Capítulo 0

Pré-requisitos

O objetivo desse capítulo é apresentar uma coleção de propriedades e resultados sobre números reais e outros temas que serão utilizados ao longo do curso e devem ser relembrados por todos. Você deve ler esse capítulo com calma, refazendo os exemplos apresentados e, em seguida, os exercícios propostos. Você pode procurar seu professor, os monitores e os tutores para tirar dúvidas e solicitar sugestões de bibliografia para complementar algum tema que julgue necessário. Bons estudos!

0.1 Notação matemática

A matemática é uma linguagem e, como tal, tem suas regras de escrita. Por exemplo, quando escrevemos em português, sabemos que perguntas são pontuadas com o símbolo de interrogação e que frases devem começar com letra maiúscula. Conhecer os significados dos símbolos utilizados e as regras de utilização é essencial não só para compreender corretamente os textos, mas também para escrever de forma que sejamos compreendidos pelos demais. O mesmo vale para textos matemáticos.

Ao longo dessa apostila, utilizaremos noções de lógica matemática e símbolos lógicos que vamos apresentar brevemente nessa seção. Alguns símbolos você já conhece bem, por exemplo o $=$, que é colocado entre duas expressões matemáticas exatamente para mostrar que elas são iguais. Mesmo que você esteja continuando um raciocínio, não deve usar igualdade quando duas expressões não são iguais. Por exemplo, digamos que $2x^2 - 2 = 0$, sabemos que $0 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$ e, como consequência, podemos dividir tudo por 2 e obter $0 = x^2 - 1$. No entanto, não podemos escrever $2(x^2 - 1) = x^2 - 1$. Quando duas expressões não são iguais, podemos usar o símbolo $\neq$.

Lembre ainda que expressões matemáticas não devem ser lidas como frases de português, fazendo o que aparecer primeiro, mas sim respeitando prioridades. Você já sabe, mas não custa lembrar, a importância também dos parênteses, que servem para isolar expressões e indicando prioridades ao leitor. O uso de parênteses, em geral, não é opcional, pois muda a completamente o siginificado da expressão. Por exemplo

$$4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 12 + 8 = 20$$

é completamente diferente de

$$4 \cdot (3 + 4) \cdot 2 = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56$$

Isso ocorre porque, em geral, na leitura de uma expressão, multiplicações têm prioridade em cima de somas, mas, no segundo caso, utilizamos os parênteses para indicar que devemos priorizar a soma $3+4$. Outros exemplos desse tipo:

$$(-5)^2 = 25, \text{ mas } -5^2 = -25$$

$$2(x+1)+1 = 2x+3, \text{ mas } 2x+1+1 = 2x+2$$

Vamos pensar agora em implicações do tipo *se... então...*. Essa estrutura é comumente usada em matemática para apresentar uma noção de consequência:

Se chover, então o chão da rua ficará molhado.

Se o chão da rua não estiver molhado, podemos concluir que não choveu. Agora, se não chover, não podemos concluir que o chão da rua estará seco. De fato, ele pode ser molhado de outra forma. Ainda, se o chão da rua estiver molhado, não podemos concluir que choveu. Já que, novamente, ele pode ter sido molhado em outra situação. Assim, é importante notar qual é a *hipótese*, isto é, condição que deve acontecer, e qual é a *tese*, condição implicada pela inicial. Vamos passar a exemplos matemáticos.

Se $x = 5$, então $x^2 = 25$.
Se $2x^2 - 2 = 0$, então $x^2 - 1 = 0$.

Como vamos lembrar, se $x^2 = 25$, não podemos afirmar que $x = 5$. De fato, $(-5)^2$ também é 25. Ainda, se $x \neq 5$, não podemos afirmar que $x^2 \neq 25$, porque, novamente, podemos usar o exemplo do -5. Agora, se $x^2 \neq 25$, certamente $x \neq 5$. Faça esse mesmo raciocínio para a segunda afirmação apresentada.

Para representar a implicação *se... então...*, usamos o símbolo $\Rightarrow$.

$$x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$$

$$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

Note que o símbolo é uma seta dupla e não $\rightarrow$. Essa seta simples tem uma noção de aproximação que será vista mais pra frente no curso, pode ser lida como *tende a*. Veja que isso significa que não podemos usar a seta simples apenas para indicar que estamos continuando um raciocínio, já que ela tem outro significado matemático.

Voltando à expressão *se... então...*, podemos pensar ainda nas cojunções *e* e *ou*.

Se chover ou alguém o regar, o jardim ficará molhado.

Se chover e o jardim for descoberto, ele ficará molhado.

Veja que na primeira frase, qualquer uma das hipóteses *chover* ou *alguém o regar*, o jardim ficará molhado. Não é necessário que as duas ocorram, embora o jardim ainda fique molhado caso isso aconteça. Já na segunda frase, é necessário que as duas hipóteses aconteçam, pois um jardim coberto não ficará molhado se chover. Podemos pensar assim também na matemática:

Se x é primo ou $x = 2$, então $x \neq 4$.

Se x é par e x é primo, então $x = 2$.

A primeira expressão é verdadeira mesmo que só uma das hipóteses seja verdadeira, mas a segunda pode ser falsa se apenas x é par for verdadeira, por exemplo.

Agora, vejamos o seguinte exemplo, onde usamos a noção ± 1, que significa que estamos considerando tanto 1 quanto -1:

$$x = \pm 1 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Na primeira, $x = \pm 1$ é a hipótese e $x^2 = 1$ é a tese. Na segunda, hipótese e tese trocam de papéis. No entanto, ambas expressões são verdadeiras. Nesse caso, podemos usar uma implicação dupla $\Leftrightarrow$ e escrever matematicamente:

$$x = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

Lemos isso como $x = \pm 1$ *se e somente se* $x^2 = 1$ e entedemos exatamente que há duas implicações, uma em cada direção.

Ao longo desse capítulo, outros símbolos matemáticos serão relembrados, como $\subset$ e $\leq$. Fique atento às definições e ao uso dos vários símbolos apresentados.

0.2 Conjuntos Numéricos

Um conjunto é uma coleção de elementos. A relação básica entre um objeto e o conjunto é a relação de pertinência: quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x pertence a A e representamos como $x \in A$. Caso x não esteja no conjunto A, dizemos que x não pertence a A, isto é, $x \notin A$. Um conjunto sem elementos é dito vazio e representado por $\emptyset$.

Dados dois conjuntos A e B, podemos ter as seguintes relações:

- $A \subset B$ (lê-se A está contido em B), isto é, A é um subconjunto de B: nesse caso, todo elemento de A é também um elemento de B, mas pode ser que B tenha elementos que não pertençam a A. Essa relação pode ser escrita ainda como $B \supset A$ (lê-se B contém A).
- $A = B$, isto é, todo elemento de A é também um elemento de B e todo elemento de B é também um elemento de A, ou usando o item anterior, $A \subset B$ e $B \subset A$.
- $A \cap B$ é o conjunto interseção de A e B, isto é, o conjunto de todos os elementos que pertencem tanto a A quanto a B. Observe que se $A \subset B$, então $A \cap B = A$. Também observe que $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.
- Se dois conjuntos A e B são tais que $A \cap B = \emptyset$, então dizemos que A e B são disjuntos.
- $A \cup B$ é o conjunto união de A e B, isto é, o conjunto de todos os elementos que pertecem a A e/ou a B. Observe que se $A \subset B$, então $A \cup B = B$. Ainda, observe que $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

Alguns conjuntos são bem conhecidos:

- Conjunto dos naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Conjunto dos inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

- Conjunto dos racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{n}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

Veja ainda que todo número natural é um número inteiro e todo número inteiro é um número racional (basta ver o número n como $n/1$), isto é, em linguagem de conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Cada número racional tem também uma representação decimal finita ou como uma dízima periódica. Por outro lado, todo número que tem uma representação decimal finita e toda dizíma periódica são números racionais.

$$\frac{1}{4} = 0,25 \qquad \frac{12}{5} = 2,4 \qquad \frac{5}{12} = 0,4166\cdots = 0,41\underbrace{\overline{6}}_{\text{período}} \qquad \frac{1}{3} = 0,33\cdots = 0,\underbrace{\overline{3}}_{\text{período}}$$

Existem ainda números que não podem ser representados na forma $\dfrac{n}{m}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$, isto é, números cuja expansão decimal não é finita e nem periódica. Tais números são ditos irracionais e representados por $\mathbb{Q}^c$. Por exemplo:

$$2,101001000100001... \qquad \sqrt{2} \cong 1,41421... \qquad \pi \cong 3,1415927... \qquad e \cong 2,7182818....$$

Observe que, pela definição acima, os conjuntos dos racionais e dos irracionais não tem elementos em comum, isto é, são disjuntos ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$). O conjunto dos números reais é a união de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^c$, isto é:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$$

Observação 0.1. Algumas observações sobre operações com números inteiros, racionais e irracionais:

1. Observe que o conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é fechado para a soma, subtração e produto, isto é, se a e b são números inteiros, então $a+b$, $a-b$ e $a \cdot b$ também são números inteiros. Observe ainda que a/b pode não ser inteiro, mesmo a e b sendo. Por exemplo, se $a = 4$ e $b = 2$, então $a/b = 2$ é um inteiro, mas $b/a = 1/2$ não é um inteiro.

2. O conjunto dos racionais é fechado para a soma, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional. De fato:
$$\underbrace{\frac{n}{m}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{p}{q}}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{nq+mp}{mq}}_{\in\mathbb{Q}}$$

3. O conjunto dos irracionais não é fechado para a soma, isto é, existem números irracionais cuja soma não é um número irracional. Por exemplo, tanto π quanto $-\pi$ são números irracionais, mas
$$\underbrace{\pi}_{\notin\mathbb{Q}} + \underbrace{(-\pi)}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{0}_{\in\mathbb{Q}}$$

4. O conjunto dos racionais é fechado para o produto, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número racional. De fato:
$$\underbrace{\frac{n}{m}}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{p}{q}}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{np}{mq}}_{\in\mathbb{Q}}$$

5. O conjunto dos irracionais não é fechado para o produto, isto é, existem números irracionais cujo produto não é um número irracional. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional, mas

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{2}_{\in\mathbb{Q}}$$

Lista de propriedades 0.1. Algumas propriedades das operações com números reais:

1. Para qualquer número real r, temos $r \cdot 0 = 0$.
2. Não existem dois números reais não nulo cujo produto seja 0. Mais formalmente: para quaisquer números reais r, s, se $r \cdot s = 0$, então $r = 0$ ou $s = 0$. Ou, analogamente, se dois números reais r, s não são nulos, então $r \cdot s$ não pode ser 0.
3. Para quaisquer números reais r, s, t:
   (a) Se $r + s = t + s$, então $r = t$.
   (b) Se $rs = ts$ e $s \neq 0$, então $r = t$.
4. Se dois números reais r, s são tais $r = s$ ou $r = -s$, então $r^2 = s^2$.

   Por outro lado, se $r^2 = s^2$, então $r = s$ ou $r = -s$.

Exemplo 0.1. Por exemplo, a propriedade 2 acima significa que se $(x-1)(x+1) = 0$ então $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ isto é $x = 1$ ou $x = -1$.

Exemplo 0.2. Utilizando a última propriedade temos que se $x^2 = 4 = 2^2$, então $x = -2$ ou $x = 2$.

0.3 Desigualdades

Note que se r é um número real, então apenas uma das três afirmações é correta r é negativo ou zero ou positivo, isto é, $r < 0$ ou $r = 0$ ou $r > 0$. Isso significa que o conjunto dos números reais pode ser dividido em três conjuntos sem interseção:

$$\mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{R}^*_-}_{\substack{\text{reais}\\\text{negativos}}} \cup \{0\} \cup \underbrace{\mathbb{R}^*_+}_{\substack{\text{reais}\\\text{positivos}}}$$

Lista de propriedades 0.2. Temos que:

P1) Se $r, s > 0$ ou $r, s < 0$, então $rs > 0$. Segue daí que se $r \neq 0$, então $r^2 > 0$.

P2) Se $r > 0$ e $s < 0$, então $rs < 0$. Segue daí que se $r > 0$, então $-r = -1 \cdot r < 0$, e que se $r < 0$, então $-r = -1 \cdot r > 0$.

P3) Se $r, s > 0$, então $r + s > 0$.

P4) Se $r < s$ e $s < t$, então $r < t$.

P5) Se $r < s$, então $r + t < s + t$ qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$.

P6) Se $r < s$ e $t > 0$, então $rt < st$. Mas se $r < s$ e $t < 0$, então $rt > st$.

P7) Se $0 < r < s$ e $0 < t < u$ então $rt < su$.

P8) Se $r > 0$ então $\dfrac{1}{r} > 0$. Segue daí que se $r > 0$ e $s > 0$, então $\dfrac{r}{s} > 0$.

P9) Se $0 < r < s$, então $\dfrac{1}{s} < \dfrac{1}{r}$.

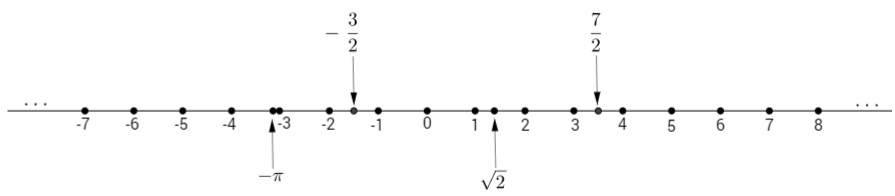
Observe que as propriedades P6 e P8 implicam na seguinte propriedade extra:

P10) Se $r, s > 0$ ou $r, s < 0$, então $\dfrac{r}{s} > 0$. Mas se $r > 0$ e $s < 0$ ou $r < 0$ e $s > 0$, então $\dfrac{r}{s} < 0$.

Dessa forma, quando temos um quociente $\dfrac{r}{s}$ positivo, então devemos ter r, s ambos positivos ou ambos negativos. Por outro lado, se $\dfrac{r}{s}$ for negativo, então r, s tem sinais opostos.

Observação 0.2. As propriedades valem também para $\geq$ e $\leq$ no lugar de $>$ e $<$, respectivamente.

Observação 0.3. Geometricamente, o conjunto dos números reais pode ser visto como uma reta. Um ponto arbitrário da reta, denominado origem, representa o 0 e convenciona-se que $a < b$ significa que a fica à esquerda de b. Assim, na semi-reta da direita representamos os números reais positivos e, na semi-reta da esquerda, os números reais negativos.

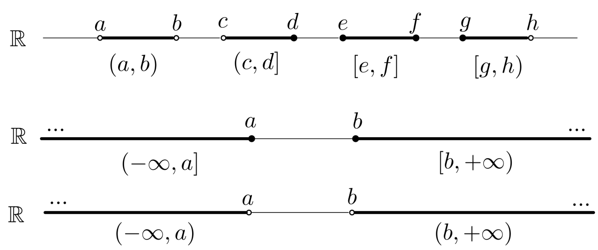


Observação 0.4. Podemos representar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ com notações especiais. Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ sendo $r < s$, os conjuntos abaixo definidos são ditos intervalos:

Intervalos limitados	Intervalos ilimitados
$[r, s] = \{x \in \mathbb{R} \mid r \leq x \leq s\}$	$(-\infty, s] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq s\}$
$(r, s) = \{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}$	$(-\infty, s) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < s\}$
$[r, s) = \{x \in \mathbb{R} \mid r \leq x < s\}$	$[r, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq r\}$
$(r, s] = \{x \in \mathbb{R} \mid r < x \leq s\}$	$(r, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > r\}$

Atenção: os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais.

Vejamos esses intervalos representados na reta real:



Vamos ver como podemos usar algumas propriedades da lista 0.2 para resolver problemas com desigualdades.

Exemplo 0.3. Se $\dfrac{x+1}{2} > 2$, então usando a propriedade P6, $x + 1 > 2 \cdot 2 = 4$, donde $x > 4 - 1 = 3$, isto é $x > 3$. Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x+1}{2} > 2$ é $S = \{x|x > 3\} = (3, +\infty)$.

Exemplo 0.4. Se $\dfrac{2}{x+1} > 2$, temos pela propriedade P5, $\dfrac{2}{x+1} - 2 > 0$, isto é, $\dfrac{2-2x-2}{x+1} > 0$ ou $\dfrac{-2x}{x+1} > 0$. Portanto, pela propriedade P10, temos dois casos possíveis

a) Se $x + 1 > 0$ e $-2x > 0$, então $x > -1$ e $x < 0$. Dessa forma, a solução nesse caso é

$$S_a = \{x \,|\, -1 < x < 0\} = (-1, 0)$$

b) Se $x + 1 < 0$ e $-2x < 0$, então $x < -1$ e $x > 0$. Porém, não existe número real positivo e menor que -1 ao mesmo tempo. Logo, a solução desse caso é $S_b = \emptyset$.

Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{2}{x+1} > 2$ é

$$S = S_a \cup S_b = S_a = \{x \,|\, -1 < x < 0\} = (-1, 0)$$

Exemplo 0.5. Se $\dfrac{x}{x+1} > 2$, então $\dfrac{x-2x-2}{x+1} > 0$, isto é, $\dfrac{-x-2}{x+1} > 0$. Pela propriedade P10, temos novamente dois casos possíveis:

a) Se $x + 1 > 0$ e $-x - 2 > 0$, então $x > -1$ e $-x > 2$, isto é, $x > -1$ e $x < -2$. Porém, não existe número real maior que -1 e menor que -2 ao mesmo tempo. Logo, a solução desse caso é $S_a = \emptyset$.

b) Se $x + 1 < 0$ e $-x - 2 < 0$, então $x < -1$ e $-x < 2$, isto é, $x < -1$ e $x > -2$. Logo, a solução desse caso é $S_b = \{x \,|\, -2 < x < -1\} = (-2, -1)$

Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x}{x+1} > 2$ é

$$S = S_a \cup S_b = S_b = \{x \,|\, -2 < x < -1\} = (-2, -1)$$

Exemplo 0.6. Se $\dfrac{x+3}{x-2} < 2$, então $\dfrac{x+3-2x+4}{x-2} < 0$, isto é, $\dfrac{-x+7}{x-2} < 0$. Assim, pela propriedade P10, temos dois casos possíveis:

a) Se $x - 2 > 0$ e $-x + 7 < 0$, então $x > 2$ e $-x < -7$, isto é, $x > 2$ e $x > 7$. Logo, a solução desse caso é $S_a = \{x \,|\, x > 7\} = (7, +\infty)$.

b) Se $x - 2 < 0$ e $-x + 7 > 0$, então $x < 2$ e $-x > -7$, isto é, $x < 2$ e $x < 7$. Logo, a solução desse caso é $S_b = \{x \,|\, x < 2\} = (-\infty, 2)$

Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x+3}{x-2} < 2$ é

$$S = S_a \cup S_b = \{x \,|\, x < 2 \text{ ou } x > 7\} = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$$

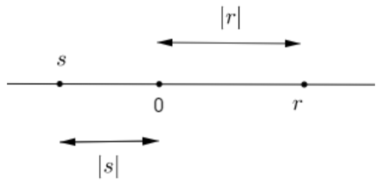
No fundo, o que fizemos foi reduzir as desigualdades àquelas que podemos fazer usando estudo de sinal. Isso será bastante útil quando, ao fim do curso, estivermos estudando esboço de gráficos de funções a partir de suas propriedades. No capítulo 1, voltaremos a esse assunto.

0.4 Valor absoluto (módulo)

Definição 0.1. O valor absoluto (ou módulo) de um número real r, denotado por $|r|$, é definido como:

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{se } r \geq 0 \\ -r, & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

Geometricamente, o valor absoluto de x representa a distância entre x e 0 na reta real:



Exemplo 0.7. Alguns exemplos de valor absoluto.

a) $|0| = 0$

b) $|\pi| = |-\pi| = \pi$

c) $|2| = |-2| = 2$

d) $|-0,345609| = |0,345609| = 0,345609$

e) Como $e > 2,71$, então $2,71 - e < 0$ e, assim, $|2,71 - e| = -(2,71 - e) = e - 2,71$.

f) $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$, isto é $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

g) $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1), & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases}$, isto é $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x-1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$

Lista de propriedades 0.3. Algumas propriedades diretas da definição acima:

M1) Pela propriedade P2, temos que $|r| \geq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

M2) Se $|r| = 0$, então $r = 0$, e se $r = 0$, claro que $|r| = 0$, assim: $|r| = 0$ se e somente se $r = 0$.

M3) Dado um $r \in \mathbb{R}^*$, sabemos que $r > 0$ ou $r < 0$. Se $r > 0$, temos que $r > -r$ e $|r| = r$. Se $r < 0$, temos $-r > 0$ e, então, $r < -r$ e $|r| = -r$. Assim, $|r|$ é sempre o maior entre r e $-r$, isto é, $|r| = \max\{-r, r\}$.

M4) Para qualquer $r \in \mathbb{R}$, temos $|r| = |-r|$ e $|r|^2 = r^2$ (veja a propriedade P1).

M5) Dado $r > 0$, se $|x| = r$, então $x = r$ ou $x = -r$. Em particular, se $t, s \in \mathbb{R}$ são tais que $|t| = |s|$, então $t = s$ ou $t = -s$.

M6) $|rs| = |r| \cdot |s|$ para todos $r, s \in \mathbb{R}$ e $\left|\dfrac{r}{s}\right| = \dfrac{|r|}{|s|}$ se $s \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de equações modulares.

Exemplo 0.8. $|2x+1| = 4$
Vamos usar a definição de módulo. Temos (veja o item (f) do exemplo 0.7):

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x-1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$$

Assim:

$$4 = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x-1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$$

Isto é, há dois casos:

a) Se $x \geq -1/2$, temos $2x+1 = 4$, ou seja, $x = 3/2$. Como $3/2 \geq -1/2$, a solução é válida.

b) Se $x < -1/2$, temos $2x+1 = -4$, ou seja, $x = -5/2$. Como $-5/2 < -1/2$, a solução é válida.

Portanto, a solução da equação $|2x+1| = 4$ é $S = \{-5/2, 3/2\}$.

Exemplo 0.9. $|x+1| = |2x|$
Pela propriedade M5, temos dois casos: $x+1 = 2x$ e $x+1 = -2x$.

a) $x+1 = 2x \Rightarrow 1 = 2x - x = x$.

b) $x+1 = -2x \Rightarrow 2x + x = -1 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -1/3$.

Portanto, a solução da equação $|x+1| = |2x|$ é $S = \{-1/3, 1\}$.

Lista de propriedades 0.4. Propriedades envolvendo valor absoluto e desigualdades:

D1) Dado $r > 0$:

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$$

D2) Dado $r > 0$:

$$|x| > r \Leftrightarrow x > r \text{ ou } x < -r$$

$$|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r \text{ ou } x \leq -r$$

D3) Desigualdade triangular: $|r+s| \leq |r| + |s|$ para todos $r, s \in \mathbb{R}$

D4) Para todos $r, s, t \in \mathbb{R}$, seguem da desigualdade triangular:

$$|r-s| \leq |r| + |s|$$

$$|r-s| \leq |r-t| + |t-s|$$

Vejamos alguns exemplos de inequações modulares.

Exemplo 0.10. $|x-2| < 5$.
Vamos resolver essa inequação de duas formas.

Primeiro, pela definição de módulo. Temos $|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Assim, temos dois casos:

a) Se $x \geq 2$, temos $x - 2 < 5$, isto é, $x < 7$. Assim, a solução desse caso é $S_a = [2, 7)$.

b) Se $x < 2$, temos $-x + 2 < 5$, isto é, $x > -3$. Assim, a solução desse caso é $S_b = (-3, 2)$.

Portanto, a solução da inequação $|x - 2| < 5$ é $S = S_a \cup S_b = (-3, 7)$.
Agora, vamos resolver usando a propriedade D1:

$$|x-2| < 5 \overset{D1}{\iff} -5 < x - 2 < 5 \iff -5 + 2 < x - 2 + 2 < 5 + 2 \iff -3 < x < 7$$

Portanto, novamente, a solução da inequação $|x - 2| < 5$ é $S = (-3, 7)$.

Exemplo 0.11. $|4x - 2| \geq 3$.
Vamos resolver essa inequação de duas formas.

Primeiro, pela definição de módulo. Temos $|4x-2| = \begin{cases} 4x - 2, & \text{se } x \geq 1/2 \\ -4x + 2, & \text{se } x < 1/2 \end{cases}$. Assim, temos dois casos:

a) Se $x \geq 1/2$, temos $4x - 2 \geq 3$, isto é, $x \geq 5/4$. Assim, a solução desse caso é

$$S_a = [1/2, +\infty) \cap [5/4, +\infty) = [5/4, +\infty)$$

b) Se $x < 1/2$, temos $-4x + 2 \geq 3$, isto é, $x \leq -1/4$. Assim, a solução desse caso é

$$S_b = (-\infty, 1/2) \cap (-\infty, -1/4] = (-\infty, -1/4]$$

Portanto, a solução da inequação $|4x - 2| \geq 3$ é $S = S_a \cup S_b = (-\infty, -1/4] \cup [5/4, +\infty)$.
Agora, vamos resolver usando a propriedade D2:

$$|4x - 2| \geq 3 \overset{D2}{\iff} 4x - 2 \geq 3 \text{ ou } 4x - 2 \leq -3 \iff x \geq 5/4 \text{ ou } x \leq -1/4$$

Portanto, novamente, a solução da inequação $|4x - 2| \geq 3$ é

$$S = S_a \cup S_b = (-\infty, -1/4] \cup [5/4, +\infty)$$

Finalizamos essa seção com a raiz n-ésima de um número real.

Definição 0.2. Dados um real $r \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a *raiz $n-$ésima* de r, representada por $\sqrt[n]{r}$, é o número real positivo s tal que $s^n = r$. Agora, se $r < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é um ímpar maior do que 1, a *raiz $n-$ésima* de r, é o número real negativo s tal que $s^n = r$.

Exemplo 0.12. Por exemplo, $\sqrt{9} = 3$ pois $3^2 = 9$ e $\sqrt[3]{-27} = -3$ pois $(-3)^3 = -27$.

Observação 0.5. Note que há uma diferença entre obter a raiz $n-$ésima de r e obter as raízes de $x^n = r$. Por exemplo, as soluções de $x^2 = 36$ são ± 6, pois tanto 6^2 quanto $(-6)^2$ valem 36. Porém, a raiz quadrada de 36 é 6, pois, por definição, a raiz de um número positivo é positiva.

Observação 0.6. Observe ainda que, por definição, $(\sqrt[n]{r})^n = r$. Isso significa que, por exemplo, $(\sqrt{5})^2 = 5$. Note ainda que $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, mas $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq -5$. Concluímos que não é correto afirmar que $\sqrt{r^2} = r$. Na verdade, note que $\sqrt{r^2} = |r|$.

0.5 Polinômios

Um *polinômio* é uma soma formal utilizando uma variável x do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,,$$

onde os números reais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são ditos coeficientes (note que alguns podem ser nulos, mas consideramos $a_n \neq 0$) e n é dito o *grau* do polinômio. O coeficiente a_0 é dito *termo independente* e a_n é dito *coeficiente líder*. Um *monômio* é um polinômio de um termo só: em geral, polinômios são somas de monômios. Um monômio formado apenas por um termo independente é dito ter grau 0.

Exemplo 0.13. O polinômio $4x^5 - \pi x^2 + \sqrt{2}\,x + 3$ tem grau 5, coeficiente líder 4 e termo independente 3. Além disso, é formado pelos monômios $4x^5$, $-\pi x^2$, $\sqrt{2}x$ e 3.

Observação 0.7. $x^2 + \sqrt{2x} + 1$ não é um polinômio, pois nem todo x está com expoente natural.

A soma e a diferença de polinômios são feitas termo a termo, como no seguinte exemplo:

Exemplo 0.14. Se $p(x) = 2 - x + x^2$ e $q(x) = 3 - 2x^2 - 3x^3$, então, por exemplo:

$$p(x) + q(x) = (2+3) + (-x) + (x^2 - 2x^2) - 3x^3 = 5 - x - x^2 - 3x^3$$

$$p(x) - q(x) = (2-3) + (-x) + (x^2 + 2x^2) + 3x^3 = -1 - x + 3x^2 + 3x^3$$

Já o produto de dois polinômios é feito usando a regra distributiva da multiplicação. Por exemplo:

Exemplo 0.15. Usando os polinômios do exemplo 2.5:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (2 - x + x^2)(2 - 2x^2 - 3x^3) \\ &= 4 - 4x^2 - 6x^3 - 2x + 2x^3 + 3x^4 + 2x^2 - 2x^4 - 3x^5 \\ &= 4 - 2x - 2x^2 - 4x^3 + x^4 - 3x^5 \end{aligned}$$

Por fim, a divisão de polinômios é feita analogamente à divisão de números inteiros. Na divisão de $f(x)$ por $g(x)$, começamos dividindo o monômio de maior grau de $f(x)$ pelo de maior grau de $g(x)$ (se for possivel) e seguimos ate encontrar o resto: um polinômio de grau menor que o de $g(x)$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 0.16. Sejam $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Começamos dividindo o monômio de maior grau de $f(x)$ pelo de maior grau de $g(x)$, isto é, $2x^2$ dividido por x^2, isto é, $q(x) = 2$. Temos:

$$\begin{array}{r|r} 2x^2 + 4x + 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} 2x^2 + 6x + 2 & 2 \\ \hline -\,2x + 1 & \end{array}$$

Como o grau de $-2x + 1$ é menor que o grau de $g(x) = x^2 + 3x + 1$, não podemos continuar. Assim, temos $r(x) = -2x + 1$ e $q(x) = 2$.

Exemplo 0.17. Vamos dividir $f(x) = x^2 - 1$ por $g(x) = x - 1$. Começamos dividindo os monômios de maior grau de $f(x)$ e $g(x)$, obtendo $q_1(x) = x$ e $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = x - 1$ isto é:

$$\begin{array}{r|l} x^2+0x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-\ \ x & x+1 \\ \hline x-1 & \end{array}$$

Agora, o resto $x-1$ é igual ao $g(x)$. Assim, $q_2(x)=1$ e $r_2(x)=0$. Isto é:

$-$

$$\begin{array}{r|l} x^2+0x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-\ \ x & x+1 \\ \hline x-1 & \\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Assim, concluimos que $x-1$ divide x^2-1 e que $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Definição 0.3. Um número real r tal que $p(r)=0$ é dito uma raiz do polinômio $p(x)$.

Exemplo 0.18. Seja $f(x)=x^4-x^3-x+1$. Temos que 1 é uma raiz de pois $f(1)=1^4-1^3-1+1=0$, mas -1 não é raiz pois $f(-1)=1+1+1+1=4$.

Encontrar raízes de um polinômio qualquer nem sempre é fácil. Para polinômios quadráticos, ou seja, de grau 2, conhecemos a fórmula de Bhaskara, que diz que as raízes de ax^2+bx+c (com $a\neq 0$) são dadas por

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e também o teorema da soma e do produto das raízes (ax^2+bx+c tem raízes r_1, r_2 tais que $r_1+r_2=-b/a$ e $r_1r_2=c/a$.) Para graus maiores, o resultado abaixo pode ajudar em alguns casos.

Teorema 0.1. *Temos que $a\in\mathbb{R}$ é uma raiz de $f(x)$ se e somente se $x-a$ divide $f(x)$.*

Note que o resultado do teorema 0.1 diz ainda que se a é raiz de $f(x)$, então existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x)=(x-a)g(x)$.

Exemplo 0.19. Considere o polinômio $f(x)=x^3+x$. Temos que 0 é raiz de $f(x)$, o que significa que x divide $f(x)$. Efetuando a divisão, temos $f(x)=x(x^2+1)$ e x^2+1 não tem raízes reais.

Exemplo 0.20. Seja $f(x)=40-18x-3x^2+x^3$. Por inspeção, temos que 2 é uma raiz de $f(x)$ dividindo $f(x)$ por $x-2$, temos $f(x)=(x-2)(x^2-x-20)$. U x^2-x-20 podem ser encontradas pelo teorema da soma e produto: $r_1r_2=-20$ e $r_1+r_2=1$, isto é, $r_1=-4$ e $r_2=5$. Logo, o polinômio pode ser escrito como $f(x)=(x-2)(x+4)(x-5)$.

O processo feito nos exemplos 0.19 e 0.20 pode ser repetido para polinômios $f(x)$ de qualquer grau, obtendo uma escrita de $f(x)$ como produto de fatores $x-a$ ou quadráticos irredutíveis. Esse processo é chamado fatoração.

Exemplo 0.21. As raízes de $2x^2+5x-3$ são $1/2$ e -3 (verifique). Assim, a fatoração desse polinômio é $2x^2+5x-3=2(x-1/2)(x+3)=(2x-1)(x+3)$

Exemplo 0.22. A fatoração de $x^6+3x^5-13x^4-13x^3-38x+60$ é $(x^2+2)(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$.

A fatoração de polinômios pode ser facilitada, em certos casos, usando produtos notáveis como por exemplo:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo 0.23. Usando quadrado da soma, temos que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Já usando diferença de cubos, temos que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

Em particular, a fatoração de um polinômio pode ser útil, por exemplo, para determinar para quais valores de x certa função polinomial é positiva ou negativa.

Exemplo 0.24. Consideramos o polinômio $p(x) = x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$. Para determinar os valores de x para os quais $p(x) < 0$, temos dois casos:

a) Se $x + 4 > 0$ e $x - 5 < 0$, então $x > -4$ e $x < 5$, isto é $x \in (-4, 5)$.

b) Se $x + 4 < 0$ e $x - 5 > 0$, então $x < -4$ e $x > 5$. Como não existe x real nesses condições, esse caso tem solução vazia.

Esse processo pode ser resumido em uma tabela onde colecionamos as raízes dos fatores e os sinais dos fatores em cada intervalo:

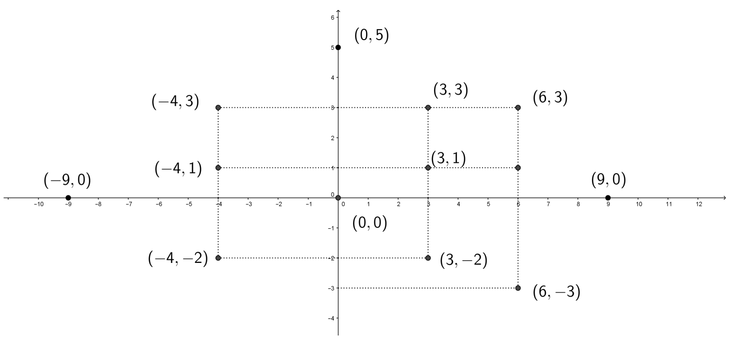
		-4		5	
$x+4$	$---$	-4	$+++$		$+++$
$x-5$	$---$		$---$	5	$+++$
$(x+4)(x-5)$	$+++$	-4	$---$	5	$+++$

Assim, esse polinômio assume valores negativos quando $x \in (-4, 5)$.

0.6 Plano cartesiano

Encerramos esse capítulo relembrando o plano cartesiano, que será usado para representar graficamente funções.

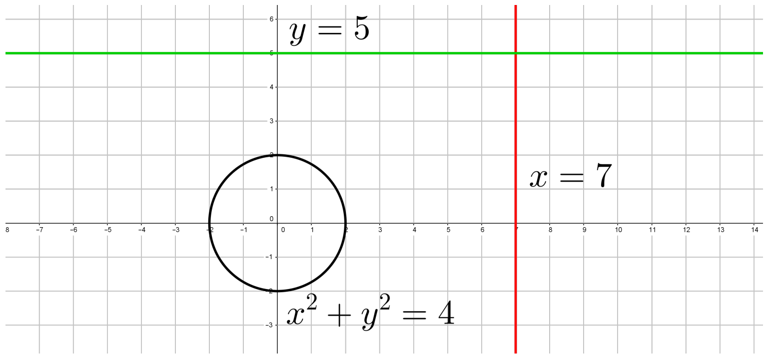
Um **sistema ortogonal de coordenadas** em um plano é uma tripla (X, Y, O) em que X e Y são retas perpendiculares que se intersectam em um ponto O chamado **origem** do sistema. A reta X, usualmente horizontal, é chamada **eixo** x ou **das abscissas**. A reta Y é chamada **eixo** y ou **das ordenadas**. Cada ponto de X ou Y é identificado com um número real e O é identificado com o 0 em ambos os casos.



Cada ponto P do plano é idenficado por um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chamado **coordenadas cartesianas** de P (como na figura acima). Escrevemos $P = (x, y)$ para indicar que P tem coordenadas (x, y) dizendo que x é **primeira coordenada** ou **abscissa** de P e y a **segunda coordenada** ou **ordenada** de P.

O conjunto solução de uma equação nas variáveis x e y é o conjunto S dos pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem esta equação. O conjunto dos pontos P do plano com coordenadas $(x, y) \in S$ é o **gráfico da equação**. Vejamos alguns exemplos.

1. O gráfico da equação $x^2 + y^2 = a^2$ é um círculo de centro na origem $(0, 0)$ e raio a.
2. O gráfico da equação $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$ fixo, é uma reta vertical passando por $(k, 0)$
3. O gráfico da equação $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$ fixo, é uma reta horizontal passando por $(0, k)$.



O gráfico de uma equação do tipo $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma reta não vertical r que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$. O número a é chamado de **inclinação** da reta r e corresponde à tangente do ângulo entre a reta r e o eixo X.

Dados três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ de uma reta não vertical r, temos que a inclinação a desta reta é dada por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Para encontrar a equação de uma reta não vertical passando por dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), observamos primeiro que sua inclinação é dada por $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Agora, qualquer outro ponto (x, y) desta reta deve satisfazer $\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$. Portanto, devemos ter $(y - y_0) = a(x - x_0)$ donde $y = ax - (ax_0 + y_0)$. Assim, a equação da reta não vertical passando por (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$y = ax + b \quad com \quad a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad e \quad b = -(ax_0 + y_0).$$

0.7 Exercícios

1. Sejam a e b números reais positivos tais que $a < b$.

   Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) $4 - a < 4 - b$

   (b) $-3b < -3a$

   (c) $\frac{a}{4} < \frac{b}{4}$

   (d) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

2. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

   (a) Se a e b são números inteiros positivos, então $\dfrac{a}{b}$ é um número racional.

   (b) Se a e b são números inteiros, então $\dfrac{a}{b}$ é um número racional.

   (c) Se a e b são números inteiros e $a - b \neq 0$, então $\dfrac{a+b}{a-b}$ é um número racional.

   (d) Se a e b são números inteiros, então $\dfrac{a+b}{1+a^2}$ é um número racional.

   (e) Se a e b são números inteiros, então $\dfrac{a+b}{1+a}$ é um número racional.

   (f) Se a é um número inteiro, então a^{56} é um número racional.

   (g) Se a e b são números racionais, então $\dfrac{a}{b}$ é um número racional.

   (h) Se $x^2 > 4$, então $x > \pm 2$.

   (i) Se $\dfrac{1}{|x|} < 1$, então $x > 1$.

   (j) Se $x, y \notin \mathbb{Q}$, então $x + y \notin \mathbb{Q}$.

   (k) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x \leq x^2$.

   (l) Se $xy = 1$, então $x = y = 1$ ou $x = y = -1$.

   (m) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (n) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3. Marque a alternativa correta:

   (a) Se x é um número real e $x < 1$, então $x^2 < 1$.

   (b) Se x é um número real tal que $|x| > 1$, então $x > 1$.

   (c) Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $x^2 > y^2$.

   (d) Se x é um número real então $\sqrt{(-x)^2} = -x$.

   (e) Se x é um número real tal que $|x| < 1$ então $x < 1$ e $x > -1$.

4. O conjunto dos possíveis valores assumidos pela expressão $\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{c}{|c|} + \dfrac{abc}{|abc|}$ quando a, b, c são números reais não nulos é:

   (a) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

   (b) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

   (c) $\{-4, 0, 4\}$

   (d) $\{4\}$

   (e) $\mathbb{R}$

5. Classifique cada uma das sentenças abaixo como verdadeira ou falsa:

   (a) $|5| = 5$

   (b) $|-3/4| = -3/4$

   (c) $|0| = 0$

   (d) $|1 - \sqrt{2}| = 1 - \sqrt{2}$

   (e) $|\pi - 3,14| = 0$

   (f) $|\pi - 3,15| = 3,15 - \pi$

   (g) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}| = 0$

   (h) $|\sqrt{5} - 2,2| = \sqrt{5} - 2,2$

   (i) $|\sqrt[3]{10} - 2,3| = 2,3 - \sqrt[3]{10}$

6. Encontre os números reais que satisfaçam as desigualdades abaixo.

(a) $2 + 3x < 5x + 8$

(b) $4 < 3x - 2 \leq 10$

(c) $x^2 - 4x < 0$

(d) $\dfrac{7}{x} > 2$

(e) $(x + 3)(x + 4) > 0$

(f) $\dfrac{x}{x - 3} < 4$

(g) $x^3 - x < 0$

(h) $x^2 + x - 2 \geq 0$

(i) $x^2 - 2x + 1 > 0$

7. Resolva as seguintes equações:

   (a) $|3x+2|=5$
   (b) $|2x-1|=|4x+3|$
   (c) $|x|\,|x-5|=6$
   (d) $|5x+4|=-3$
   (e) $|x|+2|x-2|=1+4x$
   (f) $x^2-3|x|-4=0$
   (g) $|x-1|=|x-1|^2$
   (h) $|5x+8|=|4x+10|$
   (i) $|2x^2-3x|=|x-2|$
   (j) $|x-2|=|x+3|$
   (k) $|x^2-x|=x$
   (l) $\sqrt{(x-3)^2}+|x|=3x$

8. Encontre as soluções das seguintes inequações:

   (a) $|x-5|<4$
   (b) $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right|\leq 4$
   (c) $|3x+2|>5$
   (d) $|3x+5|\leq 11$
   (e) $1<|x-3|<4$
   (f) $\dfrac{5}{|2x+1|}\leq 3$
   (g) $|x^2-3x|\geq 1$
   (h) $|5x-10|+|2-x|\leq 6x$
   (i) $|2-3x|>2x-12$

9. Determine todas as raízes dos polinômios a seguir.

   (a) $x^3+\sqrt{2}x^2-4x$

   (b) $x^3-23x^2+119x+143$

   (c) $x^4-5x^3-63x^2+137x-70$

10. Determine $A\cap B$ e $A\cup B$ nos casos a seguir utilizando intervalos.

    (a) $A=\{x\in\mathbb{R}: x-4\leq 0\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R}: x-4\geq 0\}$

    (b) $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2<4\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R}: x>-1\}$

    (c) $A=\{x\in\mathbb{R}:\ x>2\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R}:\ x<-3\}$

Exercícios extras

11. Página A9 do livro *Cálculo - vol 1, 6a edição* (James Stewart)

12. Páginas 10 e 11 do livro *Cálculo A* (Diva Flemming e Mirian Gonçalves).

Exercícios de provas anteriores

13. (2016-2) Sejam a e b números reais. Considere as seguintes afirmativas:

    I. Se $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

    II. Se $a, b \in \mathbb{Q}$, então $ab \in \mathbb{Q}$.

    III. Se $a \notin \mathbb{Q}$ e $b \notin \mathbb{Q}$, então $ab \notin \mathbb{Q}$.

    IV. $\sqrt{4} = \pm 2$.

    V. Se $a < b$, então $ca < cb$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

    Marque a alternatica **CORRETA**.

    a) Nenhuma afirmativa é verdadeira.
    b) Apenas uma afirmativa é verdadeira.
    c) Apenas duas afirmativas são verdadeiras.
    d) Apenas três afirmativas são verdadeiras.
    e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

14. (2016-2) Sobre o conjunto solução S da equação $|x+1| + |x-1| = 2$, podemos afirmar que:

    (a) $S = \emptyset$.
    (b) S tem apenas um elemento.
    (c) S tem apenas dois elementos.
    (d) S é infinito e é um intervalo.
    (e) S é infinito, mas não é um intervalo.

15. (2016-2 opcional) Sobre o conjunto solução S da equação $|2x| + |x-1| = 1$ é correto afirmar que:

    (a) S é vazio.
    (b) S é infinito.
    (c) S tem apenas um elemento.
    (d) S tem apenas dois elementos.
    (e) S tem mais do que dois elementos, mas é finito.

16. (2014-2) Marque a alternativa INCORRETA.

    (a) Nenhum número racional é solução da equação $x^2 = 2$.
    (b) A raiz quadrada de um número natural é um número natural ou um número irracional.
    (c) Existe, pelo menos, um número real que é solução da equação $x^2 = 2$.
    (d) Se p e q são números inteiros não nulos tais que $\frac{p}{q}$ é um inteiro, então $\frac{q}{p}$ é um inteiro.
    (e) $\sqrt{13}$ é um número real menor do que 4.

17. (2014-2) Marque a alternativa CORRETA.

    (a) $|x| + 1 < |x+1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (b) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (c) $\sqrt{(1-x)^2} \geq 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (d) $|x| - 2 > |x-2|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (e) $|x|\sqrt{x^2} > x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. (2014-2) Resolva a seguinte desigualdade: $\dfrac{1}{|x+1|\,|x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$.

19. (2013-2) Determine os valores de x para os quais $1 < |2x+5| \leq \dfrac{1}{x+2}$.

0.8 Respostas dos exercícios

1. (a) F (b) V (c) V (d) V

2. (a) V (b) F (c) V (d) V (e) F (f) V (g) F (h) F (i) F (j) F (k) F (l) F (m) F (n) F

3. (e)

4. (c)

5. (a) V (b) F (c) V (d) F (e) F (f) V (g) V (h) V (i) V

6. (a) $(-3, +\infty)$ (b) $(2, 4]$ (c) $(0, 4)$ (d) $(0, 7/2)$ (e) $(-\infty, -4) \cup (-3, +\infty)$ (f) $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ (g) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (h) $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ (i) $\mathbb{R} - \{0\}$

7. (a) $\{-7/3, 1\}$ (b) $\{-2, -1/3\}$ (c) $\{-1, 2, 3, 6\}$ (d) $\emptyset$ (e) $\{3/5\}$ (f) $\{-4, 4\}$ (g) $\{0, 1, 2\}$ (h) $\{-2, 2\}$ (i) $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ (j) $\{-1/2\}$ (k) $\{0, 2\}$ (l) $\{1\}$

8. (a) $(1, 9)$ (b) $(-\infty, -11/2] \cup [-5, 6, +\infty)$ (c) $(-\infty, -7/3) \cup (1, +\infty)$ (d) $[-16/3, 2]$ (e) $(-1, 2) \cup (4, 7)$ (f) $(-\infty, -4/3] \cup [1/3, +\infty)$ (g) $(-\infty, \frac{(3-\sqrt{13})}{2}] \cup [\frac{(3-\sqrt{5}}{2}, \frac{(3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{(3+\sqrt{13})}{2}, +\infty)$ (h) $[1, +\infty)$ (i) $\mathbb{R}$

9. (a) $-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ (b) $-1, 11, 13$ (c) $-7, 1, 10$

10. (a) $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \{4\}$ (b) $A \cup B = (-2, 2)$ e $A \cap B = [-1, 2)$ (c) $A \cup B = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ e $A \cap B = \emptyset$

13. b) 14. d) 15. c) 16. d) 17. c)

18. $(-2, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, 4]$

19. $(-2, -3/2]$