

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Departamento de Matemática

*Gisele Teixeira Paula*

*Domínios Fundamentais para Grupos  
Fuchsianos*

Juiz de Fora

2013

*Gisele Teixeira Paula*

*Domínios Fundamentais para Grupos  
Fuchsianos*

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2013

Teixeira Paula, Gisele.

Domínios Fundamentais para Grupos Fuchsianos / Teixeira Paula, Gisele. - 2013.  
58f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de  
Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Geometria Hiperbólica.

I. Título.

CDU 51

*Gisele Teixeira Paula*

*Domínios Fundamentais para Grupos  
Fuchsianos*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos  
(Orientador)  
Departamento de Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso  
Departamento de Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Laércio José dos Santos  
Departamento de Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Juiz de Fora, 12 de abril de 2013.

*Para meu pai e minha mãe, José e Célia.*

# *Agradecimentos*

- A Deus, pois é Ele quem me dá forças;
- Aos meus pais, Célia e José, e minhas irmãs, Gabriela e Rafaela, por serem pessoas sempre presentes na minha vida, me apoiando em qualquer decisão que eu tome;
- Ao Roberto, pelo companheirismo e pela força;
- A toda a minha família pelo apoio e torcida que deles recebo sempre;
- Aos amigos, pelo suporte e apoio que sempre encontrei nas horas em que achava que não daria conta;
- Ao Professor Sérgio pela generosidade e pela paciência com que me orientou nesse trabalho;
- Aos professores do Departamento de matemática, especialmente aos professores Luis Fernando Crocco Afonso e Laércio José dos Santos, pela participação na banca examinadora;
- A todos um muito obrigada!

# Sumário

<b>Introdução</b>	p. 8
<b>1 Transformações de Möbius em <math>\mathbb{R}^n</math></b>	p. 9
1.1 Grupo de Möbius . . . . .	p. 9
1.2 Propriedades das Transformações de Möbius . . . . .	p. 10
1.3 Extensão de Poincaré . . . . .	p. 12
1.4 Aplicações em $\mathbb{B}^{n+1}$ . . . . .	p. 13
<b>2 Transformações de Möbius em <math>\mathbb{C}</math></b>	p. 15
2.1 Representação Matricial . . . . .	p. 15
2.2 Classificação das Transformações de Möbius . . . . .	p. 17
2.3 Classes de conjugação . . . . .	p. 17
2.4 Alguns resultados sobre a razão cruzada . . . . .	p. 20
<b>3 Subgrupos Discretos de <math>\mathcal{M}</math></b>	p. 22
3.1 Os grupos Elementares . . . . .	p. 22
3.1.1 Classificação dos grupos elementares . . . . .	p. 23
3.1.2 Grupos com um disco invariante . . . . .	p. 23
3.2 Grupos Descontínuos . . . . .	p. 24
<b>4 Domínios Fundamentais</b>	p. 28
4.1 Domínios Fundamentais Localmente Finitos . . . . .	p. 30
4.2 Polígonos fundamentais convexos . . . . .	p. 40

4.3 O polígono de Dirichlet . . . . .	p.47
<b>Referências</b>	p. 56



# *Introdução*

Neste trabalho, fazemos um estudo da ação de um Grupo Fuchsiano de Transformações de Möbius sobre o espaço hiperbólico.

Para tal, definimos primeiramente o que são tais transformações, vemos como é sua ação em subconjuntos de  $\mathbb{H}^2$  e fazemos uma classificação das mesmas de acordo com esta ação, principalmente com relação ao número de pontos fixos em  $\mathbb{H}^2$  ou na sua fronteira.

Todas estas definições e resultados se encontram nas seções 2 e 3 do trabalho. Uma discussão mais detalhada e as demonstrações dos teoremas e proposições dessas seções podem ser encontradas nos capítulos 3 e 4 de [1].

Em seguida, na seção 4, discutimos a ação de subgrupos discretos do grupo de transformações de Möbius em  $\mathbb{H}^2$ . Definimos também grupos elementares e citamos alguns resultados sobre tais grupos, cujas demonstrações são encontradas no capítulo 5 de [1].

Por fim, chegamos à definição de grupos Fuchsianos e de domínios fundamentais para esses grupos. Fazemos então alguns resultados e um exemplo importante de domínio fundamental para um dado grupo Fuchsiano, o seu Polígono de Dirichlet.

Para uma introdução à geometria hiperbólica e ao estudo da ação de um grupo sobre um espaço topológico, o leitor pode consultar [2].

# 1 Transformações de Möbius em $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Grupo de Möbius

A esfera  $S(a, r)$  em  $\mathbb{R}^n$  é dada por  $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}$ , onde  $r > 0$  e  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.** A inversão na esfera  $S(a, r)$  é dada por

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|}\right)^2 (x - a).$$

É claro que  $\phi$  não está definida para  $x = a$  e isto é recuperado adicionando-se a  $\mathbb{R}^n$  um ponto extra, não pertencente a  $\mathbb{R}^n$ , que chamamos  $\infty$ . Formamos, então, a união  $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Definindo  $\phi(a) = \infty$  e  $\phi(\infty) = a$ , temos que  $\phi$  é uma bijeção de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  sobre si mesmo. Além disso,  $\phi$  satisfaz  $\phi^{-1} = \phi$ .

Chamamos de plano (hiperplano) em  $\mathbb{R}^n$  um conjunto da forma

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, a \rangle = t\}.$$

**Definição 2.** Definimos a inversão no plano  $P(a, t)$ ,  $\psi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$  por

$$\psi(x) = \begin{cases} x + 2(t - \langle x, a \rangle) \frac{a}{|a|^2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \\ \infty, & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

Assim como  $\phi$ ,  $\psi$  é uma bijeção de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  satisfazendo  $\psi^{-1} = \psi$ .

Construímos em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  uma métrica em que estas inversões são contínuas. Esta métrica, chamada métrica da corda é definida por

$$d(x, y) = |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})|,$$

onde, dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , escrevemos  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\pi$  é a projeção estereográfica de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  sobre  $\mathbb{S}^n$ .

Podemos mostrar que, dados  $x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n$ , vale que

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}}, & \text{se } x, y \neq \infty \\ \frac{2}{1+|x|^2}, & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

**Definição 3.** Uma Transformação de Möbius em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  é uma composição de um número finito de inversões (em esferas ou hiperplanos).

Como essas transformações são suas próprias inversas, o conjunto  $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$  (Grupo Geral de Möbius) das transformações de Möbius é um grupo com a composição de funções.

**Teorema 1.1.** Toda isometria euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  é uma transformação de Möbius, sendo que é uma composição de no máximo  $n + 1$  inversões.

Como um corolário da demonstração do teorema anterior, temos:

**Corolário 1.2.** Uma função  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma isometria euclidiana se, e somente se, é da forma  $\phi(x) = Ax + x_0$ , onde  $A$  é uma matriz ortogonal e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

**Definição 4.** Uma aplicação  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita conforme se existe  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lambda(p) \neq 0, \forall p \in \mathbb{R}^n$  e  $\langle d\phi_x v_1, d\phi_x v_2 \rangle_{\phi(p)} = \langle v_1, v_2 \rangle_p \cdot \lambda^2(x)$ .

**Teorema 1.3.** Toda reflexão é conforme e inverte orientação.

**Definição 5.** O Grupo de Möbius,  $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$  agindo em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  é o subgrupo de  $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$  consistindo de todas as transformações de Möbius que preservam orientação.

## 1.2 Propriedades das Transformações de Möbius

Denominamos *esferas* em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  as esferas euclidianas  $S(a, r)$  e os hiperplanos  $P(a, t)$ . A equação geral de uma esfera em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  é dada por:

$$\Sigma = a_0|x|^2 - 2 \langle x, a \rangle + a_{n+1} = 0$$

e dizemos que os coeficientes vetoriais de  $\Sigma$  são  $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$ .

Note que se  $a_0 = 0$ , então  $-2 \langle x, a \rangle + a_{n+1} = 0 \Rightarrow \langle x, a \rangle = \frac{a_{n+1}}{2}$ . Logo  $\Sigma$  é um hiperplano.

**Teorema 1.4.** Sejam  $\phi \in M(\hat{\mathbb{R}}^n)$  e  $\Sigma$  uma esfera em  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . Então  $\phi(\Sigma)$  é uma esfera (generalizada).

**Definição 6.** Definimos o produto inversivo de duas esferas,

$$\Sigma = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \text{ e } \Sigma' = (b_0, b_1, \dots, b_{n+1}),$$

por

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2 \langle a, b \rangle - a_0 b_{n+1} - b_0 a_{n+1}|}{2\sqrt{|a|^2 - a_0 a_{n+1}} \sqrt{|b|^2 - b_0 b_{n+1}}}$$

No caso em que  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  se intersectam, então o produto inversivo  $(\Sigma, \Sigma')$  representa o módulo do cosseno de um dos ângulos de interseção.

**Teorema 1.5.** Para toda Transformação de Möbius  $\phi$  e quaisquer esferas  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ , temos:

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma'),$$

ou seja, transformações de Möbius preservam o produto inversivo.

**Teorema 1.6.** Seja  $\Sigma$  uma esfera e  $\sigma$  a inversão em  $\Sigma$ . Se  $\phi$  é uma transformação de Möbius que fixa os pontos de  $\Sigma$ , isto é,  $\phi(x) = x, \forall x \in \Sigma$  então ou  $\phi = \sigma$ , ou  $\phi = Id$ .

**Corolário 1.7.** Duas inversões quaisquer em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  são conjugadas. Isto é, se  $\sigma_1, \sigma_2$  são inversões em  $\hat{\mathbb{R}}^n$ , então existe  $\phi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$  tal que  $\sigma_2 = \phi\sigma_1\phi^{-1}$

Alternativamente, podemos reformular o Teorema anterior da seguinte forma:

Seja  $\Sigma$  uma esfera em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  e  $\sigma$  a reflexão nesta esfera. Dizemos que  $x$  e  $y$  são pontos inversos com relação a  $\Sigma$  se, e somente se,  $\sigma(x) = y$ . Se  $x$  e  $y$  são pontos inversos com relação a  $\Sigma$  e  $\phi$  é uma transformação de Möbius, então  $\phi(x)$  e  $\phi(y)$  são pontos inversos em relação à esfera  $\phi(\Sigma)$ . A prova é devida ao fato de todas as inversões serem conjugadas.

**Definição 7.** Definimos a Razão Cruzada dos pontos distintos  $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{R}}^n$  por

$$[x, y, u, v] = \begin{cases} \frac{|x-u||y-v|}{|x-y||u-v|}, & \text{se } x, y, u, v \in \mathbb{R}^n \\ \frac{|x-u|}{|u-v|}, & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

**Teorema 1.8.** Uma aplicação  $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$  é uma transformação de Möbius se, e somente se, preserva a razão cruzada.

Um teorema simples, porém muito útil será demonstrado a seguir:

**Teorema 1.9.** Dados três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^n$ , existe única transformação de Möbius  $f$  tal que

$$f(z_1) = 0, f(z_2) = \infty \text{ e } f(z_3) = 1.$$

*Demonstração.* Para mostrar a existência, basta considerarmos  $f(z) = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$ .

Suponha que existam  $f, g$  transformações de Möbius tais que  $f(z_1) = g(z_1) = 0$ ,  $f(z_2) = g(z_2) = \infty$  e  $f(z_3) = g(z_3) = 1$ . Então  $fg^{-1}$  fixa 3 pontos,  $0, 1, \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ .

Logo,  $fg^{-1} = Id$ , ou seja,  $f = g$ . □

Assim, se precisamos estudar o comportamento de alguma transformação de Möbius em três pontos quaisquer, podemos “levar” o problema para os pontos mais fáceis de se estudar.

### 1.3 Extensão de Poincaré

Poincaré notou que toda transformação de Möbius  $\phi$  agindo em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  possui uma extensão natural  $\tilde{\phi}$  agindo em  $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$  e, assim, podemos enxergar  $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$  como um subgrupo de  $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ . Basta para isto considerarmos a imersão  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0)$ . Esta extensão age da seguinte forma:

- Se  $\phi$  é a inversão em  $S(a, r)$ , então  $\tilde{\phi}$  é a inversão em  $S(\tilde{a}, r)$ ;
- Se  $\psi$  é a inversão em  $P(a, t)$ , então  $\tilde{\psi}$  é a inversão em  $P(\tilde{a}, t)$ ;
- Para toda transformação de Möbius  $\phi$ , tem-se:  $\tilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0)$ .

Isto é, se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \hat{\mathbb{R}}^n$  e  $y = \phi(x)$ , então

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \tilde{\phi}(x_1, \dots, x_n, 0) = (y_1, \dots, y_n, 0) = \tilde{y} := \widetilde{\phi(x)}$$

Note que  $\tilde{\phi}$  deixa invariante o plano  $x_{n+1} = 0$ , bem como os semi-espacos  $\{x_{n+1} > 0\}$  e  $\{x_{n+1} < 0\}$ .

Como toda Transformação de Möbius  $\phi$  agindo em  $\hat{\mathbb{R}}^n$  é a composição de um número finito de inversões, digamos  $\phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_m$ , existe pelo menos uma transformação  $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 \circ \dots \circ \tilde{\phi}_m$ , que estende a ação de  $\phi$  a  $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$  da forma descrita acima e que preserva

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}); x_{n+1} > 0\}.$$

Na verdade, podemos ver que  $\tilde{\phi}$  é única com essa propriedade. De fato, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são duas dessas extensões, então  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$  preserva  $\mathbb{H}^2$  e fixa cada ponto de sua fronteira. Como consequência do Teorema 1.6,  $\psi_1 = \psi_2$ .

Denominamos  $\tilde{\phi}$  por Extensão de Poincaré de  $\phi$  e temos que  $\sim$  é um isomorfismo de  $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$  sobre sua imagem em  $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ .

Nosso primeiro modelo para o espaço hiperbólico é  $\mathbb{H}^{n+1}$ , munido da métrica  $\rho$ , dada por:

$$\cosh(\rho(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}.$$

**Proposição 1.10.** A extensão de Poincaré preserva a expressão  $\frac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$ . Logo, preserva a distância hiperbólica entre dois pontos de  $\hat{\mathbb{R}}^n$ .

Concluimos que as transformações de Möbius são isometrias hiperbólicas.

## 1.4 Aplicações em $\mathbb{B}^{n+1}$

Seja  $\mathbb{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| \leq 1\}$  a bola fechada de raio 1 em  $\mathbb{R}^n$ . Considere  $\phi_0$  a inversão na esfera  $S(e^{n+1}, \sqrt{2})$ . Temos que

$$\phi_0(x) = e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2} \text{ e } \phi_0|_{\{x_{n+1}=0\}} = \pi,$$

onde  $\pi$  é a projeção estereográfica.

Além disto, podemos ver, por um simples cálculo, que  $|\phi_0(x)|^2 = 1 + \frac{4x_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}$ . Daí, se  $x_{n+1} > 0$ , então  $|\phi_0(x)|^2 > 1$  e  $\phi_0(x)$  está fora de  $\mathbb{B}^{n+1}$ . Caso  $x_{n+1} < 0$ , então  $|\phi_0(x)|^2 < 1$  e  $\phi_0(x)$  está no interior de  $\mathbb{B}^{n+1}$ .

Sendo  $\sigma$  a inversão em  $\{x_{n+1} = 0\}$ , temos que, se  $\phi = \phi_0 \circ \sigma$ , então  $\phi(\mathbb{B}^{n+1}) = \mathbb{B}^{n+1}$  e  $\phi$  induz uma métrica em  $\mathbb{B}^{n+1}$ :

$$ds = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}.$$

Pode-se ver mais informações sobre essa métrica no capítulo 7 de [1].

Além disso, as isometrias  $\psi$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  são identificadas com as isometrias de  $\mathbb{B}^{n+1}$ , com essa métrica, através de  $\psi \mapsto \phi\psi\phi^{-1}$ .

**Teorema 1.11.** Seja  $\phi$  uma transformação de Möbius tal que  $\phi(0) = 0$  e  $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$ . Então  $\phi(x) = Ax$ , para alguma matriz ortogonal  $A$ .

**Teorema 1.12.** Seja  $\sigma$  a reflexão na esfera  $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ . São equivalentes:

1.  $S(a, r)$  é ortogonal à esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ ;
2.  $\sigma(a^*) = 0$  (ou  $\sigma(0) = a^*$ , onde  $a^* = \frac{a}{|a|}$ );
3.  $\sigma(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$ .

**Teorema 1.13.** (Forma Geral de uma Transformação de Möbius). Seja  $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$  uma Transformação de Möbius. Temos:

1. Se  $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$ , então  $\phi(x) = Ax$  ou  $\phi(x) = A(\sigma(x))$ , onde  $A$  é uma matriz ortogonal e  $\sigma$  é a inversão em alguma esfera ortogonal a  $\mathbb{S}^{n-1}$ ;
2. Se  $\phi(\infty) = \infty$ , então  $\phi(x) = rA(x) + x_0$ , onde  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $A$  é uma matriz ortogonal;
3. Se  $\phi(\infty) \neq \infty$ , então  $\phi(x) = rA(\sigma(x)) + x_0$ , onde  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma$  é a inversão em alguma esfera ortogonal a  $\mathbb{S}^{n-1}$  e  $A$  é uma matriz ortogonal.

## 2 Transformações de Möbius em $\mathbb{C}$

### 2.1 Representação Matricial

Denominamos por  $\hat{\mathbb{C}}$  o conjunto  $\hat{\mathbb{R}}^2$ , que é identificado naturalmente com  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Definição 8.** Uma transformação racional linear é uma função  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

$T$  está definida para todo  $z \neq \frac{-d}{c}$  em  $\mathbb{C}$  no caso em que  $c \neq 0$  e para todo  $z \in \mathbb{C}$ , caso  $c = 0$  (aqui,  $T(z) = a'z + b'$ , com  $a', b' \in \mathbb{C}$ ).

Se  $c = 0$ ,  $T$  é claramente linear e bijetora. Se  $c \neq 0$ ,  $T$  é injetora caso  $ad - bc \neq 0$ . É fácil ver que neste caso  $T$  também admite inversa e  $T^{-1}$  é também uma transformação racional linear.

Estendemos  $T$  a  $\hat{\mathbb{C}}$  da seguinte forma:

$$T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{se } z \neq \frac{-d}{c}; \\ \infty, & \text{se } z = \frac{-d}{c}; \\ \frac{a}{c}, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Assim definida,  $T$  é um homeomorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$  sobre  $\hat{\mathbb{C}}$  e o conjunto desses homeomorfismos forma um grupo com a composição de funções.

Representamos cada transformação  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  por uma matriz da forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

**Teorema 2.1.**  $\mathcal{M} = \{T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; ad - bc \neq 0\} = M(\hat{\mathbb{R}}^2)$ .

**Definição 9.** Uma matriz em  $GL(2, \mathbb{C})$  (conjunto das matrizes  $2 \times 2$  complexas com determinante não nulo) é dita unitária se  $AA^* = Id$ , onde  $A^* = \overline{A}^t$ .



Chamamos de  $SU(2, \mathbb{C})$  o conjunto das matrizes unitárias com determinante 1.

Podemos olhar para  $GL(2, \mathbb{C})$  com a norma:

$$\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2.$$

Esta norma induz naturalmente uma métrica em  $GL(2, \mathbb{C})$ , onde  $d(A, B)$  é definida por  $\|A - B\|$ .

**Teorema 2.2.** Seja  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  (uma matriz de determinante 1). Então são equivalentes:

1.  $A \in SU(2, \mathbb{C})$ ;
2.  $\|A\|^2 = 2$ ;
3.  $A$  é da forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$ , isto é,  $A$  é um quatérnio.

Considere  $\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$  dada por

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}\right) = T(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

É fácil ver que  $\Phi$  é um homomorfismo de grupos, sobrejetor (pois as matrizes em  $\mathcal{M}$  são invertíveis), e temos também que

$$\text{Ker}(\Phi) = \{a \cdot Id; a \in \mathbb{C}\}.$$

De fato, se  $\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}\right) = Id$ , então temos

$$\begin{cases} T(0) = \frac{b}{a} = 0 & \implies b = 0 \\ T(\infty) = \frac{a}{c} = \infty & \implies c = 0 \\ T(1) = 1 & \implies a + b = c + d \implies a = d. \end{cases}$$

Podemos usar o Teorema do Homomorfismo para concluir que

$$\frac{GL(2, \mathbb{C})}{\{a \cdot Id; a \in \mathbb{C}\}} \simeq \mathcal{M}$$

Restringindo  $\Phi$  a  $SL(2, \mathbb{C})$ , temos que  $Ker(\Phi) = \{Id, -Id\}$  e, daí,

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{-Id, Id\}} \simeq \mathcal{M}$$

As duas funções  $\frac{tr^2(A)}{detA}$  e  $\frac{\|A\|^2}{|det(A)|}$  são invariantes sob a função  $A \mapsto \lambda A$ , para todo  $\lambda \neq 0$  e toda  $A \in GL(2, \mathbb{C})$ . Definimos então, para  $g \in \mathcal{M}$  as funções

$$tr^2(g) = \frac{tr^2(A)}{detA} \text{ e } \|g\|^2 = \frac{\|A\|^2}{|det(A)|},$$

onde  $A$  é qualquer representante de  $g$  em  $\frac{GL(2, \mathbb{C})}{\{a \cdot Id; a \in \mathbb{C}\}}$ .

## 2.2 Classificação das Transformações de Möbius

Façamos uma análise sobre os pontos fixos de transformações de Möbius.

- Se  $c = 0$ ,  $g(\infty) = \infty$ . Logo,  $\infty$  é ponto fixo de  $g$  em  $\hat{\mathbb{C}}$ .
- Se  $c \neq 0$ , então  $g(\frac{-d}{c}) = \infty$  e  $g(\infty) = \frac{a}{c}$ . Logo os únicos pontos fixos possíveis estão em  $\mathbb{C}$ . Temos que  $g(z) = z \Leftrightarrow az + b = (cz + d)z \Leftrightarrow cz^2 - (a - d)z - b = 0$  (\*). Logo  $g$  tem no máximo 2 pontos fixos em  $\mathbb{C}$ .
- No caso de  $c = 0$ , temos (\*)  $\Leftrightarrow -(a - d)z = b$ . Assim, caso  $a \neq d$ ,  $z = \frac{-b}{a-d}$  é o único ponto fixo de  $g$  em  $\mathbb{C}$ .
- Se  $c = 0$  e  $a = d$ , então  $g(z) = z + \frac{b}{a}$ , isto é,  $g$  é uma translação. Logo, o único ponto fixo de  $g$  em  $\hat{\mathbb{C}}$  é  $\infty$ .

Portanto, toda função  $g \in \mathcal{M}$  possui um ou dois pontos fixos em  $\hat{\mathbb{C}}$ .

## 2.3 Classes de conjugação

Defina em  $\mathcal{M}$  a seguinte relação de equivalência:

$$f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \sim g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{M}, \text{ com } f = hgh^{-1}.$$

**Definição 10.** Chamamos de  $Fix(g)$  o conjunto  $\{z \in \hat{\mathbb{C}}; g(z) = z\}$ .

Se  $g \neq Id$ , então  $Fix(g)$  tem 1 ou 2 elementos.

Sejam  $z \in \text{Fix}(g)$  e  $f = hgh^{-1}$ , com  $h \in \mathcal{M}$ . Temos:

$$f(h(z)) = hgh^{-1}(h(z)) = h(z).$$

Logo,  $z \in \text{Fix}(g) \Rightarrow h(z) \in \text{Fix}(f)$ .

Reciprocamente,

$$f(z) = z \Rightarrow hgh^{-1}(z) = z \Rightarrow g(h^{-1}(z)) = h^{-1}(z).$$

Concluimos que se  $f \sim g$ , então  $\text{Fix}(f) = h(\text{Fix}(g))$ , onde  $h \in \mathcal{M}$  é tal que  $f = hgh^{-1}$ .

**Definição 11.** Definimos as transformações-padrão  $m_k : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  por:

$$\begin{cases} m_1(z) = z + 1 \\ m_k(z) = kz, \quad \text{se } k \neq 1, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Temos que  $\forall k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , vale que  $\text{tr}^2(m_k) = k + 2 + \frac{1}{k}$ .

**Teorema 2.3.** Sejam  $f, g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$ . Então  $f \sim g$  se, e somente se,  $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(g)$ .

Olhemos agora para as extensões de Poincaré das transformações-padrão  $m_k$  em  $\hat{\mathbb{R}}^3$ . Escrevemos cada elemento em  $\hat{\mathbb{R}}^3$  na forma  $z + t \cdot j$ , onde  $j$  é o terceiro vetor canônico na base ordenada de  $\mathbb{R}^3$ . Temos então:

$$\begin{cases} m_1(z + tj) = z + 1 + tj \\ m_k(z + tj) = kz + |k|tj, \quad \text{se } k \neq 1, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Temos então que se  $k = 1$ ,  $m_k$  fixa somente  $\infty$  em  $\hat{\mathbb{R}}^3$ . Se  $|k| \neq 1$ ,  $m_k$  fixa apenas os pontos  $\{0, \infty\}$ . Já no caso em que  $k \neq 1$ , mas  $|k| = 1$ , então  $m_k$  fixa todos os pontos do eixo  $\{tj; t \in \mathbb{R}\}$ , além de  $\infty$ .

**Definição 12.** Seja  $g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$ . Então:

1.  $g$  é dita PARABÓLICA quando fixa exatamente um ponto em  $\hat{\mathbb{R}}^3$   
( $g \sim m_1$ );
2.  $g$  é dita LOXODRÔMICA quando fixa exatamente dois pontos em  $\hat{\mathbb{R}}^3$   
( $g \sim m_k; |k| \neq 1$ );
3.  $g$  é dita ELÍPTICA quando fixa infinitos pontos em  $\hat{\mathbb{R}}^3$   
( $g \sim m_1$ , com  $|k| = 1, k \neq 1$ ).

**Definição 13.** Seja  $g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$  loxodrômica. Então  $g$  é dita HIPERBÓLICA quando existe um disco  $D$  (generalizado) tal que  $g(D) = D$ . Caso contrário,  $g$  é dita NÃO-HIPERBÓLICA ou ESTRITAMENTE LOXODRÔMICA.

Obs.:  $g$  é hiperbólica  $\Leftrightarrow g \sim m_k$ , onde  $k \in \mathbb{R}, k \neq 1$  e  $k > 0$ .

**Teorema 2.4.** Seja  $g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$ . Então:

1.  $g$  é parabólica  $\Leftrightarrow tr^2(g) = 4$ ;
2.  $g$  é elíptica  $\Leftrightarrow tr^2(g) \in [0, 4)$ ;
3.  $g$  é hiperbólica  $\Leftrightarrow tr^2(g) \in (4, +\infty)$ ;
4.  $g$  é estritamente loxodrômica  $\Leftrightarrow tr^2(g) \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ .

Definimos o comutador de  $g$  e  $h$  em  $\mathcal{M}$  por  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Se  $A$  e  $B$  são matrizes em  $SL(2, \mathbb{C})$  representando  $g$  e  $h$ , respectivamente, então  $tr[g, h] = tr[ABA^{-1}B^{-1}]$ .

**Teorema 2.5. (i)** Duas transformações de Möbius  $g$  e  $h$  tem ponto fixo em comum em  $\hat{\mathbb{C}}$  se, e somente se,  $tr[g, h] = 2$ ;

**(ii)** Se  $g$  e  $h$  tem um ponto fixo em comum em  $\hat{\mathbb{C}}$ , então ocorre uma das duas opções:

1.  $[g, h] = Id$  e daí  $gh = hg \Rightarrow Fix(h) = Fix(g)$ ;
2.  $[g, h]$  é parabólico e  $Fix(g) \neq Fix(h)$ .

**Teorema 2.6.** Sejam  $g, h \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$ . São equivalentes:

**(i)**  $gh = hg$ ;

**(ii)**  $h(Fix(g)) = Fix(g)$  e  $g(Fix(h)) = Fix(h)$ ;

**(iii)**  $Fix(g) = Fix(h)$  ou  $g$  e  $h$  tem um ponto fixo em comum em  $\mathbb{H}^3$ , com  $g^2 = h^2 = (gh)^2 = Id$  e  $Fix(g) \cap Fix(h) = \emptyset$ .

**Teorema 2.7.** Um subgrupo  $G \subset \mathcal{M}$  possui somente elementos elípticos (além da identidade)  $\Leftrightarrow$  todos os elementos de  $G$  possuem um ponto fixo comum em  $\mathbb{H}^3$ .

**Lema 2.8.** Suponha que  $g$ ,  $h$  e  $gh$  são elementos elípticos. Então os pontos fixos de  $g$  e  $h$  estão em um mesmo círculo em  $\hat{\mathbb{C}}$ . Além disto, se  $[g, h] = Id$  ou se  $[g, h]$  for elíptico, então  $g$  e  $h$  tem um ponto fixo comum em  $\mathbb{H}^3$ .

**Definição 14.** Definimos o Eixo de um elemento elíptico  $g \in \mathcal{M}$ , com  $Fix(g) = \{\alpha, \beta\}$ , por:

$$A_g = \{z + tj \in \mathbb{H}^3 \text{ tal que } g(z + tj) = z + tj\}.$$

Temos que o eixo de  $g$  é o semi-círculo ortogonal a  $\hat{\mathbb{C}}$  que passa por  $\alpha$  e  $\beta$  (equivalentemente, é a geodésica de  $\mathbb{H}^3$  passando por  $\alpha$  e  $\beta$ ).

**Lema 2.9.** Sejam  $g, h \in \mathcal{M}$  transformações de Möbius que preservam  $\mathbb{B}^3$  e fixam a origem. Então ocorre uma das opções:

1. Os elementos de  $\langle g, h \rangle$  tem o mesmo eixo (e os mesmos pontos fixos);
2. Existe  $f \in \langle g, h \rangle$  tal que  $A_g, A_h$  e  $A_f$  são coplanares.

## 2.4 Alguns resultados sobre a razão cruzada

Voltemos à Razão Cruzada, definida anteriormente. Temos que, para  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Sua extensão a  $\hat{\mathbb{C}}$  é dada por

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Temos também que a razão cruzada é invariante por transformações de Möbius. De fato, se  $g \in \mathcal{M}$  é tal que  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , com  $ad - bc \neq 0$ , então:

$$g(z) - g(w) = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{bcw - adw - bcz + adz}{(cz+d)(cw+d)} = \frac{(z-w)(ad-bc)}{(cz+d)(cw+d)}.$$

Dai:

$$\begin{aligned} [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] &= \frac{(g(z_1) - g(z_3))(g(z_2) - g(z_4))}{(g(z_1) - g(z_2))(g(z_3) - g(z_4))} = \\ &= \frac{\left[ \frac{(z_1 - z_3)(ad - bc)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \right] \cdot \left[ \frac{(z_2 - z_4)(ad - bc)}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)} \right]}{\left[ \frac{(z_1 - z_2)(ad - bc)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \right] \left[ \frac{(z_3 - z_4)(ad - bc)}{(cz_3 + d)(cz_4 + d)} \right]} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]. \end{aligned}$$

Portanto, se queremos encontrar o valor de  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ , basta tomarmos  $g \in \mathcal{M}$  tal que  $g(z_1) = 0, g(z_2) = 1, g(z_4) = \infty$ . Logo,  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [0, 1, g(z_3), \infty] = g(z_3)$ .

Por outro lado, se  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ , então podemos encontrar  $g \in \mathcal{M}$  tal que  $g(z_i) = w_i$ . De fato, sabemos que existem  $f, h \in \mathcal{M}$  tais que:

$$f : \begin{cases} z_1 \mapsto 0 \\ z_2 \mapsto 1 \\ z_4 \mapsto \infty \end{cases} \quad \text{e} \quad h : \begin{cases} w_1 \mapsto 0 \\ w_2 \mapsto 1 \\ w_4 \mapsto \infty \end{cases} .$$

Assim,

$$f(z_3) = [0, 1, f(z_3), \infty] = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4] = [0, 1, h(w_3), \infty] = h(w_3).$$

Portanto, basta tomarmos  $g = h^{-1} \circ f$  e o resultado segue.

**Proposição 2.10.** Temos que  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$  estão em um mesmo círculo  $\iff [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Considere  $g$  tal que

$$g : \begin{cases} z_1 \mapsto 0 \\ z_2 \mapsto 1 \\ z_4 \mapsto \infty \end{cases} .$$

Então  $g(z_3) = [0, 1, g(z_3), \infty] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ .

Como  $0, 1$  e  $\infty$  estão no mesmo círculo (a reta real é um círculo generalizado em  $\hat{\mathbb{C}}$ ), temos que  $z_1, z_2, z_3, z_4$  estão em um mesmo círculo se, e somente se,  $g(z_3)$  está no mesmo círculo, em  $\hat{\mathbb{C}}$ , que as imagens de  $z_1, z_2$  e  $z_4$ , ou seja, se, e somente se,  $g(z_3) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### 3 Subgrupos Discretos de $\mathcal{M}$

Estudaremos agora a ação de subgrupos discretos do grupo de Transformações de Möbius sobre subconjuntos de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Vale lembrar que se  $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ , então para toda sequência  $\{A_n\} \subset G$ , com  $A_n \rightarrow X$ , devemos ter  $A_n = X$  para todo  $n$  suficientemente grande. Isto se deve ao fato de  $Id$  ser um elemento isolado de  $SL(2, \mathbb{C})$ , que é um grupo topológico. Daí:

$$A_n A_{n+1}^{-1} \rightarrow X X^{-1} = Id \implies A_n A_{n+1}^{-1} = Id, \forall n \text{ grande} \implies A_n = A_{n+1} \forall n \text{ grande} .$$

**Definição 15.** Seja  $G$  um grupo de homeomorfismos do espaço  $X$ .

Dado  $x \in X$ , definimos o Estabilizador de  $x$  por  $G_x = \{g \in G; g(x) = x\}$  (observe que  $G_x \leq G$ ).

Definimos também a órbita do elemento  $x$  por  $G$  pondo  $G(x) = \{g(x); g \in G\}$ .

Dizemos que dois elementos  $x, y \in X$  são equivalentes por  $G$  se existe  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ . Denotamos  $x \sim y$ .

#### 3.1 Os grupos Elementares

**Definição 16.** Um subgrupo  $G \subset \mathcal{M}$  é dito um GRUPO ELEMENTAR se existe uma  $G$ -órbita finita em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, se existe  $x \in \mathbb{R}^3$  tal que  $G(x)$  é finito.

**Exemplos:**

1. O estabilizador  $G_x$  de qualquer elemento  $x \in X$  é grupo elementar, pois  $G_x(x) = \{x\}$ ;
2. Se  $G \leq \mathcal{M}$  é finito, então  $G$  é grupo elementar;
3. Todo subgrupo  $G \leq \mathcal{M}$  abeliano é elementar. De fato, se fixarmos  $g \in G$ , então para

todo  $h \in G$ , como  $gh = hg$ , segue que  $h(\text{Fix}(g)) = \text{Fix}(g)$ . Logo, para  $x \in \text{Fix}(g)$ , temos que  $G(x) = \text{Fix}(g)$ , que é finito pois tem no máximo 2 elementos;

4. Se  $G \leq \mathcal{M}$  possui somente elementos elípticos, além da identidade, então  $G$  é elementar, pois pelo teorema 2.7, existe  $x \in \mathbb{H}^3$  que é ponto fixo comum de todos os elementos de  $G$  e, daí,  $G(x) = \{x\}$ .

### 3.1.1 Classificação dos grupos elementares

Sejam  $G \leq \mathcal{M}$  elementar e  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  uma órbita finita.

Classificamos agora os grupos elementares de acordo com o número de pontos de alguma órbita finita contida em  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Definição 17.** Dizemos que  $G$  é um grupo elementar do TIPO 1 se  $n \geq 3$  ou  $\{x_1, \dots, x_n\} \not\subset \hat{\mathbb{C}}$ . Grupos do tipo 1 são aqueles que contém apenas elementos elípticos.

Caso  $n = 1$  e  $x_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ , dizemos que  $G$  é grupo elementar do TIPO 2. A menos de uma conjugação, podemos supor que  $x_1 = \infty$  e, daí, todo elemento de  $G$  fixa  $\infty$ . Logo,  $g(z) = az + b$ , para todo  $g \in G$ .

Se  $n = 2$  e  $x_1, x_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ ,  $G$  é dito elementar do TIPO 3. Neste caso, a menos de conjugação, podemos supor  $x_1 = 0$  e  $x_2 = \infty$ . Daí, todo  $g \in G$  deixa invariante o conjunto  $\{0, \infty\}$ . Assim,  $g \in G$  é do tipo  $g(z) = az$ , com  $g(0) = 0$  e  $g(\infty) = \infty$  ou  $g(z) = \frac{a}{z}$  sendo, neste caso,  $g(0) = \infty$  e  $g(\infty) = 0$ .

**Teorema 3.1.** Se  $g \in \mathcal{M}$  for loxodrômico e  $f \in \mathcal{M}$  possui exatamente um ponto fixo comum com  $g$ , então  $\langle f, g \rangle$  não é discreto.

**Teorema 3.2.** Todo subgrupo  $G \leq \mathcal{M}$  não-elementar possui infinitos elementos loxodrômicos, que, dois a dois, não tem pontos fixos em comum.

**Teorema 3.3.** Seja  $f \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$ , com  $f^2 \neq Id$ . Defina  $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  por  $\theta(g) = gfg^{-1}$ . Se, para alguns  $n \in \mathbb{N}$  e  $g \in \mathcal{M}$ , tem-se  $\theta^n(g) = f$ , então  $\langle f, g \rangle$  é elementar e, além disso,  $\theta^2(g) = f$ .

### 3.1.2 Grupos com um disco invariante

**Teorema 3.4.** Seja  $G$  um subgrupo não-elementar de  $\mathcal{M}$ . Então existe um disco  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ ,  $G$ -invariante se, e somente se,  $G$  não possui elementos estritamente loxodrômicos. Além



disso, se  $D$  é um disco  $G$ -invariante, então  $D$  e o seu complementar são os únicos discos  $G$ -invariantes em  $\hat{\mathbb{C}}$ .

## 3.2 Grupos Descontínuos

Seja  $G$  um grupo de homeomorfismos de um espaço topológico  $X$ . Dizemos que  $G$  age descontinuamente em  $X$  quando, para todo compacto  $K \subset X$ , tem-se que  $g(K) \cap K = \emptyset$ , exceto possivelmente para um número finito de elementos  $g \in G$ .

### Propriedades:

Suponha que  $G$  seja um grupo que age descontinuamente em  $X$ . Então:

- (i) Todo subgrupo de  $G$  age descontinuamente em  $X$ ;
- (ii) Se  $\varphi$  é homeomorfismo de  $X$ , então  $\varphi G \varphi^{-1}$  também age descontinuamente em  $X$ ;
- (iii) Se  $Y \subset X$  é  $G$ -invariante, então  $G$  age descontinuamente em  $Y$ ;
- (iv) Se  $x \in X$  e  $g_1, \dots, g_n, \dots$  são elementos distintos de  $G$ , então a sequência  $\{g_n(x)\}_n$  não converge em  $X$ ;
- (v) Se  $x \in X$ , então o estabilizador de  $x$ ,  $G_x$ , é finito;
- (vi) Em particular, se  $X \subset \mathbb{R}^3$ , então  $G$  é enumerável.

A demonstração do item (iv) se dá notando-se que se supomos  $g_n(x) \rightarrow y$ , então o conjunto  $K = \{x, y, g_1(x), \dots, g_n(x), \dots\}$  é compacto e tal que  $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$  para todo  $n$ . Logo,  $G$  não pode agir descontinuamente em  $X$ .

**Teorema 3.5.** Um subgrupo  $G \leq \mathcal{M}$  é discreto se, e somente se, age descontinuamente em  $\mathbb{H}^3$ .

**Lema 3.6.** Seja  $G \leq \mathcal{M}$  e  $D$  um aberto de  $\hat{\mathbb{C}}$  que contém um ponto fixo de algum elemento  $g \in G$  parabólico ou loxodrômico. Então  $G$  não age descontinuamente em  $D$ .

**Lema 3.7.** Seja  $D$  um disco aberto de  $\hat{\mathbb{C}}$  e suponha que  $g \in \mathcal{M}$  é tal que  $g(\overline{D}) \subset D$ . Então  $g$  é loxodrômico e possui um ponto fixo em  $g(\overline{D})$ .

**Definição 18.** Seja  $G$  um subgrupo não-elementar de  $\mathcal{M}$ . Definimos o conjunto

$$\Lambda_0 = \{w \in \hat{\mathbb{C}}; \exists g \in G \text{ loxodrômico, com } g(w) = w\}.$$

Dizemos que o conjunto limite de  $G$  é  $\Lambda(G) = \overline{\Lambda_0}$  e que o conjunto ordinário de  $G$  é  $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$ .

Note que:

- $G$  não elementar  $\Rightarrow \Lambda_0$  é infinito;
- $G \subset G_1 \Rightarrow \Lambda(G) \subset \Lambda(G_1)$  e  $\Omega(G) \subset \Omega(G_1)$ ;
- $\Lambda_0$  é  $G$ -invariante;
- Daí,  $\Lambda(G)$  é  $G$ -invariante.

**Teorema 3.8.** Para qualquer grupo  $G$  não-elementar, o conjunto limite  $\Lambda(G)$  é o menor fechado não-vazio  $G$ -invariante de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Além disso,  $\Lambda(G)$  é perfeito (fechado e não possui pontos isolados) e não-enumerável.

**Teorema 3.9.** Seja  $G \subset \mathcal{M}$  um subgrupo não-elementar e sejam  $U_1, U_2$  abertos disjuntos em  $\hat{\mathbb{C}}$  que intersectam  $\Lambda(G)$ . Então existe  $g \in G$  loxodrômico, com pontos fixos  $\alpha \in U_1$  e  $\beta \in U_2$ .

**Definição 19.** Dado  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  definimos o conjunto limite de  $z$  com relação a  $G$  por

$$\Lambda(z) = \{w \in \hat{\mathbb{C}}; \exists g_1, \dots, g_n, \dots \in G \text{ distintos tais que } g_n(z) \rightarrow w\}$$

**Teorema 3.10.** Se  $G \subset \mathcal{M}$  for subgrupo não-elementar e discreto, então  $\Lambda(G) = \Lambda(z)$  para qualquer  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 3.11.** Seja  $G \subset \mathcal{M}$  subgrupo não-elementar e discreto. Então:

- (i)  $G$  age descontinuamente em  $\Omega$ ;
- (ii) Se  $G$  age descontinuamente em um aberto  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ , então  $D \subset \Omega$ .

**Corolário 3.12.** Seja  $G \subset \mathcal{M}$  subgrupo não-elementar e discreto. Então  $\Omega \neq \emptyset$  se, e somente se,  $G(z)$  não é denso em  $\hat{\mathbb{C}}$  para algum  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 3.13.** Suponha que  $G \subset \mathcal{M}$  seja subgrupo não-elementar e discreto. Suponha também que  $\Omega \neq \emptyset$ . Então, para todo  $z \in \Omega$ , o estabilizador  $G_z$  é cíclico e finito.

*Demonstração.* Se  $G$  é não-elementar e discreto, então age descontinuamente em  $\Omega$ . Logo,  $\Omega$  não contém pontos fixos de elementos parabólicos ou loxodrômicos. Então  $G_z \setminus \{Id\}$  possui apenas elementos elípticos,  $\forall z \in \Omega$ . Daí,  $G_z$  é elementar do tipo 1 e, sendo discreto, é então cíclico e finito.

De fato, se  $G$  é elementar do tipo 1 e discreto, então  $G$  possui somente elementos elípticos e podemos supor que todo elemento de  $G$  fixe  $j \in \mathbb{H}^3$ . Logo,  $\|g\|^2 = 2, \forall g \in G$ . Assim,  $G$  é limitado e, sendo discreto, deve ser finito, pois caso contrário, teria ponto de acumulação, pois é limitado.  $\square$

**Teorema 3.14.** Seja  $G \subset \mathcal{M}$  subgrupo não-elementar e discreto. Então:

- (i)  $\forall x \in \mathbb{H}^3$ , existe bola aberta (hiperbólica)  $N$ , centrada em  $x$ , tal que para todo  $g \in G$ ,  $g(N) = N$ , se  $g(x) = x$  e  $G(N) \cap N = \emptyset$ , caso contrário.
- (ii) Para todo  $z \in \Omega$  (se  $\Omega \neq \emptyset$ ), existe vizinhança  $N$  de  $z$  em  $\Omega$ , tal que  $\forall g \in G$ ,  $g(N) = N$ , se  $g(z) = z$ , ou  $G(N) \cap N = \emptyset$ , se  $g(z) \neq z$ .

**Teorema 3.15.** Seja  $G \subset \mathcal{M}$  subgrupo não-elementar e discreto.

- (i) Se  $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$  é aberto, não-vazio e  $G$ -invariante, então  $G$  age descontinuamente em  $D$ ;
- (ii) Se  $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$  é aberto, não-vazio e  $g(D) \cap D = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{Id\}$ , então  $G$  age descontinuamente em  $\bigcup_{g \in G} g(D)$ .

**Definição 20.** Se  $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$  é um aberto tal que  $g(D) \cap D = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{Id\}$ , dizemos que  $D$  é  $G$ -packing.

**Teorema 3.16.** Sejam  $G_1, G_2, \dots$  subgrupos de  $\mathcal{M}$  e seja  $G$  o subgrupo gerado pela união desses subgrupos. Considere também, para cada índice  $j$ ,  $D_j$  um aberto  $G_j$ -packing e suponha que, dois a dois,  $D_i \cup D_j = \hat{\mathbb{C}}$ , se  $i \neq j$  e que  $D^* = \bigcap_j D_j$  é não-vazia. Então  $G$  é o produto livre dos subgrupos  $G_j$ ,  $D^*$  é  $G$ -packing e  $G$  age descontinuamente em  $\bigcup_{g \in G} g(D^*)$ .

**Teorema 3.17.** (Desigualdade de Jorgensen.) Suponha que  $f, g \in \mathcal{M}$  geram um subgrupo  $\langle f, g \rangle$  não-elementar e discreto. Então:

$$|\operatorname{tr}^2 f - 4| + |\operatorname{tr}^2(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geq 1.$$

**Definição 21.** Uma Horobola  $\Sigma$  em  $\mathbb{H}^3$  é uma bola euclideana em  $\mathbb{H}^3$  tangente a  $\hat{\mathbb{C}}$  em algum ponto de  $\partial\mathbb{H}^3$  dado, chamado de base da horobola.

A fronteira  $\partial\Sigma$  é chamada Horoesfera.

**Definição 22.** Um grupo Fuchsiano  $G$  é um subgrupo discreto de  $\mathcal{M}$  com um disco invariante  $D$  (temos que  $G$  age descontinuamente em  $D$ ).

## 4 Domínios Fundamentais

**Definição 23.** Seja  $G$  um grupo Fuchsiano agindo em  $\Delta$  (ou  $\mathbb{H}^2$ ). Um conjunto fundamental para  $G$  é um subconjunto  $F \subset \Delta$  que contém exatamente um ponto de cada órbita em  $\Delta$ .

Note que dois pontos distintos em  $F$  não são  $G$ -equivalentes e que  $\bigcup_{f \in G} f(F) = \Delta$ .

**Definição 24.** Um subconjunto  $D$  do plano hiperbólico é um domínio fundamental para o grupo Fuchsiano  $G$  se, e somente se:

- (1)  $D$  é um domínio;
- (2) existe um conjunto fundamental  $F$  para  $G$ , tal que  $D \subset F \subset \overline{D}$ ;
- (3)  $\mu(\partial D) = 0$ , onde  $\mu$  denota área hiperbólica.

**Obs. 1:** Se  $D$  é um domínio fundamental para  $G$ , então  $\forall g \in G, g \neq Id$ , tem-se  $g(D) \cap D = \emptyset$ ,  $\bigcup_{f \in G} f(D) = \Delta$  e dizemos que  $D$  e suas imagens "ladrilham"  $\Delta$ . Note que se para algum  $g \in G$  existe  $w \in g(D) \cap D$ , então  $w = g(z)$  com  $z, w \in D \subset F$ , o que contradiz o fato de que  $F$  é conjunto fundamental. Concluimos que se  $f \neq g \in G$ , tem-se  $g(D) \cap f(D) = \emptyset$ . Logo, a união acima é disjunta.

**Obs. 2:** Não é suficiente substituir (2) pela exigência de que cada ponto de  $\partial D$  seja a imagem de algum outro ponto de  $\partial D$  por  $G$ . Por exemplo, o grupo gerado por  $g : z \mapsto 2z$  age descontinuamente em  $\mathbb{H}^2$ , mas o conjunto  $\{x + yi; y > 0 \text{ e } 1 < x < 2\}$ , que tem tal propriedade, não é domínio fundamental de  $G$ .

*Demonstração.* Para mostrar que  $\langle g \rangle$  age descontinuamente em  $\mathbb{H}^2$ , seja  $K \subset \mathbb{H}^2$  compacto. Como  $0 \notin \mathbb{H}^2$  e  $K$  é limitado, temos que existem  $M, \epsilon > 0$  tais que  $\epsilon < |x| < M, \forall x \in K$ .

Assim, dado  $x \in K$ , temos:  $|g^n(x)| = 2^n|x| > 2^n\epsilon$ .

Deve existir  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $2^{n_1}\epsilon > M$ . Assim,  $g^{n_1}(x) \notin K$  e então  $g^n(K) \cap K \neq \emptyset, \forall n \geq n_1$ .

Analogamente, existe  $n_0 < 0$  em  $\mathbb{Z}$  tal que  $2^{n_0}M < \epsilon$ . Daí,  $|g^n(x)| = 2^n|x| < 2^nM < \epsilon, \forall n \leq n_0$ . Logo  $g^n(K) \cap K \neq \emptyset, \forall n \leq n_0$ .

Logo  $g(K) \cap K \neq \emptyset$  apenas possivelmente para um número de  $g \in G$ .

Temos que  $D$  satisfaz a propriedade descrita acima para todo  $w \in \partial D$ . De fato, se  $w = 2 + yi$ , tome  $z = 1 + \frac{y}{2}i \in \partial D$  e tem-se  $g(z) = w$ . Analogamente, se  $z = 1 + ti$ , tome  $w = 2 + 2ti \in \partial D$  e temos  $g^{-1}(w) = z$ .

Portanto, todo ponto em  $\partial D$  é imagem por  $\langle g \rangle$  de algum outro ponto em  $\partial D$ . Mas como  $g(D) \cap D \neq \emptyset$ , temos que  $D$  não é um domínio fundamental.

□

Temos que (2) e (3) implicam que  $\mu(F) = \mu(D)$ . O teorema a seguir mostra que a área hiperbólica de  $D$  depende somente de  $G$  e não da escolha de  $D$ .

**Teorema 4.1.** (1) Sejam  $F_1, F_2$  conjuntos fundamentais mensuráveis para  $G$ . Então  $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ .

(2) Seja  $F_0$  conjunto fundamental mensurável de  $G_0$ , subgrupo de índice  $k$  em  $G$ .

Então  $\mu(F_0) = k\mu(F_1)$ .

*Demonstração.* (1) Observe que  $\bigcup_{f \in G} f(F_2) = \Delta \supset F_1$  e que esta união é disjunta. Daí:

$$\mu(F_1) = \mu\left(F_1 \cap \left(\bigcup_{g \in G} g(F_2)\right)\right) = \sum_{g \in G} \mu(F_1 \cap g(F_2)) = \sum_{g \in G} \mu(F_2 \cap g^{-1}(F_1)) = \mu(F_2).$$

(2) Para provar a segunda parte, escreva  $G$  como união disjunta de classes de equivalência

$$G = \bigcup_{n=1}^k G_0 g_n \text{ e ponha } F^* = \bigcup_{n=1}^k g_n(F_1).$$

Se  $w \in \Delta$ , então  $g(w) \in F_1$  para algum  $g \in G$ , já que  $F_1$  é conjunto fundamental para  $G$  e  $g^{-1} = h^{-1} \circ g_n$ , para alguns  $n \in \mathbb{N}$  e  $h \in G_0$ . Então  $h(w) = g_n(g(w)) \in g_n(F_1)$  e, daí,  $F^*$  contém pelo menos um ponto de cada órbita em  $\Delta$ .

O que faremos é mostrar que, a menos de um conjunto enumerável de pontos,  $F^*$  é um conjunto fundamental para  $G_0$ .

Suponha que  $z, f(z) \in F^*$ , para alguma  $f \in G_0$  e algum  $z \in \Delta$  que não seja fixado por nenhum elemento não-trivial de  $G$ . Devem existir  $m, n \in \{1, \dots, k\}$  tais que  $g_n^{-1}(z), g_m^{-1}(f(z))$  pertencem a  $F_1$  e, portanto, são iguais. Daí,  $g_n \circ g_m^{-1}(f(z)) = z$ , o que nos dá  $g_m \circ g_n^{-1} = f \in G_0$ . Logo,  $g_n G_0 = g_m G_0$  e segue que  $m = n$  e  $f = Id$ .

Isto mostra que  $F^*$  contém exatamente um ponto de cada órbita que não possui pontos fixos e pelo menos um ponto de cada órbita com pontos fixos. Excluindo um conjunto adequado, enumerável, de pontos fixos de  $F^*$  (pois cada função em  $G$  tem no máximo 3 pontos fixos e  $G$  é enumerável), o conjunto resultante, que chamaremos também  $F^*$ , é um conjunto fundamental para  $G_0$  e, pela primeira parte,  $\mu(F^*) = \mu(F_0)$ .

Claramente,  $F_1$  intersecta cada uma de suas imagens em, no máximo, um conjunto enumerável de pontos (fixos). Então:

$$\mu(F^*) = \sum_{n=1}^k \mu(g_n F_1) = k\mu(F_1).$$

□

## 4.1 Domínios Fundamentais Localmente Finitos

No seguinte exemplo, retratamos a necessidade de condições extras para que se desenvolva uma teoria razoável sobre domínios fundamentais.

### Exemplo:

Seja  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $G$  o grupo cíclico gerado por  $g : z \mapsto 2z$ . Temos que o espaço quociente  $\mathbb{C}^*/G$  é um toro.

Seja  $\gamma$  a curva em  $\mathbb{C}$  dada por

$$\gamma : \begin{cases} y = e^{-z}, & \text{se } z \text{ está no primeiro quadrante;} \\ |z| = 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A região  $D$ , entre  $\gamma$  e  $g(\gamma)$  é um domínio fundamental para  $G$ , no sentido de que cada ponto de  $\mathbb{C}^*$  é equivalente a pelo menos um ponto de  $\overline{D}$  e a no máximo um ponto de  $D$ .

Apesar disto, identificando pontos equivalentes em  $\partial D$ , pode-se provar que  $\overline{D}/G$  não é compacto. Daí,  $\overline{D}/G$  e  $\mathbb{C}^*/G$  não podem ser homeomorfos.

□

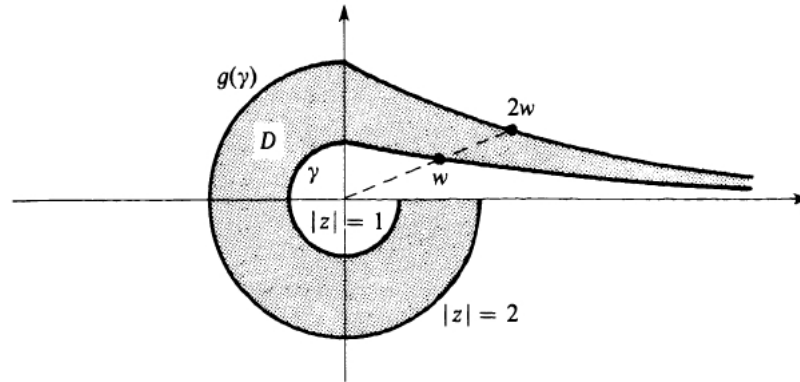


Figura 1:  $\overline{D}/G$  e  $\mathbb{C}^*/G$  não são homeomorfos.

A mesma situação pode surgir para um grupo Fuchsiano, mesmo quando  $D$  é um polígono convexo com número finito de lados. Queremos, então, impor uma condição que evite essa possibilidade. Antes disso, façamos um estudo sobre as projeções nesses espaços.

Sejam  $G$  um grupo Fuchsiano agindo em  $\Delta$  e  $D$  um domínio fundamental para  $G$  em  $\Delta$ . O grupo  $G$  induz a natural, contínua e aberta projeção  $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G$ .

Podemos também usar  $G$  para induzir outra relação de equivalência em  $\overline{D}$ , identificando pontos equivalentes (em  $\partial D$ ) e então, com  $\overline{D}/G$  herdando a topologia quociente, existe outra projeção contínua  $\tilde{\pi} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}/G$ , de modo que:

- (i) Os elementos de  $\Delta/G$  são órbitas  $\{G(z); z \in \Delta\}$ ,  $\pi(z) = G(z)$ ;
- (ii) Os elementos de  $\overline{D}/G$  são os conjuntos  $\{\overline{D} \cap G(z); z \in \Delta\}$ ,  $\tilde{\pi}(z) = G(z) \cap \overline{D}$ .

Considere agora  $\tau : \overline{D} \rightarrow \Delta$ , a função inclusão (identidade em  $\overline{D}$ ).

Construímos  $\theta : \overline{D}/G \rightarrow \Delta/G$ , dada por  $\theta(\overline{D} \cap G(z)) = G(z)$ .  $\theta$  está bem-definida, pois para cada  $z$ ,  $\overline{D} \cap G(z) \neq \emptyset$ . Além disto,  $\theta\tilde{\pi} = \pi\tau$  e estas funções estão ilustradas na Figura 2.

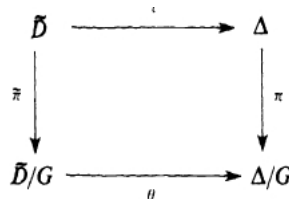


Figura 2: Diagrama representando as projeções acima.

**Proposição 4.2.** (i)  $\theta$  e  $\tau$  são injetivas;



(ii)  $\pi, \tilde{\pi}$  e  $\theta$  são sobrejetivas;

(iii)  $\pi, \tilde{\pi}, \tau$  e  $\theta$  são contínuas.

*Demonstração.* (i) Temos que

$$\theta(\overline{D} \cap G(z_1)) = \theta(\overline{D} \cap G(z_2)) \Rightarrow G(z_1) = G(z_2) \Rightarrow \overline{D} \cap G(z_1) = \overline{D} \cap G(z_2).$$

Logo  $\theta$  é injetiva.

A função  $\tau$  é injetiva por ser a função identidade em  $\overline{D}$ .

(ii)  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  são sobrejetivas por definição (pois são projeções).

Dada uma órbita  $G(z)$ , com  $z \in \Delta$ , temos que  $\overline{D} \cap G(z) \neq \emptyset$  e, daí,  $\theta(\overline{D} \cap G(z)) = G(z)$ . Logo,  $\theta$  é sobrejetiva.

(iii) Como  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  são as projeções naturais (sobre um espaço com a topologia quociente), temos que essas funções são contínuas por definição.

$\tau$  é contínua por ser a função identidade em  $\overline{D}$ .

A demonstração de que  $\theta$  é contínua segue do fato de que  $\theta\tilde{\pi} = \pi\tau$  e do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [1] (Proposição 1.4.2):

"Suponha que  $f : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos e  $Y$  possui a topologia quociente. Para cada função  $g : Y \rightarrow Z$ , temos que  $g$  é contínua se, e somente se,  $gf$  é contínua."

□

**Definição 25.** Um domínio fundamental  $D$  de  $G$  é dito localmente finito se, e somente se, cada subconjunto compacto de  $\Delta$  intersecta apenas um número finito de  $G$ -imagens de  $\overline{D}$ .

Como consequências da definição, temos que se  $D$  é localmente finito, cada  $z \in \Delta$  possui uma vizinhança compacta  $N$ , que intersecta somente um número finito de imagens  $g_1(\overline{D}), \dots, g_n(\overline{D})$  (associados a  $N$ ). Além disto, diminuindo  $N$ , se necessário, podemos supor que

$$(i) \quad z \in \bigcap_{i=1}^n g_i(\overline{D});$$

$$(ii) \quad N \subset \bigcup_{i=1}^n g_i(\overline{D});$$

(iii)  $h(D) \cap N = \emptyset$ , a menos que  $h$  seja algum dos  $g_i$ .

**Teorema 4.3.**  $D$  é localmente finito se, e somente se,  $\theta$  é homeomorfismo entre  $\overline{D}/G$  e  $\Delta/G$ .

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $\theta$  seja um homeomorfismo e que  $D$  não seja localmente finito. Assim, devem existir  $w \in \Delta$ ,  $z_1, \dots, z_n, \dots \in D$  e distintos  $g_1, \dots, g_n, \dots \in G$  tais que  $g_n(z_n) \rightarrow w$ .

Escreva  $K = \{z_1, z_2, \dots\}$ . Então  $K \subset D$  e toda vizinhança de  $w$  intersecta infinitas imagens  $g_n(D)$ . Daí,  $w$  não pertence a  $h(D)$ ,  $\forall h \in G$  (pois essas imagens são disjuntas) e  $\pi(w) \notin \pi(K)$ , pois  $\pi(K) = \{\pi(z_n); n \in \mathbb{N}\} = \{G(z_n); n \in \mathbb{N}\} = \{g(z_n); n \in \mathbb{N}, g \in G\}$ .

Provaremos que  $\pi(w) \in \pi(K)$ , o que nos dará uma contradição.

Os pontos  $g_n^{-1}(w)$  não podem se acumular em  $\Delta$ , pois  $G$  é discreto. Daí, os pontos  $z_n$  não podem se acumular em  $\Delta$ , e isto mostra que  $K$  é fechado em  $D$ . Como  $K \subset D$ , temos que  $K \cap \overline{D} = K$ , o que nos dá:

$$\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(K)) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(\overline{D} \cap K)) = \tilde{\pi}^{-1}(K) = K \cap \overline{D} = K.$$

Podemos usar a definição da topologia quociente em  $\overline{D}/G$  para afirmar que  $\pi(\tilde{K})$  é fechado em  $\overline{D}/G$ . Como  $\theta\tilde{\pi} = \pi\tau$ , segue que  $\pi(K) = \pi\tau(K) = \theta\tilde{\pi}(K)$  e, sendo  $\theta$  um homeomorfismo,  $\pi(K)$  é fechado em  $\Delta/G$ . Daí,  $\pi(w) = \lim_n \pi(g_n(z_n)) = \lim_n \pi(z_n) \in \pi(K)$ . Logo,  $\pi(w) \in \pi(K)$ .

Temos uma contradição. Consequentemente,  $D$  é localmente finito.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $D$  seja localmente finito. Sabemos que  $\theta$  é contínua. Resta mostrar que  $\theta^{-1}$  é contínua (ou, equivalentemente, que  $\theta$  é uma função aberta, já que esta é bijetiva). Seja  $A \in \overline{D}/G$  aberto e não-vazio. Como  $\tilde{\pi}$  é sobrejetiva e contínua, existe um subconjunto aberto  $B \subset \Delta$  com  $\tilde{\pi}^{-1}(A) = \overline{D} \cap B$ . Ponha  $V = \bigcup_{g \in G} g(\overline{D} \cap B)$ . Então

$$\pi(V) = \pi(\overline{D} \cap B) = \pi\tau(\overline{D} \cap B) = \theta\tilde{\pi}(\overline{D} \cap B) = \theta(A).$$

Precisamos mostrar que  $\theta(A)$  é aberto e, como  $\pi$  é uma função aberta, resta mostrarmos que  $V$  é aberto.

Seja  $z \in V$ . Como  $V$  é  $G$ -invariante, podemos assumir  $z \in \overline{D} \cap B$ . Sendo  $D$  localmente finito, existe um disco hiperbólico  $N$ , com centro em  $z$  e que intersecta somente as imagens  $g_0(\overline{D}), g_1(\overline{D}), \dots, g_m(\overline{D})$ ;  $g_0 = Id$ . Podemos também supor que cada um desses conjuntos contém  $z$ .

Então  $g_j^{-1}(z) \in \overline{D}, \forall j = 0, \dots, m$  e isto nos diz que  $\tilde{\pi}$  está definida em cada um dos  $g_j^{-1}(z)$ . Claramente,  $\tilde{\pi}$  envia esses pontos em  $\tilde{\pi}(z)$  (em  $A$ ). Portanto,  $g_j^{-1}(z) \in \tilde{\pi}^{-1}(A) = \overline{D} \cap B$  e, daí,  $z \in g_j(B), \forall j = 0, \dots, m$ . Diminuindo  $N$ , se necessário, podemos então assumir  $N \subset \bigcap_{j=0}^m g_j(B)$ .

Fica claro que  $N \subset V$  quando se nota que se  $w \in N$ , então para algum  $j$ ,  $w \in g_j(\overline{D})$  e  $w \in g_j(B)$ , o que nos dá  $w \in g_j(\overline{D} \cap B) \subset V$ .

Concluimos que, dado  $z \in V$ , existe vizinhança  $N$  de  $z$  inteiramente contida em  $V$ . Logo,  $V$  é aberto e, daí,  $\pi(V) = \theta(A)$  é aberto, mostrando que  $\theta$  é um homeomorfismo. □

### Exemplo:

Mostraremos neste exemplo que a convexidade de um domínio fundamental não é suficiente para assegurar finitude local.

Seja  $G$  o grupo gerado por  $f(z) = z$  e  $g(z) = \frac{3z+4}{2z+3}$ . Considere as seguintes curvas, representadas na Figura 3:

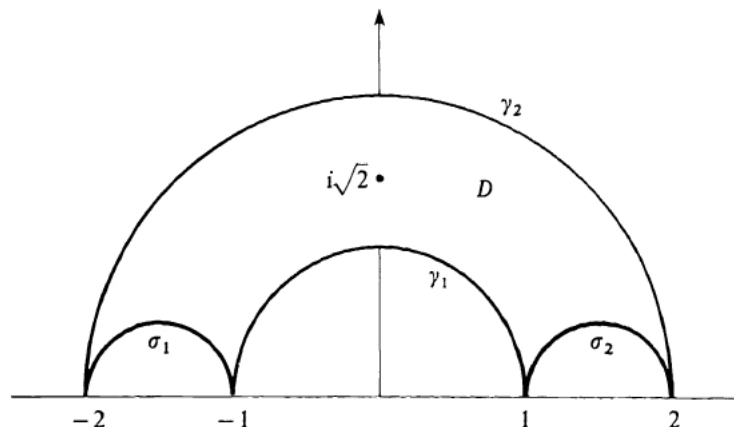


Figura 3: Um domínio fundamental para  $\langle f, g \rangle$ .

$$\gamma_1 = \{|z| = 1\};$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \{|z| = 2\}; \\ \sigma_1 &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{3}{2} + \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right) i; \theta \in (0, \pi) \right\} \\ \sigma_2 &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} + \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right) i; \theta \in (0, \pi) \right\}\end{aligned}$$

É fácil ver que  $f(\gamma_1) = \gamma_2$  e  $g(\sigma_1) = \sigma_2$  (para a última, basta notar que  $g(-1) = 1$  e  $g(-2) = 2$ ).

Usando o Teorema 3.16, com  $G_1 = \langle f \rangle$ ,  $G_2 = \langle g \rangle$ ,  $D_1$  a região entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e  $D_2$  a região entre  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , concluímos que  $G$  é discreto e  $D$ , a região delimitada por estas quatro curvas, é  $G$ -packing. Consequentemente,  $h(D) \cap D = \emptyset$ , se  $Id \neq h \in G$ .

Podemos dizer mais: na verdade,  $D$  é um domínio fundamental (localmente finito) para  $G$ . De fato, dado  $z \in \mathbb{H}^2$ , escolha a imagem de  $z$  mais próxima de  $i\sqrt{2}$ . Esta escolha é possível, pois, sendo  $G$  discreto, temos que as imagens de  $z$  não podem se acumular.

Temos:

$$\rho(z, i\sqrt{2}) \leq \rho(z, f(i\sqrt{2})) = \rho(f^{-1}(z), i\sqrt{2}) \Leftrightarrow |z| \leq 2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\cosh(\rho(z, i\sqrt{2})) \leq \cosh(\rho(z, f(i\sqrt{2}))) &\Leftrightarrow 1 + \frac{|z - i\sqrt{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{|z - 2i\sqrt{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2|z - i\sqrt{2}|^2 \leq |z - 2i\sqrt{2}|^2 &\Leftrightarrow 2[|z|^2 + zi\sqrt{2} - \bar{z}i\sqrt{2} + 2] \leq |z|^2 + 2\sqrt{2}iz - 2\sqrt{2}i\bar{z} + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 &\Leftrightarrow |z| \leq 2.\end{aligned}$$

Vale também que

$$\rho(z, i\sqrt{2}) \leq \rho(z, f^{-1}(i\sqrt{2})) \Leftrightarrow |z| \geq 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\cosh(\rho(z, i\sqrt{2})) \leq \cosh(\rho(z, f^{-1}(i\sqrt{2}))) &\Leftrightarrow 1 + \frac{|z - i\sqrt{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{|z - \frac{i\sqrt{2}}{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z - i\sqrt{2}|^2 \leq 2|z - \frac{i\sqrt{2}}{2}|^2 &\Leftrightarrow |z|^2 + zi\sqrt{2} - \bar{z}i\sqrt{2} + 2 \leq 2[|z|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}iz - \frac{\sqrt{2}}{2}i\bar{z} + \frac{1}{2}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 &\Leftrightarrow |z| \leq 1.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que  $z$  está mais próximo de  $i\sqrt{2}$  do que  $g(z)$  e  $g^{-1}(z)$  se, e somente se, está entre  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Daí, podemos concluir que o ponto mais próximo de  $i\sqrt{2}$  da órbita de qualquer  $z \in \mathbb{H}^2$  está em  $\overline{D}$ .

Ponha  $D_1 = D \cap \{z; \operatorname{Re}[z] < 0\}$ . Logo,  $(D - D_1) \cup g(D_1)$  é ainda um domínio fundamental para  $G$ .

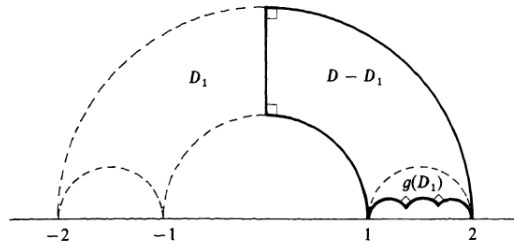


Figura 4: Construção de um novo Domínio Fundamental a partir de  $D$ .

Construindo as geodésicas  $x = 1$  e  $x = 2$  e os pontos  $\zeta, \zeta'$  e  $w$  como na Figura 5, substituímos o triângulo  $T(w, 1, 2w)$  pelo triângulo  $T(2w, 2, 4w) = f(T)$ . Além disto, cada segmento euclidiano  $[\xi, 2\xi]$ , onde  $|\xi| = 1$  e  $\xi$  está entre  $w$  e  $i$  (estritamente), é substituído pelo segmento equivalente  $[\zeta', 2\zeta']$ .

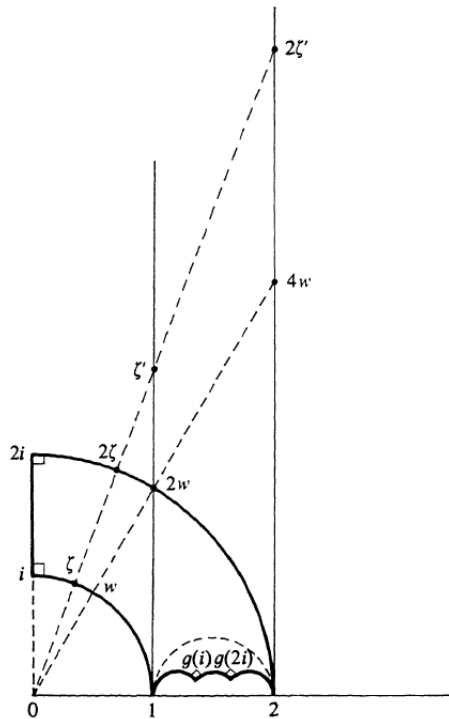


Figura 5:  $\Sigma$

Finalmente, o segmento  $[i, 2i]$  é apagado; note que  $[i, 2i]$  é equivalente segmento hiperbólico  $[g(i), g(2i)]$  na fronteira de  $g(D_1)$  e, como este segmento é mantido, o novo domínio

$\Sigma$  (na Figura 5, o polígono de vértices  $1, g(i), g(2i), 2$  e  $\infty$ ) ainda contém em seu fecho pelo menos um ponto de cada órbita.

A construção acima substitui o quadrilátero  $D$  pelo pentágono  $\Sigma$ . Por construção,  $\Sigma$  é um domínio fundamental para  $G$  e, pelo seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [1] (Capítulo 7, Teorema 7.16.1),  $\Sigma$  é convexo.

**Lema 4.4.** Um polígono em  $\mathbb{H}^2$ , de ângulos  $\theta_1, \dots, \theta_n$  é convexo se, e somente se,  $0 \leq \theta_j \leq \pi$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Observe que os pontos no segmento  $[g(i), g(2i)]$  não possuem equivalentes em  $\partial\Sigma$ . A única possibilidade, então, é que as imagens de  $\Sigma$  se acumulem ao longo do segmento  $[g(i), g(2i)]$ .

Para uma prova mais específica de que  $\Sigma$  não é localmente finito, precisamos apenas observar que os pontos  $z_n = 1 + 2^n i$  estão em  $\bar{\Sigma}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $f^{-n}(z_n) = i + 2^{-n} \rightarrow i$ .

Concluimos que  $\Sigma$  é um domínio fundamental convexo não localmente finito. Como o domínio original  $D$  é localmente finito, temos que  $\mathbb{H}^2/G \simeq \bar{D}/G$ , o que é um toro com um ponto removido

Note que  $\Sigma/G$  é um cilindro com um ponto removido, logo não pode ser isomorfo a  $\mathbb{H}^2/G$ , uma consequência do fato de  $\Sigma$  não ser localmente finito.

□

**Teorema 4.5.** Seja  $D$  um domínio fundamental convexo para um grupo Fuchsiano  $G$  e suponha que, para todo  $z \in \partial D$ , temos:

- (1) Existe  $g \in G$  tal que  $g \neq Id$  e  $g(z) \in \partial D$ ;
- (2)  $z$  pode ser ligado a um ponto em  $D$  por uma curva contida inteiramente em  $D \cup \{z\}$ .

Então  $D$  é localmente finito.

Faremos um esboço da demonstração num caso mais fraco, substituindo (2) pela convexidade de  $D$ . Antes disso, definimos:

**Definição 26.** Um ponto  $z \in \mathbb{H}^2$  é dito regular quando existe uma vizinhança de  $z$  que intersecta somente um número finito de cópias de  $\bar{D}$ . Caso contrário,  $z$  é dito excepcional.

Então  $D$  é localmente finito se não existem pontos excepcionais em  $D$ .

*Demonstração.* Provaremos o teorema mostrando que:

- (a) O conjunto dos pontos excepcionais é enumerável;
- (b) Se existe um ponto excepcional em  $D$ , então  $D$  contém uma quantidade não-enumerável deles.

De fato,

- (a) Por (1), cada ponto excepcional  $z$  pertence a algum conjunto  $g(\overline{D}) \cap h(\overline{D})$  (obrigatoriamente na fronteira), com  $g \neq h$ . Temos que os pontos interiores da interseção  $\sigma(g, h) = g(\overline{D}) \cap h(\overline{D})$  (o que, por convexidade, é um segmento hiperbólico) são pontos regulares. Então existem no máximo dois pontos excepcionais em  $\sigma(g, h)$ . Como  $G$  é enumerável, segue que o conjunto dos pontos excepcionais é enumerável.
- (b) Suponha que  $w$  é um ponto excepcional; então existem  $z_1, \dots, z_n, \dots \in D$  e distintos  $g_1, \dots, g_n, \dots \in G$  tais que  $g_n(z_n) \rightarrow w$ .

Podemos assumir que  $D$  é ilimitado (como  $G$  é Fuchsiano,  $G$  age descontinuamente em  $D$ . Daí, se  $D$  for limitado, o que nos dá  $\overline{D}$  compacto, temos  $g(\overline{D}) \cap \overline{D} \neq \emptyset$  somente para um número finito de elementos de  $G$ . Neste caso,  $D$  é claramente localmente finito). Então existe algum  $\zeta \in \overline{D}$  com  $|\zeta| = 1$ . Considere  $L_n = [z_n, \zeta)$ . Os raios  $g_n(L_n)$  se acumulam em outro raio  $[w, \zeta^*)$ ,  $|\zeta^*| = 1$ . Por construção, todo ponto de  $[w, \zeta^*)$  é excepcional.

□

**Teorema 4.6.** Seja  $D$  um domínio fundamental localmente finito para o grupo Fuchsiano  $G$ . Então  $G_0 = \{g \in G; g(\overline{D}) \cap \overline{D} \neq \emptyset\}$  gera  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $G^*$  o grupo gerado por  $G_0$ . É claro que  $G^* \subset G$ . Mostremos então que  $G \subset G^*$ .

Podemos supor que  $G$  age em  $\Delta$  e, para todo  $z \in \Delta$ , existe  $g \in G$ , com  $g(z) \in \overline{D}$ , pois  $D$  é domínio fundamental.

Defina a função  $\phi : \Delta \rightarrow G/G^*$  dada por  $\phi(z) = G^*g$ , onde  $g$  é qualquer aplicação que satisfaça  $g(z) \in \overline{D}$ . Esta função está bem-definida, pois se  $h(z) \in \overline{D}$ , para alguma outra  $h \in G$ , temos que  $h(z) \in \overline{D} \cap hg^{-1}(\overline{D})$  e daí segue que  $hg^{-1} \in G_0 \subset G^*$ , o que nos dá uma igualdade de classes,  $G^*g = G^*h$ .

Nossa prova se baseia em uma discussão sobre essa função.

Seja  $z \in \Delta$  qualquer. Como  $D$  é localmente finito, existe um número finito de imagens,  $g_1(\overline{D}), \dots, g_m(\overline{D})$ , cada uma contendo  $z$  e tais que a união delas cobre uma vizinhança  $N$  de  $z$ . Se  $w \in N$ , então  $w \in g_j(\overline{D})$ , para algum  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Consequentemente,  $\phi(w) = G^*g_j^{-1} = \phi(z)$ . Concluimos que cada  $z \in \Delta$  possui uma vizinhança onde  $\phi$  é constante. Como  $\Delta$  é um aberto conexo, toda função que satisfaça esta propriedade é constante em  $\Delta$ . Além disso, olhando para  $G/G^*$  com a topologia discreta, segue que  $\phi$  é contínua e, como  $\phi(\Delta)$  é conexo, esta imagem deve ser apenas um ponto. Logo,  $\phi(z) = \phi(w), \forall z, w \in \Delta$ .

Dada qualquer  $g \in G$ , sejam  $z \in D$  e  $w \in g^{-1}(D)$ . Como  $\phi$  é constante,

$$G^* = G^*Id = \phi(z) = \phi(w) = G^*g$$

e segue que  $g \in G^*$ .

Portanto,  $G = G^* = \langle G_0 \rangle$ .

□

**Teorema 4.7.** Considere  $D$  um domínio fundamental localmente finito para o grupo Fuchsiano  $G$ . Temos:

- (i) Seja  $g$  um elemento elíptico em  $G$  e  $K$  um disco compacto com  $g(K) = K$ . Então  $\overline{D}$  intersecta um número finito e positivo de imagens distintas de  $K$ .
- (ii) Seja  $g$  um elemento parabólico em  $G$  e  $K$  uma região horocíclica tal que  $g(K) = K$ . Então  $\overline{D}$  intersecta um número finito e positivo de imagens distintas de  $K$ .
- (iii) Seja  $g$  um elemento hiperbólico de  $G$  e  $K$  uma região hipercíclica satisfazendo  $g(K) = K$ . Então  $\overline{D}$  intersecta um número finito e positivo de imagens distintas de  $K$ .

*Demonstração.* A demonstração de que  $\overline{D}$  intersecta pelo menos uma imagem de  $K$  é a mesma em todos os casos e só depende do fato de  $D$  ser domínio fundamental para  $G$ . De fato, dado  $z \in K$ , temos que existe  $g \in G$  tal que  $g(z) \in \overline{D}$ . Daí,  $g^{-1}(\overline{D}) \cap K \neq \emptyset$ .

Mostremos agora, em cada caso, que essa interseção é não-vazia somente para um número finito de elementos de  $G$ .

- (i) Temos que se  $\overline{D} \cap g(K) \neq \emptyset$ , então  $g^{-1}(\overline{D}) \cap K \neq \emptyset$ . Mas isto só ocorre para um número finito de elementos  $g \in G$ , pois  $K$  é compacto e  $D$  é localmente finito.



- (ii) Podemos supor que  $G$  age em  $\mathbb{H}^2$  e, como  $g$  é parabólico, supomos também  $g(z) = z + 1 = m_1(z)$ .

Como  $K$  é uma região horocíclica, deve ser da forma  $K = \{x + iy; y > k > 0\}$ . Agora escrevamos  $K_0 = \{x + iy; y \geq k_0\}$  e  $K_1 = \{x + iy; k \leq y \leq k_0\}$ , onde  $k_0$  é escolhido de modo que  $\bigcup_{f \in G} f(K_0) \neq \mathbb{H}^2$ . Esta última condição nos dá que  $K_0$  não pode conter nenhuma imagem de  $\bar{D}$ . Assim, se  $f(\bar{D}) \cap K \neq \emptyset$ , temos necessariamente  $f(\bar{D}) \cap K_1 \neq \emptyset$ . Esta escolha de  $k_0$  é possibilitada pela Desigualdade de Jorgensen. Suponhamos que  $\bar{D} \cap h(K) \neq \emptyset$ . Daí,  $h^{-1}(\bar{D}) \cap K \neq \emptyset$  e conseqüentemente  $h^{-1}(\bar{D}) \cap K_1 \neq \emptyset$ . Pondo  $E = \{x + iy; 0 \leq x \leq 1, k \leq y \leq k_0\}$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(E) = K_1$  e, para algum  $n_0$ , devemos ter  $g^{n_0}(h^{-1}(\bar{D})) \cap E \neq \emptyset$ . Como  $E$  é compacto e  $D$  é localmente finito, somente um número finito de imagens de  $\bar{D}$ ,  $g_1(\bar{D}), \dots, g_s(\bar{D})$ , intersectam  $E$ . Então  $g^{n_0}h^{-1} = g_j$ , para algum  $j$ , e assim  $h(K) = g_j^{-1}g^{n_0}(K) = g_j^{-1}(K)$ . Logo,  $\bar{D} \cap h(K) \neq \emptyset$  somente para um número finito de elementos de  $G$ .

- (iii) A prova é análoga à de (ii). Podemos assumir que  $G$  age em  $\mathbb{H}^2$  e, como  $g$  é hiperbólico, supomos também  $g(z) = kz$ , com  $k > 1$ . A região hipercíclica é uma região da forma  $K = \{re^{i\theta}; |\theta - \frac{\pi}{2}| < \epsilon \text{ e } r > 0\}$ . Escrevemos  $E = \{z \in K; 1 \leq |z| \leq k\}$ . Então  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(E) = K$  e somente um número finito de imagens de  $\bar{D}$ , digamos  $g_1(\bar{D}), \dots, g_s(\bar{D})$ , intersectam  $E$  ( $E$  é compacto).

Se supomos que  $h(K) \cap \bar{D} \neq \emptyset$ , então, para algum  $n$ ,  $g^n h^{-1}(\bar{D}) \cap E \neq \emptyset$  e assim, para algum  $j \in \{1, \dots, s\}$ , temos  $h(K) = g_j(K)$ .

Portanto,  $\bar{D}$  intersecta somente um número finito de imagens distintas de  $K$ .

□

## 4.2 Polígonos fundamentais convexos

Observamos que em nosso estudo é mais natural que olhemos para polígonos convexos. Mas convém lembrar que, pelo que foi visto, apenas convexidade não é suficiente para garantir resultados satisfatórios.

**Definição 27.** Seja  $G$  um grupo Fuchsiano. Dizemos que  $P$  é um polígono fundamental convexo para  $G$  quando  $P$  é um domínio fundamental convexo localmente finito para  $G$ .

**Definição 28.** Seja  $P$  é um polígono fundamental convexo para  $G$ . Um LADO de  $P$  é um segmento geodésico da forma  $\overline{P} \cap g(\overline{P})$ , de comprimento positivo, onde  $g \neq Id$ . Um VÉRTICE de  $P$  é um ponto da forma  $\overline{P} \cap g(\overline{P}) \cap h(\overline{P})$ , com  $g \neq h \neq Id$ .

Observe que um lado de  $P$  não é necessariamente um lado no sentido convencional. Se chamamos uma geodésica maximal em  $\partial P$  de aresta, esta pode conter vários lados de  $P$ . Ou seja, é permitido um ângulo de  $\pi$  como ângulo interior em um vértice.

Serão listados agora alguns resultados a respeito de polígonos fundamentais convexos. Uma discussão mais detalhada sobre eles pode ser encontrada em [1] (Capítulo 9, Seção 9.3).

- (1) Para todo  $z \in \partial P$ , existe  $g \in G, g \neq Id$ , tal que  $g(z) \in \partial P$ ;
- (2)  $P$  possui uma quantidade enumerável de lados e de vértices (e isto se deve ao fato de  $G$  ser enumerável);
- (3) Somente um número finito de lados ou vértices de  $P$  podem intersectar algum compacto  $K$  (pois  $P$  é localmente finito);
- (4)  $\partial P$  é a união dos lados de  $P$ ;
- (5) Cada vértice de  $P$  pertence a exatamente dois de seus lados e é o ponto final comum a eles;
- (6) Quaisquer dois lados somente podem se intersectar em um vértice (que é um ponto final comum a esses lados);
- (7) O diâmetro euclidiano de  $g_n(D)$  converge a zero se  $n \rightarrow \infty$ .

Considere os dois conjuntos a seguir:

$$G^* = \{g \in G; \overline{P} \cap g(\overline{P}) \text{ é um lado de } P\}$$

$$S = \{\text{lados de } P\}.$$

Cada  $g \in G^*$  produz um único lado  $s$  de  $P$ , dado por  $\overline{P} \cap g(\overline{P})$  e cada lado de  $P$  surge exatamente desta forma. Então existe uma bijeção  $\Phi : G^* \rightarrow S$ , dada por  $\Phi(g) = \overline{P} \cap g(\overline{P})$ . De fato,  $\Phi$  é claramente sobrejetora e, se supomos  $\Phi(g) = \Phi(h)$ , então temos  $\overline{P} \cap g(\overline{P}) = \overline{P} \cap h(\overline{P})$  e isto não pode ocorrer caso se tenha  $g \neq h$ , por (6).

A existência de  $\Phi^{-1} : S \rightarrow G^*$  assegura que, para cada lado  $s$  de  $P$ , existe uma única função  $g_s$  associada a ele, tal que  $s = \bar{P} \cap g_s(\bar{P})$ . Assim,  $g_s^{-1}(s) = g_s^{-1}(\bar{P}) \cap \bar{P} = s'$ , onde  $s'$  tem comprimento positivo e também é um lado. Note que se  $s' = g_s^{-1}(s)$ , então  $g_{s'} = g_s^{-1}$ . Construimos então uma função  $s \mapsto s'$ , de  $S$  sobre  $S$  e esta função é chamada emparelhamento de  $P$ , pois

$$(s')' = (g_{s'})^{-1} = g_s(s') = s.$$

Desta forma, o conjunto de lados de  $P$  particiona-se naturalmente em uma coleção de pares  $\{s, s'\}$ . Não se exclui a possibilidade de que  $s$  seja igual a  $s'$ .

**Teorema 4.8.** O conjunto das funções de emparelhamento,  $G^*$ , gera  $G$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.6, basta mostrarmos que se  $\bar{P} \cap h(\bar{P}) \neq \emptyset$ , então  $h$  está no grupo gerado pelas funções  $g_s$ . Considere então algum  $w \in \bar{P} \cap h(\bar{P})$ . Existem um disco aberto  $N$  centrado em  $w$  e elementos  $h_0 = Id, h_2, \dots, h_t \in G$  tais que  $h = h_{j_0}$ , para algum  $j_0 \neq 0$  e tem-se  $w \in \bigcap_{j=0}^t h_j(\bar{P})$  e  $N \subset \bigcup_{j=0}^t h_j(\bar{P})$ .

Diminuindo  $N$ , se necessário, podemos assumir que esta vizinhança não contém vértices de nenhum dos  $h_j(\bar{P})$ , exceto possivelmente  $w$  e que  $N$  não intersecta nenhum dos lados dos  $h_j(\bar{P})$ , exceto os que contém  $w$ . Como a fronteira de  $P$  é a união dos seus lados, sua fronteira em  $N$  consiste (pela escolha de  $N$ ) de um lado contendo  $w$  ou de dois lados distintos partindo de  $w$ .

O mesmo é verdade para cada uma das imagens de  $P$  pelos  $h_j$  ( $j = 1, \dots, t$ ), ou seja, acontece uma das situações ilustradas na Figura 6:

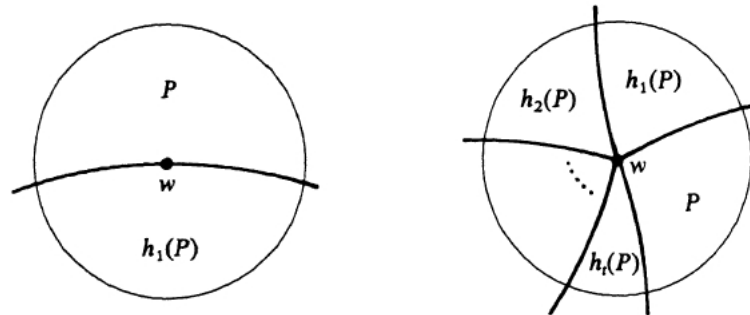


Figura 6: A fronteira de  $P$  em  $N$ .

Afirmamos então que, após renomear os  $h_j$ 's, se necessário, dois polígonos consecutivos na lista  $h_0(P) = P, h_1(P), \dots, h_t(P)$  tem sempre um lado em comum. Consequentemente,

para todo  $j = 0, \dots, t$ , temos que  $\overline{P} \cap h_j^{-1} h_{j+1}(\overline{P})$  é um segmento geodésico de comprimento positivo, e então é um lado de  $P$ . Daí, para cada  $j$ ,  $h_{j+1} = h_j g_s$ , para alguma função de emparelhamento  $g_s$  (note que  $h_1 = Id g_s = g_s$  e, a partir daí,  $h_j$  é sempre um produto de funções de emparelhamento). Concluimos que  $h = h_{j_0} \in \langle G^* \rangle$ .

Portanto,  $G_0 \subset \langle G^* \rangle$  e, como  $G = \langle G_0 \rangle \subset \langle G^* \rangle = G$ , segue que  $G^*$  gera  $G$ .

□

**Definição 29. (i)** Um ciclo  $C$  em  $\overline{P}$  é definido pela interseção de uma  $G$ -órbita com  $\overline{P}$ .

Um ciclo é necessariamente um conjunto finito  $\{z_1, \dots, z_n\}$  e, neste caso, dizemos que o comprimento de  $C$  é  $|C| = n$ .

**(ii)** Se  $C$  é um ciclo de pontos em  $\Delta$ , então os estabilizadores  $G_j$ , de cada elemento  $z_j \in C$ , são conjugados dois a dois e são subgrupos cíclicos finitos de  $G$ . Definimos a ordem do ciclo  $C$  por  $Ord(C) = Ord(G_j)$ , para qualquer  $j$ .

Note que, dados  $z_i, z_j \in C$ , então deve existir  $h \in G$  tal que  $h(z_j) = z_i$ . Assim, se tivermos  $g \in G_j = \{g \in G; g(z_j) = z_j\}$ , então  $hgh^{-1}(z_i) = z_i$  e portanto  $hgh^{-1} \in G_i$ . Logo, estes estabilizadores são conjugados. Além disso, cada um deles é cíclico, pelo Teorema 3.13.

**(iii)** Seja  $C = \{z_1, \dots, z_n\}$  um ciclo em  $\overline{P}$  e  $\theta_j$  o ângulo de  $P$  em  $z_j$ . A soma dos ângulos do ciclo  $C$  é dada por  $\theta(C) = \theta_1 + \dots + \theta_n$ .

Observe que caso  $C$  contenha um ponto  $z$  no interior de  $P$ , então  $C = \{z\}$  e o ângulo em  $z$  é  $\theta = 2\pi$  e no caso de algum ponto de  $C$  pertencer ao interior de um lado de  $P$ , então o ângulo nesse ponto é  $\pi$ .

**Teorema 4.9.** Para todo grupo Fuchsiano  $G$ , todo polígono fundamental para  $G$ ,  $P$ , e todo ciclo  $C$  em  $\overline{P}$ , vale que

$$\theta(C) = \frac{2\pi}{Ord(C)}.$$

*Demonstração.* Se  $C$  consiste em apenas um ponto no interior de  $P$ , então  $\theta(C) = 2\pi$  e o teorema é válido, já que  $G_z = \{Id\}$ .

Podemos então supor  $C = \{z_1, \dots, z_n\} \subset \partial P$ . Então existem  $g_1 = Id, g_2, \dots, g_k \in G$  tais que  $g_j(z_j) = z_1 \in \partial P$ . Segue que  $g_j(P)$  tem  $z_1$  como vértice e o ângulo de  $g_j(P)$  em  $z_1$  é  $\theta_j$ .

Além disso,  $z_1 \in h(\overline{P}) \Leftrightarrow h^{-1}z_1 = z_j$ , para algum  $j \Leftrightarrow$  para este  $j$ ,  $hg_j^{-1}(z_1) = z_1$ . Ou seja, se  $G_1$  é o estabilizador de  $z_1$ , temos que  $z_1 \in h(\overline{P})$  se, e somente se, para algum  $j$ ,  $h \in G_1 g_j$ .

Na Figura 6, temos

$$\{h_0, \dots, h_t\} = G_1 g_1 \cup G_1 g_2 \cdots \cup G_1 g_k,$$

e estas são exatamente as imagens de  $\bar{P}$  que contém  $z_1$ . Como os elementos de  $G_1$  são as rotações em torno de  $z_1$ , cada  $f \in G_1 g_j$  determina um ângulo  $\theta_j$  em  $z_1$ .

Então

$$2\pi = [\text{Ord}(G_1)](\theta_1 + \cdots + \theta_n) = \text{Ord}(C)\theta(C).$$

Portanto,

$$\theta(C) = \frac{2\pi}{\text{Ord}(C)}.$$

□

Veremos agora algumas consequências desse teorema.

- Suponha que  $z$  não seja fixado por nenhum elemento elíptico de  $G$ . O ciclo  $C$  contendo  $z$  em  $P$  é caracterizado por  $\text{Ord}(C) = 1$  e é chamado ciclo acidental. Neste caso,  $\theta(C) = 2\pi$ .

Se  $n = 1$ , então  $\theta_1 = 2\pi$  e  $z \in P$ ;

Se  $n = 2$ , então  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  e  $z$  é então um ponto interior de um lado de  $P$ .

- Suponha agora que  $z$  seja fixado por algum elemento elíptico de  $G$  e que o estabilizador de  $z$  tenha ordem  $q$  em  $G$ . Então  $\theta(C) = \frac{2\pi}{q}$ .

Um caso especial de grande interesse é quando  $|C| = 1$  (onde  $z$  não é equivalente a nenhum outro ponto em  $\partial P$ ). Então  $\theta_1 = \frac{2\pi}{q}$  e, caso  $|C| = 1$  e  $q = 2$ , tem-se  $\theta(C) = \theta_1 = \pi$ . É fácil ver que, neste caso,  $G_z = \{Id, g\}$ , onde  $g^2 = Id$ , e  $z$  um ponto interior do lado  $s = \bar{P} \cap g(\bar{P})$ . Note que aqui  $s = s'$ , pois  $g = g^{-1}$ . Reciprocamente, se, em geral,  $s = s'$ , então é fácil ver que  $g_s$  é de ordem 2, com um ponto fixo em  $s$  (considere o efeito de  $g_s$  na geodésica contendo  $s$  e note que  $P \cap g(P) = \emptyset$ ).

Como os pontos fixos de elementos elípticos de  $G$  necessitam de uma atenção especial, é muitas vezes conveniente considerá-los como vértices de  $P$ . Esta é somente uma variação da definição usual e é uma questão de convenção qual definição adotar.

Discutiremos agora a fronteira euclideana de  $P$  em  $\{|z| = 1\}$ . Denotamos este conjunto por  $E$ . Ele pode possuir uma quantidade não-enumerável de componentes, mas somente uma quantidade enumerável de componentes de comprimento positivo. Estes são chamados "lados livres" de  $P$  e são intervalos não-degenerados em  $\{|z| = 1\}$ .

Se  $w \in E$ , então existe  $\{z_n\} \subset P$  convergendo a  $w$ . Para todo  $z \in P$ , o segmento  $[z, z_n]$  está contido em  $P$  e, obviamente,  $[z, w) \subset \bar{P}$ . O mesmo vale para todo ponto suficientemente próximo de  $z$  e, como  $P$  é convexo, temos que  $[z, w) \subset P$ .

Um ponto  $w \in E$  pode não pertencer a nenhum lado ou lado livre de  $P$ . Por exemplo, podem existir infinitos lados de  $P$  se acumulando em  $w$ , sem conter  $w$ . Sabe-se pouco neste caso. Restringimos então nossa discussão a pontos-finais de dois lados:

**Definição 30.** Dizemos que  $v \in E$  é um vértice próprio de  $P$  se  $v$  é o ponto final de dois lados de  $P$ . Caso  $v$  seja ponto final de um lado e um lado livre de  $P$ , então  $v$  é dito vértice impróprio de  $P$ . Nos dois casos,  $v$  é um vértice no infinito.

Na Figura 7, vemos um exemplo de cada caso. A primeira situação retrata um vértice impróprio e a segunda um vértice próprio.

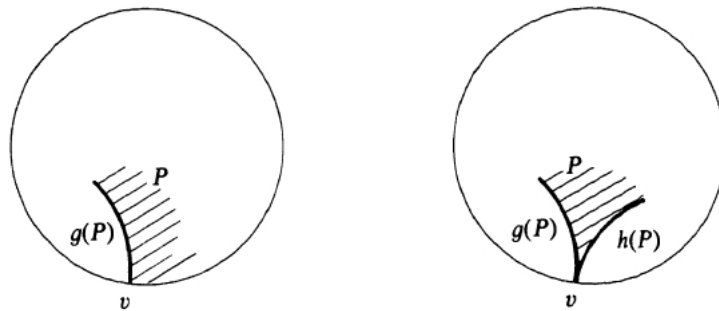


Figura 7: Um vértice impróprio e um vértice próprio, respectivamente.

Para todo  $v \in E$ , o ciclo de  $z$  é  $G(z) \cap E$ . Se  $z$  é um ponto ordinário, o ciclo de  $z$  deve ser finito (caso contrário, infinitas imagens de  $P$  intersectam uma vizinhança de  $z$  e, por (7),  $z$  seria um ponto limite). Além disso,  $z$  deve ser um vértice próprio ou impróprio no infinito.

A definição 29 se generaliza a esta situação e, se  $C$  é o ciclo de  $z$ , então

$$\text{Ord}(C) = 1 + \theta_1 + \dots + \theta_n = \pi.$$

Esta é a contrapartida do Teorema 4.9. Ela é válida também no caso em que  $z$  é ponto interior de um lado livre, onde  $|C| = 1$  e  $\theta_1 = \pi$ . Por outro lado, note que  $\theta_j$  somente pode tomar os valores 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ . Assim, se  $|C| = 2$ , tem-se necessariamente  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$  e então  $z$  é o ponto final comum de um lado livre de  $P$  e um lado livre de algum  $g(P)$ .

**Teorema 4.10.** Ponha  $E$  como acima.

Seja  $v \in E$  um ponto que seja fixado por algum  $g \in G$  não-trivial. Então  $g$  deve ser

parabólico (e não pode ser hiperbólico). Além disso, o ciclo  $C$  de  $v$  em  $E$  é finito e cada um de seus pontos é um vértice próprio de  $P$ .

*Demonstração.* Primeiramente,  $v$  não pode ser fixado por nenhum elemento elíptico de  $G$ , pois  $|v| = 1$ .

Suponha que  $v$  seja fixado por um elemento hiperbólico  $h \in G$ . Considere  $A$ , o eixo de  $h$  (dado pela geodésica que passa pelos pontos fixos de  $h$ ) e construa algum segmento  $[z, v) \subset P$ . Tome  $\{z_n\} \in [z, v)$  com  $z_n \rightarrow v$ . Então existem pontos  $a_n$  em  $A$  com  $\rho(a_n, z_n) \rightarrow 0$ . Para todo  $n$ , existe alguma potência de  $h$ , digamos  $h_n$  tal que  $h_n(a_n)$  pertence a um sub-arco compacto de  $A$  (podemos tomar os  $h_n$ 's distintos). Como  $h_n$  é sempre uma isometria, temos que os pontos  $h_n(z_n)$  estão todos em um compacto  $K \subset \Delta$ . Isto contradiz o fato de  $P$  ser localmente finito.

Concluimos que  $v$  somente pode ser fixado por um elemento parabólico de  $G$ .

Obviamente, o ciclo de pontos em  $E$  determinado por  $v$  só pode conter pontos fixos parabólicos. Se este ciclo for infinito, digamos  $v_1, \dots, v_n, \dots$ , então existem  $g_1, \dots, g_n, \dots \in G$ , distintos, tais que  $g_n(v) = v_n$ . Se  $K$  é uma região horocíclica com base em  $v$ , então  $g_n(K)$  é uma região horocíclica com base em  $v_n$  e  $g_n(K)$  deve intersectar o convexo  $P$ , pois  $v \in E$ . Concluimos que  $P$  intersecta infinitas imagens de  $K$ , o que contraria o Teorema 4.7. Segue que o ciclo determinado por  $v$  (ou por qualquer ponto fixo parabólico) é finito.

Finalmente, devemos mostrar que  $v$  é um vértice próprio de  $P$ . O mesmo deve ser verdade, pelo mesmo argumento, para todos os pontos no ciclo de  $z$ .

Escolha uma região horocíclica  $K$  com base em  $v$ . Pelo teorema Teorema 4.7,  $\overline{P}$  intersecta somente um número finito de imagens de  $K$ , digamos  $K, g_1(K), \dots, g_t(K)$ , sendo estas imagens regiões horocíclicas com base em  $v, v_1, \dots, v_t$ , respectivamente, onde  $v_j = g_j(v)$ . Se  $v_j \notin E$ , então  $\overline{P}$  é disjunto de alguma vizinhança desse ponto. Daí,  $\overline{P} \cap g(\overline{P})$  é um subconjunto compacto de  $\Delta$ . Diminuindo  $K$ , se necessário, podemos supor que para todo  $j$ ,  $v_j \in E$ . Isto mostra que o ciclo de  $v$  em  $E$  é  $\{v, v_1, \dots, v_t\}$

Sem perda de generalidade, suponha que  $G$  age em  $\mathbb{H}^2$ ,  $v = \infty$  e que o estabilizador de  $v$  é gerado por  $p : z \mapsto z + 1$ . É claro que  $K$  é da forma  $\{x + iy; y > k\}$ . Podemos assumir  $k > 1$ .

Se  $a = \inf\{Re[z]; z \in P\}$  e  $b = \sup\{Re[z]; z \in P\}$ , então  $a \leq b \leq a + 1$ , pois, caso contrário  $b - a > 1$  nos daria que  $P$  contém, por convexidade, um triângulo com largura excedendo 1. Assim, teríamos  $P \cap p(P) \neq \emptyset$ , um absurdo.

Note que

$$K \cap h(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow h^{-1}(K) = g_j(K), \text{ onde } j \in \{0, \dots, t\} \Leftrightarrow \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } h^{-1} = g_j p^n.$$

Segue que  $\infty \in \partial(h(P))$ , pois  $h(v_j) = \infty$ . Exatamente como acima,  $h(P)$  está em uma faixa vertical de largura 1 e, daí, há no máximo 3 valores de  $n$  consecutivos tais que  $h(\bar{P}) = p^n g_j^{-1}(\bar{P})$  intersecta  $\bar{P}$ . Concluimos que somente um número finito de imagens de  $\bar{P}$  podem intersectar  $\bar{P} \cap K$ . Isto significa que  $\bar{P} \cap K$  intersecta apenas um número finito de lados de  $P$  e, então, em um horociclo suficientemente pequeno em  $\infty$ , a fronteira de  $P$  consiste de apenas duas geodésicas verticais. Portanto,  $v$  deve ser um vértice próprio de  $P$ .

□

### 4.3 O polígono de Dirichlet

Durante esta seção, seja  $G$  um grupo Fuchsiano agindo em  $\Delta$  e  $w \in \Delta$  um ponto que não seja fixado por nenhum elemento elíptico de  $G$ .

**Definição 31.** Para cada  $g \in G$ , defina:

- (i)  $L_g(w) = \{z \in \Delta; \rho(z, w) = \rho(z, gw)\}$ ;
- (ii)  $H_g(w) = \{z \in \Delta; \rho(z, w) < \rho(z, gw)\} = \{z \in \Delta; \rho(z, w) < \rho(g^{-1}z, w)\}$ .

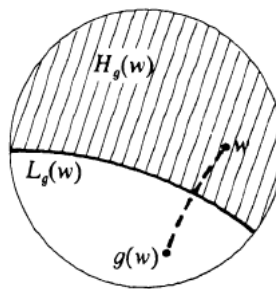


Figura 8:  $L_g(w)$  e  $H_g(w)$ .

Segue da definição que  $L_g(w)$  é uma geodésica que não contém  $w$  e que  $H_g(w)$  é o semiplano contendo  $w$  que é limitado por  $L_g(w)$ .

**Definição 32.** O polígono de Dirichlet de centro  $w$  para  $G$ ,  $D(w)$ , é definido por:

$$D(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g(w).$$



Às vezes,  $D(w)$  é chamado polígono de Poincaré de  $G$ . Dirichlet usou esta construção para espaços Euclidianos em 1850 e Poincaré a explorou, em seguida, para espaços hiperbólicos.

Podemos ver  $D(w)$  como o conjunto dos pontos que estão mais próximos de  $w$  do que de qualquer imagem de  $w$  por  $G$ . Equivalentemente,  $D(w)$  é o conjunto dos pontos  $z \in \Delta$  que estão, dentre todos os pontos de suas órbitas, mais próximos de  $w$ .

Observe que  $z \in H_g(w) \Leftrightarrow w \in H_{g^{-1}}(z)$ . Logo,  $z \in D(w) \Leftrightarrow w \in D(z)$ . Note que isto quer dizer que qualquer ponto em  $D(w)$  é um centro para este polígono.

Se  $h$  é uma isometria qualquer do espaço hiperbólico, então  $h(H_g(w)) = H_{hgh^{-1}}(hw)$ . De fato,

$$\begin{aligned} y \in h(H_g(w)) &\Leftrightarrow y = hz, \text{ com } \rho(z, w) < \rho(z, gw) \Leftrightarrow \rho(hz, hw) < \rho(hz, hgw) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(y, hw) < \rho(y, hgw) \Leftrightarrow y \in H_{hgh^{-1}}(hw). \end{aligned}$$

Consequentemente (usando  $D_G(w) = D(w)$ ) temos que  $h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(h(w))$ . Em particular, se  $h \in G$ , então  $h(D(w)) = D(hw)$ .

**Teorema 4.11.** O polígono de Dirichlet  $D(w)$ , definido acima, é um polígono fundamental convexo para  $G$ .

*Demonstração.* Como cada  $H_g(w)$  é convexo e contém  $w$ , vemos que  $D(w)$  é convexo e não vazio.

O restante da prova é consequência do fato de que somente um número finito dos  $L_g(w)$  pode intersectar qualquer compacto dado em  $\Delta$ . Isto segue diretamente do fato de que se  $G = g_0, \dots, g_n, \dots$ , então

$$\rho(w, L_{g_n}(w)) = \frac{1}{2}\rho(w, g_n(w)) \rightarrow \infty.$$

De fato, caso  $\rho(w, g_n(w)) \not\rightarrow \infty$ , teríamos que a sequência  $g_n(w)$  estaria toda contida em um compacto e, portanto, possuiria subsequência convergente, o que não pode acontecer.

Seja  $z \in \overline{D(w)}$ . Temos que existe algum disco compacto  $K$  centrado em  $z$  tal que, para todo  $g \in G$ , ou  $K \subset H_g(w)$  ou  $z \in L_g(w)$  e, além disto, a última opção só pode ocorrer para um número finito de  $g \in G$ .

É claro que se  $z \in D(w)$ , a segunda opção não ocorre e  $K \subset D(w)$ , o que nos diz

que  $D(w)$  é aberto. Além disso, as duas opções acima sobre  $z$  nos dizem que  $\partial(D(w)) \subset \bigcup_{g \in G} L_g(w)$ . Portanto,  $\mu(\partial(D(w))) = 0$ .

Mostraremos agora que existe  $F$ , conjunto fundamental para  $G$ , tal que  $D(w) \subset F \subset \overline{D(w)}$ .

Para cada órbita  $G(z)$ , escolhemos exatamente um ponto  $z^* \in \Delta$  satisfazendo

$$\rho(w, z^*) \leq \rho(w, gz), \forall g \in G.$$

Tal escolha é possível, pois  $G(z)$  não possui ponto de acumulação. O conjunto  $F$  dos pontos escolhidos contém  $D(w)$ , pois, claramente, se  $z \in D(w)$ , não há outra escolha possível além de  $z = z^*$ .

Para mostrar que  $F \subset \overline{D(w)}$ , tome  $z \in F$  e considere o segmento  $[w, z]$ . Como  $w \in D(w)$ , nenhum dos  $L_g(w)$  passa por  $w$ . Se  $L_g(w) \cap (w, z) \neq \emptyset$ , então  $\rho(z, w) > \rho(z, gw) = \rho(g^{-1}z, w)$ , contrariando o fato de que  $z \in F$ . Daí,  $L_g(w) \cap (w, z) = \emptyset$ , para todo  $g \in G$ . Portanto,  $(w, z) \subset D(w)$  e então  $z \in \overline{D(w)}$ .

Concluimos que  $D(w) \subset F \subset \overline{D(w)}$  e, daí,  $D(w)$  é um domínio fundamental convexo para  $G$ . Resta mostrar que  $D(w)$  é localmente finito.

Seja  $K \subset \Delta$  um disco compacto centrado em  $w$  de raio  $r$ . Suponha que  $g(\overline{D(w)}) \cap K \neq \emptyset$ . Então existe  $z \in \overline{D(w)}$  com  $\rho(gz, w) < r$ . Como  $z \in \overline{D(w)}$ , temos:

$$\rho(w, gw) \leq \rho(w, gz) + \rho(gz, gw) \leq r + \rho(z, w) \leq r + \rho(z, g^{-1}w) = r + \rho(gz, w) \leq 2r.$$

Isto só pode ser verdade para um conjunto finito de elementos  $g \in G$ .

Observamos que isto completa a prova, pois, dado qualquer compacto  $K \subset \Delta$ , este contém um disco cujo centro é levado em algum ponto em  $D(w)$  e, como este ponto também é um centro para  $D(w)$ , podemos supor que  $K$  é um disco centrado em  $w$ .

Portanto,  $G(w)$  é um polígono fundamental convexo para  $G$ .

□

Em virtude do Teorema 4.11, todos os resultados para polígonos fundamentais convexos são válidos para os polígonos de Dirichlet. Em particular, o espaço quociente  $D(w)/G$  independe (topologicamente) da escolha de  $w$ , desde que  $w$  não seja fixado por elementos elípticos de  $G$ . Isto é, para tais pontos,  $D(w)/G$  é sempre homeomorfo a  $\Delta/G$ .

**Teorema 4.12.** Seja  $\{z_1, \dots, z_n\}$  um ciclo na fronteira do polígono de Dirichlet  $D(w)$ .

Então

$$\rho(z_1, w) = \rho(z_2, w) = \cdots = \rho(z_n, w).$$

*Demonstração.* Considere, por exemplo,  $z_1$  e  $z_2$ , dois elementos de um mesmo ciclo na fronteira de  $D(w)$ . Então existe  $h \in G$  tal que  $h(z_1) = z_2$ . Como  $[w, z_1] \subset D(w)$ , vemos que

$$[hw, z_2] = h([w, z_1]) \subset h(D(w)) = D(hw).$$

Segue que  $z_2$  é equidistante de  $w$  e de  $hw$ . Daí,

$$\rho(w, z_2) = \rho(hw, z_2) = \rho(w, h^{-1}z_2) = \rho(w, z_1)$$

□

Cada lado de  $D(w)$  é da forma  $s = \overline{D(w)} \cap g(\overline{D(w)}) = \overline{D(w)} \cap \overline{D(gw)}$  e, em vista da discussão anterior,  $s$  deve estar contido em algum dos  $L_g(w)$ . Por razões parecidas, os vértices de  $D(w)$  são pontos de sua fronteira, onde dois ou mais dos  $L_g(w)$  se intersectam.

### Exemplo:

Seja  $G$  o grupo modular agindo em  $\mathbb{H}^2$  (grupo das transformações de Möbius cujas matrizes representantes tem entradas inteiras). Devemos mostrar que o polígono aberto  $P$  na Figura 9 é o polígono de Dirichlet de centro  $iv, \forall v > 1$ . Seja então  $w = iv$ , onde  $v > 1$  e, por brevidade, escrevamos  $D = D(w), L_g = L_g(w)$  e  $H_g = H_g(w)$ .

Primeiramente, as isometrias  $fz = z + 1$  e  $gz = \frac{-1}{z}$  estão em  $G$  e os três lados geodésicos de  $P$  são precisamente  $L_f, L_{f^{-1}}$  e  $L_g$ . De fato,  $L_f = \{z \in \mathbb{H}^2; \rho(z, w) = \rho(z, w + 1)\}$  é justamente a reta  $\{Re[z] = \frac{1}{2}\}$ . Pelo mesmo argumento,  $L_{f^{-1}} = \{Re[z] = -\frac{1}{2}\}$ . Resta mostrar que  $L_g = \{|z| = 1\}$ .

Temos:

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, iv) = \cosh \rho(z, -\frac{1}{iv}) &\Leftrightarrow 1 + \frac{|z - iv|^2}{2Im[z]v} = 1 + \frac{|z + \frac{1}{iv}|^2}{2Im[z]\frac{1}{v}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z - iv|^2 = v^2|z + \frac{1}{iv}|^2 = |vz + \frac{1}{i}|^2 = |vz - i|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + ivz - iv\bar{z} + v^2 = v^2|z|^2 + ivz - iv\bar{z} + 1 \Leftrightarrow |z|^2(1 - v^2) = 1 - v^2. \end{aligned}$$

Como  $v > 1$ , segue que  $\cosh \rho(z, iv) = \cosh \rho(z, g(iv)) \Leftrightarrow |z| = 1$  e, portanto,  $L_g = \{|z| = 1\}$ .

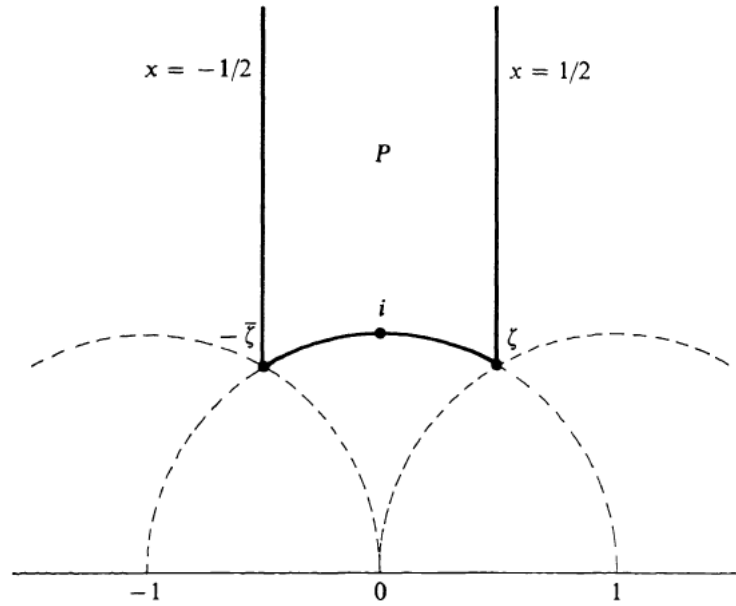


Figura 9: P

Isto mostra que  $D \subset P$ .

Se supomos  $D \neq P$ , então algum lado de  $D$  deve intersectar  $P$  e, daí, existe  $z \in D$  tal que  $h(z) \in h(D) \cap P$  e, assim,  $z$  é tal que  $z, hz \in P$ . Mostraremos que isto não pode ocorrer.

Escreva  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , onde  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Então:

$$|cz+d|^2 = c^2|z|^2 + 2\operatorname{Re}[z]cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd|, \text{ pois } |z| > 1 \text{ e } |\operatorname{Re}[z]| < \frac{1}{2}.$$

Este limitante inferior é um inteiro positivo (só seria 0 se  $c = d = 0$ , mas  $ad - bc = 1$ ).

Concluimos que  $|cz + d| > 1$  e, como

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2},$$

segue que  $\operatorname{Im}[hz] = \operatorname{Im}\left[\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{(ad+bc)x+(ad-bc)yi}{|cz+d|^2}\right] = \frac{\operatorname{Im}[z]}{|cz+d|^2}$ , onde  $z = x + iy$ .

Daí,

$$\operatorname{Im}[h(z)] = \frac{\operatorname{Im}[z]}{|cz+d|^2} < \operatorname{Im}[z].$$

O mesmo vale substituindo  $z$  e  $h$  por  $hz$  e  $h^{-1}$ . Daí,  $\operatorname{Im}[z] < \operatorname{Im}[hz]$  e temos uma contradição.

Então  $D = P$ .

□

Como  $D$  é um polígono fundamental convexo, os resultados da seção anterior valem. Podemos então ver  $D$  tendo 3 lados,  $s_1 = [\zeta, \infty)$ ,  $s_2 = [-\bar{\zeta}, \infty)$  e  $[-\bar{\zeta}, \zeta]$ , com as funções de emparelhamento satisfazendo  $f(s_2) = s_1$ ,  $f^{-1}(s_1) = s_2$  e  $g(s_3) = s_3$ , ou adotar a convenção alternativa, substituindo  $s_3$  pelos dois lados  $s_4 = [-\bar{\zeta}, i]$  e  $s_5 = [i, \zeta]$  e considerando  $i$  um vértice de  $D$ .

Como  $P$  é um polígono fundamental para  $G$ , o polígono  $P_1$  na Figura 9 também o é. Apenas substituímos uma faixa vertical de  $P$  pela sua imagem por  $f$ .

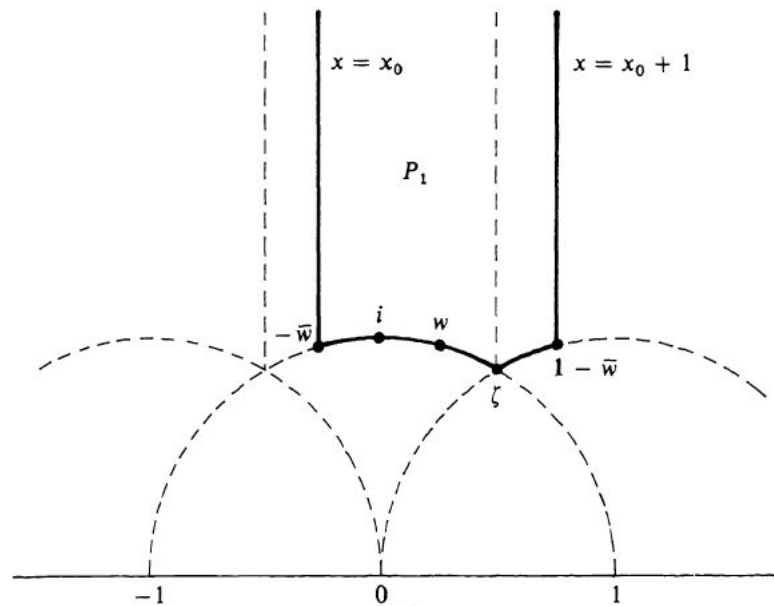


Figura 10:  $P_1$

Aqui,  $P_1$  tem 5 ou 6 lados. No caso em que consideramos  $P_1$  com 6 lados, estes são:

$$s_1 = [-\bar{w}, \infty], s_2 = f(s_1) = [1 - \bar{w}, \infty], s_3 = [-\bar{w}, i],$$

$$s_4 = g(s_3) = [i, w], s_5 = [w, \zeta], s_6 = f(g(s_5)) = [\zeta, 1 - \bar{w}].$$

No caso em que consideremos  $P_1$  com 5 lados, vemos  $[-\bar{w}, w] = g([-\bar{w}, w])$  como sendo um único lado.

**Teorema 4.13.** Seja  $G$  um grupo Fuchsiano e  $D(w)$  o polígono de Dirichlet de centro  $w$ . Então, para quase todas as escolhas de  $w$  (a menos de um conjunto de medida nula), temos:

- (1) Todo ciclo elíptico em  $D(w)$  tem comprimento 1;
- (2) Todo ciclo acidental em  $\partial D(w)$  tem comprimento 3;

- (3) Todo vértice impróprio que é um ponto ordinário está em um ciclo de comprimento 2;
- (4) Todo vértice próprio tem comprimento de seu ciclo igual a 1 e é ponto fixo parabólico;
- (5) Todo ciclo parabólico tem comprimento 1 e é um vértice próprio.

*Demonstração.* A prova de cada item  $(k)$ , para  $k = 1, \dots, 5$ , segue o mesmo padrão: Se a condição  $(k)$  falha, então  $w$  deve pertencer a um conjunto excepcional  $E_k$ , de medida nula. Assim, se  $w \notin \bigcup_{k=1}^5 E_k$ , que tem medida nula, todas as condições são válidas.

Para verificar (1), seja  $E_1$  a união (enumerável) de todas as geodésicas equidistantes de dois pontos fixos elípticos. Claramente,  $E_1$  tem medida nula. Se existem  $u$  e  $v$  pontos fixos elípticos distintos em um mesmo ciclo, pelo Teorema 4.12,  $\rho(u, w) = \rho(v, w)$ . Daí,  $w \in E_1$ .

Para o restante da prova, fazemos uso do seguinte Lema, cuja prova pode ser encontrada em [1] (Capítulo 9, seção 9.4).

**Lema 4.14.** Seja  $R(z)$  uma função racional não-constante em  $\mathbb{H}^2$ . Então

$$E = \{z \in \mathbb{H}^2; R(z) \in \mathbb{R}\}$$

tem medida nula.

Para todas  $f, g, h \in G$  distintas e não-triviais, definimos:

$$R(z) = \frac{(z - gz)(fz - hz)}{(z - fz)(gz - hz)}.$$

Note que  $R(z)$  pode ser constante, por exemplo no caso em que  $f, g$  e  $h$  fixam 0 e  $\infty$ .

Seja  $E_2 = \bigcup \{z; R(z) \in \mathbb{R}\}$ , sendo a união tomada sobre todos os trios  $\{f, g, h\}$  para os quais  $R$  não é constante (note que denotamos  $R(z)$ , mas  $R$  depende também de  $f, g$  e  $h$ ).

Pelo Lema 4.14,  $E_2$  tem medida nula e mostraremos agora que se (2) não ocorre,  $w \in E_2$ .

Suponhamos que (2) falha. Então existem quatro pontos distintos  $u, f^{-1}(u), g^{-1}(u), h^{-1}(u)$  em um mesmo ciclo acidental. Pelo Teorema 4.12, temos  $\rho(w, u) = \rho(fw, u) = \rho(gw, u) = \rho(hw, u)$ . Então os pontos  $w, fw, gw, hw$  pertencem a um círculo hiperbólico de centro

em  $u$ . Pela Proposição 2.10, segue que  $R(w)$  é real. Então, a menos que  $R$  seja constante,  $w \in E_2$ .

Mostraremos que  $R$  não pode ser constante. De fato, caso tivéssemos  $R(z) \equiv \lambda$ , escolhendo  $z \in \mathbb{H}^2$  que não seja fixado por nenhum dos elementos  $g, f, f^{-1}h, g^{-1}h$ , vemos que  $\lambda = R(z) \neq 0, \infty$ . Façamos agora  $z \rightarrow v$ , onde  $v$  é algum ponto fixo de  $g$ . O numerador e, conseqüentemente, o denominador de  $R$  convergem a zero. Assim,  $f$  ou  $h$  também fixa  $v$ . Suponha então que  $v$  seja ponto fixo comum de  $f$  e  $g$  (o mesmo argumento vale para  $h$ ). Como  $f, g \in G$  (Fuchsiano), segue que  $\langle f, g \rangle$  é um grupo cíclico, gerado, digamos, por  $p$ . Temos que  $p$  é hiperbólico, parabólico ou elíptico, dependendo se a órbita de qualquer ponto em relação a  $\langle f, g \rangle$  esteja, respectivamente, em um hiperciclo, horociclo ou círculo hiperbólico (possibilidades mutuamente exclusivas). Por hipótese, segue que  $p$  é elíptico e fixa o centro do único círculo hiperbólico através de  $w, fw, gw$ .

Concluimos que  $fu = gu = u$ , o que é uma contradição.

Isto prova (2).

Um argumento parecido prova (3), (4) e (5). Suponhamos inicialmente que  $v$  é um vértice próprio de  $D$ . Então existem dois lados,  $s_1 = \overline{D} \cap g(\overline{D})$  e  $s_2 = \overline{D} \cap h(\overline{D})$ , terminando em  $v$ . Como  $s_1$  está contido na geodésica bissectando  $[w, gw]$ , segue da seção 7.28 de [1] que  $v, w, gw, hw$  estão em um horociclo com base em  $v$ .

Considere agora a função  $R_1(z) = [v, z, gz, hz] = \frac{(v-gz)(z-hz)}{(v-z)(gz-hz)}$ .

Como um horociclo é um círculo Euclideano, segue que  $R_1(w) \in \mathbb{R}$ . A partir daí, temos duas opções: ou  $R_1$  é não-constante e  $w$  pertence a um conjunto de medida nula, ou  $R_1$  é contante.

Devemos mostrar que no último caso, (3), (4) e (5) valem.

Suponhamos então que  $R_1(z) \equiv \lambda$ , onde  $\lambda \neq 0, \infty$ . Fazendo  $z \rightarrow v$ , vemos que  $g$  ou  $h$  fixa  $v$ . Por simetria, podemos supor que  $g(v) = v$ . Então, pelo Teorema 4.10,  $g$  é parabólico. Isto implica que o lado  $g^{-1}(s_1)$  de  $D$  também termina em  $v$  e, então, é justamente o lado  $s_2$ . Logo,  $h = g^{-1}$  e  $v$  é ponto fixo parabólico em um ciclo de comprimento 1. Isto estabelece (4) e (5), pois todo ponto fixo parabólico em  $\partial D$  é um vértice próprio, pelo mesmo Teorema.

Finalmente, qualquer vértice impróprio  $v$  que é um ponto ordinário pertence a um ciclo finito  $v_1, \dots, v_n$  e  $D$  tem ângulos  $\theta_1, \dots, \theta_n$  nesses pontos, onde cada  $\theta_j$  vale  $\frac{\pi}{2}$  ou 0 e  $\sum \theta_j = \pi$ .

Usando (4), vemos que  $\theta_j$  não pode ser 0. Então  $n = 2$  e está demonstrado (3).

□



## *Referências*

- [1] Alan F. Beardon. The Geometry of Discrete Groups, 1st edition. Springer - Verlag, New York, 1983
- [2] Celso Melchades Doria, ESTRUTURAS GEOMÉTRICAS EM DIMENSÃO 2, UFSC (cmdoria@mtm.ufsc.br).
- [3] Lima, E.L., Elementos de topologia Geral. Editora SBM, Rio de Janeiro-RJ, 2009.