2, onde $A = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

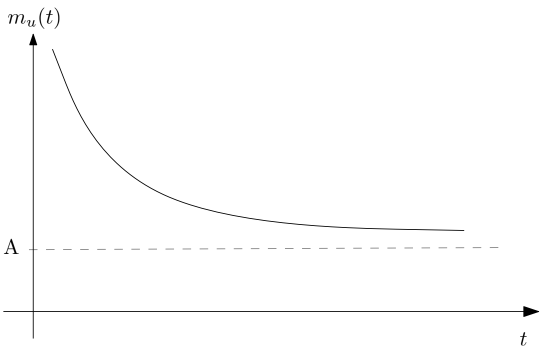

Figura 2: Possível forma de m_u quando $\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx < 0$

Se $\lambda \int_\Omega u^2 dx > \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, então $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx < 0$. Assim há um único valor de t que satisfaz (1.13). Neste caso observamos que $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$ e $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx$ tem o mesmo sinal.

Se $\lambda \int_\Omega u^2 dx < \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, então $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx > 0$ e assim não há nenhum valor de t que satisfaça (1.13). Neste caso observamos que os sinais de $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$ e de $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx$ são opostos.

A partir das observações feitas acima, para $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos concluir que:

(I) Se $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$ tem o mesmo sinal, ϕ_u tem um único ponto crítico em

$$t_u = \left[\frac{\int_\Omega b|u|^\gamma dx}{\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx}\right]^{\frac{1}{2-\gamma}};$$

assim, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $tu \in S(\lambda)$;

(II) Se $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$ tem sinais diferentes, então ϕ_u não possui pontos críticos e assim, pela proposição 1.2, nenhum múltiplo de u pertence à $S(\lambda)$.

Observação 1.4. *Se $tu \in S(\lambda)$, segue de (1.9) e (1.14) que*

$$\phi''_{tu}(1) = t^3 m'_u(t).$$

De fato

$$\phi''_{tu}(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-2}\int_\Omega b|tu|^\gamma dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \phi''_{tu}(1) &= (2-\gamma)1^{\gamma-2}\int_\Omega b|tu|^\gamma dx \\ &= (2-\gamma)t^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Como,

$$m'_u(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-3}\int_\Omega b|u|^\gamma dx \Rightarrow$$

$$t^3 m'_u(t) = (2-\gamma)t^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma;$$

então

$$t^3 m'_u(t) = \phi''_{tu}(1).$$

Esta observação tem uma grande importância para este capítulo, pois se conhecermos o sinal de $m'_u(t)$, conheceremos o sinal de $\phi''_{tu}(1)$, e assim poderemos saber se ϕ_{tu} tem um ponto de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

Resumidamente:

$$\begin{cases} tu \in S^{+}(\lambda) & \text{se } m_u'(t) > 0 \\ tu \in S^{-}(\lambda) & \text{se } m_u'(t) < 0. \end{cases}$$

1.3.2 Descrição da função ϕ_u

Iremos analisar a natureza da Aplicação Fibração para todos os possíveis sinais de $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx$ e de $\int_\Omega b|u|^\gamma dx$.

(i) Quando $\lambda \int_\Omega u^2 dx < \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0$.

Relembrando que

$$\phi_u'(t) = t^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega b|u|^\gamma dx,$$

temos

$$\phi_u'(t) > 0,$$

pois $t > 0$. Logo, ϕ_u é crescente e como $\phi_u'(t) > 0$, pela Proposição 1.2 concluímos que nenhum múltiplo de u está em $S(\lambda)$. Daí, o gráfico ϕ_u tem uma forma mostrada na figura 3.

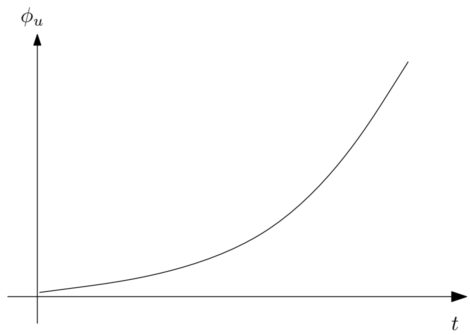

Figura 3: Possível forma de ϕ_u quando $\int_\Omega u^2 dx < \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0$

(ii) Quando $\lambda \int_\Omega u^2 dx > \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0$.

Olhando para a figura 2, podemos observar que teremos um único ponto crítico de ϕ_u no caso em que $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx < 0$. Vamos mostrar que nestas condições a equação (1.13) tem uma única solução.

Como m_u é contínua e $\lim_{t\to 0} m_u(t) = +\infty$, então, para t_1 suficientemente pequeno

$$m_u(t_1) > \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

Além disso, $\lambda \int_\Omega u^2dx > \int_\Omega |\nabla u|^2dx$ e $\lim_{t\to\infty} m_u(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2dx$, então, existe t_2 suficientemente grande tal que

$$m_u(t_2) < \lambda \int_\Omega u^2dx.$$

Definindo $m_u : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$, e sendo m_u uma função contínua com

$$m_u(t_1) < \lambda \int_\Omega u^2dx < m_u(t_2),$$

então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_u \in (t_1, t_2)$ tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_\Omega u^2dx.$$

Além disso,

$$m_u'(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-3} \int_\Omega b|u|^\gamma dx,$$

logo,

$$m_u'(t) < 0$$

pois $t > 0$ e $1 < \gamma < 2$. Portanto m_u é uma função estritamente decrescente. Daí concluímos que t_u é único, ou seja, a equação $m_u(t) = \lambda \int_\Omega u^2dx$ tem única solução t_u.

Desta forma, existe exatamente uma única solução de (1.13).
Agora vamos mostrar que $t_u u \in S(\lambda)$.

Como m_u tem uma única solução, substituindo (1.13) em (1.12), ficamos com

$$\lambda \int_\Omega u^2dx = \int_\Omega |\nabla u|^2dx - t_u^{\gamma-2} \int_\Omega b|u|^\gamma dx,$$

daí

$$\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \lambda \int_\Omega u^2dx - t_u^{\gamma-2} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por t_u^2 obtemos

$$t_u^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - t_u^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0,$$

o que é o mesmo que $J_\lambda'(t_u u)t_u u = 0$. Consequentemente $t_u u \in S(\lambda)$.

Como $t_u u \in S(\lambda)$, $m_u'(t_u) < 0$ e $t > 0$, pela observação 1.4

$$\phi_{t_u u}''(1) = t^3 m_u'(t_u) < 0$$

isto é, $t_u u \in S^-(\lambda)$.

Note também que $\phi_u'(t_u) = 0$, ou seja, a aplicação ϕ_u tem um único ponto crítico em $t = t_u$ que é um ponto de máximo local. De fato,

$$t_u^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - t_u^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Dividindo a equação acima por $t_u \neq 0$ ficamos com

$$t_u \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - t_u^{\gamma-1} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = -\infty$$

e

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_u(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Do que foi observado acima, segue que ϕ_u, tem seu gráfico como na figura 4.

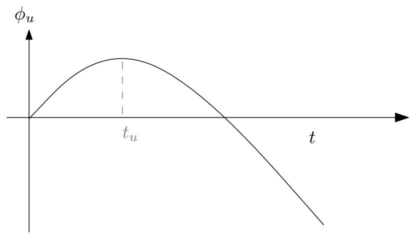

Figura 4: Possível forma de ϕ_u quando $\int_\Omega u^2dx > \int_\Omega |\nabla u|^2dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0$

(iii) Quando $\lambda \int_\Omega u^2dx < \int_\Omega |\nabla u|^2dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0$.

Neste caso, $\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \lambda \int_\Omega u^2dx > 0$. Desse modo

$$\lim_{t\to\infty} m_u(t) = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega |\nabla u|^2dx - t^{\gamma-2} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = \int_\Omega |\nabla u|^2dx > \lambda \int_\Omega u^2dx$$

e ainda

$$\lim_{t\to 0^+} m_u(t) = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega |\nabla u|^2dx - t^{\gamma-2} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = -\infty.$$

Como m_u é uma função contínua com

$$\lim_{t\to 0^+} m_u(t) < \lambda \int_\Omega u^2dx < \lim_{t\to\infty} m_u(t),$$

pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_u \in (0, +\infty)$ tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

Além disso,

$$m_u'(t) = (2-\gamma)t^{\gamma-3} \int_\Omega b|u|^\gamma dx,$$

logo,

$$m_u'(t) > 0,$$

pois $t > 0$ e $1 < \gamma < 2$. Desse modo m_u é uma função estritamente crescente. Daí, concluímos que t_u é único, ou seja, a equação $m_u(t) = \lambda \int_\Omega u^2 dx$ tem única solução t_u. Assim, existe exatamente uma única solução de (1.13).

Por resultados análogos aos anteriores vemos que $t_u u \in S(\lambda)$.

Como m_u tem uma única solução, substituindo (1.13) em (1.12),

$$\lambda \int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - t_u^{\gamma-2} \int_\Omega b|u|^\gamma dx,$$

daí

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx - t_u^{\gamma-2} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por t_u^2 ficamos com

$$t_u^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0,$$

o que é o mesmo que $J_\lambda'(t_u u)t_u u = 0$. Consequentemente $t_u u \in S(\lambda)$.

Como $t_u u \in S(\lambda)$, $m_u'(t_u) > 0$ e $t > 0$,

$$\phi_{t_u u}''(1) = t^3 m_u'(t_u) > 0,$$

isto é, $t_u u \in S^+(\lambda)$.

Note também que $\phi_u'(t_u) = 0$, ou seja, a aplicação ϕ_u tem um único ponto crítico em $t = t_u$ que é um ponto de mínimo local. De fato,

$$t_u^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^\gamma \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0.$$

Dividindo a equação acima por t_u, segue que

$$t_u \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma-1} \int_\Omega b|u|^\gamma dx = 0 \Rightarrow \phi_u'(t_u) = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega b|u|^\gamma dx \right) = \infty$$

e

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_u(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{t^2}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega b|u|^\gamma dx \right) = 0,$$

com $\phi_u(t)$ se aproximando de zero por valores negativos.

Do que foi observado acima, concluímos que ϕ_u, tem seu gráfico como na figura 5.

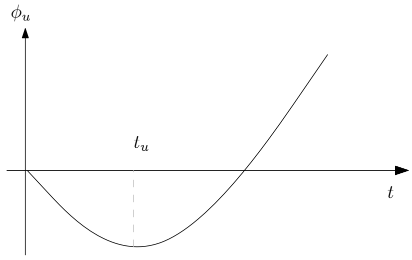

Figura 5: Possível forma de ϕ_u quando $\lambda \int_\Omega u^2 dx < \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0$

(iv) Quando $\lambda \int_\Omega u^2 dx > \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0$.

Neste caso, $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx < 0$ e deste modo

$$\phi_u'(t) = t^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0,$$

pois $t > 0$, logo ϕ_u é decrescente e como $\phi_u'(t) > 0$ pela Proposição 1.2, concluímos que $tu \notin S(\lambda)$. E o gráfico ϕ_u tem sua forma mostrada na figura 6.

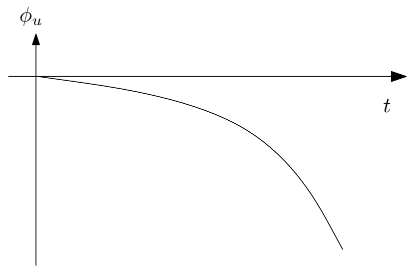

Figura 6: Possível forma de ϕ_u quando $\lambda \int_\Omega u^2 dx > \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e $\int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0$

Do que vimos acima, podemos definir:

$$L_+(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); ||u|| = 1 \text{ e } \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx > 0\}$$

$$B_+ = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); ||u|| = 1 \text{ e } \int_\Omega b|u|^\gamma dx > 0\}.$$

E analogamente definimos $L_-(\lambda), L_0(\lambda), B_-$ e B_0, substituindo (> 0) por (< 0) ou $(= 0)$ como for apropriado. Segue que:

(i) Se $u \in L_+(\lambda) \cap B_+$, então $t \to \phi_u(t)$ tem um mínimo local em $t = t_u$ e $t_u u \in S(\lambda)$;

(ii) Se $u \in L_-(\lambda) \cap B_-$, então $t \to \phi_u(t)$ tem um máximo local em $t = t_u$ e $t_u u \in S(\lambda)$;

(iii) Se $u \in L_+(\lambda) \cap B_-$, então $t \to \phi_u(t)$ é estritamente crescente e nenhum múltiplo de u está em $S(\lambda)$;

(iv) Se $u \in L_-(\lambda) \cap B_+$, então $t \to \phi_u(t)$ é estritamente decrescente e nenhum múltiplo de u está em $S(\lambda)$.

1.4 PROPRIEDADES DA VARIEDADE DE NEHARI

Nesta seção vamos discutir o papel importante desempenhado pela condição de $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ na determinação da natureza da variedade de Nehari.

Quando $\lambda < \lambda_1$, por (1.2) temos que $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx > 0$, para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim

$$L_+(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : ||u|| = 1\}$$

, $L_-(\lambda) = \emptyset e L_0(\lambda) = \emptyset$.

Quando $\lambda = \lambda_1$, temos que $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \geq 0$ e assim $L_-(\lambda) = \emptyset$ e $L_0(\lambda) = \{\pm\phi_1\}$ e quando $\lambda > \lambda_1$, $L_-(\lambda)$ passa a ser não-vazio e se torna maior à medida que λ aumenta.

Tendo em vista as considerações anteriores, veremos que a condição $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ é sempre satisfeita quando $\lambda < \lambda_1$, já que neste caso o conjunto $L_-(\lambda) = \emptyset$. Além disso, esta condição pode ou não, ser satisfeita quando $\lambda > \lambda_1$ e é cada vez mais provável a ser violada à medida que λ aumenta.

Teorema 1.1. *Suponhamos que exista $\hat{\lambda}$ tal que para todo $\lambda < \hat{\lambda}$, $L_-(\lambda) \subseteq B_-$. Então, para todo $\lambda < \hat{\lambda}$ temos:*

(i) $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ e assim $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$;

(ii) $S^+(\lambda)$ é limitado ;

(iii) $0 \notin \overline{S^-(\lambda)}$ e $S^-(\lambda)$ é fechado ;

(iv) $\overline{S^+(\lambda)} \cap S^-(\lambda) = \emptyset$.

Prova: (i) Suponhamos por contradição que $L_0(\lambda) \nsubseteq B_-$. Então existe $u \in L_0(\lambda)$ tal que $u \notin B_-$. Assim,

$$u \in L_0(\lambda) \Rightarrow u \in W_0^{1,2}(\Omega);\ \ ||u|| = 1 \text{ e } \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx = 0$$

e

$$u \notin B_- \Rightarrow \int_\Omega b \left(\frac{|u|}{||u||} \right)^\gamma dx \geq 0.$$

Se $\lambda < \mu < \hat{\lambda}$, então

$$0 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx > \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu u^2)dx \Rightarrow u \in L_-(\mu),$$

de modo que $L_-(\mu) \nsubseteq B_-$, o que nos dá uma contradição à hipótese do teorema.

Logo $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ e sendo $B_- \cap B_0 = \emptyset$ temos $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$.

(ii) Suponhamos que $S^+(\lambda)$ seja ilimitado. Então existe $\{u_n\} \subseteq S^+(\lambda)$, tal que $||u_n|| \to \infty$, quando $n \to \infty$.

Seja $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$. Desse modo temos que $\{v_n\}$ é limitada e por 2.10 podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$ e em $L^\gamma(\Omega)$, já que $1 < \gamma < 2$. Como $u_n \in S^+(\lambda)$,

$$\int_\Omega b|v_n|^\gamma dx = \frac{1}{||u_n||^\gamma} \int_\Omega b|u_n|^\gamma dx > 0,$$

logo,

$$\int_\Omega b|v_0|^\gamma dx \geq 0. \tag{1.15}$$

Além disso, em $S(\lambda)$

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx = \int_\Omega b|u_n|^\gamma dx,$$

daí,

$$\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2)dx = \int_\Omega b|v_n|^\gamma \frac{1}{||u_n||^{2-\gamma}} dx \to 0,$$

em $L^2(\Omega)$ já que $b|v_n|^\gamma$ é limitado em $L^\gamma(\Omega)$ e $||u_n||^{2-\gamma} \to \infty$.

Suponhamos agora que $v_n \nrightarrow v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Por 2.5 temos que

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx < \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx,$$

logo,

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2 dx < \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2 dx = 0,$$

e assim, $\frac{v_0}{||v_0||} \in L_-(\lambda)$.

Pela hipótese do teorema temos $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ e isso nos dá que $\frac{v_0}{||v_0||} \in B_-$, o que é impossível por (1.15).

Agora, suponhamos que $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Desse modo $||v_0|| = 1$ e

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2 dx = 0.$$

Assim, $v_0 \in L_0(\lambda)$ e por (i), $L_0(\lambda) \subseteq B_-$, nos dando $v_0 \in B_-$ que é novamente impossível. Portanto, $S^+(\lambda)$ é limitado.

(iii) Suponhamos que $0 \in \overline{S^-(\lambda)}$. Então existe $\{u_n\} \subseteq S^-(\lambda)$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = 0$. Tomando $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$, temos que $\{v_n\}$ é limitada e por 2.10 podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$.

Como $u_n \in S^-(\lambda)$, temos

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx = \int_\Omega b|u_n|^\gamma dx < 0.$$

Multiplicando a equação acima por $||u_n||^{-\gamma}$, ficamos com

$$||u_n||^{2-\gamma} \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx = \int_\Omega b|v_n|^\gamma dx \leq 0.$$

Sabendo que $\{v_n\}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$, b regular em $\overline{\Omega}$ e $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = 0$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega b|v_n|^\gamma dx = 0,$$

daí,

$$\int_\Omega b|v_0|^\gamma dx = 0, \tag{1.16}$$

já que $b|v_n|^\gamma$ é limitado em Ω e $||u_n||^{2-\gamma} \to \infty$.

Suponhamos agora que $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, desse modo $||v_0|| = 1$ e

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2 dx \leq 0,$$

nos dando $v_0 \in L_0(\lambda)$ ou $v_0 \in L_-(\lambda)$. Entretanto, $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ pela hipótese do teorema e $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ por (i). Em ambos os casos teríamos $v_0 \in B_-$, o que contradiz (1.16).

Assim $v_n \nrightarrow v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, e desse modo, por 2.5 temos que

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx < \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx.$$

Além disso, $\{v_n\}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada 2.3

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n^2 dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} v_n^2 dx,$$

daí,

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2) dx < \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx \leq 0.$$

Logo, $\frac{v_0}{||v_0||} \in L_-(\lambda) \cap B_0$ que é novamente impossível, pois $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ e $B_- \cap B_0 = \emptyset$. Portanto, $0 \notin \overline{S^-(\lambda)}$.

Vamos agora provar que $S^-(\lambda)$ é fechado. Mostraremos que $\overline{S^-(\lambda)} \subset S^-(\lambda)$. De fato, seja $\{u_n\} \subseteq S^-(\lambda)$, assim existe $\{u_n\} \in \overline{S^-(\lambda)}$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Então $u \in \overline{S^-(\lambda)}$ e como vimos acima, u não pode ser identicamente nula. Além disso, temos o resultado que segue.

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx = \int_\Omega b|u|^\gamma dx \leq 0.$$

Se ambas as integrais são iguais a 0, então $\frac{u}{||u_0||} \in L_0(\lambda) \cup B_0$, o que contradiz (i). Daí, pela expressão acima, ambas as integrais devem ser negativas, nos dando que $u \in S^-(\lambda)$. Assim, $S^-(\lambda)$ é fechado.

(iv) Suponhamos que exista $u \in \overline{S^+(\lambda)} \cap S^-(\lambda)$. Como $u \in S^-(\lambda)$, por (iii), temos que u não é identicamente nula e

$$\int_\Omega b|u|^\gamma dx < 0.$$

Além disso, por $u \in \overline{S^+(\lambda)}$

$$\int_\Omega b|u|^\gamma dx \geq 0,$$

o que é impossível. Concluímos que $\overline{S^+(\lambda)} \cap S^-(\lambda) = \emptyset$. ■

Podemos concluir outros resultados importantes sobre o comportamento de J_λ em $S^+(\lambda)$ e $S^-(\lambda)$ a partir de diferentes considerações. Ao analisar a Aplicação Fibração, observamos que $J_\lambda(u) > 0$ em $S^-(\lambda)$ e $J_\lambda(u) < 0$ em $S^+(\lambda)$. Além disso,

Teorema 1.2. *Suponhamos que as mesmas hipóteses do Teorema 1.1 sejam satisfeitas. Então*

(i) J_λ *é limitado inferiormente em* $S^+(\lambda)$*;*

(ii) $\inf_{u\in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) > 0$*, provando que* $S^-(\lambda)$ *é não- vazio.*

Prova: (i) É uma consequência imediata da limitação de $S^+(\lambda)$.

(ii) Observe que $J_\lambda(u) \geq 0$ para $u \in S^-(\lambda)$. De fato, se $u \in S^-(\lambda)$ então $u \in S(\lambda)$ e

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\int_\Omega b|u|^\gamma dx \geq 0. \tag{1.17}$$

Suponhamos que $\inf_{u\in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) = 0$. Então existe $\{u_n\} \subseteq S^-(\lambda)$ de modo que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = 0$. Por (1.21) observamos que

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega b|u_n|^\gamma dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Seja $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$. Como vimos, $0 \notin \overline{S^-(\lambda)}$, logo $\{||u_n||\}$ é limitada fora da origem, isto é, existe um $c > 0$ tal que$||u_n|| > c$.

Assim

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^\gamma dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = 0.$$

Sendo v_n limitada, por 2.10 podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$ e em $L^\gamma(\Omega)$. Sendo b uma função regular em Ω, podemos concluir usando o Teorema da Convergência Dominada 2.3 que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^\gamma dx = \int_\Omega b\lim_{n\to\infty}|v_n|^\gamma = \int_\Omega b|v_0|^\gamma = 0.$$

Logo, $\int_\Omega b|v_0|^\gamma dx = 0$, ou seja, $v_0 \in B_0$. Se $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, então $||v_0|| = 1$ e $\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2)dx = 0$, isto é, $v_0 \in L_0(\lambda)$. Enquanto que, se $v_n \nrightarrow v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, temos $\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2)dx < 0$, isto é, $\frac{v_0}{||v_0||} \in L_-(\lambda)$. No entanto, em ambos os casos, $\frac{v_0}{||v_0||} \in B_0$ e isso é uma contradição, pois como vimos $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ e $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$.

Daí, $\inf_{u\in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) > 0$. ■

Concluímos esta seção, provando um lema técnico que se aplica quando as hipótese do teorema anterior não são válidas. Como podemos observar, dizer que $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$, é o mesmo que dizer que existe $u \in L_-(\lambda)$ tal que $u \in B_+$. Sendo $B_+ \cap B_- = \emptyset$, a hipótese nos garante que $L_-(\lambda) \nsubseteq B_-$. O lema será usado posteriormente em nossa discussão de situações em que (P_1) não possui soluções positivas.

Lema 1.2. *Suponhamos que $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$. Então existe $k > 0$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in L_+(\lambda) \cap B_+$ tal que*

$$\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon|^2 - \lambda u_\epsilon^2)dx < \epsilon \quad e \quad \int_\Omega b|u_\epsilon|^\gamma dx > k.$$

Prova: Seja $v \in L_-(\lambda) \cap B_+$, de modo que

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda v^2)dx < 0; \quad \int_\Omega b|v|^\gamma dx > 0.$$

Podemos escolher $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com a norma do sup arbitrariamente pequena, mas de tal modo que $\int_\Omega |\nabla h|^2 dx$ seja arbitrariamente grande. Assim podemos tomar h de forma que

$$\int_\Omega b|v + th|^\gamma dx > \frac{1}{2}\int_\Omega b|v|^\gamma dx \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e

$$\int_\Omega (|\nabla(v+h)|^2 - \lambda(v+h)^2)dx > 0.$$

Seja $u_t = \frac{v+th}{||v+th||}$. Então, para $0 \leq t \leq 1$, $u_t \in B_+$; de fato

$$\int_\Omega b|u_t|^\gamma dx \geq \frac{1}{(||v|| + ||h||)^\gamma}\frac{1}{2}\int_\Omega b|v|^\gamma dx.$$

Além disso, $u_0 \in L_-(\lambda)$ e $u_1 \in L_+(\lambda)$. Tomando

$$\phi(t) = \int_\Omega (|\nabla u_t|^2 - \lambda u_t^2)dx \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Então $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $\phi(0) < 0$ e $\phi(1) > 0$ e por isso, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existem valores de t tal que u_t possui as propriedades requeridas. ∎

1.5 A EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES

Teorema 1.3. *Suponhamos que $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ para todo $\lambda < \hat{\lambda}$. Então, para todo $\lambda < \hat{\lambda}$:*

(i) existe um minimizador para J_λ em $S^+(\lambda)$;

(ii) existe um minimizador para J_λ em $S^-(\lambda)$, desde que $L_-(\lambda)$ seja não-vazio.

Prova: (i) Pelo Teorema 1.2, J_λ é limitado inferiormente em $S^+(\lambda)$. Pela definição de ínfimo, existe $\{u_n\} \subseteq S^+(\lambda)$, sequência minimizante, tal que,

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in S^+(\lambda)} J_\lambda(u).$$

Como,

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx,$$

com $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) < 0$ e $\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx > 0$ para todo n, temos que $J_\lambda(u_n) < 0$.

Além disso, pelo Teorema 1.2(ii), $S^+(\lambda)$ é limitado, daí podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e por 2.10, $u_n \to u_0$ em $L^\gamma(\Omega)$. Assim, segue que

$$\int_\Omega b|u_0|^\gamma dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx > 0$$

daí $\frac{u_0}{||u_0||} \in B_+$.

Pelo Teorema 1.1, $L_0(\lambda) \subseteq B_-$, $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ e temos também que $B_- \cap B_+ = \emptyset$. Assim, $\frac{u_0}{||u_0||} \in L_+(\lambda) \cap B_+$ e por resultados anteriores obtemos que a Aplicação Fibração ϕ_{u_0} tem um único mínimo em t_{u_0} tal que $t_{u_0}u_0 \in S^+(\lambda)$.

Precisamos mostrar que u_0 está na variedade. Para isso, suponhamos $u_n \not\to u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)dx &< \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = \int_\Omega b|u_0|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$t_{u_0} = \left[\frac{\int_\Omega b|u_0|^\gamma dx}{\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)dx}\right]^{\frac{1}{2-\gamma}} > 1,$$

e ainda,

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_0) &= \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)dx - \int_\Omega b|u_0|^\gamma dx \\ &< \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx \\ &= \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Como ϕ_{u_0} tem um único mínimo em t_{u_0} tal que $t_{u_0}u_0 \in S^+(\lambda)$, segue que $\phi_{u_0}(t_{u_0}) = J_\lambda(t_{u_0}u_0) < \phi_{u_0}(t), \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R}^+$, em particular vale a desigualdade para $t = 1$,

$$J_\lambda(t_{u_0}u_0) < J_\lambda(u_0). \tag{1.19}$$

Por (1.18) e (1.19), temos que $J_\lambda(t_{u_0}u_0) < J_\lambda(u_0) < \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in S^+(\lambda)} J_\lambda(u)$ o que é impossível, pois $t_{u_0}u_0 \in S^+(\lambda)$.

Daí, $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim $u_0 \in S(\lambda)$. Segue que u_0 é um minimizador para J_λ em $S^+(\lambda)$.

(ii) Seja $\{u_n\}$ uma sequência minimizante para J_λ em $S^-(\lambda)$. Segue, do Teorema 1.2 que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) > 0$.

Suponhamos que $\{u_n\}$ é ilimitada; desse modo $||u_n|| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Tomemos $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$. Sendo $\{J_\lambda(u_n)\}$ limitada, segue que $\{\int_\Omega(|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx\}$ e $\{\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx\}$ são limitadas e por isso

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^\gamma dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = 0.$$

Como $\{v_n\}$ é limitada, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^\gamma(\Omega)$, de modo que $\int_\Omega b|v_0|^\gamma dx = 0$.

Se $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, vemos que $v_0 \in L_0(\lambda) \cap B_0$, o que é impossível pelo Teorema 1.1(i).

Daí, $v_n \nrightarrow v_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim por 2.5

$$\int_\Omega(|\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2)dx < \lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2)dx = 0.$$

Daí, $v_0 \neq 0$ e $\frac{v_0}{||v_0||} \in L_-(\lambda) \cap B_0$ que é novamente impossível.

Assim u_n é limitada e por isso podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^\gamma(\Omega)$. Suponhamos $u_n \nrightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Então temos

$$\int_\Omega b|u_0|^\gamma dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma})^{-1}\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) < 0$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)dx &< \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = \int_\Omega b|u_0|^\gamma dx < 0.\end{aligned}$$

Daí, $\frac{u_0}{||u_0||} \in L_-(\lambda) \cap B_-$ e assim $t_{u_0}u_0 \in S^-(\lambda)$, onde

$$t_{u_0} = \left[\frac{\int_\Omega b|u_0|^\gamma dx}{\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)dx}\right]^{\frac{1}{2-\gamma}} < 1.$$

Além disso $t_{u_0}u_n \rightharpoonup t_{u_0}u_0$, mas $t_{u_0}u_n \nrightarrow t_{u_0}u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, logo,

$$J_\lambda(t_{u_0}u_0) < \lim_{n\to\infty} J_\lambda(t_{u_0}u_n).$$

Como a aplicação $t \to J_\lambda(tu_n)$ atinge seu máximo em $t = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(t_{u_0}u_n) = \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in S^-(\lambda)} J_\lambda(u).$$

Assim $J_\lambda(t_{u_0}u_0) < \inf_{u\in S^-(\lambda)} J_\lambda(u)$, o que é uma contradição.

Desse modo, $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e segue que u_0 é um minimizador para J_λ em $S^-(\lambda)$. ■

A existência dos minimizadores acima implica a existência de correspondentes soluções não-negativas de (P_1). Suponhamos, por exemplo, que u_0 é um minimizador para J_λ em $S^-(\lambda)$. Sendo $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$, podemos supor que u_0 é não-negativo em Ω. Além disso, $S^-(\lambda)$ é fechado, desse modo u_0 é um mínimo local para J_λ em $S(\lambda)$. Temos também, pelo Teorema 1.1 (i), $L_0 \cap B_0 = \emptyset$, logo, $S^0 = \emptyset$. Segue do lema 1.1 que u_0 é um ponto crítico de J_λ e pelos resultados de regularidade conforme na seção 1.9, u_0 é uma solução clássica de (P_1).

Da mesma forma, se u_0 é um minimizador em $S^+(\lambda)$, $J_\lambda(u_0) < 0$. Assim u_0 deve ser um mínimo local de J_λ em $S(\lambda)$ e temos novamente pelos resultados de regularidade, que u_0 é uma solução clássica de (P_1).

1.6 BIFURCAÇÃO DO INFINITO

A equação (P_1) é assintoticamente linear (ver, por exemplo, Toland (1973)) com o correspondente problema linearizado (P_0). Pode-se mostrar usando argumentos da teoria da bifurcação que a bifurcação do infinito ocorre em $\lambda = \lambda_1$ e que a direção desta bifurcação é determinada pelo sinal de $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx$.

Nesta seção, vamos mostrar como esses fatos são relacionado com as propriedades da variedade de Nehari do problema.

Como $L_-(\lambda)$ é vazio para $\lambda < \lambda_1$, resulta do Teorema 1.3, que existe um minimizador de J_λ em $S^+(\lambda)$ sempre que $\lambda < \lambda_1$.

Nosso próximo resultado corresponde ao fato de que um ramo de soluções positivas bifurca do infinito à esquerda em $\lambda = \lambda_1$ quando $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$.

Teorema 1.4. *Suponhamos* $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$. *Então*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1^-} \inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u) = -\infty.$$

Prova: Sendo $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$ e

$$\int_\Omega (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx = (\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega \phi_1^2 dx,$$

temos que $\phi_1 \in L_+(\lambda) \cap B_+$ para todo $\lambda < \lambda_1$.

Daí $t_{\phi_1}\phi_1 \in S^+(\lambda)$ e

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_{\phi_1}\phi_1) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) t_{\phi_1}\phi_1 \int_\Omega (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \left[\frac{\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx}{\int_\Omega (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx}\right]^{\frac{2}{2-\gamma}} \int_\Omega (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{[\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx]^{\frac{2}{2-\gamma}}}{[\int_\Omega (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}} \frac{[\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx]^{\frac{2}{2-\gamma}}}{[\int_\Omega \phi_1^2 dx]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}. \end{aligned}$$

Assim $\inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u) \leq J_\lambda(t_{\phi_1}\phi_1) \to -\infty$ quando $\lambda \to \lambda_1^-$. ∎

Corolário 1. *Suponhamos* $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$. *Então, para cada* $\lambda < \lambda_1$ *existe um minimizador* u_λ *em* $S^+(\lambda)$ *de tal modo que* $\lim_{\lambda \to \lambda_1^-} ||u_\lambda|| = \infty$.

Prova: De fato, pelo Teorema anterior,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_1^-}||u_\lambda||^2 &= \lim_{\lambda\to\lambda_1^-}\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^2dx > \lim_{\lambda\to\lambda_1^-}\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^2dx - \lim_{\lambda\to\lambda_1^-}\int_\Omega|\lambda u^2|dx\\ &\geq \lim_{\lambda\to\lambda_1^-}\int_\Omega|\,|\nabla u_\lambda|^2-\lambda u^2|dx \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\right)^{-1}\lim_{\lambda\to\lambda_1^-}\left\{\inf_{u\in S^+(\lambda)}J_\lambda(u)\right\}\to\infty.\end{aligned}$$

■

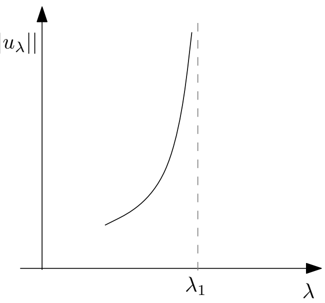

Figura 7: Bifurcação para o infinito à esquerda de λ_1

Vamos agora voltar nossa atenção para o caso em que $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx < 0$. Neste caso as hipóteses do Teorema 1.1 se mantêm de alguma forma, à direita de $\lambda = \lambda_1$. Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

Lema 1.3. *Suponhamos $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx < 0$. Então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $u \in L_-(\lambda) \Rightarrow \int_\Omega bu^\gamma dx \leq -\delta_2$ sempre que $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + \delta_1$.*

Prova: Suponhamos por absurdo que para cada δ_{1_n}, $\delta_{2_n} > 0$, existe $u_n \in L_-(\lambda_n)$ tais que $\int_\Omega bu_n^\gamma dx > -\delta_{2_n}$, sempre que $\lambda_1 \leq \lambda_n \leq \lambda_1 + \delta_{1_n}$.

Tomemos $\delta_{1_n} = \delta_{2_n} = \frac{1}{n}$ e $\{\lambda_n\}_{n\in I\!N\setminus\{1\}}$ uma sequência estritamente decrescente tal que $\lambda_1 \leq \lambda_n \leq \lambda_1 + \frac{1}{n}$. Desse modo, para cada $n \in I\!N \setminus \{1\}$, existe $u_n \in L_-(\lambda_n)$ tal que $\int_\Omega bu_n^\gamma dx > -\frac{1}{n}$.

Observe que

$$\int_\Omega|\nabla u|^2dx - \lambda_n\int_\Omega u^2dx < \int_\Omega|\nabla u|^2dx - \lambda_{n+1}\int_\Omega u^2dx < ... < \int_\Omega|\nabla u|^2dx - \lambda_1\int_\Omega u^2dx$$

Desse modo, se $u \in L_-(\lambda_{n+1}) \Rightarrow u \in L_-(\lambda_n)$, nos dando

$$L_-(\lambda_n) \supset L_-(\lambda_{n+1}) \supset L_-(\lambda_{n+2}) \supset ...$$

Ainda, para todo $\lambda > \lambda_1$ temos

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1|^2 - \lambda\phi_1^2 dx = (\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega \phi_1^2 dx < 0 \Rightarrow \phi_1 \in L_-(\lambda).$$

Além disso, já foi visto que se $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow L_0(\lambda_1) = \phi_1$, assim

$$L_0(\lambda_1) \subset L_-(\lambda), \quad \forall\ \lambda > \lambda_1,$$

daí,

$$L_-(\lambda_n) \supset L_-(\lambda_{n+1}) \supset L_-(\lambda_{n+2}) \supset ... \supset L_0(\lambda_1).$$

Observe ainda que podemos tomar a sequência $\{u_n\} \in L_-(\lambda_n)$ tal que $u_n \in L_-(\lambda_n)$, $u_{n+1} \in L_-(\lambda_{n+1})$; de modo que $u_n \to \phi_1$. Assim

$$u_n^\gamma \to \phi_1^\gamma \Rightarrow \int_\Omega u_n^\gamma \to \int_\Omega \phi_1^\gamma \Rightarrow \int_\Omega b u_n^\gamma \to \int_\Omega b\phi_1^\gamma,$$

nos dando que $\int_\Omega b\phi_1^\gamma > -\frac{1}{n}$, $\forall\ n \in I\!N$, o que é um absurdo, já que, pela hipótese do teorema $\int_\Omega b\phi_1^\gamma < 0$. ■

Corolário 2. *Suponhamos $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx < 0$ e δ_1 seja como no lema 1.3. Então, sempre que $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + \delta_1$, existem minimizadores u_λ e v_λ de J_λ em $S^+(\lambda)$ e $S^-(\lambda)$ respectivamente.*

Prova: Podemos observar que $\phi_1 \in L_-(\lambda)$ e assim vemos que $L_-(\lambda)$ é não- vazio sempre que $\lambda > \lambda_1$. Pelo lema 1.3, obtemos as hipóteses do Teorema 1.3 com $\hat{\lambda} = \lambda_1 + \delta_1$ e por isso o resultado segue. ■

O próximo resultado mostra que, quando $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx < 0$, ocorre a bifurcação do infinito à direita de $\lambda = \lambda_1$.

Teorema 1.5. *Suponhamos $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx < 0$. Se $\lambda \to \lambda_1^+$, v_λ torna-se ilimitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Prova: Seja $v \in S^-(\lambda)$. Assim, $v = t_u u$ para algum $u \in L_-(\lambda) \cap B_-$. Agora, pelo Lema 1.3, existem $\delta_1 e \delta_2 > 0$, tais que $\int_\Omega b u_1^\gamma dx \leq -\delta_2$ sempre que $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_1 + \delta_1$ e

$$0 > \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1},$$

de modo que $|\int_\Omega(|\nabla u|^2-\lambda u^2)dx| \leq \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_1}$. Por isso

$$\begin{aligned} J_\lambda(v)=J_\lambda(t_u u) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\right)t_u^2\int_\Omega(|\nabla u|^2-\lambda u^2)dx \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\right)\left[\frac{|\int_\Omega b|u|^\gamma dx|^{\frac{2}{2-\gamma}}}{|\int_\Omega(|\nabla u|^2-\lambda_1 u^2)dx}|^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\right] \\ &\leq \left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_1{}^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\delta_2^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(\lambda-\lambda_1)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}. \end{aligned}$$

Daí $\inf_{v\in S^-(\lambda)} J_\lambda(v)\to\infty$ já que $\lambda\to\lambda_1^+$ e assim v_λ é ilimitada quando $\lambda\to\lambda_1^+$.

Assim podemos construir um gráfico como segue na figura 8. ■

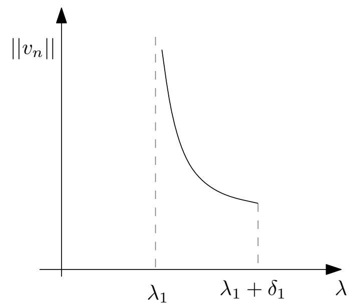

Figura 8: Bifurcação para o infinito à direita de λ_1

1.7 O CASO DA NÃO EXISTÊNCIA

Finalmente, mostraremos que sob as hipóteses em que não há soluções positivas para (P_1), teremos que J_λ não é limitado inferiormente em $S(\lambda)$.

Lema 1.4. *J_λ não é limitado inferiormente em $S(\lambda)$ quando $L_-(\lambda)\cap B_+\neq\emptyset$.*

Prova: Suponhamos que $u_0\in L_-(\lambda)\cap B_+$. Decorre do lema 1.2 que existe $k>0$ e uma sequência $\{u_n\}\subseteq L_+(\lambda)\cap B_+$ tal que $\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx\geq k$ e $0<\int_\Omega(|\nabla u_n|^2-\lambda u_n^2)dx<\frac{1}{n}$.

Em seguida, utilizando o mesmo cálculo como na prova do Teorema 1.5, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_{u_n}u_n) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\right)\left[\frac{|\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx|^{\frac{2}{2-\gamma}}}{|\int_\Omega(|\nabla u_n|^2-\lambda u_n^2)dx|^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}\right] \\ &\leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\right)n^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}k^{\frac{2}{2-\gamma}}\to-\infty \text{ quando } n\to\infty. \end{aligned}$$

Daí J_λ não é limitado inferiormente em $S(\lambda)$. ■

Os seguintes resultados de não existência de soluções para (P_1) seguem para complementar nosso estudo.

Teorema 1.6. *(i) Suponhamos $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$. Então o problema (P_1) não tem soluções positivas se $\lambda > \lambda_1$.*

(ii) A equação (P_1) não tem soluções positivas quando $\lambda > \bar{\lambda}$, onde $\bar{\lambda}$ é o principal autovalor de

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x) \text{ para } x \in \Omega^+; \quad u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega^+ \tag{1.20}$$

$$e\ \Omega^+ = \{x \in \Omega : b(x) > 0\}.$$

Prova: (i) Suponhamos $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$ e que (P_1) tem uma solução positiva u. Multiplicando (P_1) por ϕ_1, onde ϕ_1 é a primeira autofunção do operador $-\Delta$, (P_0) por u e subtraindo as equaçoes resultantes obtemos

$$-\Delta u(x)\phi_1(x) + u(x)\Delta\phi_1(x) = (\lambda - \lambda_1)u(x)\phi_1(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x)\phi_1(x)$$

e assim

$$\int_\Omega \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u\phi_1 + u\Delta\phi_1)dx = \int_\Omega (\lambda - \lambda_1)\phi_1^\gamma u^{2-\gamma}dx + \int_\Omega b\phi_1^\gamma dx.$$

Pela identidade de Picone em Berestycki, Capuzzo-Dolcetta e Nirenberg (1995), o lado esquerdo é negativo.

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u\phi_1 + u\Delta\phi_1)dx = \\
&= \int_\Omega -\Delta u\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} + u\Delta\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx \\
&= \int_\Omega -\Delta u\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx + \int_\Omega u\Delta\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx \\
&= \int_\Omega \nabla u\nabla \left(\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1}\right) dx - \int_\Omega \nabla\phi_1\nabla \left(u \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx\right) \\
&= \int_\Omega \nabla u\nabla\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx + \int_\Omega \nabla u\phi_1\nabla \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx \\
&\quad - \int_\Omega \nabla\phi_1\nabla u \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx - \int_\Omega \nabla\phi_1 u\nabla \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $w = \phi_1^{\frac{1}{2}}$, teremos $\phi_1 = w^2$. Segue que,

$$\int_\Omega \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u \phi_1 + u\Delta\phi_1)dx = \int_\Omega \nabla u w^2 \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} - \nabla w^2 u \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} dx.$$

Derivando os termos com $\nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1}$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u \phi_1 + u\Delta\phi_1)dx = \\
&= \int_\Omega (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} \left[\nabla u w^2 \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} - \nabla w^2 u \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1}\right] dx \\
&= \int_\Omega (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} \left[\nabla u w^2 - \nabla w^2 u\right] \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right) dx \\
&= \int_\Omega (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} \left(\nabla u w^2 - \nabla w^2 u\right) \left(\frac{\nabla w^2 u - w^2 \nabla u}{u^2}\right) dx \\
&= \int_\Omega (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} \left(\nabla u w^2 - \nabla w^2 u\right) \left(\nabla w^2 \frac{1}{u} - \left(\frac{w}{u}\right)^2 \nabla u\right) dx \\
&= \int_\Omega (\gamma-1) \left[\frac{w^2}{u} \nabla u \nabla w^2 - \left(\frac{w}{u}\right)^2 |\nabla u|^2 w^2 - |\nabla w^2|^2 + \frac{w^2}{u} \nabla w^2 \nabla u\right] dx \\
&= \int_\Omega (\gamma-1) \left[\frac{w^2}{u} \nabla u \nabla w^2 - \left(\frac{w^2}{u}\right)^2 |\nabla u|^2 - |\nabla w^2|^2 + \frac{w^2}{u} \nabla w^2 \nabla u\right] dx.
\end{aligned}$$

Voltando com $w^2 = \phi_1$

$$\int_\Omega \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u \phi_1 + u\Delta\phi_1)dx = \int_\Omega (\gamma-1) \left[\left(-\frac{\phi_1}{u}\right)^2 |\nabla u|^2 + 2\frac{\phi_1}{u} \nabla u \nabla \phi_1 - |\nabla \phi_1|^2\right] dx.$$

Substituindo da identidade de Picone, segue

$$\int_\Omega (\gamma-1)(-1) \left[|\nabla u|^2 - \nabla \frac{u^2}{v} \nabla v\right] dx \leq 0.$$

Por isso, devemos ter $\lambda < \lambda_1$ e assim (P_1) não tem nenhuma solução positiva quando $\lambda > \lambda_1$.

(ii) Suponhamos que (P_1) tenha uma solução positiva u. Assim teremos, $u(x) \geq 0$ em Ω^+ e

$$-\Delta u(x) = \lambda u + b(x)|u|^{\gamma-2} u \geq \lambda u \text{ em } \Omega^+; \quad u(x) \geq 0 \text{ em } \partial\Omega^+.$$

Segue do princípio do máximo que $\lambda \leq \bar{\lambda}$. Finalmente observa-se que em cada um dos casos acima J_λ não é limitada inferiormente em $S(\lambda)$. ∎

Teorema 1.7. *J_λ não é limitada inferiormente em $S(\lambda)$ quando uma das seguintes condições acontecem:*

(i) $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$ e $\lambda > \lambda_1$;

(ii) $\lambda > \bar{\lambda}$ onde $\bar{\lambda}$ é o mesmo definido no teorema anterior.

Prova: Pelo lema 1.4, é suficiente mostrar que $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$. Se a condição (i) é satisfeita, logo, $\phi_1 \in L_-(\lambda) \cap B_+$ e, se (ii) é satisfeita, então $\psi \in L(\lambda) \cap B_+$, onde

$$\psi(x) = \begin{cases} \text{principal autofunção positiva de (1.20) em } \Omega^+ \\ 0, \text{ se } x \in \Omega \setminus \Omega^+ \end{cases}$$

∎

1.8 O FUNCIONAL $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$

O Funcional de Euler $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema elíptico (P) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx.$$

Já vimos que ele está bem definido para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Iremos mostrar que ele é de classe $\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Para isso tomamos $J_1, J_2, J_3 : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, da seguinte maneira:

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

$$J_2(u) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx,$$

$$J_3(u) = \frac{1}{\gamma}\int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx.$$

Mostraremos que existem as derivadas de Gateaux de J_1, J_2 e J_3 e que elas são contínuas.

(i) Para mostrar que J_1 é Gateaux diferenciável iremos encontrar $J_1'(u)v$.

$$J_1'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}||u+tv||^2 - \frac{1}{2}||u||^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{||u||^2}{2} + t\langle u, v\rangle + \frac{t^2||v||}{2} - \frac{||u||^2}{2}}{t} = \langle u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Portanto, a derivada de Gateux existe em u com

$$J_1'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Em $W_0^{1,2}(\Omega)$, temos

$$||J_1'(u_n) - J_1'(u)||_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{||v||\leq 1} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v|.$$

Para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $||v|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v| &= |J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| = |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v\rangle| \leq ||u_n - u||||v|| \leq ||u_n - u||. \end{aligned}$$

Contudo,

$$||J_1'(u_n) - J_1'(u)||_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{||v||\leq 1} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v| \leq ||u_n - u|| \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Desse modo, concluímos que J_1' é contínuo e com o resultado da proposição 2.1, $J_1 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

(ii) Agora vamos mostrar que J_2 é contínuo.

Seja $u_n \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Queremos mostrar que $J_2(u_n) \to J_2(u)$ em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema das Imersões 2.10 temos que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$.

Logo,

$$||u_n||_2 \to ||u||_2 \quad \Rightarrow \quad ||u_n||_2^2 \to ||u||_2^2.$$

Tendo que $||u||_2 = \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ segue que

$$\int_\Omega |u_n|^2 dx \to \int_\Omega |u|^2 dx,$$

isto é,

$$J_2(u_n) \to J_2(u).$$

Mostraremos agora que a derivada de Gateaux existe em u

$$\begin{aligned} J_2'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+tv)-J_2(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\lambda}{2}||u+tv||_2^2-\frac{\lambda}{2}||u||_2^2}{t} \\ &= \lambda\lim_{t\to 0}\frac{\frac{||u||_2^2}{2}+t\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}+\frac{t^2||v||_2}{2}-\frac{||u||_2^2}{2}}{t} = \lambda\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda\int_\Omega uvdx. \end{aligned}$$

Assim,

$$J_2'(u)v = \lambda\int_\Omega uvdx.$$

Em $W_0^{1,2}(\Omega)$, temos

$$||J_2'(u_n)-J_2'(u)||_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{||v||\leq 1}|(J_2'(u_n)-J_2'(u))v|.$$

Para todo $v\in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $||v||\leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |(J_2'(u_n)-J_2'(u))v| &= |J_2'(u_n)v-J_2'(u)v| = \lambda|(u_n,v)-(u,v)| = \\ &= \lambda|(u_n-u,v)|\leq\lambda||u_n-u||||v||\leq\lambda||u_n-u||. \end{aligned}$$

Assim,

$$||J_2'(u_n)-J_2'(u)||_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{||v||\leq 1}|(J_2'(u_n)-J_2'(u))v|\leq\lambda||u_n-u||\to 0,$$

quando $n\to\infty$.

Desse modo concluímos que J_2' é contínuo e pela proposição 2.1 temos que $J_2\in\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$.

(iii)Por fim iremos mostrar que $J_3\in\mathcal{C}(W_0^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$.

Consideremos a seguinte função

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ \text{dada por}$$

$$f(s)=\frac{1}{\gamma}b(x)|u+stv|^\gamma,$$

onde $t\in\mathbb{R}$ é tal que $0<|t|<1$ e $u,v\in W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim,

(a) $f(1)=\frac{1}{\gamma}b(x)|u+tv|^\gamma$,

(b) $f(0)=\frac{1}{\gamma}b(x)|u|^\gamma$,

(c) $f'(s)=b(x)|u+stv|^{\gamma-2}(u+stv)tv$.

Como f é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\delta \in (0,1)$ tal que,

$$f(1) - f(0) = f'(\delta)(1-0),$$

e segue,

$$\frac{1}{\gamma}b(x)|u+tv|^\gamma - \frac{1}{\gamma}b(x)|u|^\gamma = b(x)|u+\delta tv|^{\gamma-2}(u+\delta tv)tv.$$

Dividindo a equação acima por t (com $0 < |t| < 1$), encontramos

$$\frac{1}{\gamma}b(x)\left(\frac{|u+tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right) = b(x)|u+\delta tv|^{\gamma-2}(u+\delta tv)v.$$

Agora, passando ao limite, quando $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}b(x)\left(\frac{|u+tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right) = b(x)|u|^{\gamma-2}uv.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\gamma}b(x)\left(\frac{|u+tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right)\right| &= |b(x)||u+\delta tv|^{\gamma-1}|v| \\
&\leq |b(x)|(|u|+|\delta||t||v|)^{\gamma-1}|v| \\
&\leq k(|u|+|\delta||t||v|)^{\gamma-1}|v| \\
&\leq k(|u|+|v|)^{\gamma-1}|v|.
\end{aligned}$$

Como $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, segue que a imersão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é contínua para $1 \leq s \leq 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$ e $2^* = \infty$, se $N = 1, 2$.

Podemos observar que a imersão é contínua para os valores de $s = 2$ ou $s = \gamma$. Segue que

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega),$$

logo $u, v \in L^\gamma(\Omega)$ e $u + v \in L^\gamma(\Omega)$. Assim, $(u+v)^{\gamma-1} \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$.

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ e γ em $k(|u|+|v|)^{\gamma-1}|v|$

$$\int_\Omega [(|u|+|v|)^{\gamma-1}]^1|v|^1 dx \leq \left(\int_\Omega |(|u|+|v|)^{\gamma-1}|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\int_\Omega |v|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} < \infty.$$

Assim, $k(|u|+|v|)^{\gamma-1}|v| \in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue 2.3 temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}\int_\Omega b(x)\frac{|u+tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t}dx = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}b(x)\frac{|u+tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t}dx = \int_\Omega b(x)|u|^{\gamma-2}uvdx.$$

Portanto,

$$J_3'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}\int_\Omega b(x)\frac{|u+tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t}dx = \int_\Omega b(x)|u|^{\gamma-2}uvdx.$$

Consequentemente, existe a derivada de Gateaux em u, com

$$J_3'(u)v = \int_\Omega b(x)|u|^{\gamma-2}uvdx.$$

Provaremos agora, a continuidade da derivada de Gateaux de J_3'. Para isso, devemos mostrar que $J_3'(u_n) \to J_3'(u)$, quando $u_n \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, com $u_n \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Das imersões contínuas de Sobolev 2.10, segue que $u_n \to u$ em $L^\gamma(\Omega)$, já que $\gamma \in [1, 2^*]$. Então, pelo Teorema 2.4, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e existe $h \in L^\gamma(\Omega)$ tal que

$$u_n(x) \to u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ e,}$$

$$|u_n| \leq h(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1.21}$$

A norma no espaço dual é dada por

$$||J_3'(u_n) - J_3'(u)||_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{||v||\leq 1} |(J_3'(u_n) - J_3'(u))(v)|,$$

e, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $||v|| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|(J_3'(u_n) - J_3'(u))(v)| &= |\int_\Omega b(x)|u_n|^{\gamma-2}u_n v dx - \int_\Omega b(x)|u|^{\gamma-2}uvdx| \\
&= |\int_\Omega b(x)(|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)vdx| \\
&\leq \int_\Omega |b(x)(|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)v|dx \\
&= \int_\Omega |b(x)||(|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)||v|dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder 2.2 com expoentes $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ e γ, obtemos

$$|(J_3'(u_n) - J_3'(u))(v)| \leq k\left(\int_\Omega |(|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}|dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\int_\Omega |v|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Como $1 < \gamma < 2^* - 1$, temos que a imersão de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^\gamma(\Omega)$ é contínua. Daí existe $c > 0$ tal que

$$||v||_{L^\gamma} \leq C||v||, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ com } ||v|| \leq 1.$$

Daí,

$$|(J_3'(u_n) - J_3'(u))(v)| \leq kc \left(\int_\Omega |(|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}|dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} ||v|| \tag{1.22}$$

$$\leq kc \left(\int_\Omega |(|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}|dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Além disso, como $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω,

$$||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u| \to 0 \text{ q.t.p. em}\Omega$$

e observamos que

$$\begin{aligned}
((||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})^{\frac{2^*}{\gamma}} &\leq ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\
&\leq (|u_n|^{\gamma-2}|u_n| + |u|^{\gamma-2}|u|)^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(h(x)^{2^*} + |u|^{2^*}).
\end{aligned}$$

Para obter a última desigualdade acima, usamos 1.21. Com isso

$$\begin{aligned}
||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} &\leq 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(h(x)^{2^*} + |u|^{2^*})^{\frac{\gamma}{2^*}} \\
&\leq k(h(x)^\gamma + |u|^\gamma) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Convergência Dominada de Lebesgue 2.3, temos

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \to 0.$$

Logo, por 1.22, temos

$$|J_3'(u_n)(v) - J_3'(u)(v)| \to 0.$$

Portanto, J_3' é contínuo e pela proposição 2.1, $J_3 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Por (i),(ii) e (iii) concluímos que $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

1.9 REGULARIDADE DA SOLUÇÃO FRACA DO PROBLEMA (P_1)

Mostramos na seção 1.5 a existência de minimizadores para J_λ em $S^-(\lambda)$. Como $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$, podemos assumir as soluções como sendo não negativas. Se $u_0 \in S^-(\lambda)$, sendo $S^-(\lambda)$ fechado, temos que u_0 é um mínimo local de J_λ em $S(\lambda)$. Segue pelo Lema 1.1 que u_0 é ponto crítico de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Similarmente, se u_0 é um minimizador em $S^+(\lambda)$, $J_\lambda(u_0) < 0$. Assim u_0 é minimizador em $S(\lambda)$.

Nesta seção iremos mostrar que os pontos críticos do nosso funcional J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é, as soluções fracas do problema (P_1), são na verdade soluções clássicas. Para isso, usaremos alguns resultados clássicos da teoria de regularidade.

Vamos escrever nosso problema (P_1) da seguinte maneira:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = & f(x, u(x)), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = & 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde,

$$f(x, u(x)) = \lambda u(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x),$$

e sendo f uma aplicação contínua obtemos

$$|f(x, u(x))| = \lambda|u(x)| + |b(x)||u(x)|^{\gamma-1}.$$

(i) Se $|u(x)| \leq 1$ então $|u(x)|^{\gamma-1} \leq 1$ e assim

$$|f(x, u(x))| \leq \lambda + |b(x)|. \tag{1.23}$$

(ii) Se $|u(x)| > 1$ então $|u(x)|^{\gamma-1} < |u(x)|^1 < |u(x)|^p$, com $1 < p < 2^* - 1$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e assim

$$|f(x, u(x))| \leq |u(x)|^p(\lambda + |b(x)|). \tag{1.24}$$

Desse modo, por (1.23) e (1.24) podemos afirmar que

$$|f(x, u(x))| \leq (\lambda + |b(x)|)(1 + |u(x)|^p).$$

Assim, f pode ser escrita como

$$|f(x,u(x))| \leq (c_0 + c_1|u(x)|^p),$$

com $c_0,\ c_1\ > 0$.

O crescimento assumido na equação acima é conhecido como crescimento subcrítico.

Se considerarmos a função $f(x) = f(x;u(x))$, teremos

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = & f(x), \ \text{ em } \ \Omega \\ u = & 0, \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que $f \in L^{\frac{2^*}{p}}$, pois

$$|f|^{\frac{2^*}{p}} \leq (c_0 + c_1|u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \leq k(c_0^{\frac{2^*}{p}} + c_1^{\frac{2^*}{p}}|u(x)|^{2^*}).$$

Desse modo

$$\int_\Omega |f|^{\frac{2^*}{p}} dx < \infty,$$

pois $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Usando o Teorema 2.7 temos que $u \in W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega)$.

Se $N = 1$ ou $N = 2$, como $u_0 \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [2;\infty)$ e $|u_0|^p$ pertence a $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [2;\infty)$; temos que $f(x;u_0) \in L^q(\Omega)$ e pelo Teorema 2.7, $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$; $2 \leq q < \infty$. Pelo Teorema 2.11, $u_0 \in C^{1;\alpha}(\Omega); 0 < \alpha < 1 - {}^N\!/_q = 1 - {}^2\!/_q$, para todo $q \geq 2$.

Para $N \geq 3$ devemos analisar dois casos conforme pode ser visto em (ALVES, 2007).

a) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \leq 0$,

$$W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \forall s \in [1,+\infty).$$

Fixando $s > Np$, segue que $u \in L^s(\Omega)$ e $f \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$. Logo por 2.7 $u_0 \in W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega)$. Pelas Imersões de Sobolev 2.10

$$W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}.$$

Assim, $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}$.

b) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} > 0$, segue das Imersões de Sobolev 2.10 que

$$W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega),$$

onde $\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$. Desta forma, $u_0 \in L^{t_1}(\Omega)$. Repetindo os argumentos anteriores, vamos obter $f \in L^{\frac{t_1}{p}}(\Omega)$ e por 2.7

$$u_0 \in W^{2,\frac{t_1}{p}}(\Omega)$$

.

b.1) Se $\frac{p}{t1} - \frac{2}{N} \leq 0$, tem-se

$$W^{2,\frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \forall s \in [1, +\infty).$$

Fixando $s > Np$, segue que $u_0 \in L^s(\Omega)$ e $f \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$. Logo por 2.7 $u_0 \in W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega)$. Pelas Imersões de Sobolev 2.10

$$W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}.$$

Assim, $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}$.

b.2) Se $\frac{p}{t1} - \frac{2}{N} > 0$, tem-se

$$W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega),$$

onde $\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N}$. Desta forma, $u_0 \in L^{t_2}(\Omega)$. Repetindo os argumentos anteriores, vamos obter $f \in L^{\frac{t_2}{p}}(\Omega)$ e por 2.7

$$u_0 \in W^{2,\frac{t_2}{p}}(\Omega).$$

Para prosseguir a demonstração, teríamos que observar mais dois casos, repetindo todo o processo. Podemos mostrar que depois de um número finito de interações obtemos $u_0 \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Este argumento é conhecido como "bootstrap".

De modo geral teremos

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p}{t_{j-1}} - \frac{2}{N}.$$

Observe que

$$\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N},$$

$$\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2 + p + 1)$$

$$\frac{1}{t_3} = \frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2}{N}(p^3 + p^2 + p + 1).$$

No caso geral iremos encontrar

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{j-1} p^k = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N}\left(\frac{p^j - 1}{p-1}\right) = \left(\frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)}\right)p^j + \frac{2}{N(p-1)}. \quad (1.25)$$

Observando que

$$\frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} < 0 \Leftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2},$$

vemos que existe $j \in I\!N$ tal que

$$\frac{p}{t_j} - \frac{2}{N} < 0$$

mostrando que a interação finaliza após um número finito de passos.

Assim, em (1.25) fixando a dimensão N, existe $j \in I\!N$ tal que $\frac{p}{t_j} - \frac{2}{N} < 0$. Usando argumentos análogos aos de (a) concluímos que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$.

Deste modo, conseguimos mostrar que em todos os casos que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$. Usando os resultados da teoria clássica de Schauder podemos concluir que $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

2 RESULTADOS BÁSICOS

Neste apêndice enunciaremos e daremos referências para suas provas dos principais teoremas utilizados no nosso trabalho.

2.1 RESULTADOS DE GEOMETRIA RIEMANIANA

Teorema 2.1. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável com $dimM = m$ e $dimN = n$, $m \geq n$, $p \in N$. Seja $df(x)$ de classe n para todo $x \in M$, com $f(x) = p$. Então, $f^{-1}(p)$ é uma subvariedade de M de dimensão $m - n$.*

Prova: cf. Jost (2011, lema 1.3.2, pag 10).

2.2 RESULTADOS DA TEORIA DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Teorema 2.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, com $0 < p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $fg \in l^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq |f|_p |g|_{p'}$$

Prova: cf. Brezis (2010, teo 4.6, pag 92).

Teorema 2.3. *(Teorema da Convergência Dominada) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, satisfazendo:*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

(b) Existe $g \in L_1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p. $\forall n \in I\!N$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$$

Prova:cf. Brezis (2010, teo4.2, pag 90).

2.3 DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Definição 1. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, com $x, z \in X$ e $\phi : X \to Y$. Dizemos que ϕ é Gâteaux-diferenciável em x na direção z, se existir o limite*

$$D_u(x)z = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\phi(x + \alpha y) - \phi x)}{\alpha}$$

Observação 2.1. *O conceito de derivada de Gateaux não requer qualquer noção de convergência no espaço do domínio. Para assegurar que funções diferenciáveis sejam contínuas, introduziremos o conceito de derivada forte (que é a derivada de Fréchet).*

Definição 2. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, e a aplicação $\phi : X \to Y$. Dizemos que ϕ é Fréchet-diferenciável em $x \in X$, se existe um operador linear contínuo*

$$d_\phi = X \to \mathbb{R}, \text{ dada por } h \mapsto d_\phi(h) \text{ e tal que}$$

$$d_\phi(x)h = \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\phi(x + h) - \phi(x) - d_u(x)h||_Y}{||h||_X}.$$

Ele é chamado de diferencial de Fréchet de ϕ em x com crescimento h.

Como $d_\phi(x) \in L(X, Y)$, temos que se o diferencial de Fréchet existe, então existe também o diferencial de Gauteaux, e ambos são iguais. Além disso, se ϕ tem derivada de Fréchet em x, então ϕ é contínua.

Definição 3. *Dizemos que o funcional $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de ϕ existe e é contínua em X.*

Proposição 2.1. *Seja $\phi : A \to \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X. Se ϕ possui uma derivada de Gateaux contínua em A, então $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$.*

Prova:cf. Willem (1996, cap.1).

Teorema 2.4. *Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que:*

(i) $u_{n_k} \to u$ q.t.p. em Ω;

(ii) $|u_{n_k}| \leq h(x)$, para todo k natural e q.t.p. e com $h \in L^p(\Omega)$.

Prova:cf. Brezis (2010, teo 4.9, pg 94).

Teorema 2.5. *Seja E um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$;

(ii) Se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, então x_n é limitada e além disso

$$||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||.$$

Prova:cf. Brezis (2010, Prop 3.13, pg63).

2.4 RESULTADOS DA TEORIA CLÁSSICA DE EDP E DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Teorema 2.6. *(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \to \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $M = \{x \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) = 0$, para todo $u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u\in M} J(u),$$

então existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0).$$

Prova:cf. Kavian (1993, prop 14.3, pg 55).

Teorema 2.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então existe uma única função $u \in W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad em\ \Omega; \\ u &= 0, \quad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova: cf. Gilbard e Trudinger (1983) .

Teorema 2.8. *(Teorema de Schauder) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Então existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, solução do problema ($P_l$).*

Além disso, existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$||u||_{C^{2;\alpha}}(\Omega) \leq C||f||_{C^{0;\alpha}}(\Omega)$$

e vale a seguinte afirmação

$$f \in C^{k;\alpha}(\Omega) \Rightarrow u \in C^{k+2;\alpha}(\Omega).$$

Prova: cf. Gilbard e Trudinger (1983)

Teorema 2.9. *Seja $h \in C^{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$ e suponhamos que $u \in C^{\alpha}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ seja uma solução fraca do seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= h(x), \quad se \quad x \in \Omega; \\ u &= 0, \quad se \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Prova: cf. Gilbard e Trudinger (1983)

Teorema 2.10. *Suponhamos $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou um domínio limitado com fronteira de classe C^1 e sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\begin{array}{llll} Se & \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, & temos \quad W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & onde\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}; \\ se & \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, & temos \quad W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & para\ todo\ q \in [p, \infty); \\ se & \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0, & temos \quad W^{m,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega), & \end{array}$$

com injeções contínuas.

Prova: cf. Brezis (2010).

Teorema 2.11. *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então para qualquer $j \geq 0$ a imersão*

$$W^{j+m;p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j;\alpha}(\bar{\Omega}),$$

onde $0 < \alpha < 1 - {}^{N}\!/_{p}$, é compacta se $m - 1 < {}^{N}\!/_{p} < m$.

Prova: cf. Figueiredo, Gossez e Ubilla (2003, pag 103) .

Teorema 2.12. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave, as imersões*

$$H_0^1(\Omega) \to L^s(\Omega)$$

são contínuas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & se\ N \geq 3; \\ \infty, & se\ N = 1, 2. \end{cases}$$

e existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{L^s} \leq C||u||_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Prova: cf. Brezis (2010)

Teorema 2.13. *(Imersões de Rellich) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Suponhamos que $r > N$. Então vale a seguinte imersão compacta*

$$W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\mu}(\Omega),$$

para $0 \leq \mu \leq 1 - \frac{N}{\mu}$.

Prova: cf. Adams e Fournier (1975).

Teorema 2.14. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave, as imersões*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são compactas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & se\ N \geq 3; \\ \infty & se\ N = 1, 2. \end{cases}$$

Prova: cf. Brezis (2010).

Uma consequência importante das imersões compactas é que se $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ e $||u_n||_{H_0^1(\Omega)} \leq M$, $\forall n \in N$ existe $\{u_{nj}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{nj} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_{nj} \to u \text{ em } L^s(\Omega),$$

conforme em Brezis (2010).

Teorema 2.15. *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então*

$$|u| \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\nabla|u| = 1_{|u>0|}\nabla u - 1_{|u<0|}\nabla u$$

Prova: cf. Kavian (1993).

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. F. Sobolev Spaces. *Academy Press*, 1975.

ALVES, C. O. *Introdução às Equações Elípticas.* [S.l.], 2007.

AMANN, H.; LOPEZ-GOMEZ, J. A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems. *J. Differential Equations*, v. 146, p. 336–374, 1998.

BERESTYCKI, H.; CAPUZZO-DOLCETTA, I.; NIRENBERG, L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. *NoDEA: Nonlinear Differential Equations and Applications*, v. 2, n. 4, p. 553–572, 1995.

BINDING, P. A.; DRÁBEK, P.; HUANG, Y. X. On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, p. 1–11, 1997.

BINDING, P. A.; DRÁBEK, P.; HUANG, Y. X. Existence of multiple solutions of critical quasilinear elliptic Neumann problems. *Nonlinear Anal*, p. 613–629, 2000.

BREZIS, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. *Springer-NewYork. Math*, 2010.

BROWN, K. A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem. *J. Differential Equations*, p. 1–9, 2007.

BROWN, K.; ZHANG, Y. The Nehari monifold for a semilinear elliptic problem with a sing changing weight function. *J Diferencial Equations*, p. 481–499, 2003.

BROWN, K. J. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation involving a sublinear term. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 22, n. 4, p. 483–494, 2004.

CHEN, K. J. On multiple solutions of concave e convexe nonlinearities in elliptic equation on RN. *Boundary Value Problems*, p. 1–19, 2009.

DRABEK, P.; POHOZAEV, S. I. Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A*, p. 703–726, 1997.

FIGUEIREDO, D. G.; GOSSEZ, J. P.; UBILLA, P. Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, p. 452–467, 2003.

GILBARD, D.; TRUDINGER, N. S. Elliptic partial differential equations of second order. *Springer-Verlag*, 1983.

IL'YASOV, Y. On non-local existence results for elliptic operators with convex-concave nonlinearities. *Nonlinear Analysis*, n. 61, p. 211–236, 2005.

JOST, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analisis.* [S.l.: s.n.], 2011.

KAVIAN, O. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. *Springer-Verlag*, v. 13, 1993.

TOLAND, J. F. Asymptotic linearity and nonlinear eigenvalue problems. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Univ Press, v. 24, n. 1, p. 241–250, 1973.

WILLEM, M. Minimax theorems. *Springer*, 1996.

WU, T. F. Multiplicity results for a semilinear elliptic equation involving sign-changing weight function, to appear in Rocky Mountain. *J . Math*, p. 995–1011, 2009.