Capítulo 2

Limite de uma função

Podemos afirmar que o conceito de limite é uma das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial. Seu processo de construção surge historicamente a partir de problemas geométricos como, por exemplo, no cálculo da área de regiões planas e na determinação retas tangentes à uma curva. Apresentaremos rapidamente esses dois problemas que motivaram a definição de limite, como no livro *Cálculo com Geometria Analítica - Vol.1* de George Simmons (Editora Makron Brooks).

2.1 O problema das áreas - método de exaustão

A área de um retângulo é o produto das medidas de sua base e sua altura. Já a área de um triângulo é a metade do produto das medidas de sua base e altura. Como um polígono pode ser sempre decomposto em triângulos, sua área é a soma das áreas desses triângulos.

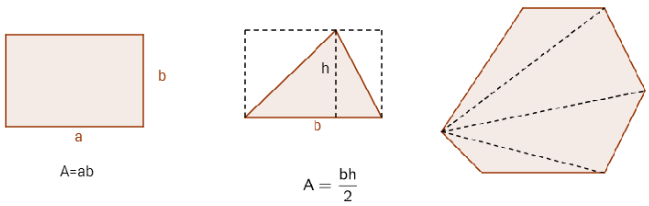


Figura 2.1: Áreas.

O círculo é uma figura mais complicada. Os gregos resolveram o problema de achar a sua área de uma maneira natural.

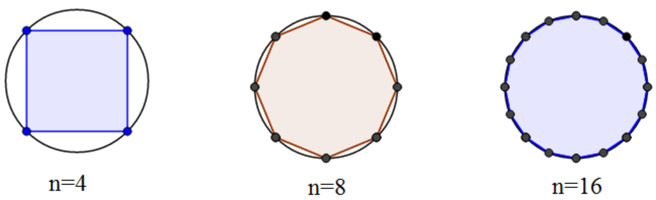


Figura 2.2: Método para aproximar a área do círculo.

Primeiro eles aproximaram essa área, inscrevendo um quadrado. Depois eles melhoram a aproximação, passo a passo, dobrando o número de lados, isto é, inscrevendo um octógono regular, depois um polígono regular de 16 lados e assim por diante. As áreas desses polígonos inscritos aproximam a área exata do círculo com uma precisão cada vez melhor. Vamos ver que esse processo chega à fórmula $A = \pi r^2$ para a área do círculo de raio r.

Suponha que o círculo tenha inscrito nele um polígono com um número grande n de lados, como na Figura 2.3.

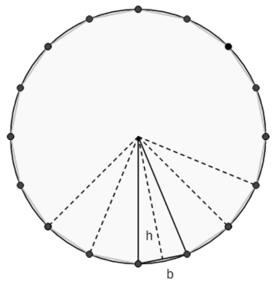


Figura 2.3: Círculo com polígono de n lados.

Cada um dos triângulos isóceles mostrados na figura anterior tem área igual a $\frac{bh}{2}$ e a soma dessas áreas é igual a área do polígono, que é uma aproximação da área do círculo. Se p denota o perímetro do polígono, então temos que

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh + \ldots + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h(b + b + \ldots + b) = \frac{1}{2}hp.$$

Como o número de lados cresce, h "tende" a r (em símbolos $h \to r$) e p "tende" ao comprimento do círculo $c = 2\pi r$ (em símbolos $p \to c$). Portanto,

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2}hp \longrightarrow \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(2\pi r) = \pi r^2.$$

Esse processo é conhecido por *método de exaustão* porque a área do círculo foi *exaurida* pelas áreas dos polígonos inscritos.

2.2 Reta tangente a uma curva

Um problema básico do Cálculo Diferencial é o problema das tangentes: determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto P dado.

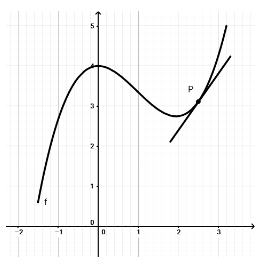


Figura 2.4: Reta tangente à uma curva.

Antes de tentar calcular o coeficiente angular da reta tangente, devemos decidir primeiro o que é uma reta tangente. No caso de uma circunferência não há dificuldade. Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto, chamado ponto de tangência. As retas não tangentes ou não interceptam a circunferência ou interceptam em dois pontos.

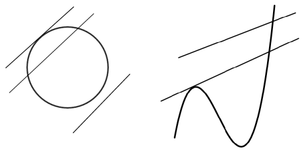


Figura 2.5: Relações entre círculo e retas e entre curvas e retas.

Essa situação reflete a ideia intuitiva que a maioria das pessoas tem de tangente a uma curva num dado ponto como sendo a reta que "toca" a curva naquele ponto. Ela sugere também a possibilidade de definir uma tangente a uma curva como uma reta que intercepta a curva em apenas um ponto, mas em geral essa ideia é insatisfatória, como vemos na Figura 2.5.

O conceito moderno de reta tangente originou-se com Fermat, em torno de 1630. Considere uma curva, gráfico da função $y = f(x)$, e P um ponto nessa curva. Considere Q um segundo ponto próximo de P sobre essa curva e desenhe a reta secante PQ. A reta tangente em P pode ser definida como a posição limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva na direção de P.

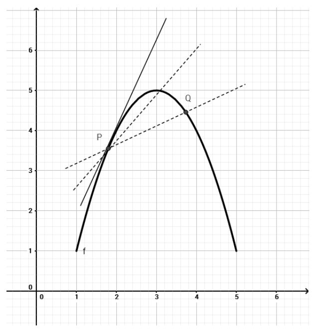


Figura 2.6: Posição limite da secante.

Mas como calcular o coeficiente angular da reta tangente? Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto na curva $y = f(x)$. Para começar o processo escolha um segundo ponto $Q = (x_1, y_1)$ sobre a curva. O coeficiente angular da secante PQ é

$$m_{sec} = \text{coeficiente angular da reta } PQ = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

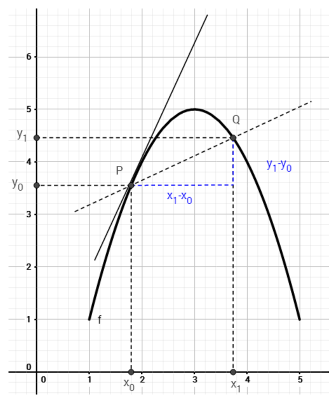


Figura 2.7: Cálculo do coeficiente angular.

Em seguida, façamos x_1 se aproximar de x_0, de modo que o ponto variável Q se aproxime do ponto P, ao longo da curva. Quando acontece isso, a secante muda de posição e se aproxima da tangente em P como sua posição limite. É também intuitivo que o coeficiente angular m

da tangente é o valor limite aproximado pelo coeficiente angular m_{sec} da secante. Se usarmos o símbolo $\to$ para indicar "se aproxima" (ou "tende"), então dizemos que quando x_1 tende a x_0, m_{sec} tende a m e escrevemos:

$$m = \lim_{P \to Q} m_{sec} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

A formalização do conceito de limite de uma função visto através do método da exaustão e do cálculo do coeficiente angular de uma reta tangente será nosso objeto de estudo ao longo do capítulo.

2.3 Definição de limite

Intuitivamente dizemos que uma função f tem limite L quando x tende para a, se é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq a$, suficientemente próximos de a.

Inicialmente, vamos desenvolver essa ideia intuitiva, estudando o comportamento de uma função $y = f(x)$ próximo a um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio.

Consideramos, por exemplo, a função a seguir, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Vamos construir uma tabela de valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1, pela esquerda (isto é, quando $x < 1$) e pela direita (isto é, quando $x > 1$):

$x < 1$	$x - 1$	$f(x)$
0	-1	2
0,5	-0,5	2,5
0,7	-0,3	2,7
0,9	-0,1	2,9
0,99	-0,01	2,99
0,999	-0,001	2,999
0,9999	-0,0001	2,9999
0,99999	-0,00001	2,99999
0,999999	-0,000001	2,999999
0,9999999	-0,0000001	2,9999999
0,99999999	-0,00000001	2,99999999

$x > 1$	$x - 1$	$f(x)$
2	1	4
1,5	0,5	3,5
1,3	0,3	3,3
1,1	0,1	3,1
1,09	0,01	3,09
1,009	0,001	3,009
1,0009	0,0001	3,0009
1,00009	0,00001	3,00009
1,000009	0,000001	3,000009
1,0000009	0,0000001	3,0000009
1,00000009	0,00000001	3,00000009

Observando as tabelas, concluimos que: quando x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 3. A noção de proximidade fica mais precisa se utilizarmos o valor absoluto: no caso, o que observamos é que quando $|x-1|$ fica pequeno $|f(x)-3|$ fica pequeno também. Veja que essa relação de implicação vem da própria função, pois quando $x \neq 1$, isto é, $x \in \operatorname{Dom} f$, então:

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} - 3 \right| = |x + 2 - 3| = |x - 1|$$

Assim, a distância entre $f(x)$ e 3 depende da distância entre x e 1.

Para outro exemplo, vamos considerar $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$. Aqui, o domínio de f é todo o conjunto dos reais. Vamos analisar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 1. Para isso, vamos assumir que $|x - 1|$ está ficando pequeno, como no exemplo anterior.

$x < 1$	$x - 1$	$f(x)$
0	-1	1
0,5	-0,5	1,25
0,7	-0,3	1,35
0,9	-0,1	1,45
0,99	-0,01	1,495
0,999	-0,001	1,4995
0,9999	-0,0001	1,49995
0,99999	-0,00001	1,499995
0,999999	-0,000001	1,4999995
0,9999999	-0,0000001	1,49999995
0,99999999	-0,00000001	1,499999995

$x > 1$	$x - 1$	$f(x)$
2	1	2
1,5	0,5	1,75
1,3	0,3	1,65
1,1	0,1	1,55
1,09	0,01	1,545
1,009	0,001	1,5045
1,0009	0,0001	1,50045
1,00009	0,00001	1,500045
1,000009	0,000001	1,5000045
1,0000009	0,0000001	1,50000045
1,00000009	0,00000001	1,500000045

Pelas tabelas, vemos que quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de $\dfrac{3}{2}$. Na verdade, como fizemos no exemplo anterior, podemos notar que

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-1|$$

Isto é, a distância entre $f(x)$ e $\dfrac{3}{2}$ depende da distância entre x e 1. Por exemplo, se a distância entre x e 1 for menor do que $0,0001$, isto é, $|x-1| < 0,0001$, então a distância entre $f(x)$ e $\dfrac{3}{2}$ será

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-1| < 0,00005$$

Vemos que o tamanho $0,0001$ foi apenas um exemplo, pois podemos escolher qualquer número positivo, o menor que seja, e fazer o mesmo raciocínio.

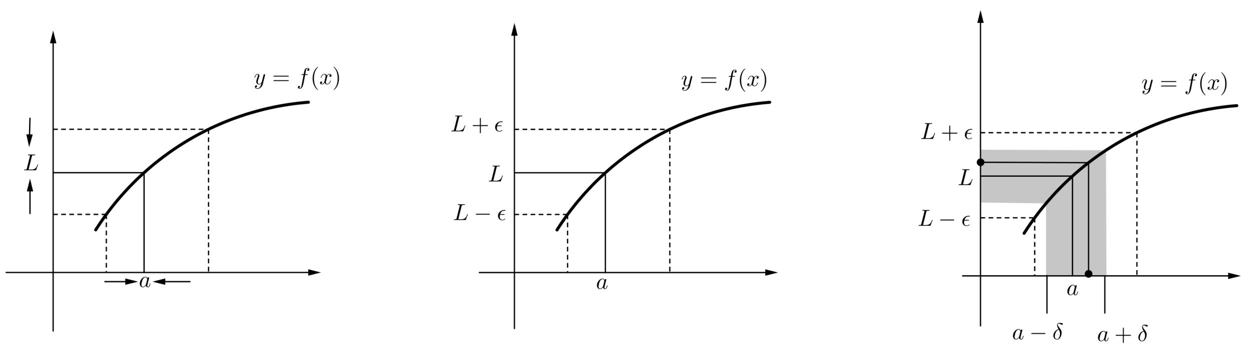
Estamos prontos para a definição formal de limite. Compare-a com os exemplos anteriores.

Definição 2.1. Sejam a um número real e I um intervalo aberto contendo a. Seja f uma função definida em I, exceto, talvez, no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Observação 2.1. Como vimos no primeiro exemplo dessa seção, para a definição de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não é necessário que a função f esteja definda em a. Nos interessa o comportamento de $f(x)$ quando x está próximo de a.

Teorema 2.1. *Se existe limite de uma função $f(x)$, quando x tende a a, então ele é único.*

Exemplo 2.1. Sejam k um número real e $f(x) = k$ a função constante. Então para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$. Primeiro, notamos que $|f(x) - k| = |k - k| = 0$, que é menor do que qualquer número positivo. Então, fixando qualquer $\varepsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos que independentemente de $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$ sempre teremos $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Exemplo 2.2. Sejam a um número real e $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim\limits_{x \to a} x = a$. De fato, fixando qualquer $\varepsilon > 0$, então escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos:

$$0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Exemplo 2.3. Vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 3) = 1$. Para isso, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(2x - 3) - 1| < \varepsilon.$$

Observe que $|(2x - 3) - 1| = |2x - 4| = |2(x - 2)| = 2|x - 2|$. Logo: se $0 < |x - 2| < \delta$, então $|(2x - 3) - 1| = 2|x - 2| < 2\delta$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado, escolhendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ teremos que

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |(2x - 3) - 1| = |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exemplo 2.4. O exemplo anterior pode ser generalizado para qualquer função afim $f(x) = ax + b$ quando x tende a c, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. De fato, para mostrar que $\lim\limits_{x \to c}(ax + b) = ac + b$, vemos primeiro que $|ax + b - (ac + b)| = |ax - ac| = a|x - c|$. Assim, fixando $\varepsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{a}$ temos que

$$0 < |x - c| < \frac{\varepsilon}{a} \Longrightarrow |ax + b - (ac + b)| = |ax - ac| = a|x - c| < a\delta = \frac{a\varepsilon}{a} = \varepsilon.$$

2.4 Propriedades do limite de uma função

Teorema 2.2. *Sejam f e g funções definidas em um intervalo I contendo a, exceto, possivelmente, em a. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então:*

L1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$;

L2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)g(x)) = LM$;

L3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$;

L4) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, *se* $L > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *ou* $L < 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *ímpar.*

Uma consequência imediada das propriedades L1 e L2 é o exemplo dado a seguir.

Exemplo 2.5. Se $p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 := \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$ é uma função polinomial, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} p(x) = \lim_{x \to a} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right) \underset{\uparrow \atop \text{L1}}{=} \sum_{i=0}^{n} \left(\lim_{x \to a} b_i x^i \right) \underset{\uparrow \atop \text{L2}}{=} \sum_{i=0}^{n} b_i a^i = p(a).$$

Pelo exemplo anterior, uma função polinomial é nosso primeiro exemplo de *função contínua*, isto é, uma função tal que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in D(f)$. Voltaremos a isso mais a frente.

Exemplo 2.6. Pelo exemplo 2.5, temos: $\lim_{x\to 2}(x^2+3x+5) = 2^2+6+5 = 15$.

Exemplo 2.7. Pela propriedade L3 e o exemplo 2.5, como 3 não é raiz de x^3-7, temos

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-5}{x^3-7}\right) = \frac{3-5}{3^3-7} = -\frac{1}{10}.$$

Exemplo 2.8. Pela propriedade L4 e o Exemplo 2.5,

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{x^3-4x+1} = \sqrt{(-2)^3+8+1} = \sqrt{1} = 1.$$

Exemplo 2.9. Como, pelo exemplo 2.5 e a propriedade L3, $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x+1}{3x-2} = 2$, segue da propriedade L2 que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-x+1}{3x-2}\right)^2 = 4$.

2.5 Forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$

Se f e g são funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$, o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende a a, pode ou não existir e, portanto, é denominado forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, já que o limite pode ou não existir, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 2.10. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) = \frac{3}{2}$.

Exemplo 2.11. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Exemplo 2.12. Não existe $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}\right)$. Esse tipo de problema será tratado mais a frente.

Nesse momento, para resolvermos limites com a forma indeterminada $0/0$, devemos trabalhar a expressão do quociente $f(x)/g(x)$ a fim de não mais ter uma indeterminação. Vamos começar calculando os limites dos exemplos 2.10 e 2.11.

No primeiro, temos que 1 é raiz do numerador e do denominador, então vamos fatorá-los, o que é feito através de divisão de polinômios.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) \underset{\text{fatorando } x^3-1 \text{ e } x^2-1}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) \underset{\text{como } x-1\neq 0}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right) \underset{\text{L3}}{=} \frac{3}{2}$$

No segundo, novamente 1 é raiz do numerador e do denominador, mas a função não é racional. Nesse caso, vamos racionalizar o quociente, isto é, multiplicar por 1 como uma fração de numerador e denominador iguais a $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}$. Usaremos ainda o fato de que $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{racionalizando}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vamos fazer mais exemplos:

Exemplo 2.13. Mais um exemplo com fatoração.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{colocando } x-1 \text{ em evidência}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(3x^2-x-2)}{(x-1)(2x^2-x-1)}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^2-x-2}{2x^2-x-1}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{continuamos com } 0/0\text{, dividimos por } x-1 \text{ de novo}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(2x+1)}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right) = \frac{5}{3}$$

Note que se tivéssemos fatorado o numerador e o denominador, teríamos poupado trabalho:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fatorando}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)^2(3x+2)}{(x-1)^2(2x+1)}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right) = \frac{5}{3}$$

Exemplo 2.14. Mais uma exemplo com racionalização.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{racionalizando}}}{=} \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-3\neq 0}}{=} \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+2}\right) = \frac{1}{4}$$

Para alguns limites do tipo $0/0$, pode ser útil fazer uma mudança de variáveis, como veremos a seguir.

Exemplo 2.15. Vamos calcular $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}\right)$ fazendo uma troca de variáveis do tipo $y = \sqrt[3]{4x}$. Como $x \to 2$, temos que $y \to \sqrt[3]{8} = 2$. Ainda, como $y = \sqrt[3]{4x}$, temos que $4x = y^3$, donde

$x = \dfrac{y^3}{4}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}\right) &\underset{\text{fazendo } y=\sqrt[3]{4x}}{=} \lim_{y\to 2}\left(\frac{y-2}{\frac{y^3}{4}-2}\right) = \lim_{y\to 2}\left(4\cdot\frac{y-2}{y^3-8}\right)\\
&\underset{\text{fatorando } y^3-8}{=} \lim_{y\to 2}\left(4\cdot\frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)}\right) \underset{\text{como } y\neq 2}{=} \lim_{y\to 2}\left(\frac{4}{y^2+2y+4}\right) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.16. Vamos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$ fazendo a seguinte troca de variáveis $y = \sqrt[6]{x}$. Temos que

$$y = \sqrt[6]{x} \Rightarrow y^2 = \sqrt[3]{x} \text{ e } y^3 = \sqrt{x}$$

Além disso, como $x \to 1$, temos que $y \to \sqrt[6]{1} = 1$. Dessa forma:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) \underset{\text{fazendo } y=\sqrt[6]{x}}{=} \lim_{y\to 1}\left(\frac{y^2-1}{y^3-1}\right) \underset{\text{fatorando}}{=} \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \underset{\text{como } y-1\neq 0}{=} \lim_{y\to 1}\left(\frac{y+1}{y^2+y+1}\right) = \frac{2}{3}$$

2.6 Limites Laterais

Ao considerarmos $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$, estamos interessados no comportamento da função $y = f(x)$ para valores de x próximos de a, podendo ser x maior ou menor que a. Entretanto, algumas funções tem um comportamento diferente à direita e à esquerda de a.

Exemplo 2.17. Considere a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, então

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, se x está próximo de 0 e à direita de 0, então os valores de $f(x)$ são sempre iguais a 1. Por outro lado, se x está próximo de 0 e à esquerda de 0, então os valores de $f(x)$ são sempre iguais a -1.

Representamos essa situação da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1.$$

O símbolo $x \to 0^+$ indica que estamos considerando somente valores de x maiores que 0 e o símbolo $x \to 0^-$ indica que estamos considerando somente valores de x menores que 0.

Definição 2.2. (Limite lateral à direita) Seja f uma função definida no intervalo aberto (a, b). Escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L, se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L bastando para isso tomarmos valores de x suficientemente próximos de a e à direita de a. Isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente definimos limite lateral à esquerda.

Definição 2.3. (Limite lateral à esquerda) Seja f uma função definida no intervalo aberto (c, a). Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L, se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L bastando para isso tomarmos valores de x suficientemente próximos de a e à esquerda de a. Isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 2.2. As propriedades L1, L2, L3 e L4 do Teorema 2.2 continuam válidas para limites laterais, ou seja, se trocarmos $x \to a$ por $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.

Exemplo 2.18. Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$. Como $x \to 2^+$ quer dizer que $x > 2$, temos que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \sqrt{2-2} = 0$. Por outro lado, se $x \to 2^-$, temos que $x < 2$, donde $x - 2 < 0$ e a função não está definida para valores negativos. Assim, não podemos calcular o limite à esquerda $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

Exemplo 2.19. Considere a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Temos que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$. Assim, nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, não estão definidos os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente. No entanto

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

Limites laterais são especialmente importantes no cálculo de limites de funções definidas por partes, já que a existência do limite de $f(x)$ quando x tende a a está condicionada à existência dos limites laterais da seguinte forma:

Teorema 2.3. *Se f está definida em um intervalo aberto I contendo a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.*

Exemplo 2.20. Vamos calcular, se possível, o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1, \\ -1, & \text{se } x = 1 \\ -2 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quando $x < 1$, a função é $x^2 - 4$, donde

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 4) = -3\,.$$

Já quando $x > 1$, temos $f(x) = -2 - x$, donde

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2 - x) = -3\,.$$

Então, pelo teorema 2.3, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$.

Note que não usamos o fato de $f(1) = -1$, já que no cálculo do limite estamos interessados no comportamento da função quando x se aproxima de 1, mas é diferente de 1. Ainda, note que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -3 \neq -1 = f(1)$$

isso quer dizer que a função $f(x)$ *não é contínua em $x = 1$*. Esse será o assunto da próxima seção.

Note ainda que poderíamos calcular facilmente outros limites. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 - 4 = -4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} -2 - x = -5$$

pois a lei da função na proximidade de 0 ou de 3 não muda.

Exemplo 2.21. Vamos calcular, se possível, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ onde $f(x) = \dfrac{|3x^2 - 5x - 2|}{x-2}$, $x \neq 2$. Primeiro, notamos que essa é uma função por partes:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x-2}, & \text{se } x \leq -1/3 \\[2mm] \dfrac{-3x^2 + 5x + 2}{x-2}, & \text{se } -1/3 < x < 2 \\[2mm] \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x-2}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Então:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \underset{\text{como } -1/3 < x < 2}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x-2} \underset{\text{fatorando } -3x^2+5x+2}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-(3x+1)(x-2)}{x-2} \underset{\text{como } x-2\neq 0}{=} \lim_{x\to 2^-} -(3x+1) = -7$$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{\text{como } x > 2}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x-2} \underset{\text{fatorando } 3x^2-5x-2}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(3x+1)(x-2)}{x-2} \underset{\text{como } x-2\neq 0}{=} \lim_{x\to 2^+} 3x + 1 = 7$$

Portanto, pelo Teorema 2.3, não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Exemplo 2.22. (Questão da 1^a prova de 2017-1) Vamos calcular, se existir, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3|x|}{2x}$.

Temos que $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, assim, é necessário analisar os limites laterais. Temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 3|x|}{2x} \underset{x\to 0^+ \Rightarrow x>0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 3x}{2x} \underset{\text{fatorando } x^2-3x}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-3)}{2x} \underset{\text{como } x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x-3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 3|x|}{2x} \underset{x\to 0^- \Rightarrow x<0}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 3x}{2x} \underset{\text{fatorando } x^2-3x}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+3)}{2x} \underset{\text{como } x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{2} = \frac{3}{2}$$

Como os limites laterais são distintos, segue que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3|x|}{2x}$.

2.7 Função contínua

Definição 2.4. Seja f uma função definida no intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é contínua em a se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Observação 2.3. Note que estamos exigindo, na verdade, 3 condições para que f seja contínua em a:

1. existe $f(a)$, 2. existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e 3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 2.23. Para todo $a \in (0, +\infty)$, a função $y = \sqrt{x}$ é contínua em a.

Exemplo 2.24. (veja o exemplo 2.5) A função polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é contínua em a, para todo $a \in \mathbb{R}$, já que

$$\lim_{x \to a} p(x) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = p(a).$$

Nesse caso, como é contínua em todo $a \in D(p)$, dizemos apenas que $p(x)$ é contínua.

Definição 2.5. Dizemos que uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Definição 2.6. Seja f uma função definida no intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é descontínua em a se f não for contínua em a, isto é, se:

$$\text{não existe} \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a).$$

Exemplo 2.25. A função do exemplo 2.20 é descontínua em 1 pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3 \neq -1 = f(1)$. Porém, nos demais $a \in \mathbb{R}$, a função é contínua (pois é polinomial). De fato, $D(f) = \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} -2 - x = -2 - a = f(a), \text{ se } a > 1 \\ \lim\limits_{x \to a} x^2 - 4 = a^2 - 4 = f(a), \text{ se } a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.26. A função $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \neq 1, \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é descontínua em 1. De fato,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3 \neq 4 = f(1)$$

Porém, para os demais $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f é contínua (pois é polinomial).

Exemplo 2.27. Vamos determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a, \text{ se } x < -1 \\ b, \text{ se } x = -1 \\ -x + 1, \text{ se } x > -1 \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$. Para $x < -1$ e $x > -1$, a função é polinomial e, portanto, contínua. Para $x = -1$, devemos ter

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = b$$

Temos que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 - a = -a + 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} -x + 1 = 2$$

Assim, para que exista $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, devemos ter $a = -1$. Por fim,

$$b = f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = 2$$

Exemplo 2.28. (Questão da 1^a prova de 2017-1) Consideramos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 - 3 & \text{se } x < a \\ x^2 - 7 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Vamos determinar os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$. Primeiro, para $x \neq a$ a função f é polinomial e portanto contínua. Temos que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} x^4 - 4x^2 - 3 = a^4 - 4a^2 - 3$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} x^2 - 7 = a^2 - 7.$$

Logo, para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é necessário que

$$a^4 - 4a^2 - 3 = a^2 - 7 \Leftrightarrow a = \pm 1 \text{ ou } a = \pm 2.$$

Além disso, como

$$f(a) = a^2 - 7 = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

o que fizemos anteriormente já basta. Portanto, temos que f é contínua se e somente se $a = \pm 1$ ou $a = \pm 2$.

Teorema 2.4. *Sejam f e g funções contínuas em a, então são contínuas em a as funções $f+g$, fg e f/g, se, neste último caso, $g(a) \neq 0$.*

Exemplo 2.29. Toda função racional é contínua em seu domínio, o que já sabíamos pela propriedade L3 de limites (ver Teorema 2.2).

Exemplo 2.30. (Questão da 1^a prova de 2016-2) Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

Vamos determinar a e b de forma que f seja contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 1$, a função é racional, donde é contínua. Para $x = 1$, temos que $f(1) = b$, donde devemos ter

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - ax + 2}{x - 1} = b$$

Para o limite existir, devemos ter 1 como raiz de $x^2 - ax + 2$, isto é,

$$1 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Portanto, $b = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x - 2 = -1$.

Teorema 2.5. *Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e g contínua em b,*

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b), \text{ ou seja, } \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)).$$

Em particular, a composição de funções contínuas é contínua.

Exemplo 2.31. Se $f(x)$ é uma função polinomial e $g(x) = \sqrt{x}$, então $g \circ f(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em a se $f(a) > 0$ (veja propriedade L4 no Teorema 2.2).

Como a continuidade depende da existência do limite $\lim_{x\to a} f(x)$, faz sentido estudar também continuidade lateral, analogamente ao que fizemos com limites laterais:

Definição 2.7. Seja f uma função definida no intervalo $[a, b)$ com $a < b$. Dizemos que f é contínua à direita de a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Seja f uma função definida no intervalo $(c, a]$ com $c < a$. Dizemos que f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Em particular, se f for uma função definida no intervalo aberto I com $a \in I$, f é contínua em a se e somente se for contínua à esquerda e à direita de a.

Definição 2.8. Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se f for contínua em (a, b), contínua à direita de a e contínua à esquerda de b.

Exemplo 2.32. Voltando à função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ do exemplo 2.19. Sabemos que $D(f) = [-1, 1]$ e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ se } a \in (-1, 1)$$

Portanto, f é contínua em seu domínio $[-1, 1]$.

Teorema 2.6. *(Teorema do Valor Intermediário) Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L for um número real tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = L$.*

Observação 2.4. Como consequência desse teorema temos que:

1. o gráfico de uma função contínua num intervalo pode ser traçado sem tirar o lápis do papel.
2. se f for contínua em $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo 2.33. Seja $f(x) = x^4 - 5x + 3$. Temos que $f(0) = 3$ e $f(1) = 1 - 5 + 3 = -1$, assim, pelo Teorema 2.6, existe pelo menos um $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = 0$. Ainda, $f(2) = 2^4 - 10 + 3 = 9$, então existe pelo menos mais uma raiz de $f(x)$ em $[1, 2]$.

2.8 Exercícios

1. Calcule os limites, se existirem.

   (a) $\lim_{x\to 2} \left(x^2 + 3x + 5\right)$

   (b) $\lim_{x\to 3} \left(\dfrac{x-5}{x^3-7}\right)^3$

   (c) $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$

   (d) $\lim_{x\to -2} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

   (e) $\lim_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2 - x}{3x}$

   (f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

   (g) $\lim_{x\to -3/2} \dfrac{6x^2 + 11x + 3}{2x^2 - 5x - 12}$

   (h) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}$

(j) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$

(k) $\lim_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

(l) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$

(m) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}}$

(n) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x}$

(o) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2+9}{x^2-1}$

(p) $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{x-4}{|x-4|}$

(q) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$

(r) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

(s) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

2. Calcule os limites, se existirem.

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-13x^2+51x-63}{x^3-4x^2-3x+18}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9x+9}-3}{x}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^3+3x^2-4x}$

(d) $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{4-t}-2}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

(f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+x+2}{x^3-x-6}$

(g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-10x^2+28x-24}$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x^2+3x}$

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

3. Sobre a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \le 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

pode-se afirmar que

(a) É definida e contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) É definida e contínua somente para $x > 3$.

(c) É definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e descontínua apenas em $x = 3$.

(d) É definida e contínua somente para $x \le 3$.

(e) É definida e contínua somente para $x \neq 3$.

4. Determine, se existir, o limite da função a seguir quando x tende a 1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}, & \text{se } x \neq 1 \\ 4, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

A função é contínua em $\mathbb{R}$?

5. Considere as seguintes afirmativas:

I. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

II. Se existe $\lim_{x\to a} |f(x)|$ então existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

III. Se f é uma função definida em $[a, b]$ e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Temos que

(a) Todas as afirmativas são verdadeiras.
(b) Todas as afirmativas são falsas.
(c) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(d) Apenas a afirmativa II é falsa.
(e) Apenas a afirmativa III é falsa.

6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função **contínua** $y = f(x)$ definida no intervalo $[-4, 8]$ dada por

$$\begin{cases} x+6, & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ ax+b, & \text{se } 0 < x < 4 \\ 2x-10, & \text{se } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Podemos afirmar que $a + b$ vale

(a) -12 (b) -2 (c) 0 (d) 4 (e) 6

7. Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ tem pelo menos uma solução real.

8. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

9. Calcule os limites laterais nos pontos de descontinuidade das funções a seguir.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{if } x < 2; \\ x^2+1, & \text{if } x > 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}.$

(c) $f(x) = \begin{cases} 5x-3, & \text{if } x < 1; \\ x^2, & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{if } x < -2; \\ x^2+3x-1, & \text{if } x \geq -2. \end{cases}$

10. (2016-2) Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a + \dfrac{2}{x}}{x-1}, & x \neq 1 \\ b, & x \neq 1 \end{cases}$$

Sabendo que f é contínua, podemos afirmar que:

(a) $ab > 0$ (b) ab é ímpar (c) $a + b = 0$ (d) $a + b < 0$ (e) $a < b$

2.9 Respostas dos exercícios

1. (a) 15 (b) -1/1000 (c) 5 (d) 2 (e) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$ (f) 2 (g) 7/11 (h) 1/4 (i) $\sqrt{2}/4$ (j) 1 (k) 3 (l) 1/8 (m) -9 (n) -1/8 (o) 5/3 (p) -1 (q) 1/4 (r) 6 (s) 1/6

2. (a) -4/5 (b) 3/2 (c) 3/5 (d) -4 (e) 1/6 (f) 1/11 (g) -5/4 (h) -1/12 (i) -4

3. (c)

4. $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$

5. (c)

6. (d)

7. $f(x) = x^3 - 4x + 8$ é contínua em $\mathbb{R}$, $f(-3) = -7$ e $f(1) = 5$. Logo, pelo TVI, existe $c \in (-3, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

8. Sim, existe $x \in [-2, 0]$.

9. (a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$
   (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$
   (c) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$
   (d) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -4$ e $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -3$

10. (b)