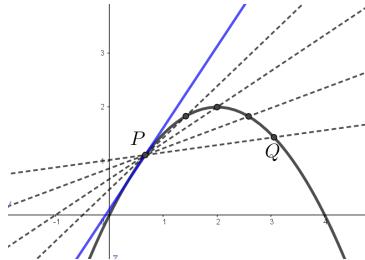


# Capítulo 3

## Derivadas

Este capítulo é sobre derivada, um conceito fundamental do Cálculo que é muito útil em problemas aplicados. Este conceito relaciona-se com o problema de determinar a reta tangente a um ponto do gráfico de uma função que foi visto no capítulo 3. Iniciaremos nossa discussão tratando deste problema.

### 3.1 O problema da reta tangente



Seja  $P(x_0, f(x_0))$  um ponto sobre o gráfico de uma função contínua  $f(x)$ . Dado um ponto  $Q = (x_1, f(x_1))$  do gráfico, distinto de  $P$ , seja  $s$  a reta passando por  $P$  e  $Q$ . Esta reta é dita secante ao gráfico pois o secciona nos pontos  $P$  e  $Q$ . O coeficiente angular desta reta é dado por

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Considerando  $Q$  como um ponto móvel, quando  $x_1 \rightarrow x_0$  temos  $Q \rightarrow P$ . Consequentemente, a reta  $s$  varia de posição (ver figura). A reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  no ponto  $P$  é definida como sendo a *posição limite* de  $s$  quando  $x_1 \rightarrow x_0$  e seu coeficiente angular, denotado por  $m$ , é dado pelo limite do coeficiente angular das retas secantes  $s$  quando  $x_1 \rightarrow x_0$ , ou seja

$$m = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.1)$$

Se o limite acima existe, então existe a reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  no ponto  $P$  e esta reta tem equação

$$(y - f(x_0)) = m(x - x_0).$$

Mas, pode ocorrer deste limite não existir e neste caso temos duas possibilidades: ou a reta tangente não pode ser definida, ou a reta tangente é uma reta vertical. Este último caso ocorre quando o limite é  $\pm\infty$ . Nos exemplos a seguir vamos ilustrar todas estas possibilidades.



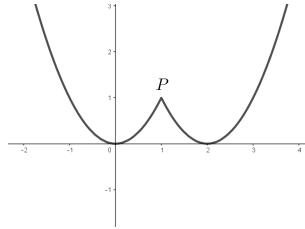


Figura 3.3: Não existe reta tangente ao gráfico da função  $f(x)$  do Exemplo 75 em  $P = (1, 1)$ .

## 3.2 Derivada de uma função em um ponto

**Definição 31.** Uma função  $f(x)$  é **derivável** ou **diferenciável** em um ponto  $x_0 \in D(f)$  se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.2)$$

Se este limite  $f'(x_0)$  existe ele é chamado de **derivada de  $f(x)$  no ponto  $x_0$** . Se o limite  $f'(x_0)$  não existe, dizemos que  $f(x)$  é **não derivável** ou **não diferenciável** em  $x_0$ .

**Observação 39.** Pela discussão da seção anterior, dizer que  $f(x)$  é derivável em  $x_0$  é o mesmo que dizer que existe a reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$  e que esta reta não é vertical, sendo o seu coeficiente angular igual a  $f'(x_0)$ .

**Exemplo 76.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Portanto  $f(x)$  é derivável em  $x = 2$  e  $f'(2) = 4$ .

**Exemplo 77.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , temos

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Portanto  $f(x)$  é derivável em  $x = 0$  e  $f'(0) = 0$ .

**Observação 40.** Fazendo a mudança de coordenadas  $h = x_1 - x_0$  vemos que  $x_1 \rightarrow x_0$  implica em  $h \rightarrow 0$ , logo a derivada de uma função  $f(x)$  em um ponto  $x_0$  pode também ser expressa pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.3)$$

**Exemplo 78.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x$ . Observe que

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + h) - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3.$$

Portanto  $f(x)$  é derivável em  $x = 4$  e  $f'(4) = 3$ .

## 3.3 Derivada como Função

**Definição 32.** Considere uma função  $f(x)$ . A função  $f'$  definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

é chamada **derivada da função  $f$  com relação a  $x$** . O domínio da derivada  $f'$  é o conjunto dos pontos  $x \in D(f)$  para os quais existe o limite  $f'(x)$ .

**Observação 41.** A derivada de uma função  $f(x)$  com relação a  $x$  também é denotada por  $\frac{df}{dx}$  (notação de Leibniz).

**Definição 33.** Quando  $f(x)$  é definida em um intervalo aberto e possui derivada em todos os pontos deste intervalo, dizemos que  $f(x)$  é uma **função diferenciável** ou **derivável**.

**Exemplo 79.** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Dado qualquer  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x.h + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x.h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x - h = 2x. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x)$  é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $f(x) = x^2$  é uma função diferenciável. A derivada de  $f(x)$  é a função  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x$ .

**Exemplo 80.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 1$ . Para qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) + 1 - 3x - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3.$$

Como  $f'(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R} = D(f)$ , temos que  $f(x)$  é um função diferenciável e sua derivada é a função constante  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3$ .

Vejamos um exemplo de uma função cuja derivada não existe em algum ponto do domínio.

**Exemplo 81.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Vimos no exemplo 74 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty.$$

Portanto,  $f(x)$  é não derivável no ponto 0. Agora, para todo  $x_0 \neq 0$  temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$$

considerando  $y = \sqrt[3]{x}$  e recordando que  $y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3 = (y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})$  obtemos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{y - \sqrt[3]{x_0}}{y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3} = \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{(y - \sqrt[3]{x_0})}{(y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} \\ &= \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{1}{y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x)$  é derivável em todo ponto  $x \neq 0$  e a derivada desta função é a função  $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ .

### 3.4 Derivadas laterais

Em algumas situações, é útil considerar os limites laterais associados ao limite  $f'(x)$ . Estes limites laterais são:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Definição 34.** O limite  $f'_-(x_0)$ , quando existe, é chamado de **derivada à esquerda de  $f(x)$  no ponto  $x_0$**  e o limite  $f'_+(x_0)$ , quando existe, é chamado de **derivada à direita de  $f(x)$  no ponto  $x_0$** .

**Observação 42.** Note que a derivada  $f'(x_0)$  existe se, e somente se, as derivadas laterais  $f'_+(x_0)$  e  $f'_-(x_0)$  existem e são iguais.

O conceito de derivada lateral é útil, por exemplo, quando estudamos funções definidas por partes. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 82.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  e derivável em todo ponto  $x \neq 1$  (verifique!). Para ver se ela é derivável em  $x = 1$  precisaremos considerar as derivadas laterais em 1, já que a regra da função é diferente para  $x < 1$  e  $x > 1$ . Estas derivadas são:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = 2, \\ f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1 + h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 + 2h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2. \end{aligned}$$

Como os limites laterais  $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$  temos que existe  $f'(1)$  e  $f'(1) = 2$ .

**Exemplo 83.** Vamos estudar a diferenciabilidade de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  tratando alguns casos. Observemos, primeiramente, que se  $x > 0$  então  $|x| = x$  e para  $h$  pequeno o suficiente, temos  $x + h > 0$  donde  $|x + h| = x + h$ . Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Agora, se  $x < 0$  então  $|x| = -x$  e para  $h$  pequeno o suficiente, temos  $x + h < 0$  donde  $|x + h| = -x - h$ . Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x - h + x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Finalmente, se  $x = 0$  então devemos tratar os limites laterais ou seja, as derivadas laterais que são

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Como  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , a derivada  $f'(0)$  não existe. Assim,  $f(x) = |x|$  é derivável apenas nos pontos  $x \neq 0$ , com  $f'(x) = 1$  para  $x > 0$  e  $f'(x) = -1$  para  $x < 0$ . A derivada de  $f(x)$  é a função  $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

As derivadas laterais também são usadas para estudar funções definidas em intervalos que tenham extremos fechados como veremos nos exemplos a seguir.

**Definição 35.** Dizemos que uma função  $f(x)$  é diferenciável (ou derivável) em intervalos da forma  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(a, b]$  ou  $[a, b)$  se  $f'(x)$  existe para todo ponto  $x$  no interior do intervalo e se existem as derivadas laterais adequadas nos extremos destes intervalos.

**Exemplo 84.** Considere a função  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ . Para todo  $x > 0$  temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x)$  é derivável em todo ponto  $x > 0$  e  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Agora, não podemos calcular o limite  $f'(x)$  para  $x = 0$ , já que  $f$  está definida apenas em um intervalo à direita de 0. Mas, podemos considerar a derivada lateral à direita  $f'_+(0)$  que é

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Portanto não existe a derivada lateral à direita no ponto  $x = 0$ . Concluímos que  $f(x) = \sqrt{x}$  não é derivável no intervalo  $[0, +\infty)$  embora seja derivável no intervalo  $(0, +\infty)$ .

**Exemplo 85.** Considere a função  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2$ . Para todo  $x \in (1, 2)$  temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h = 6x. \end{aligned}$$

Nos extremos do domínio,  $x = 1$  e  $x = 2$ , devemos considerar as derivadas laterais que são:

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{6h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 6 + 3h = 6$$

e

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(2+h)^2 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{12 + 12h + 3h^2 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{12h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 12 + 3h = 12.$$

Portanto,  $f(x)$  é diferenciável no intervalo  $[1, 2]$ .

### 3.5 Continuidade e Diferenciabilidade

Uma relação entre o conceito de continuidade e diferenciabilidade é dada no seguinte teorema:

**Teorema 12.** *Se  $f(x)$  é uma função derivável em  $x_0 \in D(f)$  então  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Prova:** Para provar este teorema devemos mostrar que se  $f'(x_0)$  existe então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mas, este último limite equivale ao limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Assim, provamos o teorema mostrando que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

**Observação 43.** Este teorema nos diz que se  $f(x)$  é descontínua em  $x_0$ , então  $f(x)$  não é diferenciável em  $x_0$ .

**Exemplo 86.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é descontínua em  $x = 1$  (verifique!). Portanto, pelo teorema 12,  $f(x)$  não é diferenciável no ponto  $x = 1$ .

**Observação 44.** Continuidade não implica em diferenciabilidade, ou seja, se  $f(x)$  é contínua em  $x_0$  não necessariamente  $f(x)$  é derivável em  $x_0$ . Um bom exemplo para ilustrar esse fato é a função  $f(x) = |x|$  que é contínua em  $x = 0$  mas não é diferenciável neste ponto.

**Exemplo 87.** Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a seguir, queremos determinar valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  de forma que a função seja diferenciável em  $x = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Primeiramente, pelo Teorema 12, devemos ter  $f$  contínua em  $x = 0$ . Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x - 2 = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax + b = b = f(0).$$

Assim, devemos ter  $b = -2$ .

$$\text{Temos então: } f(x) = \begin{cases} ax - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Agora, devemos ter as derivadas laterais em  $x = 0$  iguais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h - 2 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h}{h} = 1,$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $f(0) = -2 \quad h \rightarrow 0^+ \Rightarrow h > 0 \Rightarrow f(h) = h^2 + h - 2$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \stackrel{\substack{\uparrow \\ f(0) = -2}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) + 2}{h} \stackrel{\substack{\uparrow \\ h \rightarrow 0^- \Rightarrow h < 0 \Rightarrow f(h) = ah - 2}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah - 2 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah}{h} = a.$$

Portanto, devemos ter  $a = 1$  e, assim,  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

## 3.6 Regras de Derivação

Nesta seção estudaremos regras para derivar funções sem o uso do limite que define a derivada.

### 3.6.1 Derivadas de funções constantes

Se  $f(x) = c$  então  $f'(x) = 0$  ou  $\frac{df}{dx} = 0$ . De fato,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

**Exemplo 88.** Se  $f(x) = 5$  então  $f'(x) = 0$ .

### 3.6.2 Derivada do produto de uma função por uma constante

Se  $f$  é derivável em  $x$  e  $g(x) = cf(x)$  para alguma constante  $c$  então  $g(x)$  é derivável em  $x$  e

$$g'(x) = cf'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dg}{dx} = c \frac{df}{dx}.$$

De fato,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).$$

**Exemplo 89.** Sabemos que  $f(x) = x^2$  tem derivada  $f'(x) = 2x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , pela regra acima temos que  $g(x) = 5f(x) = 5x^2$  é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  e sua derivada é  $g'(x) = 5 \cdot f'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$ .

### 3.6.3 Derivadas de potências

Se  $n$  é um número inteiro positivo e  $f(x) = x^n$  então  $f(x)$  é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  e temos

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para provar esta regra, recordemos que

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + nx^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ x^n + nx^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \\
 &= nx^{n-1} + 0 + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 90.** Segue da regra acima que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  é derivável em todo  $x \in \mathbb{R}$  e

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

A regra acima pode ser generalizada para expoentes reais quaisquer. Mais precisamente, se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f(x) = x^\alpha$  então

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Daremos a prova deste fato mais à frente. Por agora, vamos explorar esta regra em alguns exemplos.

**Exemplo 91.** Considere  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Observe que  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ . Considerando a regra geral da derivação de potências, temos que  $f(x)$  é derivável para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

**Exemplo 92.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$ . Observando que  $f(x) = \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{6}{5}}$  e considerando a regra de derivação acima, temos

$$f'(x) = (x^{\frac{6}{5}})' = \frac{6}{5} x^{\frac{6}{5}-1} = \frac{6}{5} x^{\frac{1}{5}} = \frac{6}{5} \sqrt[5]{x}.$$

**Exemplo 93.** Seja  $f(x) = x^\alpha$ . Como  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(cf(x)) = cf'(x)$  para  $c \in \mathbb{R}$  constante, temos

$$(cx^\alpha)' = c\alpha x^{\alpha-1} \quad \text{para } \alpha, c \in \mathbb{R},$$

por exemplo,

$$(6x^3)' = 3 \cdot 6 \cdot x^{3-1} = 18x^2.$$

### 3.6.4 Regra da soma

Se  $f$  e  $g$  são deriváveis em  $x$  então a soma  $(f + g)$  é derivável em  $x$  e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[f + g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
 (f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} = f'(x) + g'(x).
 \end{aligned}$$

**Exemplo 94.** A função  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

é a soma das funções  $g(x) = \sqrt{x}$  e  $h(x) = \frac{1}{x}$ . Sabemos que  $g(x)$  é derivável para todo  $x \in (0, +\infty)$  com  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Também sabemos que  $h(x) = \frac{1}{x}$  é derivável para todo  $x \neq 0$  sendo  $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Considerando então a regra da soma temos

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

para todo  $x \in (0, +\infty)$ .

### 3.6.5 Derivadas de polinômios

Funções polinomiais são somas de funções do tipo  $a \cdot x^n$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  como consideradas no exemplo 93. Segue da regra da soma que toda função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

é derivável em qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e sua derivada é a função polinomial  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

**Exemplo 95.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = 5x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1$$

é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  e a sua derivada é

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1)' \\
 &= (5x^6)' + (3x^5)' + (-2x^3)' + (2x^2)' + (1)' \\
 &= 5(x^6)' + 3(x^5)' - 2(x^3)' + 2(x^2)' + (1)' \\
 &= 5 \cdot 6x^5 + 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 0 \\
 &= 30x^5 + 15x^4 - 6x^2 + 4x.
 \end{aligned}$$

### 3.6.6 Regra do Produto

Se  $f$  e  $g$  são deriváveis em  $x$  então o produto  $(f \cdot g)$  é derivável em  $x$  e temos

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[f \cdot g] = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}.$$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)] + g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}}_{=f(x)g'(x)} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}}_{=f'(x)g(x)} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

**Exemplo 96.** Vamos usar a regra do produto para derivar  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^3 + 4x - 5)$$

note que  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  sendo  $g(x) = \sqrt{x}$  e  $h(x) = x^3 + 4x - 5$ . Sabemos que  $g(x) = \sqrt{x}$  é derivável em todo ponto  $x > 0$  e que  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Sabemos também que a função polinomial  $h(x) = x^3 + 4x - 5$  é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  e  $h'(x) = 3x^2 + 4$ . Assim, pela regra do produto,  $f(x)$  é derivável em todo  $x > 0$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ &= (\sqrt{x})' \cdot (x^3 + 4x - 5) + \sqrt{x} \cdot (x^3 + 4x - 5)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^3 + 4x - 5) + \sqrt{x} \cdot (3x^2 + 4) \\ &= \frac{7x^3 + 12x - 5}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

### 3.6.7 Regra do Quociente

Se  $f$  e  $g$  são deriváveis em um ponto  $x$  e  $g(x) \neq 0$  então a função quociente  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $x$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \left[ \frac{f}{g} \right] = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]g(x) - f(x)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} \\
 &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 97.** Vamos usar a regra do quociente para encontrar a derivada de  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}.$$

Observe que  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  sendo  $p(x) = x^3 + 2x^2$  e  $q(x) = x - 1$  deriváveis em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$ .

Segue da regra do quociente que  $f(x)$  é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  e

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2} = \frac{(x^3 + 2x^2)'(x-1) - (x^3 + 2x^2).(x-1)'}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(3x^2 + 4x)(x-1) - (x^3 + 2x^2)(1)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{3x^3 + 4x^2 - 3x^2 - 4x - x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} \\
 &= \frac{2x^3 - x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1}.
 \end{aligned}$$

### 3.6.8 Regra da Cadeia (Derivada de Função Composta)

Sejam  $y = f(u)$  e  $u = g(x)$  funções deriváveis tais que  $\text{Im}(g) \subset D(f)$ . Então, a função composta  $y = f(g(x))$  é derivável e vale a

**Regra da Cadeia.**  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$  ou  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ .

Vamos fazer uma prova supondo que  $g(x+h) - g(x) \neq 0$  para todo  $h$  suficientemente pequeno.

Fixemos  $x$ . Usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
 (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)}.
 \end{aligned}$$

Além disso:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(a) = f'(g(x)).$$

Sejam  $a = g(x)$  e  $y = g(x+h)$ . Se  $h \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow a$ .

Portanto,

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\rightarrow f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)} = f'(g(x))g'(x).$$

**Exemplo 98.** Seja  $h(x) = (x^2 + 1)^{10}$ . Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = x^{10} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = 10x^9 \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 10(g(x))^9 \cdot (2x) = 10(x^2 + 1)^9 \cdot (2x) = 20x(x^2 + 1)^9.$$

**Exemplo 99.** Seja  $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$ . Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ e } g(x) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } g'(x) = 3x^2 + 4x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}.$$

Note que a derivada não existe nos pontos  $x = -2$  e  $x = 0$ .

**Exemplo 100.** Seja  $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot 2x = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

### 3.7 Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja  $1 \neq a > 0$ . Vamos determinar a derivada da função  $f(x) = a^x$  usando a definição de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

↑  
como  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$

Portanto

**Derivada da Função Exponencial.**  $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$ .

**Exemplo 101.** Se  $f(x) = 2^x$ , então  $f'(x) = 2^x \ln 2$ .

**Exemplo 102.** Se  $f(x) = e^x$ , então  $f'(x) = e^x \ln e = e^x$ .

$$\ln e = 1$$

**Exemplo 103.** Se  $h(x) = 5^{x^2+1}$ , então  $h(x) = f(g(x))$ , onde  $f(x) = 5^x$  e  $g(x) = x^2 + 1$ . Como  $f'(x) = 5^x \ln 5$  e  $g'(x) = 2x$ , segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 5^{g(x)} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 2x \cdot 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 = 10x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5.$$

**Exemplo 104.** Se  $h(x) = e^{1/x}$ , então  $h(x) = f(g(x))$ , onde  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = 1/x$ . Como  $f'(x) = e^x$  e  $g'(x) = -1/x^2$ , segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot (-1/x^2) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

**Exemplo 105.** Se  $h(x) = 3^{\sqrt{x}}$ , então  $h(x) = f(g(x))$ , onde  $f(x) = 3^x$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ . Como  $f'(x) = 3^x \ln 3$  e  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3^{g(x)} \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}.$$

Vamos usar a regra da cadeia para obter a derivada de  $g(x) = \log_a x$ . Para isso, lembremos que, como  $g(x) = \log_a x$  e  $f(x) = a^x$  são funções inversas, então

$$f(g(x)) = x, \text{ isto é, } a^{\log_a x} = x.$$

Assim, derivando em ambos os lados da igualdade, temos

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1, \text{ isto é, } a^{\log_a x} \ln a \cdot (\log_a x)' = 1.$$

Segue então que

$$g'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln a}}_{=\log_e a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

$a^{\log_a x} = x$

Portanto

**Derivada da Função Logarítmica.**  $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$

**Exemplo 106.** Se  $f(x) = \log_3 x$ , então  $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_3 e.$

**Exemplo 107.** Se  $f(x) = \ln x$ , então  $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x} \cdot \underset{\ln e = 1}{\uparrow} \frac{1}{x}.$

**Exemplo 108.** Se  $h(x) = \log_7(x^3 + x^2)$ , então  $h(x) = f(g(x))$ , onde  $f(x) = \log_7 x$  e  $g(x) = x^3 + x^2$ . Como  $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_7 e$  e  $g'(x) = 3x^2 + 2x$ , segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \log_7 e \cdot (3x^2 + 2x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \cdot \log_7 e = \frac{3x + 2}{x^2 + x} \cdot \log_7 e.$$

**Exemplo 109.** A derivada de  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$  é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)(e^x)' - (x+1)'(e^x)}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2}\right) = \frac{x+1}{e^x} \cdot \frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

**Exemplo 110.** A derivada de  $f(x) = e^{x \ln x}$  é

$$f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (x' \ln x + x(\ln x)') = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x} (1 + \ln x).$$

**Exemplo 111.** Vamos calcular  $a, b \in \mathbb{R}$  para que a função a seguir seja derivável em todo  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ b \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para  $x \neq 1$ , temos que  $f$  é contínua (verifique!) e derivável, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} -2axe^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{b}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Agora, para  $x = 1$ , devemos, primeiramente, pelo Teorema 12, ter  $f$  contínua. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b \ln(1) + 1 = b \ln 1 + 1 = 1 = f(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ae^{-x^2} = ae^{-1}.$$

Assim, devemos ter  $ae^{-1} = 1$ , isto é,  $a = e$  e  $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ b \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Agora, verifique que  $f'_-(1) = -2$  e  $f'_+(1) = b$ .

Portanto, devemos ter  $b = -2$  e  $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ -2 \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

**Exemplo 112.** Para a derivada de  $f(x) = x^x$ , escrevemos  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$  e aplicamos a regra da cadeia:

$$(x^x)' = \left( e^{x \ln x} \right)' = e^{x \ln x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x).$$

↑  
 exemplo 110      ↑  
 $x^x = e^{x \ln x}$

Podemos usar a Regra da Cadeia para generalizar o exemplo anterior, isto é, calcular a derivada de uma função na forma  $f(x)^{g(x)}$  onde  $f$  e  $g$  são deriváveis e  $f(x) > 0$ . Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\left( f(x)^{g(x)} \right)' = \left( e^{g(x) \ln f(x)} \right)' = e^{g(x) \ln f(x)} (g(x) \ln(f(x)))'$$

e portanto,

$$\left( f(x)^{g(x)} \right)' = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Por exemplo:

**Exemplo 113.** Para a derivada de  $h(x) = (x+1)^{2x+3}$ , chamemos  $f(x) = x+1$  e  $g(x) = 2x+3$ . Então,  $f'(x) = 1$  e  $g'(x) = 2$ . Dessa forma:

$$h'(x) = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) = (2x+3)(x+1)^{2x+2} + 2(x+1)^{2x+3} \ln(x+1).$$

**Observação 45.** Em particular, temos a regra da potência para potências reais: se  $h(x) = x^r$ , onde  $r \in \mathbb{R}$ , temos que  $h'(x) = r x^{r-1}$ . De fato, escrevendo

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \ln x}$$

Temos que

$$(x^r)' = \left( e^{r \ln x} \right)' = e^{r \ln x} (r \ln x)' = e^{r \ln x} \left( \frac{r}{x} \right) = \frac{r x^r}{x} = r x^{r-1}.$$

↑  
 como  $x^r = e^{r \ln x}$

### 3.8 Derivada da Função Inversa

O argumento usado para calcular a derivada da função logarítmica pode ser generalizado para calcular a derivada da inversa de uma função.

Sejam  $y = f(x)$  uma função invertível e  $x = g(y)$  sua inversa, temos que

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in D(g).$$

Então, derivando os dois lados em relação à  $y$ , temos

$$f'(g(y))g'(y) = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

**Derivada da Função Inversa.** Seja  $y = f(x)$  uma função derivável e invertível em  $(a, b)$  tal que  $f'(x) \neq 0$  em  $(a, b)$ . Seja  $x = g(y)$  a função inversa de  $f(x)$ . Então,  $x = g(y)$  é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{se } f'(g(y)) \neq 0.$$

**Exemplo 114.** Seja  $y = f(x) = 8x^3$ . A inversa dessa função é  $x = g(y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$ . Pelo resultado anterior, a derivada de  $x = g(y)$  é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{24(g(y))^2} = \frac{1}{24\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}$$

que também pode ser encontrada usando a regra da potência.

**Exemplo 115.** A questão a seguir estava na prova opcional de 2017-1.

Considere a função bijetora  $f : [0, \frac{3}{2}] \rightarrow [-\frac{281}{32}, 5]$  dada por

$$f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5.$$

Se  $f(1) = -2$  e  $g$  é a inversa de  $f$ , então  $g'(-2)$  vale:

a)  $-\frac{1}{14}$       b)  $-\frac{1}{2}$       c)  $\frac{1}{2}$       d)  $\frac{2}{3}$       e)  $\frac{1}{14}$

Vamos resolver essa questão. Sejam  $y = f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5$  e  $x = g(y)$  sua inversa. Então, usando a derivada da inversa, temos que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} \stackrel{\substack{\uparrow \\ f(1) = -2 \Rightarrow g(-2) = 1}}{=} \frac{1}{f'(1)}.$$

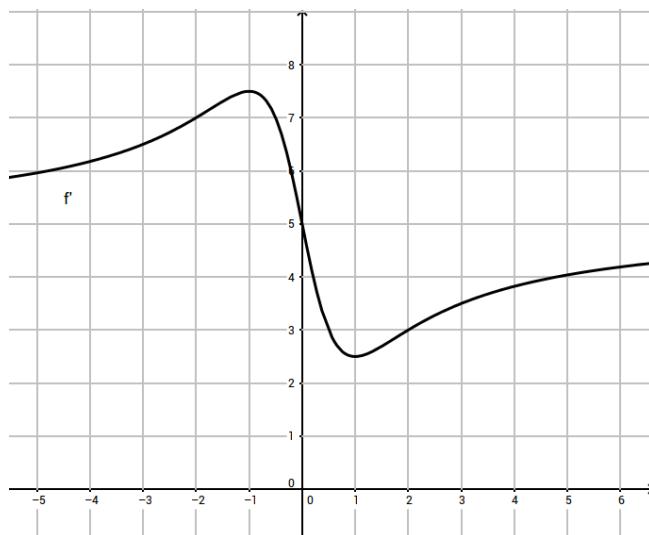
Assim, basta calcular  $f'(1)$ . Temos que

$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 10x \Rightarrow f'(1) = 5 - 9 - 10 = -14.$$

Portanto

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{14}.$$

**Exemplo 116.** (2016-2) A figura abaixo representa o gráfico da derivada  $f'$  de uma função bijetora  $f$ .



Sabendo que o gráfico de  $f$  passa pelo ponto  $(5, 2)$ , a derivada da inversa de  $f$  no ponto  $2$  é igual a:

a)  $-\frac{1}{4}$

b)  $\frac{1}{4}$

c)  $\frac{1}{3}$

d) 3

e)  $-\frac{1}{3}$

Vamos resolver essa questão. Seja  $x = g(y)$  a inversa de  $y = f(x)$ . Então

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} \stackrel{(5,2) \text{ no gráfico de } f}{=} \frac{1}{f'(5)}.$$

Pelo gráfico, temos que  $f'(5) = 4$ , donde  $g'(2) = 1/4$ .

Vamos ver nas próximas seções mais exemplos de uso da derivada da função inversa.

### 3.9 Derivadas das Funções Trigonométricas

Vamos começar obtendo a derivada da função seno a partir da definição de derivada, lembrando que  $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$ . Então, se  $f(x) = \sin x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cos x + \sin x(\cos h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} + \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Portanto

$$(\sin x)' = \cos x.$$

No capítulo anterior, vimos que  $\sin(x + \pi/2) = \cos x$  e  $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Assim:

$$\cos x = \sin(x + \pi/2) \Rightarrow (\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))'.$$

Para derivar,  $\sin(x + \pi/2)$  usamos a regra da cadeia:

$$(\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) \cdot (x + \pi/2)' = \cos(x + \pi/2) = -\sin x.$$

Portanto

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Você também pode fazer essa derivada usando a definição, como um exercício. Usando essas derivadas e a regra da cadeia, podemos derivar várias funções:

**Exemplo 117.** A derivada de  $f(x) = \sin(x^4 + x^2)$  é  $f'(x) = \cos(x^4 + x^2) \cdot (4x^3 + 2x)$ .

**Exemplo 118.** A derivada de  $f(x) = \cos(e^x)$  é  $f'(x) = -\sin(e^x) \cdot e^x$ .

**Exemplo 119.** A derivada de  $f(x) = \sin(\cos(\ln x))$  é

$$f'(x) = \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot (1/x) = -\frac{\cos(\cos(\ln x)) \cdot (\sin(\ln x))}{x}.$$

As derivadas das demais funções trigonométricas podem ser obtidas usando as regras de derivação, por exemplo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow (\operatorname{tg} x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sec}^2 x,$$

↑  
usando a regra do quociente  
↑  
 $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow (\operatorname{sec} x)' = ((\cos x)^{-1})' = -(\cos x)^{-2} (\cos x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \operatorname{sec} x.$$

↑  
usando a regra da cadeia

Como um exercício, você deve provar que

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x.$$

**Exemplo 120.** A derivada de  $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + 2^x)$  é  $f'(x) = (3x^2 + 2^x \ln 2) \cdot \operatorname{sec}^2(x^3 + 2^x)$ .

**Exemplo 121.** A derivada de  $f(x) = \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  é

$$f'(x) = -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{(x+1)'(x-1) - (x-1)'(x+1)}{(x-1)^2}\right)$$

↑  
regra da cadeia  
↑  
regra do quociente

$$= -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{2 \operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}.$$

Agora, para as derivadas das funções trigonométricas inversas, vamos usar a derivada da função inversa vista na seção anterior.

Temos que  $y = \operatorname{arcsen} x$ , para todo  $x \in (-1, 1)$  se e somente se  $x = \operatorname{sen} y$ . Assim,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Devemos então determinar  $\cos y$  em função de  $x$ . Temos que:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \implies \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \implies \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

↑  
 $y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \cos y > 0$   
↑  
 $x = \operatorname{sen} y$

Portanto:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

**Observação 46.** Observe que não existem as derivadas de  $\operatorname{arcsen} x$  nos pontos  $x = \pm 1$  e, como pode ser visto no gráfico, as retas tangentes nesses pontos são verticais.

Analogamente, pode-se provar, para  $-1 < x < 1$ , que

$$(\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para a derivada de  $y = \operatorname{arctg} x$ , repetimos o processo:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

↑  
 $\sec^2 y - \operatorname{tg}^2 y = 1$

**Exemplo 122.** A derivada de  $f(x) = \arcsen(2x + 1)$  é  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}}$ .

**Exemplo 123.** A derivada de  $f(x) = \arctg(\ln x)$  é

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)}.$$

↑  
regra da cadeia

Como exercício, você deve provar as derivadas das demais funções trigonométricas inversas:

$$(\text{arcsec } x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1,$$

$$(\text{arccossec } x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1,$$

$$(\text{arccotg } x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

### 3.10 Derivadas das Funções Hiperbólicas

As derivadas do seno e do cosseno hiperbólicos seguem facilmente da derivada da função exponencial de base  $e$ :

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (\text{senh } x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

↑  
( $e^{-x}$ )' =  $-e^{-x}$  pela regra da cadeia

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh } x.$$

↑  
( $e^{-x}$ )' =  $-e^{-x}$  pela regra da cadeia

Já as derivadas das demais funções seguem das regras de derivação, por exemplo:

$$\begin{aligned} (\text{tgh } x)' &= \frac{(\text{senh } x)' \cosh x - \text{senh } x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{usando a regra do quociente} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \text{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\text{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \text{tgh}^2 x = \text{sech}^2 x. \end{aligned}$$

Você pode fazer o mesmo para as demais funções hiperbólicas

$$(\text{cotgh } x)' = -\text{cossech}^2 x,$$

$$(\text{cossech } x)' = -\text{cotgh } x \text{ cossech } x,$$

$$(\text{sech } x)' = -\text{tgh } x \text{ sech } x.$$

**Exemplo 124.** A derivada de  $f(x) = \text{senh}(x^3 + 3)$  é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \cosh(x^3 + 3).$$

**Exemplo 125.** A derivada de  $f(x) = \operatorname{sech}(2x)$  é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -2\operatorname{tgh}(2x)\operatorname{sech}(2x).$$

**Exemplo 126.** A derivada de  $f(x) = \ln(\operatorname{tgh}(3x))$  é, usando a regra da cadeia duas vezes,

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}(3x)} \cdot 2\operatorname{sech}^2(2x) = \frac{2\operatorname{sech}^2(2x)}{\operatorname{tgh}(3x)}.$$

**Exemplo 127.** A derivada de  $f(x) = \operatorname{cotgh}(1 - x^3)$  é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -\operatorname{cossech}^2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) = 3x^2 \cdot \operatorname{cossech}^2(1 - x^3).$$

Para as funções hiperbólicas inversas, usaremos novamente a derivada da função inversa, além das identidades hiperbólicas.

Por exemplo, dado  $y = \operatorname{argsenh} x$ , temos que  $x = \operatorname{senh} y$  e

$$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{senh} y)'} = \frac{1}{\cosh y} \stackrel{\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \cosh^2 y = 1 + x^2}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Para o cosseno hiperbólico podemos fazer analogamente, tomando apenas cuidado com o domínio, que é  $D(\cosh x) = [1, +\infty)$ :

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\operatorname{senh} y} \stackrel{\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y = 1 - x^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{se } x > 1.$$

As demais derivadas das funções hiperbólicas inversas podem ser obtidas analogamente:

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1,$$

$$(\operatorname{argsech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 < x < 1,$$

$$(\operatorname{argcossech} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \neq 0,$$

$$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1.$$

**Exemplo 128.** A derivada de  $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{argcosh}(x^2)$  é

$$f'(x) = (x^2)' \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 (\operatorname{argcosh}(x^2))'$$

↑  
regra do produto

$$\stackrel{\uparrow}{=} 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 1}} = 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 1}}.$$

↑  
regra da cadeia em  $(\operatorname{argcosh}(x^2))'$

**Exemplo 129.** A derivada de  $f(x) = \operatorname{argtgh}(\operatorname{sen}(3x))$ , usando a regra da cadeia, é

$$f'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2(3x)} \cdot (\operatorname{sen}(3x))' \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3\cos(3x) = \frac{3}{\cos(3x)}.$$

↑  
 $\operatorname{sen}^2(3x) + \cos^2(3x) = 1$

### 3.11 Tabela de Derivadas

A seguir, apresentamos um resumo do que foi discutido nas seções anteriores em forma de uma tabela de derivadas.

Função	Derivada	Função	Derivada
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sec x$	$\operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}},  x  > 1$
$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x$	$\operatorname{arccossec} x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}},  x  > 1$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$	$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$	$\operatorname{argsenh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} x > 1$
$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2},  x  < 1$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$	$\operatorname{argsech} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$
$\operatorname{cossech} x$	$-\operatorname{cotg} x \operatorname{cossech} x$	$\operatorname{argcossech} x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2+1}}, x \neq 0$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossech}^2 x$	$\operatorname{argcotg} x$	$\frac{1}{1-x^2},  x  > 1.$

### 3.12 Derivadas Sucessivas

Vimos que dada uma função  $f(x)$  diferenciável, podemos definir a função derivada  $f'(x)$ .

Se essa função  $f'(x)$  for também diferenciável, definimos a *derivada segunda de  $f(x)$*  (ou derivada de ordem 2), denotada por  $f''(x)$  ou  $\frac{d^2 f}{dx^2}$ , como sendo a derivada de  $f'(x)$ .

Se a derivada segunda  $f''(x)$  for diferenciável, podemos definir a *derivada terceira de  $f(x)$*  (ou derivada de ordem 3), denotada por  $f'''(x)$  ou  $\frac{d^3 f}{dx^3}$ , como sendo a derivada de  $f''(x)$ .

Em geral, se a  $n$ –ésima derivada de  $f(x)$  existe e é derivável, podemos definir a  $(n+1)$ –ésima (ou derivada de ordem  $n+1$ ) de  $f(x)$ , denotada por  $f^{(n+1)}(x)$  ou  $\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$ , como sendo a derivada de  $f^{(n)}(x)$ .

**Exemplo 130.** Seja  $f(x) = x^5$ . Temos:

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f'''(x) = 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ se } n \geq 6.$$

Não necessariamente existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{(n)}(x) = 0$  sempre que  $n \geq n_0$ , como veremos a seguir.

**Exemplo 131.** Seja  $f(x) = \sin x$ . Temos que

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(8)}(x) = \sin x$$

$$\vdots$$

**Exemplo 132.** Seja  $f(x) = e^x$ . Temos que  $f^{(n)}(x) = e^x$  para todo  $n \geq 1$ . Agora, se  $f(x) = a^x$  para  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $a \neq e$ , temos que

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f''(x) = a^x \cdot (\ln a)^2$$

$$f'''(x) = a^x \cdot (\ln a)^3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

### 3.13 Derivação Implícita

As funções que trabalhamos até agora foram dadas *explicitamente*, isto é, eram funções cujas expressões  $y = f(x)$  eram conhecidas e podiam ser usadas para calcular  $f(x)$  para cada  $x$  do domínio. Além disso, era possível calcular  $f'(x)$  usando as regras vistas.

Porém, algumas funções podem ser apresentadas de forma *implícita*, o que veremos a seguir.

**Exemplo 133.** Consideremos a função  $y = f(x)$  dada pelas soluções da equação

$$y^3 + x = 2.$$

Vemos que para cada  $x \in \mathbb{R}$ , existe um único  $y \in \mathbb{R}$  tal que o par  $(x, y)$  satisfaz a equação dada. Esse  $y$  pode ser conhecido facilmente:

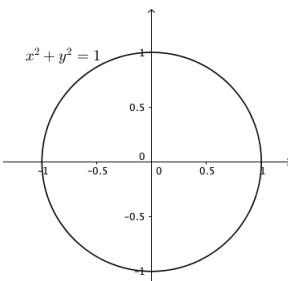
$$y^3 + x = 2 \iff y^3 = 2 - x \iff y = \sqrt[3]{2 - x}.$$

Isso significa que a função dada implicitamente por  $y^3 + x = 2$  pode ser dada explicitamente por  $y = \sqrt[3]{2 - x}$ , bastando isolar o  $y$ .

Em geral, dizemos que  $y = f(x)$  é uma função definida *implicitamente* por uma equação em  $x$  e  $y$  quando o par  $(x, f(x))$  satisfaz essa equação.

Porém, nem sempre conseguimos explicitar uma função dada implicitamente.

**Exemplo 134.** Consideremos a equação  $x^2 + y^2 = 1$ .



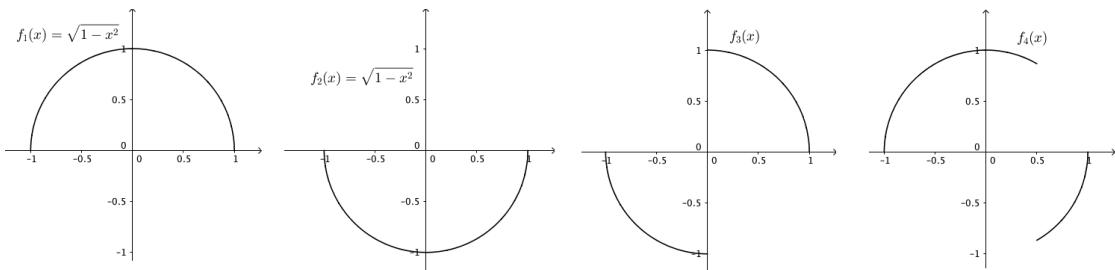
Sabemos que as soluções dessa equação representam um círculo de raio 1 centrado na origem, o que não é uma função, pois cada  $x \in (-1, 1)$  se relaciona com dois valores de  $y \in [-1, 1]$ . Podemos, no entanto, encontrar várias funções que satisfazem essa equação, como por exemplo:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \leq x < 1/2. \end{cases}$$



Vamos determinar a derivada no ponto de abscissa  $x = 1/2$  em cada caso. Por exemplo, usando  $f_1(x)$  ou  $f_3(x)$ , a derivada em  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  é dada por  $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ , isto é, vale  $\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ . Já com as funções  $f_2(x)$  ou  $f_4(x)$ , o ponto de coordenada  $x = 1/2$  é  $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ . A derivada de  $f_2(x)$  nesse ponto é dada por  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , isto é, vale  $\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Já a função  $f_4(x)$  não possui derivada em  $x = 1/2$  pois não é contínua nesse ponto. Isso nos dá a ideia de que a derivada no ponto de abscissa  $1/2$  depende da expressão explícita da função.

Porém, quando a função é derivável, podemos calcular essa derivada sem explicitar a função. De fato, voltemos à equação  $x^2 + y^2 = 1$  representando implicitamente uma função  $y = f(x)$ , isto é:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1.$$

Podemos derivar essa expressão em ambos os lados:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \implies 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \implies f(x)f'(x) = -x \implies f'(x) = \frac{-x}{f(x)} = \frac{-x}{y}.$$

↑  
regra da cadeia em  $(f(x))^2$

Vamos usar essa expressão para calcular novamente as derivadas no ponto de abscissa  $x = 1/2$  nos casos de  $f(x)$  igual a cada uma das funções deriváveis  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  e  $f_3(x)$  vistas acima. Para  $f(x) = f_1(x)$  ou  $f(x) = f_3(x)$  o ponto correspondente é  $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$  e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Para  $f(x) = f_2(x)$  o ponto correspondente é  $(x, y) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$  e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Note que foram os mesmos valores obtidos anteriormente quando derivamos as expressões explícitas das funções. Isso significa que podemos obter a derivada de  $f(x)$  (quando  $f(x) \neq 0$ ) sem conhecer explicitamente  $f(x)$ .

Esse processo, chamado *derivação implícita*, pode ser feito para qualquer função derivável dada implicitamente por uma equação. No que segue, quando dissermos que uma função é dada implicitamente por uma equação, iremos admitir que essa função é derivável em todos os pontos onde essa derivada puder ser definida. Vamos ver outro exemplo.

**Exemplo 135.** Seja  $y = f(x)$  dada implicitamente pela equação

$$\ln(y) + y^2 = x^2.$$

Não é difícil ver que não conseguimos uma expressão explícita para  $y = f(x)$ . No entanto, podemos derivar ambos os lados da igualdade:

$$\ln(f(x)) + (f(x))^2 = x^2 \implies \frac{1}{f(x)}f'(x) + 2f(x)f'(x) = 2x \implies f'(x) \left( \frac{1}{f(x)} + 2f(x) \right) = 2x$$

↑  
regra da cadeia em  $(f(x))^2$  e em  $\ln(f(x))$

$$\implies f'(x) = \frac{2x f(x)}{1 + 2(f(x))^2}.$$

**Exemplo 136.** Vamos determinar a reta tangente ao gráfico da função  $y = f(x)$  dada implicitamente pela expressão

$$e^y + xy = \sqrt{x}$$

no ponto  $(1, 0)$ . Como  $y = f(x)$ , temos

$$e^{f(x)} + x f(x) = \sqrt{x}.$$

Notamos que  $g(x) = e^{f(x)}$  é uma função composta cuja derivada, usando a regra da cadeia, é

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Assim:

$$e^{f(x)} + x f(x) = \sqrt{x} \implies \begin{array}{c} \uparrow \\ e^{f(x)} f'(x) + f(x) + x f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \\ \downarrow \\ \text{derivando ambos os lados} \end{array}$$

Quando  $x = 1$ , temos:

$$e^{f(1)} f'(1) + f(1) + f'(1) = \frac{1}{2} \implies \begin{array}{c} \uparrow \\ e^0 f'(1) + f'(1) = 1/2 \implies 2f'(1) = 1/2 \implies f'(1) = 1/4. \\ f(1) = 0 \end{array}$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva em  $(1, 0)$  é  $1/4$  e, então, a reta tangente é:

$$-x + 4y = -1.$$

**Exemplo 137.** A questão abaixo estava em uma prova de 2016-1.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente por  $\arctg(y) + \frac{y}{x} = x - 1$  no ponto de ordenada  $y = 0$  é:

a) -1      b) 0      c)  $1/2$       d) 1      e) 2

Vamos resolvê-la notando que  $y = f(x)$  satisfaz

$$\arctg(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1.$$

Notamos que, pela regra da cadeia:

$$(\arctg(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

Assim:

$$\arctg(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1 \implies \begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} + \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 1. \\ \downarrow \\ \text{derivando ambos os lados} \end{array}$$

Queremos determinar a derivada quando  $f(x) = 0$ , assim, podemos simplificar a expressão anterior:

$$\frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} + \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 1 \implies f'(x) + \frac{f'(x)}{x} = 1.$$

Ainda, voltando à expressão inicial, quando  $f(x) = 0$ , temos que  $x = 1$  (usando que  $\arctg(0) = 0$ ). Portanto, obtemos

$$f'(1) + \frac{f'(1)}{1} = 1 \implies f'(1) = 1/2.$$

**Exemplo 138.** A questão abaixo estava em uma prova de 2015-2.

A função diferenciável  $y = f(x)$  satisfaz a equação  $\frac{\cos(x-y)}{x+y} = 1/2$ . Se  $f(1) = 1$ , então a derivada da função  $f$  em  $x = 1$  é:

a) -1

b) 0

c) 1

d) -1/2

e) 1/2

Vamos resolvê-la. Para isso, notamos que  $y = f(x)$  satisfaç:

$$\frac{\cos(x - f(x))}{x + f(x)} = 1/2.$$

Derivando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{(\cos(x - f(x)))'(x + f(x)) - (x + f(x))' \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} &= 0 \\ \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}} \frac{-\sin(x - f(x))(1 - f'(x))(x + f(x)) - (1 + f'(x)) \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} &= 0. \end{aligned}$$

Queremos determinar a derivada em  $x = 1$ , isto é,  $f'(1)$ . Temos:

$$\frac{-\sin(1 - f(1))(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cos(1 - f(1))}{(1 + f(1))^2} = 0.$$

Pode parecer uma expressão horrível, mas voltemos ao enunciado, que diz que  $f(1) = 1$ , isto é,  $1 - f(1) = 0$ . Assim:

$$\frac{\cancel{-\sin(1 - f(1))}^0(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cancel{\cos(1 - f(1))}^1}{(1 + f(1))^2} = 0 \Rightarrow \frac{-1 - f'(1)}{4} = 0.$$

Portanto,  $f'(1) = -1$ .

### 3.14 Exercícios

1. Determine a derivada das funções a seguir.

(a)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(l)  $f(x) = (1 - x^2)^{100}$

(b)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + x^3$

(m)  $f(x) = \sqrt{x-3}$

(c)  $f(x) = 12x^{20} + 14x^4 + 13x$

(n)  $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 3}$

(d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

(o)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

(e)  $f(x) = \frac{5x^4}{\sqrt{x}}$

(p)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$

(f)  $f(x) = 5\sqrt[3]{12x}$

(q)  $f(x) = (x^3 + \sqrt{x+1})^{10}$

(g)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(r)  $f(x) = 2^{x^2+1}$

(h)  $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^5 + x^4 + 3x + 2)$

(s)  $f(x) = \log(x^5 + x^4)$

(i)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

(t)  $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(x^2)$

(j)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 + x^2 + 1}$

(u)  $f(x) = 2^{\sin x}$

(k)  $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}$

(v)  $f(x) = \ln(\sin x)$

(w)  $f(x) = 2^x \cdot 3^x$

(x)  $f(x) = \ln x \cdot \sin x$

(y)  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

(z)  $f(x) = 4x^2 e^x$

2. Determine a derivada das funções a seguir.

(a) $f(x) = \frac{-x+2}{x \ln x}$	(n) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$
(b) $f(x) = e^x(\sqrt{x} + \sec x)$	(o) $f(x) = (\ln x + \sqrt{x})^3$
(c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$	(p) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$
(d) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$	(q) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 3x)$
(e) $f(x) = \ln(4x - 2)$	(r) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$
(f) $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 7)^{10}$	(s) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 - 2)$
(g) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(e^x))$	(t) $f(x) = 2^{(\ln(\cos x))}$
(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$	(u) $f(x) = x^x$
(i) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4$	(v) $f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
(j) $f(x) = 8^{3x^2-1}$	(w) $f(x) = \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x}$
(k) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	(x) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^3}{2}\right)$
(l) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	(y) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$
(m) $f(x) = e^{2x} \operatorname{ln}(x^2)$	(z) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

3. Verifique se a função  $f(x) = 3x|x|$  é derivável no ponto  $x = 0$ .

4. Considere a função  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ . Encontre  $f'(x)$  para  $x \neq 0$  e mostre que  $f(x)$  é não derivável em  $x = 0$ .

5. Mostre que se  $f(x)$  é uma função par (ímpar) então  $f'(x)$  é ímpar (par).

6. Considere a função  $f(x) = \frac{x^{a+1}}{x+a}$  em que  $a$  é uma constante real. Determine os valores de  $a$  para que  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .

7. Encontre a derivada da função  $f(x) = \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^3$  nos pontos 0, -2 e 2.

8. Sabendo que  $f(2) = 1$ ,  $f(8) = 5$ ,  $f'(2) = 7$  e  $f'(8) = -3$  encontre

- $g'(2)$ , onde  $g(x) = [f(x)]^2$ .
- $h'(2)$ , onde  $h(x) = f(x^3)$ .
- $q'(2)$ , onde  $q(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  sendo  $h(x)$  e  $g(x)$  como acima.

9. Seja  $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ . Ache todos os valores de  $x \in [0, 2\pi]$  tais que  $f'(x) = 0$ .

10. Determine a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa  $x_0$  indicado.

(a) $y = \frac{e^x}{1+x^2}$ , $x_0 = 1$ .	(c) $y = (3-x^2)^4 \sqrt[3]{5x-4}$ , $x_0 = 1$ .
(b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$ , $x_0 = \pi/2$ .	(d) $y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ , $x_0 = 0$ .

11. Calcule as derivadas até 3<sup>a</sup> ordem das funções  $y = f(x)$  a seguir.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ y = 3x^2 - 2x + 5 & \text{(c)} \ y = \log(x+2) & \text{(e)} \ y = \frac{2x}{x^2 - 1} \\ \text{(b)} \ y = \frac{1}{x} & \text{(d)} \ y = \frac{x-1}{x+3} & \text{(f)} \ y = e^{2 \cos x} \end{array}$$

12. Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e  $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$ . Calcule  $g' \left( \frac{\pi}{4} \right)$  supondo que  $f'(1) = 2$ .

13. Determine os pontos em que a função a seguir é derivável e calcule a derivada nesses pontos.

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{se } x \leq -2, \\ x^2 - 3 & \text{se } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x < 0, \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos \left( \frac{1}{x-1} \right) & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

14. Determine os valores de  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a função  $f(x) = 2x + |x^2 - 2|$  é derivável. Determine a derivada nesses pontos.

15. É possível determinar  $a, b \in \mathbb{R}$  de forma a ter a função a seguir derivável em  $\mathbb{R}$ ?

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{x} & \text{se } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

16. Determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que a função a seguir seja derivável em todo seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{se } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{se } c < x. \end{cases}$$

17. Calcular  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  para que a função seja derivável em todo  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{se } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

### Exercícios de provas anteriores

18. (2017-1) Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} & \text{se } x < a \\ x - a + 1 & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

O valor de  $a + b$  para que  $f$  seja derivável em  $\mathbb{R}$  é:

a) 0      b) 1      c) 2      d) -1      e) -2

19. (2017-1) Sobre a função  $f(x) = e^{\cos x} + x$ , podemos afirmar que:

a)  $f'(0) < f''(0) < f(0)$       c)  $f'(0) < f(0) < f''(0)$       e)  $f''(0) < f'(0) < f(0)$   
 b)  $f(0) < f''(0) < f'(0)$       d)  $f''(0) < f(0) < f'(0)$

20. (2014-2) A derivada da função  $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$  em  $x = 2$  é:

a) 0      b) 1      c) 2      d) 7      e) 11

21. (2014-2) Considere a função  $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ ax + b, & \text{se } x \in (-\pi/2, 0], \end{cases}$$

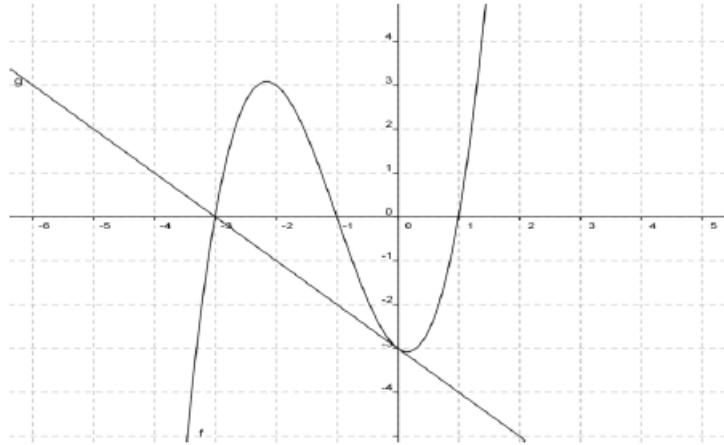
sendo  $a$  e  $b$  constantes reais. Podemos afirmar que o valor da soma  $a + b$  para que a função  $f$  seja derivável em  $x = 0$  é:

a) -2      b) -1      c) 0      d) 1      e) 2

22. (2015-2) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = ax^2 + bx$ , sendo  $a$  e  $b$  constantes reais. Sabendo que a tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto  $(1, 5)$  tem inclinação  $m = 8$ , podemos afirmar que o produto  $ab$  é:

a) 2      b) 3      c) 4      d) 5      e) 6

23. (2015-1) Na figura abaixo estão representados parte dos gráficos de uma função derivável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e da reta tangente  $g$  à curva  $y = f(x)$  no ponto de abscissa 0.



A equação da reta normal à curva  $y = f(x)$  no ponto de abscissa 0 é:

a)  $x + y + 3 = 0$       c)  $x - y - 3 = 0$       e)  $x + 3y + 3 = 0$   
 b)  $x - y + 3 = 0$       d)  $x + y - 3 = 0$

24. (2016-2) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função  $y = f(x)$  definida implicitamente por  $(1 + \cos(x^2y^2))^2 + x + y = 5$ , no ponto de ordenada  $y = 0$ , é igual a:

a) -1      b) 0      c) 1/2      d) 1      e) 2

25. (2016-2) A derivada da função  $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 + 1)$  em  $x = 1$  é igual a:

a) 1      b) 0      c) -1/2      d) 1/10      e) 2/5

26. (2016-2) Considere a função  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

É CORRETO afirmar que:

a)  $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ .      c)  $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ .      e)  $f'_+(0) = 0$  e  $f'_-(0) = -1$ .  
b)  $f'_+(0) = 1$  e  $f'_-(0) = -1$ . d)  $f'_+(0) = 0$  e  $f'_-(0) = 1$ .

27. (2017-1) Considere a função  $f(x) = \begin{cases} e^{(x-1)} & \text{se } x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Se  $f'_-(1) = a$  e  $f'_+(1) = b$  podemos afirmar que:

a)  $a > b$       b)  $ab > 1$       c)  $|a| = |b|$       d)  $a \cdot b^{-1} < 0$       e)  $2a = b$

28. (2017-1) A derivada da função  $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x))$  em  $x = 1/2$  é:

a) 1      b) 2      c) 1/4      d) -1      e) 1/2

29. (2017-1) Seja  $a$  uma constante real positiva e seja  $f$  uma função derivável em  $x = a$ .

O limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$  é igual a:

a)  $2\sqrt{a}f'(a)$       b)  $\sqrt{a}f'(a)$       c)  $\frac{1}{2\sqrt{a}}f'(a)$       d)  $\frac{1}{\sqrt{a}}f'(a)$       e)  $\frac{\sqrt{a}}{2}f'(a)$

30. (2016-1) A derivada da função  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  em  $x = 1$  é igual a:

a) 1      b) 0      c) 1/2      d)  $\ln 2$       e) 2

31. (2015-2) A derivada segunda da função  $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(3x)$  em  $x = 0$  é:

a) 6      b) 3      c) 0      d) -3      e) -6

32. (2010-1) A inclinação da tangente à curva definida pela equação  $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$  no ponto  $(2, 0)$  é:

a) -2/5      b) 2/5      c) -4/5      d) 4/5      e) 0

33. (2010-1) A derivada segunda da função  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$  é:

a)  $\frac{1}{1 + e^x}$       b)  $\frac{-1}{1 + e^x}$       c)  $\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$       d)  $\frac{-e^x}{(1 + e^x)^2}$       e) 0

34. (2010-1) Sejam  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  e  $g(x) = \operatorname{sen} x$ . A derivada da função composta  $(f \circ g)(x)$  é:

a)  $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1}$       b)  $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$       c)  $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}$       d)  $\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$       e)  $\frac{\cos x}{\cos^2 x + 1}$

35. (2013-1) A equação da reta tangente à curva  $y = \frac{\ln x}{e^x}$  no ponto de abscissa 1 é dada por:

a)  $y = -\frac{1}{e}(x - 1)$       b)  $y = \frac{1}{e}(x + 1)$       d)  $y = -e(x - 1)$   
 c)  $y = e(x - 1)$       e)  $y = \frac{1}{e}(x - 1)$

36. (2013-2) A soma das constantes  $a$  e  $b$  para que o gráfico da função  $f(x) = a + b \operatorname{sen}^2(x/2)$  e a curva definida implicitamente pela equação  $y \operatorname{cos} x + xy = 5\pi x$  tenham a mesma reta tangente no ponto  $(\pi/2, 5\pi)$  é:

a)  $10 + 5\pi$       b)  $10 - 5\pi$       c)  $5\pi - 10$       d)  $20$       e)  $5\pi$

37. (2013-2) Sabendo que  $f$  é uma função derivável com  $f(0) = 0$  e que

$$g(x) = 2(x - 1)^2 + (f(x) + 1)^2$$

é a função constante igual a 5, então  $f'(0)$  é igual a:

a) - 2      b) 2      c) - 1      d) 1      e) 0

38. (2013-2) A derivada de  $f(x) = \operatorname{arctg}(g(g(x)))$  em  $x = -1$ , sabendo que  $g(-1) = -1$  e  $g'(-1) = 4$ , é:

a) 0      b) 2      c) 4      d) 6      e) 8

### 3.15 Respostas dos Exercícios

1.

(a)  $-1/(x + 1)^2$   
 (b)  $(x^{5/2} + 6x^5 - 4)/(2x^3)$   
 (c)  $240x^{19} + 56x^3 + 13$   
 (d)  $-\frac{3}{4x^{7/4}}$   
 (e)  $(35x^{5/2})/2$   
 (f)  $(5(2/3)^{2/3})/x^{2/3}$   
 (g)  $(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$   
 (h)  $(11x^5 + 9x^4 + 9x + 2)/(2\sqrt{x})$   
 (i)  $(x^2 - 2x - 2)/(x - 1)^2$   
 (j)  $(-5x^3 - 3x^2 + 1)/(2\sqrt{x}(x^3 + x^2 + 1)^2)$   
 (k)  $(5x - 1)/(6(x - 1)^{2/3}\sqrt{x + 1})$   
 (l)  $200x(x^2 - 1)^{99}$   
 (m)  $1/2(\sqrt{x - 3})$   
 (n)  $x(2 - 1/\sqrt{x^2 - 3})$

(o)  $(2x + 1)/(2\sqrt{x^2 + x + 1})$   
 (p)  $(3x^2 + 2x + 1)/(3(x^3 + x^2 + x + 1)^{2/3})$   
 (q)  $10(3x^2 + 1/(2\sqrt{x + 1}))(x^3 + \sqrt{x + 1})^9$   
 (r)  $2^{x^2+2}x \ln 2$   
 (s)  $\log e(5x + 4)/(x^2 + x)$   
 (t)  $(2e^{x^2}(x^2 \ln(x^2) + 1))/x$   
 (u)  $2^{\operatorname{sen} x} \cos x \ln 2$   
 (v)  $\operatorname{cotg} x$   
 (w)  $6^x \ln 6$   
 (x)  $\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \ln x \cos x$   
 (y)  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$   
 (z)  $4e^x x(x + 2)$

2. (a)  $\frac{x - 2 \ln x - 2}{x^2 \ln^2 x}$

(b)  $e^x(\sqrt{x} + \sec x) + e^x \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{tg} x \sec x \right)$

(c)  $\frac{x^2 - 2x^2 \ln x + 1}{(x(x^2 + 1)^2)}$

(d)  $-\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

(e)  $\frac{2}{2x - 1}$   
 (f)  $20x(2x^2 - 3)(x^4 - 3x^2 + 7)^9$   
 (g)  $-e^x \operatorname{sen}(e^x) \cos(\cos(e^x))$   
 (h)  $-(2x + 1)/(3(x^2 + x + 1)^{4/3})$   
 (i)  $-\frac{4(x + 1)^3(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^5}$   
 (j)  $8^{3x^2-1}(6x)\ln 8 = 3 \cdot 2^{9x^2-2}x \ln 8$

(k)  $\frac{2}{x^2 - 1}$

(l)  $-\frac{1}{\sqrt{(1-x)/(x+1)}(x+1)^2}$

(m)  $\frac{2e^{2x}(x \ln(x^2) + 1)}{x}$

(n)  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$

(o)  $\frac{3(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\ln x)^2}{2x}$

(p)  $\frac{e^{-x}(1-x \ln x)}{x}$

(q)  $(2x+3) \cos(x(x+3))$

(r)  $-\frac{2 \operatorname{sen}(\ln(x^2))}{x}$

(s)  $2x \sec^2(x^2 - 2)$

(t)  $-\ln(2) \operatorname{tg}(x) 2^{\ln(\cos x)}$

(u)  $x^x (\ln x + 1)$

(v)  $\frac{\log e}{2} \operatorname{cossec} x$

(w)  $-\frac{(1 + \cos^2 x)}{2 \operatorname{sen}^3 x}$

(x)  $\frac{3x^2}{\sqrt{4 - x^6}}$

(y)  $\operatorname{sen}^{\cos(x)} (\cos x \operatorname{cotg} x - \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x))$

(z)  $\frac{2 \operatorname{sen} x}{(\cos x + 1)^2}$

3. Sim.

4.  $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x}$  se  $x \neq 0$ .

5.  $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$  e  $-f(x) = f(-x) \Rightarrow -f'(x) = -f'(-x)$

6.  $a = -1 \pm \sqrt{2}$

7.  $f'(0) = 12$ ,  $f'(2) = 64/27$ ,  $f'(-2) = 48$

8. (a) 14

(b) -36

(c) 106/25

9.  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$  e  $5\pi/4$ .

10. (a)  $y = e/2$

(b)  $y = x$

(c)  $3y = -112x + 160$

(d)  $y = x$

11. (a)  $f'(x) = 6x - 2$ ,  $f''(x) = 6$ ,  $f'''(x) = 0$

(b)  $f'(x) = -1/x^2$ ,  $f''(x) = 2/x^3$ ,  $f'''(x) = -6/x^4$

(c)  $f'(x) = (\log e)/(x+2)$ ,  $f''(x) = -(\log e)/(x+2)^2$ ,  $f'''(x) = (2 \log e)/(x+2)^3$

(d)  $f'(x) = 4/(x+3)^2$ ,  $f''(x) = -8/(x+3)^3$ ,  $f'''(x) = 24/(x+3)^4$

(e)  $f'(x) = -(2(x^2+1))/(x^2-1)^2$ ,  $f''(x) = (4x(x^2+3))/(x^2-1)^3$ ,  $f'''(x) = -(12(x^4+6x^2+1))/(x^2-1)^4$

(f)  $f'(x) = -2e^{2 \cos x} \operatorname{sen} x$ ,  $f''(x) = -2e^{2 \cos x} (\cos x + \cos(2x) - 1)$

$f'''(x) = -8e^{2 \cos x} \operatorname{sen}^3 x + 2e^{2 \cos x} \operatorname{sen} x + 12e^{2 \cos x} \operatorname{sen} x \cos x$

12. 4

13.  $f'(x) = \begin{cases} 2(x+3) & \text{se } x < -2, \\ 2x & \text{se } -2 < x < -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x < 1, \\ \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x-1} \right) (x-1)^{-2} & \text{se } 1 < x < 2, \\ 2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$

14.  $f'(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x+2, & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

15. Não.

16.  $a = \frac{1}{2e}$ ,  $b = 0$ ,  $c = e^{1/2}$

17.  $a = \frac{1}{\pi^2}$ ,  $b = \frac{2}{\pi}$ ,  $c = \frac{1}{\pi^2}$  e  $d = \frac{-2}{\pi}$

18. b)

21. d)

24. a)

27. a)

30. a)

33. d)

36. a)

19. e)

22. e)

25. e)

28. b)

31. a)

34. d)

37. b)

20. c)

23. c)

26. e)

29. a)

32. c)

35. e)

38. e)