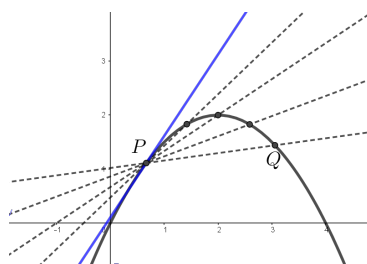


Capítulo 3

Derivadas

Este capítulo é sobre derivada, um conceito fundamental do Cálculo que é muito útil em problemas aplicados. Este conceito relaciona-se com o problema de determinar a reta tangente a um ponto do gráfico de uma função que foi visto no capítulo 3. Iniciaremos nossa discussão tratando deste problema.

3.1 O problema da reta tangente



Seja $P(x_0, f(x_0))$ um ponto sobre o gráfico de uma função contínua $f(x)$. Dado um ponto $Q = (x_1, f(x_1))$ do gráfico, distinto de P , seja s a reta passando por P e Q . Esta reta é dita secante ao gráfico pois o secciona nos pontos P e Q . O coeficiente angular desta reta é dado por

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Considerando Q como um ponto móvel, quando $x_1 \rightarrow x_0$ temos $Q \rightarrow P$. Consequentemente, a reta s varia de posição (ver figura). A reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P é definida como sendo a *posição limite* de s quando $x_1 \rightarrow x_0$ e seu coeficiente angular, denotado por m , é dado pelo limite do coeficiente angular das retas secantes s quando $x_1 \rightarrow x_0$, ou seja

$$m = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.1)$$

Se o limite acima existe, então existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P e esta reta tem equação

$$(y - f(x_0)) = m(x - x_0).$$

Mas, pode ocorrer deste limite não existir e neste caso temos duas possibilidades: ou a reta tangente não pode ser definida, ou a reta tangente é uma reta vertical. Este último caso ocorre quando o limite é $\pm\infty$. Nos exemplos a seguir vamos ilustrar todas estas possibilidades.

Exemplo 73. Para verificar se existe reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $P = (1, f(1)) = (1, 1)$ calculamos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1$$

Como o limite existe e vale -1 , existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P e sua equação é

$$(y - 1) = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

(veja figura 3.1).

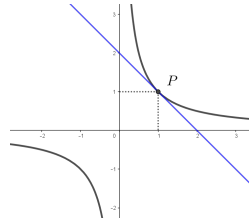


Figura 3.1: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $P = (1, 1)$.

Exemplo 74. Para verificar se existe uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $P = (0, 0)$ calculamos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Como o limite é $+\infty$, a posição limite das retas secantes é a reta vertical $x = 0$, isto é, a reta tangente passando por P é a reta vertical $x = 0$ (veja figura 3.2).

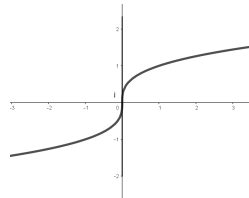


Figura 3.2: A reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $P = (0, 0)$ é uma reta vertical.

Exemplo 75. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e o ponto $P = (1, 1)$ do seu gráfico. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 3 = -2. \end{aligned}$$

Como os limites laterais são distintos, não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Ainda, não existe a posição limite das retas secantes. Logo não existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P = (1, 1)$.

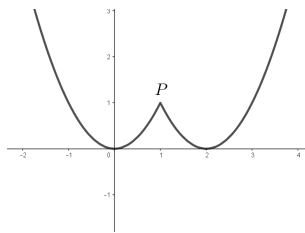


Figura 3.3: Não existe reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 75 em $P = (1, 1)$.

3.2 Derivada de uma função em um ponto

Definição 31. Uma função $f(x)$ é **derivável** ou **diferenciável** em um ponto $x_0 \in D(f)$ se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.2)$$

Se este limite $f'(x_0)$ existe ele é chamado de **derivada de $f(x)$ no ponto x_0** . Se o limite $f'(x_0)$ não existe, dizemos que $f(x)$ é **não derivável** ou **não diferenciável** em x_0 .

Observação 39. Pela discussão da seção anterior, dizer que $f(x)$ é derivável em x_0 é o mesmo que dizer que existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ e que esta reta não é vertical, sendo o seu coeficiente angular igual a $f'(x_0)$.

Exemplo 76. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 2$ e $f'(2) = 4$.

Exemplo 77. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, temos

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Observação 40. Fazendo a mudança de coordenadas $h = x_1 - x_0$ vemos que $x_1 \rightarrow x_0$ implica em $h \rightarrow 0$, logo a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 pode também ser expressa pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.3)$$

Exemplo 78. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Observe que

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + h) - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 4$ e $f'(4) = 3$.

3.3 Derivada como Função

Definição 32. Considere uma função $f(x)$. A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

é chamada **derivada da função f com relação a x** . O domínio da derivada f' é o conjunto dos pontos $x \in D(f)$ para os quais existe o limite $f'(x)$.

Observação 41. A derivada de uma função $f(x)$ com relação a x também é denotada por $\frac{df}{dx}$ (notação de Leibniz).

Definição 33. Quando $f(x)$ é definida em um intervalo aberto e possui derivada em todos os pontos deste intervalo, dizemos que $f(x)$ é uma **função diferenciável** ou **derivável**.

Exemplo 79. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x.h + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x.h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x - h = 2x. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = x^2$ é uma função diferenciável. A derivada de $f(x)$ é a função $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Exemplo 80. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) + 1 - 3x - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3.$$

Como $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R} = D(f)$, temos que $f(x)$ é um função diferenciável e sua derivada é a função constante $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 3$.

Vejamos um exemplo de uma função cuja derivada não existe em algum ponto do domínio.

Exemplo 81. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Vimos no exemplo 74 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty.$$

Portanto, $f(x)$ é não derivável no ponto 0. Agora, para todo $x_0 \neq 0$ temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$$

considerando $y = \sqrt[3]{x}$ e recordando que $y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3 = (y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0}^2)$ obtemos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{y - \sqrt[3]{x_0}}{y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3} = \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{(y - \sqrt[3]{x_0})}{(y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0}^2)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{1}{y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0}^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_0}^2 + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0}^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0}^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \neq 0$ e a derivada desta função é a função $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

3.4 Derivadas laterais

Em algumas situações, é útil considerar os limites laterais associados ao limite $f'(x)$. Estes limites laterais são:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definição 34. O limite $f'_-(x_0)$, quando existe, é chamado de **derivada à esquerda de $f(x)$ no ponto x_0** e o limite $f'_+(x_0)$, quando existe, é chamado de **derivada à direita de $f(x)$ no ponto x_0** .

Observação 42. Note que a derivada $f'(x_0)$ existe se, e somente se, as derivadas laterais $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ existem e são iguais.

O conceito de derivada lateral é útil, por exemplo, quando estudamos funções definidas por partes. Vejamos um exemplo.

Exemplo 82. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e derivável em todo ponto $x \neq 1$ (verifique!). Para ver se ela é derivável em $x = 1$ precisaremos considerar as derivadas laterais em 1, já que a regra da função é diferente para $x < 1$ e $x > 1$. Estas derivadas são:

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 + 2h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2.$$

Como os limites laterais $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$ temos que existe $f'(1)$ e $f'(1) = 2$.

Exemplo 83. Vamos estudar a diferenciabilidade de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ tratando alguns casos. Observemos, primeiramente, que se $x > 0$ então $|x| = x$ e para h pequeno o suficiente, temos $x+h > 0$ donde $|x+h| = x+h$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Agora, se $x < 0$ então $|x| = -x$ e para h pequeno o suficiente, temos $x+h < 0$ donde $|x+h| = -x-h$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Finalmente, se $x = 0$ então devemos tratar os limites laterais ou seja, as derivadas laterais que são

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, a derivada $f'(0)$ não existe. Assim, $f(x) = |x|$ é derivável apenas nos pontos $x \neq 0$, com $f'(x) = 1$ para $x > 0$ e $f'(x) = -1$ para $x < 0$. A derivada de $f(x)$ é a função $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

As derivadas laterais também são usadas para estudar funções definidas em intervalos que tenham extremos fechados como veremos nos exemplos a seguir.

Definição 35. Dizemos que uma função $f(x)$ é diferenciável (ou derivável) em intervalos da forma $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, b]$ ou $[a, b)$ se $f'(x)$ existe para todo ponto x no interior do intervalo e se existem as derivadas laterais adequadas nos extremos destes intervalos.

Exemplo 84. Considere a função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Para todo $x > 0$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x > 0$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Agora, não podemos calcular o limite $f'(x)$ para $x = 0$, já que f está definida apenas em um intervalo à direita de 0. Mas, podemos considerar a derivada lateral à direita $f'_+(0)$ que é

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Portanto não existe a derivada lateral à direita no ponto $x = 0$. Concluímos que $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável no intervalo $[0, +\infty)$ embora seja derivável no intervalo $(0, +\infty)$.

Exemplo 85. Considere a função $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$. Para todo $x \in (1, 2)$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h = 6x. \end{aligned}$$

Nos extremos do domínio, $x = 1$ e $x = 2$, devemos considerar as derivadas laterais que são:

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{6h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 6 + 3h = 6$$

e

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(2+h)^2 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{12 + 12h + 3h^2 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{12h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 12 + 3h = 12.$$

Portanto, $f(x)$ é diferenciável no intervalo $[1, 2]$.

3.5 Continuidade e Diferenciabilidade

Uma relação entre o conceito de continuidade e diferenciabilidade é dada no seguinte teorema:

Teorema 12. *Se $f(x)$ é uma função derivável em $x_0 \in D(f)$ então f é contínua em x_0 .*

Prova: Para provar este teorema devemos mostrar que se $f'(x_0)$ existe então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mas, este último limite equivale ao limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Assim, provamos o teorema mostrando que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Observação 43. Este teorema nos diz que se $f(x)$ é **descontínua em x_0** , então $f(x)$ **não é diferenciável em x_0** .

Exemplo 86. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 1$ (verifique!). Portanto, pelo teorema 12, $f(x)$ não é diferenciável no ponto $x = 1$.

Observação 44. Continuidade não implica em diferenciabilidade, ou seja, se $f(x)$ é contínua em x_0 não necessariamente $f(x)$ é derivável em x_0 . Um bom exemplo para ilustrar esse fato é a função $f(x) = |x|$ que é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável neste ponto.

Exemplo 87. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir, queremos determinar valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que a função seja diferenciável em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Primeiramente, pelo Teorema 12, devemos ter f contínua em $x = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x - 2 = -2, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} ax + b = b = f(0). \end{aligned}$$

Assim, devemos ter $b = -2$.

$$\text{Temos então: } f(x) = \begin{cases} ax - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Agora, devemos ter as derivadas laterais em $x = 0$ iguais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h - 2 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h}{h} = 1,$$

\uparrow $f(0) = -2$ \uparrow $h \rightarrow 0^+ \Rightarrow h > 0 \Rightarrow f(h) = h^2 + h - 2$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah - 2 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah}{h} = a.$$

\uparrow $f(0) = -2$ \uparrow $h \rightarrow 0^- \Rightarrow h < 0 \Rightarrow f(h) = ah - 2$

Portanto, devemos ter $a = 1$ e, assim, $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

3.6 Regras de Derivação

Nesta seção estudaremos regras para derivar funções sem o uso do limite que define a derivada.

3.6.1 Derivadas de funções constantes

Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ ou $\frac{df}{dx} = 0$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Exemplo 88. Se $f(x) = 5$ então $f'(x) = 0$.

3.6.2 Derivada do produto de uma função por uma constante

Se f é derivável em x e $g(x) = cf(x)$ para alguma constante c então $g(x)$ é derivável em x e

$$g'(x) = cf'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dg}{dx} = c \frac{df}{dx}.$$

De fato,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).$$

Exemplo 89. Sabemos que $f(x) = x^2$ tem derivada $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pela regra acima temos que $g(x) = 5f(x) = 5x^2$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e sua derivada é $g'(x) = 5 \cdot f'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$.

3.6.3 Derivadas de potências

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$ então $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e temos

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para provar esta regra, recordemos que

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + nx^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \\
 &= nx^{n-1} + 0 + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 90. Segue da regra acima que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

A regra acima pode ser generalizada para expoentes reais quaisquer. Mais precisamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^\alpha$ então

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Daremos a prova deste fato mais à frente. Por agora, vamos explorar esta regra em alguns exemplos.

Exemplo 91. Considere $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Observe que $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Considerando a regra geral da derivação de potências, temos que $f(x)$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Exemplo 92. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$. Observando que $f(x) = \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{6}{5}}$ e considerando a regra de derivação acima, temos

$$f'(x) = (x^{\frac{6}{5}})' = \frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-1} = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} = \frac{6\sqrt[5]{x}}{5}.$$

Exemplo 93. Seja $f(x) = x^\alpha$. Como $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(cf(x))' = cf'(x)$ para $c \in \mathbb{R}$ constante, temos

$$(cx^\alpha)' = c\alpha x^{\alpha-1} \quad \text{para} \quad \alpha, c \in \mathbb{R},$$

por exemplo,

$$(6x^3)' = 3 \cdot 6 \cdot x^{3-1} = 18x^2.$$

3.6.4 Regra da soma

Se f e g são deriváveis em x então a soma $(f+g)$ é derivável em x e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
 (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + h) - f(x)] + [g(x + h) - g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x + h) - g(x)]}{h} = f'(x) + g'(x).
 \end{aligned}$$

Exemplo 94. A função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

é a soma das funções $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$. Sabemos que $g(x)$ é derivável para todo $x \in (0, +\infty)$ com $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Também sabemos que $h(x) = \frac{1}{x}$ é derivável para todo $x \neq 0$ sendo $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$. Considerando então a regra da soma temos

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

3.6.5 Derivadas de polinômios

Funções polinomiais são somas de funções do tipo $a.x^n$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ como consideradas no exemplo 93. Segue da regra da soma que toda função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

é derivável em qualquer $x \in \mathbb{R}$ e sua derivada é a função polinomial $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = n.a_n x^{n-1} + (n-1).a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Exemplo 95. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 5x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1$$

é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e a sua derivada é

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1)' \\
 &= (5x^6)' + (3x^5)' + (-2x^3)' + (2x^2)' + (1)' \\
 &= 5(x^6)' + 3(x^5)' - 2(x^3)' + 2(x^2)' + (1)' \\
 &= 5.6x^5 + 3.5x^4 - 2.3x^2 + 2.2x + 0 \\
 &= 30x^5 + 15x^4 - 6x^2 + 4x.
 \end{aligned}$$

3.6.6 Regra do Produto

Se f e g são deriváveis em x então o produto $(f.g)$ é derivável em x e temos

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[f.g] = \frac{df}{dx}.g + f.\frac{dg}{dx}.$$

$$\begin{aligned} (f.g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x+h).g(x) + f(x+h).g(x) - f(x).g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h).[g(x+h) - g(x)]}{h}}_{=f(x)g'(x)} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}}_{=f'(x)g(x)} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Exemplo 96. Vamos usar a regra do produto para derivar $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{x}.(x^3 + 4x - 5)$$

note que $f(x) = g(x).h(x)$ sendo $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^3 + 4x - 5$. Sabemos que $g(x) = \sqrt{x}$ é derivável em todo ponto $x > 0$ e que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Sabemos também que a função polinomial $h(x) = x^3 + 4x - 5$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e $h'(x) = 3x^2 + 4$. Assim, pela regra do produto, $f(x)$ é derivável em todo $x > 0$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x).h(x) + g(x).h'(x) \\ &= (\sqrt{x})'.(x^3 + 4x - 5) + \sqrt{x}.(x^3 + 4x - 5)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.(x^3 + 4x - 5) + \sqrt{x}.(3x^2 + 4) \\ &= \frac{7x^3 + 12x - 5}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3.6.7 Regra do Quociente

Se f e g são deriváveis em um ponto x e $g(x) \neq 0$ então a função quociente $\frac{f}{g}$ é derivável em x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{f}{g}\right] = \frac{\frac{df}{dx}.g - f.\frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] g(x) - f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h) g(x)} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 97. Vamos usar a regra do quociente para encontrar a derivada de $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}.$$

Observe que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sendo $p(x) = x^3 + 2x^2$ e $q(x) = x - 1$ deriváveis em todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Segue da regra do quociente que $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2} = \frac{(x^3 + 2x^2)'(x - 1) - (x^3 + 2x^2) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} \\
 &= \frac{(3x^2 + 4x)(x - 1) - (x^3 + 2x^2)(1)}{(x - 1)^2} \\
 &= \frac{3x^3 + 4x^2 - 3x^2 - 4x - x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} \\
 &= \frac{2x^3 - x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1}.
 \end{aligned}$$

3.6.8 Regra da Cadeia (Derivada de Função Composta)

Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções deriváveis tais que $\text{Im}(g) \subset D(f)$. Então, a função composta $y = f(g(x))$ é derivável e vale a

Regra da Cadeia. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ ou $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$.

Vamos fazer uma prova supondo que $g(x+h) - g(x) \neq 0$ para todo h suficientemente pequeno.

Fixemos x . Usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned} (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)}. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sejam } a = g(x) \text{ e } y = g(x+h). \text{ Se } h \rightarrow 0, \text{ então } y \rightarrow a.}}}{=} \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(a) = f'(g(x)).$$

Portanto,

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\rightarrow f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)} = f'(g(x))g'(x).$$

Exemplo 98. Seja $h(x) = (x^2 + 1)^{10}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = x^{10} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = 10x^9 \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 10(g(x))^9 \cdot (2x) = 10(x^2 + 1)^9 \cdot (2x) = 20x(x^2 + 1)^9.$$

Exemplo 99. Seja $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ e } g(x) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } g'(x) = 3x^2 + 4x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}.$$

Note que a derivada não existe nos pontos $x = -2$ e $x = 0$.

Exemplo 100. Seja $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot 2x = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

3.7 Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja $1 \neq a > 0$. Vamos determinar a derivada da função $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

\uparrow
 como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$

Portanto

Derivada da Função Exponencial. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$.

Exemplo 101. Se $f(x) = 2^x$, então $f'(x) = 2^x \ln 2$.

Exemplo 102. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x \ln e = e^x$.

$$\uparrow$$

$$\ln e = 1$$

Exemplo 103. Se $h(x) = 5^{x^2+1}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = 5^x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Como $f'(x) = 5^x \ln 5$ e $g'(x) = 2x$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 5^{g(x)} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 2x \cdot 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 = 10x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5.$$

Exemplo 104. Se $h(x) = e^{1/x}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1/x$. Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = -1/x^2$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot (-1/x^2) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Exemplo 105. Se $h(x) = 3^{\sqrt{x}}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Como $f'(x) = 3^x \ln 3$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3^{g(x)} \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}.$$

Vamos usar a regra da cadeia para obter a derivada de $g(x) = \log_a x$. Para isso, lembremos que, como $g(x) = \log_a x$ e $f(x) = a^x$ são funções inversas, então

$$f(g(x)) = x, \text{ isto é, } a^{\log_a x} = x.$$

Assim, derivando em ambos os lados da igualdade, temos

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1, \text{ isto é, } a^{\log_a x} \ln a \cdot (\log_a x)' = 1.$$

Segue então que

$$g'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln a}}_{=\log_e a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Portanto

Derivada da Função Logarítmica. $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$.

Exemplo 106. Se $f(x) = \log_3 x$, então $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_3 e$.

Exemplo 107. Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$.

\uparrow
 $\ln e = 1$

Exemplo 108. Se $h(x) = \log_7(x^3 + x^2)$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \log_7 x$ e $g(x) = x^3 + x^2$. Como $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_7 e$ e $g'(x) = 3x^2 + 2x$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \log_7 e \cdot (3x^2 + 2x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \cdot \log_7 e = \frac{3x + 2}{x^2 + x} \cdot \log_7 e.$$

Exemplo 109. A derivada de $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x}{x+1}} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)(e^x)' - (x+1)'(e^x)}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2}\right) = \frac{x+1}{e^x} \cdot \frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

Exemplo 110. A derivada de $f(x) = e^{x \ln x}$ é

$$f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (x' \ln x + x(\ln x)') = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x} (1 + \ln x).$$

Exemplo 111. Vamos calcular $a, b \in \mathbb{R}$ para que a função a seguir seja derivável em todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ b \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para $x \neq 1$, temos que f é contínua (verifique!) e derivável, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} -2axe^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{b}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Agora, para $x = 1$, devemos, primeiramente, pelo Teorema 12, ter f contínua. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b \ln(1) + 1 = b \ln 1 + 1 = 1 = f(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ae^{-x^2} = ae^{-1}.$$

Assim, devemos ter $ae^{-1} = 1$, isto é, $a = e$ e $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ b \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Agora, verifique que $f'_-(1) = -2$ e $f'_+(1) = b$.

Portanto, devemos ter $b = -2$ e $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ -2 \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Exemplo 112. Para a derivada de $f(x) = x^x$, escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ e aplicamos a regra da cadeia:

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x} \right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exemplo 110}}}{=} e^{x \ln x} (1 + \ln x) \underset{\substack{\uparrow \\ x^x = e^{x \ln x}}}{=} x^x (1 + \ln x).$$

Podemos usar a Regra da Cadeia para generalizar o exemplo anterior, isto é, calcular a derivada de uma função na forma $f(x)^{g(x)}$ onde f e g são deriváveis e $f(x) > 0$. Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\left(f(x)^{g(x)} \right)' = \left(e^{g(x) \ln f(x)} \right)' = e^{g(x) \ln f(x)} (g(x) \ln(f(x)))'$$

e portanto,

$$\left(f(x)^{g(x)} \right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Por exemplo:

Exemplo 113. Para a derivada de $h(x) = (x+1)^{2x+3}$, chamemos $f(x) = x+1$ e $g(x) = 2x+3$. Então, $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2$. Dessa forma:

$$h'(x) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) = (2x+3)(x+1)^{2x+2} + 2(x+1)^{2x+3} \ln(x+1).$$

Observação 45. Em particular, temos a regra da potência para potências reais: se $h(x) = x^r$, onde $r \in \mathbb{R}$, temos que $h'(x) = r x^{r-1}$. De fato, escrevendo

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \ln x}$$

Temos que

$$(x^r)' = \left(e^{r \ln x} \right)' = e^{r \ln x} (r \ln x)' = e^{r \ln x} \left(\frac{r}{x} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x^r = e^{r \ln x}}}{=} \frac{r x^r}{x} = r x^{r-1}.$$

3.8 Derivada da Função Inversa

O argumento usado para calcular a derivada da função logarítmica pode ser generalizado para calcular a derivada da inversa de uma função.

Sejam $y = f(x)$ uma função invertível e $x = g(y)$ sua inversa, temos que

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in D(g).$$

Então, derivando os dois lados em relação à y , temos

$$f'(g(y))g'(y) = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Derivada da Função Inversa. Seja $y = f(x)$ uma função derivável e invertível em (a, b) tal que $f'(x) \neq 0$ em (a, b) . Seja $x = g(y)$ a função inversa de $f(x)$. Então, $x = g(y)$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{se } f'(g(y)) \neq 0.$$

Exemplo 114. Seja $y = f(x) = 8x^3$. A inversa dessa função é $x = g(y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$. Pelo resultado anterior, a derivada de $x = g(y)$ é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{24(g(y))^2} = \frac{1}{24\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}$$

que também pode ser encontrada usando a regra da potência.

Exemplo 115. A questão a seguir estava na prova opcional de 2017-1.

Considere a função bijetora $f : [0, \frac{3}{2}] \rightarrow [-\frac{281}{32}, 5]$ dada por

$$f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5.$$

Se $f(1) = -2$ e g é a inversa de f , então $g'(-2)$ vale:

- a) $\frac{-1}{14}$ b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{14}$

Vamos resolver essa questão. Sejam $y = f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5$ e $x = g(y)$ sua inversa. Então, usando a derivada da inversa, temos que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} \stackrel{\substack{\uparrow \\ f(1) = -2 \Rightarrow g(-2) = 1}}{=} \frac{1}{f'(1)}.$$

Assim, basta calcular $f'(1)$. Temos que

$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 10x \Rightarrow f'(1) = 5 - 9 - 10 = -14.$$

Portanto

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{14}.$$

Exemplo 116. (2016-2) A figura abaixo representa o gráfico da derivada f' de uma função bijetora f .



Sabendo que o gráfico de f passa pelo ponto $(5, 2)$, a derivada da inversa de f no ponto 2 é igual a:

$$\text{a) } \frac{-1}{4} \qquad \text{b) } \frac{1}{4} \qquad \text{c) } \frac{1}{3} \qquad \text{d) } 3 \qquad \text{e) } \frac{-1}{3}$$

Vamos resolver essa questão. Seja $x = g(y)$ a inversa de $y = f(x)$. Então

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(5)}.$$

(5, 2) no gráfico de $f \Rightarrow f(5) = 2 \Rightarrow g(2) = 5$

Pelo gráfico, temos que $f'(5) = 4$, donde $g'(2) = 1/4$.

Vamos ver nas próximas seções mais exemplos de uso da derivada da função inversa.

3.9 Derivadas das Funções Trigonômétricas

Vamos começar obtendo a derivada da função seno a partir da definição de derivada, lembrando que $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$. Então, se $f(x) = \sin x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cos x + \sin x(\cos h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} + \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Portanto

$$(\sin x)' = \cos x.$$

No capítulo anterior, vimos que $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ e $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\cos x = \sin(x + \pi/2) \Rightarrow (\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))'.$$

Para derivar, $\sin(x + \pi/2)$ usamos a regra da cadeia:

$$(\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) \cdot (x + \pi/2)' = \cos(x + \pi/2) = -\sin x.$$

Portanto

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Você também pode fazer essa derivada usando a definição, como um exercício. Usando essas derivadas e a regra da cadeia, podemos derivar várias funções:

Exemplo 117. A derivada de $f(x) = \sin(x^4 + x^2)$ é $f'(x) = \cos(x^4 + x^2) \cdot (4x^3 + 2x)$.

Exemplo 118. A derivada de $f(x) = \cos(e^x)$ é $f'(x) = -\sin(e^x) \cdot e^x$.

Exemplo 119. A derivada de $f(x) = \sin(\cos(\ln x))$ é

$$f'(x) = \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot (1/x) = -\frac{\cos(\cos(\ln x)) \cdot (\sin(\ln x))}{x}.$$

As derivadas das demais funções trigonométricas podem ser obtidas usando as regras de derivação, por exemplo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \Rightarrow (\operatorname{tg} x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \operatorname{cos} x - (\operatorname{cos} x)' \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} = \sec^2 x,$$

\uparrow usando a regra do quociente \uparrow $\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$$\sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x} \Rightarrow (\sec x)' = ((\operatorname{cos} x)^{-1})' = -(\operatorname{cos} x)^{-2} (\operatorname{cos} x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \frac{1}{\operatorname{cos} x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

\uparrow usando a regra da cadeia

Como um exercício, você deve provar que

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x.$$

Exemplo 120. A derivada de $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + 2^x)$ é $f'(x) = (3x^2 + 2^x \ln 2) \cdot \sec^2(x^3 + 2^x)$.

Exemplo 121. A derivada de $f(x) = \operatorname{cotg} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{regra da cadeia} \left[-\operatorname{cossec}^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' \right] = \operatorname{regra do quociente} \left[-\operatorname{cossec}^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{(x+1)'(x-1) - (x-1)'(x+1)}{(x-1)^2} \right) \right] \\ &= -\operatorname{cossec}^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} \right) = \frac{2 \operatorname{cossec}^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Agora, para as derivadas das funções trigonométricas inversas, vamos usar a derivada da função inversa vista na seção anterior.

Temos que $y = \operatorname{arcsen} x$, para todo $x \in (-1, 1)$ se e somente se $x = \operatorname{sen} y$. Assim,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\operatorname{cos} y}.$$

Devemos então determinar $\operatorname{cos} y$ em função de x . Temos que:

$$\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{cos}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \Rightarrow \operatorname{cos} y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

\uparrow $y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \operatorname{cos} y > 0$ \uparrow $x = \operatorname{sen} y$

Portanto:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Observação 46. Observe que não existem as derivadas de $\operatorname{arcsen} x$ nos pontos $x = \pm 1$ e, como pode ser visto no gráfico, as retas tangentes nesses pontos são verticais.

Analogamente, pode-se provar, para $-1 < x < 1$, que

$$(\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para a derivada de $y = \operatorname{arctg} x$, repetimos o processo:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

\uparrow $\sec^2 y - \operatorname{tg}^2 y = 1$

Exemplo 122. A derivada de $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x + 1)$ é $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}}$.

Exemplo 123. A derivada de $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ é

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)}.$$

↑
regra da cadeia

Como exercício, você deve provar as derivadas das demais funções trigonométricas inversas:

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1,$$

$$(\operatorname{arccossec} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1,$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

3.10 Derivadas das Funções Hiperbólicas

As derivadas do seno e do cosseno hiperbólicos seguem facilmente da derivada da função exponencial de base e :

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (\operatorname{senh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{cosh} x,$$

↑
 $(e^{-x})' = -e^{-x}$ pela regra da cadeia

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (\operatorname{cosh} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

↑
 $(e^{-x})' = -e^{-x}$ pela regra da cadeia

Já as derivadas das demais funções seguem das regras de derivação, por exemplo:

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{(\operatorname{senh} x)' \operatorname{cosh} x - \operatorname{senh} x (\operatorname{cosh} x)'}{\operatorname{cosh}^2 x}$$

↑
usando a regra do quociente

$$= \frac{\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{cosh}^2 x} = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{cosh}^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$$

Você pode fazer o mesmo para as demais funções hiperbólicas

$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\operatorname{cossech}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossech} x)' = -\operatorname{cotgh} x \operatorname{cossech} x,$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x.$$

Exemplo 124. A derivada de $f(x) = \operatorname{senh}(x^3 + 3)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \operatorname{cosh}(x^3 + 3).$$

Exemplo 125. A derivada de $f(x) = \operatorname{sech}(2x)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -2\operatorname{tgh}(2x)\operatorname{sech}(2x).$$

Exemplo 126. A derivada de $f(x) = \ln(\operatorname{tgh}(3x))$ é, usando a regra da cadeia duas vezes,

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}(3x)} \cdot 2\operatorname{sech}^2(2x) = \frac{2\operatorname{sech}^2(2x)}{\operatorname{tgh}(3x)}.$$

Exemplo 127. A derivada de $f(x) = \operatorname{cotgh}(1 - x^3)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -\operatorname{cossech}^2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) = 3x^2 \cdot \operatorname{cossech}^2(1 - x^3).$$

Para as funções hiperbólicas inversas, usaremos novamente a derivada da função inversa, além das identidades hiperbólicas.

Por exemplo, dado $y = \operatorname{argsenh} x$, temos que $x = \operatorname{senh} y$ e

$$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{senh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{cosh} y} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{cosh}^2 y = 1 + x^2$

Para o cosseno hiperbólico podemos fazer analogamente, tomando apenas cuidado com o domínio, que é $D(\operatorname{cosh} x) = [1, +\infty)$:

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cosh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{senh} y} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{se } x > 1.$$

$\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y = x^2 - 1$

As demais derivadas das funções hiperbólicas inversas podem ser obtidas analogamente:

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1,$$

$$(\operatorname{argsech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1,$$

$$(\operatorname{argcossech} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 0,$$

$$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1.$$

Exemplo 128. A derivada de $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{argcosh}(x^2)$ é

$$f'(x) \stackrel{\uparrow}{=} (x^2)' \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 (\operatorname{argcosh}(x^2))'$$

regra do produto

$$\stackrel{\uparrow}{=} 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}} = 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}.$$

regra da cadeia em $(\operatorname{argcosh}(x^2))'$

Exemplo 129. A derivada de $f(x) = \operatorname{argtgh}(\operatorname{sen}(3x))$, usando a regra da cadeia, é

$$f'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2(3x)} \cdot (\operatorname{sen}(3x))' \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{\operatorname{cos}^2(3x)} \cdot 3\operatorname{cos}(3x) = \frac{3}{\operatorname{cos}(3x)}.$$

$\operatorname{sen}^2(3x) + \operatorname{cos}^2(3x) = 1$

3.11 Tabela de Derivadas

A seguir, apresentamos um resumo do que foi discutido nas seções anteriores em forma de uma tabela de derivadas.

Função	Derivada	Função	Derivada
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sec x$	$\operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}, x > 1$
$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x$	$\operatorname{arccossec} x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}, x > 1$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$	$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$	$\operatorname{argsenh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$
$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$	$\operatorname{argsech} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$
$\operatorname{cossech} x$	$-\operatorname{cotgh} x \operatorname{cossech} x$	$\operatorname{argcossech} x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2+1}}, x \neq 0$
$\operatorname{cotgh} x$	$-\operatorname{cossech}^2 x$	$\operatorname{argcotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, x > 1.$

3.12 Derivadas Sucessivas

Vimos que dada uma função $f(x)$ diferenciável, podemos definir a função derivada $f'(x)$.

Se essa função $f'(x)$ for também diferenciável, definimos a *derivada segunda de $f(x)$* (ou derivada de ordem 2), denotada por $f''(x)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}$, como sendo a derivada de $f'(x)$.

Se a derivada segunda $f''(x)$ for diferenciável, podemos definir a *derivada terceira de $f(x)$* (ou derivada de ordem 3), denotada por $f'''(x)$ ou $\frac{d^3 f}{dx^3}$, como sendo a derivada de $f''(x)$.

Em geral, se a n -ésima derivada de $f(x)$ existe e é derivável, podemos definir a $(n+1)$ -ésima (ou derivada de ordem $n+1$) de $f(x)$, denotada por $f^{(n+1)}(x)$ ou $\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$, como sendo a derivada de $f^{(n)}(x)$.

Exemplo 130. Seja $f(x) = x^5$. Temos:

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f'''(x) = 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ se } n \geq 6.$$

Não necessariamente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$ sempre que $n \geq n_0$, como veremos a seguir.

Exemplo 131. Seja $f(x) = \text{sen } x$. Temos que

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\text{sen } x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen } x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(6)}(x) = -\text{sen } x$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(8)}(x) = \text{sen } x$$

$$\vdots$$

Exemplo 132. Seja $f(x) = e^x$. Temos que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 1$. Agora, se $f(x) = a^x$ para $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq e$, temos que

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f''(x) = a^x \cdot (\ln a)^2$$

$$f'''(x) = a^x \cdot (\ln a)^3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

3.13 Derivação Implícita

As funções que trabalhamos até agora foram dadas *explicitamente*, isto é, eram funções cujas expressões $y = f(x)$ eram conhecidas e podiam ser usadas para calcular $f(x)$ para cada x do domínio. Além disso, era possível calcular $f'(x)$ usando as regras vistas.

Porém, algumas funções podem ser apresentadas de forma *implícita*, o que veremos a seguir.

Exemplo 133. Consideremos a função $y = f(x)$ dada pelas soluções da equação

$$y^3 + x = 2.$$

Vemos que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que o par (x, y) satisfaz a equação dada. Esse y pode ser conhecido facilmente:

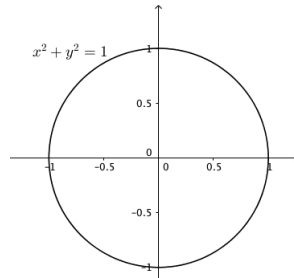
$$y^3 + x = 2 \iff y^3 = 2 - x \iff y = \sqrt[3]{2 - x}.$$

Isso significa que a função dada implicitamente por $y^3 + x = 2$ pode ser dada explicitamente por $y = \sqrt[3]{2 - x}$, bastando isolar o y .

Em geral, dizemos que $y = f(x)$ é uma função definida *implicitamente* por uma equação em x e y quando o par $(x, f(x))$ satisfaz essa equação.

Porém, nem sempre conseguimos explicitar uma função dada implicitamente.

Exemplo 134. Consideremos a equação $x^2 + y^2 = 1$.



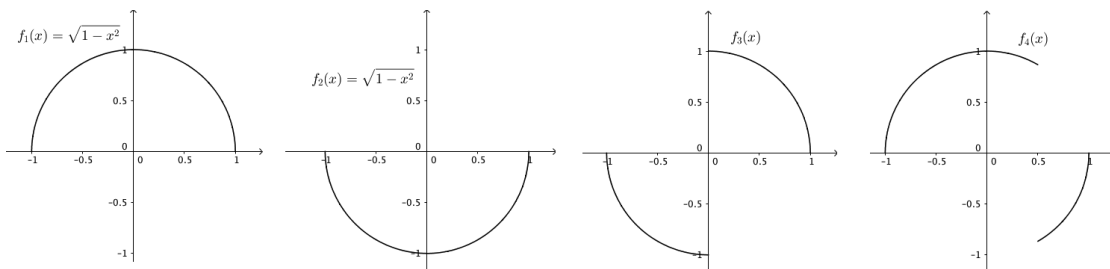
Sabemos que as soluções dessa equação representam um círculo de raio 1 centrado na origem, o que não é uma função, pois cada $x \in (-1, 1)$ se relaciona com dois valores de $y \in [-1, 1]$. Podemos, no entanto, encontrar várias funções que satisfazem essa equação, como por exemplo:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \leq x < 1/2. \end{cases}$$



Vamos determinar a derivada no ponto de abscissa $x = 1/2$ em cada caso. Por exemplo, usando $f_1(x)$ ou $f_3(x)$, a derivada em $(1/2, \sqrt{3}/2)$ é dada por $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, vale $\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Já com as funções $f_2(x)$ ou $f_4(x)$, o ponto de coordenada $x = 1/2$ é $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. A derivada de $f_2(x)$ nesse ponto é dada por $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, vale $\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Já a função $f_4(x)$ não possui derivada em $x = 1/2$ pois não é contínua nesse ponto. Isso nos dá a ideia de que a derivada no ponto de abscissa $1/2$ depende da expressão explícita da função.

Porém, quando a função é derivável, podemos calcular essa derivada sem explicitar a função. De fato, voltemos à equação $x^2 + y^2 = 1$ representando implicitamente uma função $y = f(x)$, isto é:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1.$$

Podemos derivar essa expressão em ambos os lados:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \implies 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \implies f(x)f'(x) = -x \implies f'(x) = \frac{-x}{f(x)} = \frac{-x}{y}.$$

\uparrow
 regra da cadeia em $(f(x))^2$

Vamos usar essa expressão para calcular novamente as derivadas no ponto de abscissa $x = 1/2$ nos casos de $f(x)$ igual a cada uma das funções deriváveis $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ vistas acima. Para $f(x) = f_1(x)$ ou $f(x) = f_3(x)$ o ponto correspondente é $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Para $f(x) = f_2(x)$ o ponto correspondente é $(x, y) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Note que foram os mesmos valores obtidos anteriormente quando derivamos as expressões explícitas das funções. Isso significa que podemos obter a derivada de $f(x)$ (quando $f(x) \neq 0$) sem conhecer explicitamente $f(x)$.

Esse processo, chamado *derivada implícita*, pode ser feito para qualquer função derivável dada implicitamente por uma equação. No que segue, quando dissermos que uma função é dada implicitamente por uma equação, iremos admitir que essa função é derivável em todos os pontos onde essa derivada puder ser definida. Vamos ver outro exemplo.

Exemplo 135. Seja $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação

$$\ln(y) + y^2 = x^2.$$

Não é difícil ver que não conseguimos uma expressão explícita para $y = f(x)$. No entanto, podemos derivar ambos os lados da igualdade:

$$\ln(f(x)) + (f(x))^2 = x^2 \implies \frac{1}{f(x)}f'(x) + 2f(x)f'(x) = 2x \implies f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} + 2f(x) \right) = 2x$$

\uparrow
 regra da cadeia em $(f(x))^2$ e em $\ln(f(x))$

$$\implies f'(x) = \frac{2x f(x)}{1 + 2(f(x))^2}.$$

Exemplo 136. Vamos determinar a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ dada implicitamente pela expressão

$$e^y + xy = \sqrt{x}$$

no ponto $(1, 0)$. Como $y = f(x)$, temos

$$e^{f(x)} + x f(x) = \sqrt{x}.$$

Notamos que $g(x) = e^{f(x)}$ é uma função composta cuja derivada, usando a regra da cadeia, é

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Assim:

$$e^{f(x)} + x f(x) = \sqrt{x} \implies e^{f(x)} f'(x) + f(x) + x f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

↑
derivando ambos os lados

Quando $x = 1$, temos:

$$e^{f(1)} f'(1) + f(1) + f'(1) = \frac{1}{2} \implies e^0 f'(1) + f'(1) = 1/2 \implies 2f'(1) = 1/2 \implies f'(1) = 1/4.$$

↑
 $f(1) = 0$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva em $(1, 0)$ é $1/4$ e, então, a reta tangente é:

$$-x + 4y = -1.$$

Exemplo 137. A questão abaixo estava em uma prova de 2016-1.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente por $\arctg(y) + \frac{y}{x} = x - 1$ no ponto de ordenada $y = 0$ é:

- a) -1 b) 0 c) $1/2$ d) 1 e) 2

Vamos resolvê-la notando que $y = f(x)$ satisfaz

$$\arctg(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1.$$

Notamos que, pela regra da cadeia:

$$(\arctg(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

Assim:

$$\arctg(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1 \implies \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} + \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 1.$$

↑
derivando ambos os lados

Queremos determinar a derivada quando $f(x) = 0$, assim, podemos simplificar a expressão anterior:

$$\frac{f'(x)}{1 + \underbrace{(f(x))^2}_{\rightarrow 0}} + \frac{x f'(x) - \underbrace{f(x)}_{\rightarrow 0}}{x^2} = 1 \implies f'(x) + \frac{f'(x)}{x} = 1.$$

Ainda, voltando à expressão inicial, quando $f(x) = 0$, temos que $x = 1$ (usando que $\arctg(0) = 0$). Portanto, obtemos

$$f'(1) + \frac{f'(1)}{1} = 1 \implies f'(1) = 1/2.$$

Exemplo 138. A questão abaixo estava em uma prova de 2015-2.

A função diferenciável $y = f(x)$ satisfaz a equação $\frac{\cos(x-y)}{x+y} = 1/2$. Se $f(1) = 1$, então a derivada da função f em $x = 1$ é:

- a) -1 b) 0 c) 1 d) -1/2 e) 1/2

Vamos resolvê-la. Para isso, notamos que $y = f(x)$ satisfaz:

$$\frac{\cos(x - f(x))}{x + f(x)} = 1/2.$$

Derivando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\frac{(\cos(x - f(x)))'(x + f(x)) - (x + f(x))' \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\text{sen}(x - f(x))(1 - f'(x))(x + f(x)) - (1 + f'(x)) \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} = 0.$$

↑
regra da cadeia

Queremos determinar a derivada em $x = 1$, isto é, $f'(1)$. Temos:

$$\frac{-\text{sen}(1 - f(1))(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cos(1 - f(1))}{(1 + f(1))^2} = 0.$$

Pode parecer uma expressão horrível, mas voltemos ao enunciado, que diz que $f(1) = 1$, isto é, $1 - f(1) = 0$. Assim:

$$\frac{-\text{sen}(1 - f(1))(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cos(1 - f(1))}{(1 + f(1))^2} = 0 \Rightarrow \frac{-1 - f'(1)}{4} = 0.$$

Portanto, $f'(1) = -1$.

3.14 Exercícios

1. Determine a derivada das funções a seguir.

(a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + x^3$

(c) $f(x) = 12x^{20} + 14x^4 + 13x$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

(e) $f(x) = \frac{5x^4}{\sqrt{x}}$

(f) $f(x) = 5\sqrt[3]{12x}$

(g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^5 + x^4 + 3x + 2)$

(i) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

(j) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3+x^2+1}$

(k) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}$

(l) $f(x) = (1-x^2)^{100}$

(m) $f(x) = \sqrt{x-3}$

(n) $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2-3}$

(o) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

(p) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$

(q) $f(x) = (x^3 + \sqrt{x+1})^{10}$

(r) $f(x) = 2^{x^2+1}$

(s) $f(x) = \log(x^5 + x^4)$

(t) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(x^2)$

(u) $f(x) = 2^{\text{sen } x}$

(v) $f(x) = \ln(\text{sen } x)$

(w) $f(x) = 2^x \cdot 3^x$

(x) $f(x) = \ln x \cdot \text{sen } x$

(y) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

(z) $f(x) = 4x^2 e^x$

2. Determine a derivada das funções a seguir.

$$(a) f(x) = \frac{-x + 2}{x \ln x}$$

$$(b) f(x) = e^x(\sqrt{x} + \sec x)$$

$$(c) f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$$

$$(d) f(x) = \cos(\sqrt{x})$$

$$(e) f(x) = \ln(4x - 2)$$

$$(f) f(x) = (x^4 - 3x^2 + 7)^{10}$$

$$(g) f(x) = \text{sen}(\cos(e^x))$$

$$(h) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$$

$$(i) f(x) = \left(\frac{x + 1}{x^2 + 1}\right)^4$$

$$(j) f(x) = 8^{3x^2 - 1}$$

$$(k) f(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)$$

$$(l) f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

$$(m) f(x) = e^{2x} \ln(x^2)$$

$$(n) f(x) = \sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1}$$

$$(o) f(x) = (\ln x + \sqrt{x})^3$$

$$(p) f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$$

$$(q) f(x) = \text{sen}(x^2 + 3x)$$

$$(r) f(x) = \cos(\ln(x^2))$$

$$(s) f(x) = \text{tg}(x^2 - 2)$$

$$(t) f(x) = 2^{\ln(\cos x)}$$

$$(u) f(x) = x^x$$

$$(v) f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$(w) f(x) = \frac{\cos x}{2\text{sen}^2 x}$$

$$(x) f(x) = \arcsen\left(\frac{x^3}{2}\right)$$

$$(y) f(x) = (\text{sen } x)^{\cos x}$$

$$(z) f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

3. Verifique se a função $f(x) = 3x|x|$ é derivável no ponto $x = 0$.

4. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$ e mostre que $f(x)$ é não derivável em $x = 0$.

5. Mostre que se $f(x)$ é uma função par (ímpar) então $f'(x)$ é ímpar (par).

6. Considere a função $f(x) = \frac{x^{a+1}}{x+a}$ em que a é uma constante real. Determine os valores de a para que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

7. Encontre a derivada da função $f(x) = \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^3$ nos pontos 0 , -2 e 2 .

8. Sabendo que $f(2) = 1$, $f(8) = 5$, $f'(2) = 7$ e $f'(8) = -3$ encontre

$$(a) g'(2), \text{ onde } g(x) = [f(x)]^2.$$

$$(b) h'(2), \text{ onde } h(x) = f(x^3).$$

$$(c) q'(2), \text{ onde } q(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ sendo } h(x) \text{ e } g(x) \text{ como acima.}$$

9. Seja $f(x) = \text{sen}(2x)$. Ache todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ tais que $f'(x) = 0$.

10. Determine a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa x_0 indicado.

$$(a) y = \frac{e^x}{1+x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$(b) y = x^{\text{sen } x}, \quad x_0 = \pi/2.$$

$$(c) y = (3 - x^2)^4 \sqrt[3]{5x - 4}, \quad x_0 = 1.$$

$$(d) y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad x_0 = 0.$$

11. Calcule as derivadas até 3ª ordem das funções $y = f(x)$ a seguir.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ y = 3x^2 - 2x + 5 & \text{(c)} \ y = \log(x + 2) & \text{(e)} \ y = \frac{2x}{x^2 - 1} \\ \text{(b)} \ y = \frac{1}{x} & \text{(d)} \ y = \frac{x - 1}{x + 3} & \text{(f)} \ y = e^{2 \cos x} \end{array}$$

12. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$. Calcule $g' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ supondo que $f'(1) = 2$.

13. Determine os pontos em que a função a seguir é derivável e calcule a derivada nesses pontos.

$$f(x) = \begin{cases} (x + 3)^2 & \text{se } x \leq -2, \\ x^2 - 3 & \text{se } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x < 0, \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos \left(\frac{1}{x - 1} \right) & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

14. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f(x) = 2x + |x^2 - 2|$ é derivável. Determine a derivada nesses pontos.

15. É possível determinar $a, b \in \mathbb{R}$ de forma a ter a função a seguir derivável em \mathbb{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{x} & \text{se } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

16. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a função a seguir seja derivável em todo seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{se } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{se } c < x. \end{cases}$$

17. Calcular $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que a função seja derivável em todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{se } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

Exercícios de provas anteriores

18. (2017-1) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} & \text{se } x < a \\ x - a + 1 & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

O valor de $a + b$ para que f seja derivável em \mathbb{R} é:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2

19. (2017-1) Sobre a função $f(x) = e^{\cos x} + x$, podemos afirmar que:

- a) $f'(0) < f''(0) < f(0)$ c) $f'(0) < f(0) < f''(0)$ e) $f''(0) < f'(0) < f(0)$
 b) $f(0) < f''(0) < f'(0)$ d) $f''(0) < f(0) < f'(0)$

20. (2014-2) A derivada da função $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$ em $x = 2$ é:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 7 e) 11

21. (2014-2) Considere a função $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ ax + b, & \text{se } x \in (-\pi/2, 0], \end{cases}$$

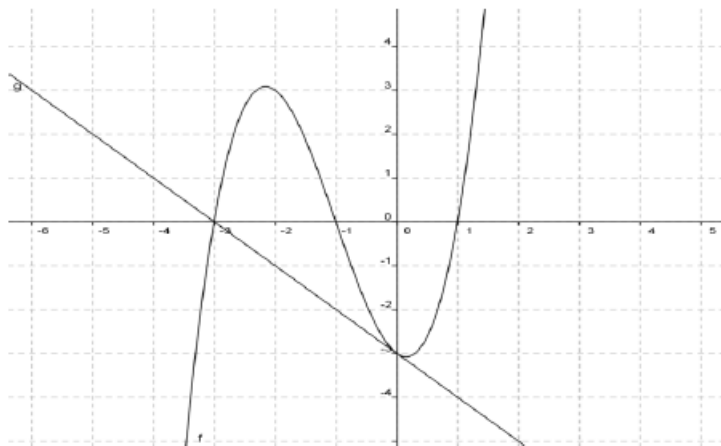
sendo a e b constantes reais. Podemos afirmar que o valor da soma $a + b$ para que a função f seja derivável em $x = 0$ é:

- a) - 2 b) - 1 c) 0 d) 1 e) 2

22. (2015-2) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx$, sendo a e b constantes reais. Sabendo que a tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$, podemos afirmar que o produto ab é:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

23. (2015-1) Na figura abaixo estão representados parte dos gráficos de uma função derivável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e da reta tangente g à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 0.



A equação da reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 0 é:

- a) $x + y + 3 = 0$ c) $x - y - 3 = 0$ e) $x + 3y + 3 = 0$
 b) $x - y + 3 = 0$ d) $x + y - 3 = 0$

24. (2016-2) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente por $(1 + \cos(x^2 y^2))^2 + x + y = 5$, no ponto de ordenada $y = 0$, é igual a:

- a) -1 b) 0 c) 1/2 d) 1 e) 2
25. (2016-2) A derivada da função $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 + 1)$ em $x = 1$ é igual a:
a) 1 b) 0 c) -1/2 d) 1/10 e) 2/5
26. (2016-2) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$
É **CORRETO** afirmar que:
a) $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$. c) $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$. e) $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = -1$.
b) $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. d) $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = 1$.
27. (2017-1) Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^{(x-1)} & \text{se } x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$
Se $f'_-(1) = a$ e $f'_+(1) = b$ podemos afirmar que:
a) $a > b$ b) $ab > 1$ c) $|a| = |b|$ d) $a \cdot b^{-1} < 0$ e) $2a = b$
28. (2017-1) A derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x))$ em $x = 1/2$ é:
a) 1 b) 2 c) 1/4 d) -1 e) 1/2
29. (2017-1) Seja a uma constante real positiva e seja f uma função derivável em $x = a$.
O limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ é igual a:
a) $2\sqrt{a}f'(a)$ b) $\sqrt{a}f'(a)$ c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}f'(a)$ d) $\frac{1}{\sqrt{a}}f'(a)$ e) $\frac{\sqrt{a}}{2}f'(a)$
30. (2016-1) A derivada da função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ em $x = 1$ é igual a:
a) 1 b) 0 c) 1/2 d) $\ln 2$ e) 2
31. (2015-2) A derivada segunda da função $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(3x)$ em $x = 0$ é:
a) 6 b) 3 c) 0 d) -3 e) -6
32. (2010-1) A inclinação da tangente à curva definida pela equação $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ no ponto $(2, 0)$ é:
a) $-2/5$ b) $2/5$ c) $-4/5$ d) $4/5$ e) 0
33. (2010-1) A derivada segunda da função $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$ é:
a) $\frac{1}{1 + e^x}$ b) $\frac{-1}{1 + e^x}$ c) $\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ d) $\frac{-e^x}{(1 + e^x)^2}$ e) 0
34. (2010-1) Sejam $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. A derivada da função composta $(f \circ g)(x)$ é:

- a) $\frac{\cos x}{\sin x + 1}$ b) $\frac{\sin x}{\sin^2 x + 1}$ c) $\frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}$ d) $\frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$ e) $\frac{\cos x}{\cos^2 x + 1}$
35. (2013-1) A equação da reta tangente à curva $y = \frac{\ln x}{e^x}$ no ponto de abscissa 1 é dada por:
- a) $y = -\frac{1}{e}(x - 1)$ b) $y = \frac{1}{e}(x + 1)$ d) $y = -e(x - 1)$
 c) $y = e(x - 1)$ e) $y = \frac{1}{e}(x - 1)$
36. (2013-2) A soma das constantes a e b para que o gráfico da função $f(x) = a + b \sin^2(x/2)$ e a curva definida implicitamente pela equação $y \cos x + xy = 5\pi x$ tenham a mesma reta tangente no ponto $(\pi/2, 5\pi)$ é:
- a) $10 + 5\pi$ b) $10 - 5\pi$ c) $5\pi - 10$ d) 20 e) 5π
37. (2013-2) Sabendo que f é uma função derivável com $f(0) = 0$ e que
- $$g(x) = 2(x - 1)^2 + (f(x) + 1)^2$$
- é a função constante igual a 5, então $f'(0)$ é igual a:
- a) - 2 b) 2 c) - 1 d) 1 e) 0
38. (2013-2) A derivada de $f(x) = \operatorname{arctg}(g(g(x)))$ em $x = -1$, sabendo que $g(-1) = -1$ e $g'(-1) = 4$, é:
- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

3.15 Respostas dos Exercícios

1.

- | | |
|---|--|
| (a) $-1/(x + 1)^2$ | (o) $(2x + 1)/(2\sqrt{x^2 + x + 1})$ |
| (b) $(x^{5/2} + 6x^5 - 4)/(2x^3)$ | (p) $(3x^2 + 2x + 1)/(3(x^3 + x^2 + x + 1)^{2/3})$ |
| (c) $240x^{19} + 56x^3 + 13$ | (q) $10(3x^2 + 1)/(2\sqrt{x + 1})(x^3 + \sqrt{x + 1})^9$ |
| (d) $-\frac{3}{4x^{7/4}}$ | (r) $2x^2 + 2x \ln 2$ |
| (e) $(35x^{5/2})/2$ | (s) $\log e (5x + 4)/(x^2 + x)$ |
| (f) $(5(2/3)^{2/3})/x^{2/3}$ | (t) $(2e^{x^2}(x^2 \ln(x^2) + 1))/x$ |
| (g) $(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$ | (u) $2^{\sin x} \cos x \ln 2$ |
| (h) $(11x^5 + 9x^4 + 9x + 2)/(2\sqrt{x})$ | (v) $\operatorname{cotg} x$ |
| (i) $(x^2 - 2x - 2)/(x - 1)^2$ | (w) $6^x \ln 6$ |
| (j) $(-5x^3 - 3x^2 + 1)/(2\sqrt{x}(x^3 + x^2 + 1)^2)$ | (x) $\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x$ |
| (k) $(5x - 1)/(6(x - 1)^{2/3}\sqrt{x + 1})$ | (y) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ |
| (l) $200x(x^2 - 1)^{99}$ | (z) $4e^x x(x + 2)$ |
| (m) $1/2(\sqrt{x - 3})$ | |
| (n) $x(2 - 1/\sqrt{x^2 - 3})$ | |
- 2.
- | | |
|--|---|
| (a) $\frac{x - 2 \ln x - 2}{x^2 \ln^2 x}$ | (e) $\frac{2}{2x - 1}$ |
| (b) $e^x(\sqrt{x} + \sec x) + e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{tg} x \sec x \right)$ | (f) $20x(2x^2 - 3)(x^4 - 3x^2 + 7)^9$ |
| (c) $\frac{x^2 - 2x^2 \ln x + 1}{(x(x^2 + 1))^2}$ | (g) $-e^x \sin(e^x) \cos(\cos(e^x))$ |
| (d) $-\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ | (h) $-(2x + 1)/(3(x^2 + x + 1)^{4/3})$ |
| | (i) $-\frac{4(x + 1)^3(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^5}$ |
| | (j) $8^{3x^2 - 1}(6x) \ln 8 = 3 \cdot 2^{9x^2 - 2} x \ln 8$ |

- (k) $\frac{2}{x^2 - 1}$ (l) $-\frac{1}{\sqrt{(1-x)/(x+1)}(x+1)^2}$ (m) $\frac{2e^{2x}(x \ln(x^2) + 1)}{x}$ (n) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ (o) $\frac{3(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + \ln x)^2}{2x}$ (p) $\frac{e^{-x}(1 - x \ln x)}{x}$ (q) $(2x + 3) \cos(x(x + 3))$
- (r) $-\frac{2 \operatorname{sen}(\ln(x^2))}{x}$ (s) $2x \sec^2(x^2 - 2)$ (t) $-\ln(2) \operatorname{tg}(x) 2^{\ln(\cos x)}$ (u) $x^x (\ln x + 1)$ (v) $\frac{\log_e e}{2} \operatorname{cosec} x$ (w) $-\frac{(1 + \cos^2 x)}{2 \operatorname{sen}^3 x}$ (x) $\frac{3x^2}{\sqrt{4 - x^6}}$ (y) $\operatorname{sen}^{\cos(x)} (\cos x \cotg x - \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x))$ (z) $\frac{2 \operatorname{sen} x}{(\cos x + 1)^2}$

3. Sim.

4. $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x}$ se $x \neq 0$.

5. $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$ e $-f(x) = f(-x) \Rightarrow -f'(x) = -f'(-x)$

6. $a = -1 \pm \sqrt{2}$

7. $f'(0) = 12, f'(2) = 64/27, f'(-2) = 48$

8. (a) 14 (b) -36 (c) 106/25

9. $\pi/4, 3\pi/4$ e $5\pi/4$.

10. (a) $y = e/2$ (b) $y = x$ (c) $3y = -112x + 160$ (d) $y = x$

11. (a) $f'(x) = 6x - 2, f''(x) = 6, f'''(x) = 0$

(b) $f'(x) = -1/x^2, f''(x) = 2/x^3, f'''(x) = -6/x^4$

(c) $f'(x) = (\log e)/(x + 2), f''(x) = -(\log e)/(x + 2)^2, f'''(x) = (2 \log e)/(x + 2)^3$

(d) $f'(x) = 4/(x + 3)^2, f''(x) = -8/(x + 3)^3, f'''(x) = 24/(x + 3)^4$

(e) $f'(x) = -(2(x^2 + 1))/(x^2 - 1)^2, f''(x) = (4x(x^2 + 3))/(x^2 - 1)^3, f'''(x) = -(12(x^4 + 6x^2 + 1))/(x^2 - 1)^4$

(f) $f'(x) = -2e^{2 \cos x} \operatorname{sen} x, f''(x) = -2e^{2 \cos x} (\cos x + \cos(2x) - 1)$
 $f'''(x) = -8e^{2 \cos x} \operatorname{sen}^3 x + 2e^{2 \cos x} \operatorname{sen} x + 12e^{2 \cos x} \operatorname{sen} x \cos x$

12. 4

13. $f'(x) = \begin{cases} 2(x + 3) & \text{se } x < -2, \\ 2x & \text{se } -2 < x < -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x < 1, \\ \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x-1} \right) (x-1)^{-2} & \text{se } 1 < x < 2, \\ 2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$

14. $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x + 2, & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

15. Não.

16. $a = \frac{1}{2e}, b = 0, c = e^{1/2}$

17. $a = \frac{1}{\pi^2}, b = \frac{2}{\pi}, c = \frac{1}{\pi^2}$ e $d = \frac{-2}{\pi}$

18. b) 21. d) 24. a) 27. a) 30. a) 33. d) 36. a)

19. e) 22. e) 25. e) 28. b) 31. a) 34. d) 37. b)

20. c) 23. c) 26. e) 29. a) 32. c) 35. e) 38. e)