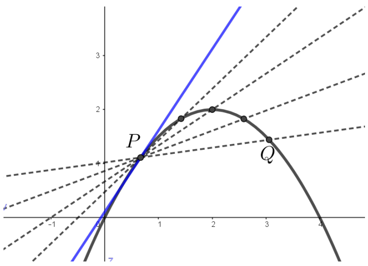
Capítulo 3

Derivadas

Este capítulo é sobre derivada, um conceito fundamental do Cálculo que é muito útil em problemas aplicados. Este conceito relaciona-se com o problema de determinar a reta tangente a um ponto do gráfico de uma função que foi visto no capítulo 3. Iniciaremos nossa discussão tratando deste problema.

3.1 O problema da reta tangente



Seja $P(x_0, f(x_0))$ um ponto sobre o gráfico de uma função contínua $f(x)$. Dado um ponto $Q = (x_1, f(x_1))$ do gráfico, distinto de P, seja s a reta passando por P e Q. Esta reta é dita secante ao gráfico pois o secciona nos pontos P e Q. O coeficiente angular desta reta é dado por

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Considerando Q como um ponto móvel, quando $x_1 \to x_0$ temos $Q \to P$. Consequentemente, a reta s varia de posição (ver figura). A reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P é definida como sendo a *posição limite de s* quando $x_1 \to x_0$ e seu coeficiente angular, denotado por m, é dado pelo limite do coeficiente angular das retas secantes s quando $x_1 \to x_0$, ou seja

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.1}$$

Se o limite acima existe, então existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P e esta reta tem equação

$$(y - f(x_0)) = m(x - x_0).$$

Mas, pode ocorrer deste limite não existir e neste caso temos duas possibilidades: ou a reta tangente não pode ser definida, ou a reta tangente é uma reta vertical. Este último caso ocorre quando o limite é $\pm\infty$. Nos exemplos a seguir vamos ilustrar todas estas possibilidades.

Exemplo 73. Para verificar se existe reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $P = (1, f(1)) = (1, 1)$ calculamos o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x} = -1$$

Como o limite existe e vale -1, existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P e sua equação é

$$(y - 1) = -1(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 2$$

(veja figura 3.1).

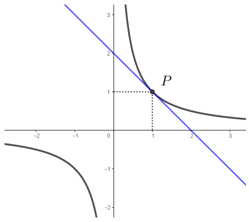


Figura 3.1: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $P = (1, 1)$.

Exemplo 74. Para verifcar se existe uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $P = (0, 0)$ calculamos o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Como o limite é $+\infty$, a posição limite das retas secantes é a reta vertical $x = 0$, isto é, a reta tangente passando por P é a reta vertical $x = 0$ (veja figura 3.2).

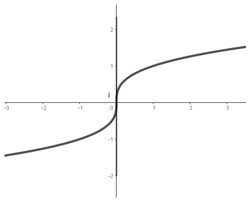


Figura 3.2: A reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $P = (0, 0)$ é uma reta vertical.

Exemplo 75. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e o ponto $P = (1, 1)$ do seu gráfico. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x - 3 = -2. \end{aligned}$$

Como os limites laterais são distintos, não existe o limite $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Ainda, não existe a posição limite das retas secantes. Logo não existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P = (1, 1)$.

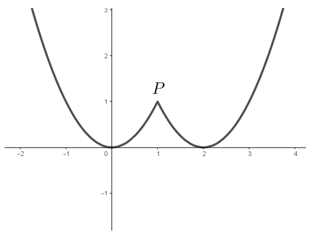


Figura 3.3: Não existe reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 75 em $P = (1, 1)$.

3.2 Derivada de uma função em um ponto

Definição 31. Uma função $f(x)$ é **derivável** ou **diferenciável** em um ponto $x_0 \in D(f)$ se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.2}$$

Se este limite $f'(x_0)$ existe ele é chamado de **derivada de** $f(x)$ **no ponto** x_0. Se o limite $f'(x_0)$ não existe, dizemos que $f(x)$ é **não derivável** ou **não diferenciável** em x_0.

Observação 39. Pela discussão da seção anterior, dizer que $f(x)$ é derivável em x_0 é o mesmo que dizer que existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ e que esta reta não é vertical, sendo o seu coeficiente angular igual a $f'(x_0)$.

Exemplo 76. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 2$ e $f'(2) = 4$.

Exemplo 77. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, temos

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Observação 40. Fazendo a mudança de coordenadas $h = x_1 - x_0$ vemos que $x_1 \to x_0$ implica em $h \to 0$, logo a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 pode também ser expressa pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3.3}$$

Exemplo 78. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Observe que

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(4+h) - 12}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 4$ e $f'(4) = 3$.

3.3 Derivada como Função

Definição 32. Considere uma função $f(x)$. A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é chamada **derivada da função f com relação a x**. O domínio da derivada f' é o conjunto dos pontos $x \in D(f)$ para os quais existe o limite $f'(x)$.

Observação 41. A derivada de uma função $f(x)$ com relação a x também é denotada por $\dfrac{df}{dx}$ (notação de Leibniz).

Definição 33. Quando $f(x)$ é definida em um intervalo aberto e possui derivada em todos os pontos deste intervalo, dizemos que $f(x)$ é uma **função diferenciável** ou **derivável**.

Exemplo 79. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2x.h + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x.h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x - h = 2x. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = x^2$ é uma função diferenciável. A derivada de $f(x)$ é a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Exemplo 80. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) + 1 - 3x - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3.$$

Como $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R} = D(f)$, temos que $f(x)$ é um função diferenciável e sua derivada é a função constante $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 3$.

Vejamos um exemplo de uma função cuja derivada não existe em algum ponto do domínio.

Exemplo 81. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Vimos no exemplo 74 que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty.$$

Portanto, $f(x)$ é não derivável no ponto 0. Agora, para todo $x_0 \neq 0$ temos

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$$

considerando $y = \sqrt[3]{x}$ e recordando que $y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3 = (y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})$ obtemos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y\to \sqrt[3]{x_0}} \frac{y - \sqrt[3]{x_0}}{y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3} = \lim_{y\to \sqrt[3]{x_0}} \frac{(y - \sqrt[3]{x_0})}{(y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} \\ &= \lim_{y\to \sqrt[3]{x_0}} \frac{1}{y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{x_0}.\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \neq 0$ e a derivada desta função é a função $f' : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

3.4 Derivadas laterais

Em algumas situações, é útil considerar os limites laterais associados ao limite $f'(x)$. Estes limites laterais são:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definição 34. O limite $f'_-(x_0)$, quando existe, é chamado de **derivada à esquerda de** $f(x)$ **no ponto** x_0 e o limite $f'_+(x_0)$, quando existe, é chamado de **derivada à direita de** $f(x)$ **no ponto** x_0**.**

Observação 42. Note que a derivada $f'(x_0)$ existe se, e somente se, as derivadas laterais $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ existem e são iguais.

O conceito de derivada lateral é útil, por exemplo, quando estudamos funções definidas por partes. Vejamos um exemplo.

Exemplo 82. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e derivável em todo ponto $x \neq 1$ (verifique!). Para ver se ela é derivável em $x = 1$ precisaremos considerar as derivadas laterais em 1, já que a regra da função é diferente para $x < 1$ e $x > 1$. Estas derivadas são:

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1 + h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2 + 2h - 2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2.$$

Como os limite laterais $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$ temos que existe $f'(1)$ e $f'(1) = 2$.

Exemplo 83. Vamos estudar a diferenciabilidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ tratando alguns casos. Observemos, primeiramente, que se $x > 0$ então $|x| = x$ e para h pequeno o suficiente, temos $x + h > 0$ donde $|x + h| = x + h$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Agora, se $x < 0$ então $|x| = -x$ e para h pequeno o suficiente, temos $x + h < 0$ donde $|x + h| = -x - h$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x - h + x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1.$$

Finalmente, se $x = 0$ então devemos tratar os limites laterais ou seja, as derivadas laterais que são

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, a derivada $f'(0)$ não existe. Assim, $f(x) = |x|$ é derivável apenas nos pontos $x \neq 0$, com $f'(x) = 1$ para $x > 0$ e $f'(x) = -1$ para $x < 0$. A derivada de $f(x)$ é a função $f' : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

As derivadas laterais também são usadas para estudar funções definidas em intervalos que tenham extremos fechados como veremos nos exemplos a seguir.

Definição 35. Dizemos que uma função $f(x)$ é diferenciável (ou derivável) em intervalos da forma $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(a,b]$ ou $[a,b)$ se $f'(x)$ existe para todo ponto x no interior do intervalo e se existem as derivadas laterais adequadas nos extremos destes intervalos.

Exemplo 84. Considere a função $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$. Para todo $x>0$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x>0$ e $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Agora, não podemos calcular o limite $f'(x)$ para $x=0$, já que f está definida apenas em um intervalo à direita de 0. Mas, podemos considerar a derivada lateral à direita $f'_+(0)$ que é

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Portanto não existe a derivada lateral à direita no ponto $x=0$. Concluímos que $f(x)=\sqrt{x}$ não é derivável no intervalo $[0,+\infty)$ embora seja derivável no intervalo $(0,+\infty)$.

Exemplo 85. Considere a função $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2$. Para todo $x\in(1,2)$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 6x+3h = 6x. \end{aligned}$$

Nos extremos do domínio, $x=1$ e $x=2$, devemos considerar as derivadas laterais que são:

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{3+6h+3h^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{6h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 6+3h = 6$$

e

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-}\frac{3(2+h)^2-12}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{12+12h+3h^2-12}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{12h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} 12+3h = 12.$$

Portanto, $f(x)$ é diferenciável no intervalo $[1,2]$.

3.5 Continuidade e Diferenciabilidade

Uma relação entre o conceito de continuidade e diferenciabilidade é dada no seguinte teorema:

Teorema 12. *Se $f(x)$ é uma função derivável em $x_0\in D(f)$ então f é contínua em x_0.*

Prova: Para provar este teorema devemos mostrar que se $f'(x_0)$ existe então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mas, este último limite equivale ao limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0.$$

Assim, provamos o teorema mostrando que

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0).0 = 0.$$

Observação 43. Este teorema nos diz que se $f(x)$ **é descontínua em** x_0, então $f(x)$ **não é diferenciável em** x_0.

Exemplo 86. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 1$ (verifique!). Portanto, pelo teorema 12, $f(x)$ não é diferenciável no ponto $x = 1$.

Observação 44. Continuidade não implica em diferenciabilidade, ou seja, se $f(x)$ é contínua em x_0 não necessariamente $f(x)$ é derivável em x_0. Um bom exemplo para ilustrar esse fato é a função $f(x) = |x|$ que é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável neste ponto.

Exemplo 87. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir, queremos determinar valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que a função seja diferenciável em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+x-2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Primeiramente, pelo Teorema 12, devemos ter f contínua em $x = 0$. Temos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2+x-2 = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax+b = b = f(0).$$

Assim, devemos ter $b = -2$.

Temos então: $f(x) = \begin{cases} ax-2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+x-2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Agora, devemos ter as derivadas laterais em $x = 0$ iguais:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \underset{f(0)=-2}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)+2}{h} \underset{h\to 0^+ \Rightarrow h>0 \Rightarrow f(h)=h^2+h-2}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+h-2+2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+h}{h} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \underset{f(0)=-2}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)+2}{h} \underset{h\to 0^- \Rightarrow h<0 \Rightarrow f(h)=ah-2}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{ah-2+2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h} = a.$$

Portanto, devemos ter $a = 1$ e, assim, $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+x-2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

3.6 Regras de Derivação

Nesta seção estudaremos regras para derivar funções sem o uso do limite que define a derivada.

3.6.1 Derivadas de funções constantes

Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ ou $\dfrac{df}{dx} = 0$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Exemplo 88. Se $f(x) = 5$ então $f'(x) = 0$.

3.6.2 Derivada do produto de uma função por uma constante

Se f é derivável em x e $g(x) = cf(x)$ para alguma constante c então $g(x)$ é derivável em x e

$$g'(x) = cf'(x) \quad \textit{ou} \quad \frac{dg}{dx} = c\,\frac{df}{dx}.$$

De fato,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x).$$

Exemplo 89. Sabemos que $f(x) = x^2$ tem derivada $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pela regra acima temos que $g(x) = 5f(x) = 5x^2$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e sua derivada é $g'(x) = 5.f'(x) = 5.2x = 10x$.

3.6.3 Derivadas de potências

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$ então $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e temos

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1} \quad ou \quad \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para provar esta regra, recordemos que

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + nx^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1} \\
&= nx^{n-1} + 0 + 0 + ... + 0 = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 90. Segue da regra acima que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

A regra acima pode ser generalizada para expoentes reais quaisquer. Mais precisamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^\alpha$ então

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Daremos a prova deste fato mais à frente. Por agora, vamos explorar esta regra em alguns exemplos.

Exemplo 91. Considere $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Observe que $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$. Considerando a regra geral da derivação de potências, temos que $f(x)$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2.x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Exemplo 92. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$. Observando que $f(x) = \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{6}{5}}$ e considerando a regra de derivação acima, temos

$$f'(x) = (x^{\frac{6}{5}})' = \frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-1} = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} = \frac{6\sqrt[5]{x}}{5}.$$

Exemplo 93. Seja $f(x) = x^\alpha$. Como $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(cf(x)) = cf'(x)$ para $c \in \mathbb{R}$ constante, temos

$$(cx^\alpha)' = c\alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{para} \qquad \alpha, c \in \mathbb{R},$$

por exemplo,

$$(6x^3)' = 3.6.x^{3-1} = 18x^2.$$

3.6.4 Regra da soma

Se f e g são deriváveis em x então a soma $(f+g)$ é derivável em x e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad ou \quad \frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}=f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

Exemplo 94. A função $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

é a soma das funções $g(x)=\sqrt{x}$ e $h(x)=\frac{1}{x}$. Sabemos que $g(x)$ é derivável para todo $x\in(0,+\infty)$ com $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Também sabemos que $h(x)=\frac{1}{x}$ é derivável para todo $x\neq 0$ sendo $h'(x)=\frac{-1}{x^2}$. Considerando então a regra da soma temos

$$f'(x)=g'(x)+h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$$

para todo $x\in(0,+\infty)$.

3.6.5 Derivadas de polinômios

Funções polinomiais são somas de funções do tipo $a.x^n$, onde $a\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}$ como consideradas no exemplo 93. Segue da regra da soma que toda função polinomial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

é derivável em qualquer $x\in\mathbb{R}$ e sua derivada é a função polinomial $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f'(x)=n.a_nx^{n-1}+(n-1).a_{n-1}x^{n-2}+...+a_1.$$

Exemplo 95. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=5x^6+3x^5-2x^3+2x^2+1$$

é derivável em todo ponto $x\in\mathbb{R}$ e a sua derivada é

$$\begin{aligned}f'(x) &= (5x^6+3x^5-2x^3+2x^2+1)'\\ &= (5x^6)'+(3x^5)'+(-2x^3)'+(2x^2)'+(1)'\\ &= 5(x^6)'+3(x^5)'-2(x^3)'+2(x^2)'+(1)'\\ &= 5.6x^5+3.5x^4-2.3x^2+2.2x+0\\ &= 30x^5+15x^4-6x^2+4x.\end{aligned}$$

3.6.6 Regra do Produto

Se f e g são deriváveis em x então o produto $(f.g)$ é derivável em x e temos

$$(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\qquad ou\qquad \frac{d}{dx}[f.g]=\frac{df}{dx}.g+f.\frac{dg}{dx}.$$

$$\begin{aligned}(f.g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x+h).g(x)+f(x+h).g(x)-f(x).g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}\\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).[g(x+h)-g(x)]}{h}}_{=f(x)g'(x)}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}}_{=f'(x)g(x)}=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).\end{aligned}$$

Exemplo 96. Vamos usar a regra do produto para derivar $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\sqrt{x}.(x^3+4x-5)$$

note que $f(x)=g(x).h(x)$ sendo $g(x)=\sqrt{x}$ e $h(x)=x^3+4x-5$. Sabemos que $g(x)=\sqrt{x}$ é derivável em todo ponto $x>0$ e que $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Sabemos também que a função polinomial $h(x)=x^3+4x-5$ é derivável em todo ponto $x\in\mathbb{R}$ e $h'(x)=3x^2+4$. Assim, pela regra do produto, $f(x)$ é derivável em todo $x>0$ e

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g'(x).h(x)+g(x).h'(x)\\
&= (\sqrt{x})'.(x^3+4x-5)+\sqrt{x}.(x^3+4x-5)'\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}.(x^3+4x-5)+\sqrt{x}.(3x^2+4)\\
&= \frac{7x^3+12x-5}{2\sqrt{x}}\cdot
\end{aligned}$$

3.6.7 Regra do Quociente

Se f e g são deriváveis em um ponto x e $g(x)\neq 0$ então a função quociente $\dfrac{f}{g}$ é derivável em x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}\qquad ou\qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right]=\frac{\frac{df}{dx}.g-f.\frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x)+f(x).g(x)-f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x)-f(x)\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}\\
&= \frac{\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]}{\lim_{h\to 0}g(x+h).g(x)}.\lim_{h\to 0}g(x)-\lim_{h\to 0}f(x).\frac{\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{\lim_{h\to 0}g(x+h).g(x)}\\
&= \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}\cdot
\end{aligned}$$

Exemplo 97. Vamos usar a regra do quociente para encontrar a derivada de $f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x-1}\cdot$$

Observe que $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sendo $p(x)=x^3+2x^2$ e $q(x)=x-1$ deriváveis em todo ponto $x\in\mathbb{R}$. Segue da regra do quociente que $f(x)$ é derivável em todo ponto $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ e

$$\begin{aligned}
f'(x)=\frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{[q(x)]^2} &= \frac{(x^3+2x^2)'(x-1)-(x^3+2x^2).(x-1)'}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(3x^2+4x)(x-1)-(x^3+2x^2)(1)}{(x-1)^2}\\
&= \frac{3x^3+4x^2-3x^2-4x-x^3-2x^2}{x^2-2x+1}\\
&= \frac{2x^3-x^2-4x}{x^2-2x+1}\cdot
\end{aligned}$$

3.6.8 Regra da Cadeia (Derivada de Função Composta)

Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções deriváveis tais que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{D}(f)$. Então, a função composta $y = f(g(x))$ é derivável e vale a

Regra da Cadeia. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

Vamos fazer uma prova supondo que $g(x+h) - g(x) \neq 0$ para todo h suficientemente pequeno. Fixemos x. Usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}.\end{aligned}$$

Além disso:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sejam } a = g(x) \text{ e } y = g(x+h). \text{ Se } h \to 0, \text{ então } y \to a.}}{=} \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a) = f'(g(x)).$$

Portanto,

$$(f(g(x)))' = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}}_{\to f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} = f'(g(x))g'(x).$$

Exemplo 98. Seja $h(x) = (x^2+1)^{10}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = x^{10} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = 10x^9 \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 10(g(x))^9 \cdot (2x) = 10(x^2+1)^9 \cdot (2x) = 20x(x^2+1)^9.$$

Exemplo 99. Seja $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ e } g(x) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } g'(x) = 3x^2 + 4x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (3x^2+4x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2x^2}} \cdot (3x^2+4x) = \frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}.$$

Note que a derivada não existe nos pontos $x = -2$ e $x = 0$.

Exemplo 100. Seja $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot 2x = -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

3.7 Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja $1 \neq a > 0$. Vamos determinar a derivada da função $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \underset{\text{como } \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a}{=} a^x \ln a.$$

Portanto

Derivada da Função Exponencial. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$.

Exemplo 101. Se $f(x) = 2^x$, então $f'(x) = 2^x \ln 2$.

Exemplo 102. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x \ln e \underset{\ln e = 1}{=} e^x$.

Exemplo 103. Se $h(x) = 5^{x^2+1}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = 5^x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Como $f'(x) = 5^x \ln 5$ e $g'(x) = 2x$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 5^{g(x)} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 2x \cdot 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 = 10x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5.$$

Exemplo 104. Se $h(x) = e^{1/x}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1/x$. Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = -1/x^2$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot (-1/x^2) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Exemplo 105. Se $h(x) = 3^{\sqrt{x}}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Como $f'(x) = 3^x \ln 3$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3^{g(x)} \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}.$$

Vamos usar a regra da cadeia para obter a derivada de $g(x) = \log_a x$. Para isso, lembremos que, como $g(x) = \log_a x$ e $f(x) = a^x$ são funções inversas, então

$$f(g(x)) = x, \text{ isto é, } a^{\log_a x} = x.$$

Assim, derivando em ambos os lados da igualdade, temos

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1, \text{ isto é, } a^{\log_a x} \ln a \cdot (\log_a x)' = 1.$$

Segue então que

$$g'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} \underset{a^{\log_a x} = x}{=} \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln a}}_{=\log_e a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Portanto

Derivada da Função Logarítmica. $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$.

Exemplo 106. Se $f(x) = \log_3 x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_3 e$.

Exemplo 107. Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \ln e \underset{\ln e = 1}{=} \dfrac{1}{x}$.

Exemplo 108. Se $h(x) = \log_7(x^3+x^2)$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \log_7 x$ e $g(x) = x^3+x^2$. Como $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_7 e$ e $g'(x) = 3x^2 + 2x$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \log_7 e \cdot (3x^2 + 2x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \cdot \log_7 e = \frac{3x + 2}{x^2 + x} \cdot \log_7 e.$$

Exemplo 109. A derivada de $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)$ é

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x+1}} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)\,(e^x)' - (x+1)'(e^x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)\,e^x - e^x}{(x+1)^2}\right) = \frac{x+1}{e^x} \cdot \frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}.$$

Exemplo 110. A derivada de $f(x) = e^{x\,\ln x}$ é

$$f'(x) = e^{x\,\ln x}(x\,\ln x)' = e^{x\,\ln x}(x'\,\ln x + x(\ln x)') = e^{x\,\ln x}\left(\ln x + x\,\frac{1}{x}\right) = e^{x\,\ln x}(1+\ln x).$$

Exemplo 111. Vamos calcular $a, b \in \mathbb{R}$ para que a função a seguir seja derivável em todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ b\ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para $x \neq 1$, temos que f é contínua (verifique!) e derivável, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} -2axe^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Agora, para $x = 1$, devemos, primeiramente, pelo Teorema 12, ter f contínua. Temos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} b\ln(1) + 1 = b\ln 1 + 1 = 1 = f(1),$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ae^{-x^2} = ae^{-1}.$$

Assim, devemos ter $ae^{-1} = 1$, isto é, $a = e$ e $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ b\ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Agora, verifique que $f'_-(1) = -2$ e $f'_+(1) = b$.

Portanto, devemos ter $b = -2$ e $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ -2\ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Exemplo 112. Para a derivada de $f(x) = x^x$, escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$ e aplicamos a regra da cadeia:

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exemplo 110}}}{=} e^{x\,\ln x}(1+\ln x) \underset{\substack{\uparrow \\ x^x = e^{x\ln x}}}{=} x^x(1+\ln x).$$

Podemos usar a Regra da Cadeia para generalizar o exemplo anterior, isto é, calcular a derivada de uma função na forma $f(x)^{g(x)}$ onde f e g são deriváveis e $f(x) > 0$. Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\,(g(x)\ln(f(x)))'$$

e portanto,

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Por exemplo:

Exemplo 113. Para a derivada de $h(x) = (x+1)^{2x+3}$, chamemos $f(x) = x+1$ e $g(x) = 2x+3$. Então, $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2$. Dessa forma:

$$h'(x) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = (2x+3)(x+1)^{2x+2} + 2(x+1)^{2x+3}\ln(x+1).$$

Observação 45. Em particular, temos a regra da potência para potências reais: se $h(x) = x^r$, onde $r \in \mathbb{R}$, temos que $h'(x) = r\,x^{r-1}$. De fato, escrevendo

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r\,\ln x}$$

Temos que

$$(x^r)' = \left(e^{r\,\ln x}\right)' = e^{r\,\ln x}(r\,\ln x)' = e^{r\,\ln x}\left(\frac{r}{x}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x^r = e^{r\,\ln x}}}{=} \frac{r\,x^r}{x} = r\,x^{r-1}.$$

3.8 Derivada da Função Inversa

O argumento usado para calcular a derivada da função logarítmica pode ser generalizado para calcular a derivada da inversa de uma função.

Sejam $y = f(x)$ uma função invertível e $x = g(y)$ sua inversa, temos que

$$f(g(y)) = y, \ \ \forall\, y \in \mathrm{D}(g).$$

Então, derivando os dois lados em relação à y, temos

$$f'(g(y))g'(y) = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Derivada da Função Inversa. Seja $y = f(x)$ uma função derivável e invertível em (a, b) tal que $f'(x) \neq 0$ em (a, b). Seja $x = g(y)$ a função inversa de $f(x)$. Então, $x = g(y)$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{se } f'(g(y)) \neq 0.$$

Exemplo 114. Seja $y = f(x) = 8x^3$. A inversa dessa função é $x = g(y) = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{y}$. Pelo resultado anterior, a derivada de $x = g(y)$ é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{24(g(y))^2} = \frac{1}{24\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}$$

que também pode ser encontrada usando a regra da potência.

Exemplo 115. A questão a seguir estava na prova opcional de 2017-1.

Considere a função bijetora $f : [0, \frac{3}{2}] \to [-\frac{281}{32}, 5]$ dada por

$$f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5.$$

Se $f(1) = -2$ e g é a inversa de f, então $g'(-2)$ vale:

a) $\dfrac{-1}{14}$ b) $\dfrac{-1}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{1}{14}$

Vamos resolver essa questão. Sejam $y = f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5$ e $x = g(y)$ sua inversa. Então, usando a derivada da inversa, temos que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} \underset{f(1) = -2 \Rightarrow g(-2) = 1}{=} \frac{1}{f'(1)}.$$

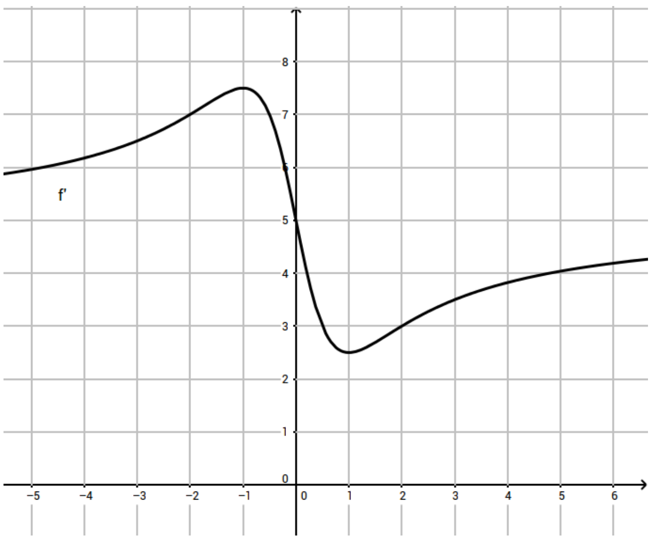
Assim, basta calcular $f'(1)$. Temos que

$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 10x \Rightarrow f'(1) = 5 - 9 - 10 = -14.$$

Portanto

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{14}.$$

Exemplo 116. (2016-2) A figura abaixo representa o gráfico da derivada f' de uma função bijetora f.



Sabendo que o gráfico de f passa pelo ponto $(5, 2)$, a derivada da inversa de f no ponto 2 é igual a:

a) $\frac{-1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 3 e) $\frac{-1}{3}$

Vamos resolver essa questão. Seja $x = g(y)$ a inversa de $y = f(x)$. Então

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} \underset{\substack{\uparrow \\ (5,2) \text{ no gráfico de } f \Rightarrow f(5)=2 \Rightarrow g(2)=5}}{=} \frac{1}{f'(5)}.$$

Pelo gráfico, temos que $f'(5) = 4$, donde $g'(2) = 1/4$.

Vamos ver nas próximas seções mais exemplos de uso da derivada da função inversa.

3.9 Derivadas das Funções Trigonométricas

Vamos começar obtendo a derivada da função seno a partir da definição de derivada, lembrando que $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x$. Então, se $f(x) = \operatorname{sen} x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h \cos x + \operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} + \operatorname{sen} x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Portanto

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

No capítulo anterior, vimos que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$ e $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\cos x = \operatorname{sen}(x+\pi/2) \Rightarrow (\cos x)' = (\operatorname{sen}(x+\pi/2))'.$$

Para derivar, $\operatorname{sen}(x+\pi/2)$ usamos a regra da cadeia:

$$(\operatorname{sen}(x+\pi/2))' = \cos(x+\pi/2) \cdot (x+\pi/2)' = \cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x.$$

Portanto

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Você também pode fazer essa derivada usando a definição, como um exercício. Usando essas derivadas e a regra da cadeia, podemos derivar várias funções:

Exemplo 117. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x^4 + x^2)$ é $f'(x) = \cos(x^4 + x^2) \cdot (4x^3 + 2x)$.

Exemplo 118. A derivada de $f(x) = \cos(e^x)$ é $f'(x) = -\operatorname{sen}(e^x) \cdot e^x$.

Exemplo 119. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\ln x))$ é

$$f'(x) = \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\operatorname{sen}(\ln x)) \cdot (1/x) = -\frac{\cos(\cos(\ln x)) \cdot (\operatorname{sen}(\ln x))}{x}.$$

As derivadas das demais funções trigonométricas podem ser obtidas usando as regras de derivação, por exemplo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow (\operatorname{tg} x)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando a regra do quociente}}}{=} \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \underset{\substack{\uparrow \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1}}{=} \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow (\sec x)' = ((\cos x)^{-1})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando a regra da cadeia}}}{=} -(\cos x)^{-2} (\cos x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

Como um exercício, você deve provar que

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x.$$

Exemplo 120. A derivada de $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + 2^x)$ é $f'(x) = (3x^2 + 2^x \ln 2) \cdot \sec^2(x^3 + 2^x)$.

Exemplo 121. A derivada de $f(x) = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ é

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}}{=} -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra do quociente}}}{=} -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{(x+1)'(x-1) - (x-1)'(x+1)}{(x-1)^2}\right)$$

$$= -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{2\operatorname{cossec}^2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}.$$

Agora, para as derivadas das funções trigonométricas inversas, vamos usar a derivada da função inversa vista na seção anterior.

Temos que $y = \operatorname{arcsen} x$, para todo $x \in (-1, 1)$ se e somente se $x = \operatorname{sen} y$. Assim,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Devemos então determinar $\cos y$ em função de x. Temos que:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Longrightarrow \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \underset{\substack{\uparrow \\ y = \operatorname{arcsen} x \,\Rightarrow\, \cos y > 0}}{\Longrightarrow} \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} \underset{\substack{\uparrow \\ x = \operatorname{sen} y}}{=} \sqrt{1 - x^2}.$$

Portanto:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Observação 46. Observe que não existem as derivadas de $\operatorname{arcsen} x$ nos pontos $x = \pm 1$ e, como pode ser visto no gráfico, as retas tangentes nesses pontos são verticais.

Analogamente, pode-se provar, para $-1 < x < 1$, que

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Para a derivada de $y = \operatorname{arctg} x$, repetimos o processo:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\sec^2 y} \underset{\substack{\uparrow \\ \sec^2 y - \operatorname{tg}^2 y = 1}}{=} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exemplo 122. A derivada de $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x + 1)$ é $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - (2x+1)^2}}$.

Exemplo 123. A derivada de $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ é

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}}{=} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)}.$$

Como exercício, você deve provar as derivadas das demais funções trigonométricas inversas:

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \ |x| > 1,$$

$$(\operatorname{arccossec} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \ |x| > 1,$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

3.10 Derivadas das Funções Hiperbólicas

As derivadas do seno e do cosseno hiperbólicos seguem facilmente da derivada da função exponencial de base e:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (\operatorname{senh} x)' \underset{\substack{\uparrow \\ (e^{-x})' = -e^{-x} \text{ pela regra da cadeia}}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (\cosh x)' \underset{\substack{\uparrow \\ (e^{-x})' = -e^{-x} \text{ pela regra da cadeia}}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

Já as derivadas das demais funções seguem das regras de derivação, por exemplo:

$$(\operatorname{tgh} x)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando a regra do quociente}}}{=} \frac{(\operatorname{senh} x)' \cosh x - \operatorname{senh} x\,(\cosh x)'}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$$

Você pode fazer o mesmo para as demais funções hiperbólicas

$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\operatorname{cossech}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossech} x)' = -\operatorname{cotgh} x \operatorname{cossech} x,$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x.$$

Exemplo 124. A derivada de $f(x) = \operatorname{senh}(x^3 + 3)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \cosh(x^3 + 3).$$

Exemplo 125. A derivada de $f(x) = \operatorname{sech}(2x)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -2\operatorname{tgh}(2x)\operatorname{sech}(2x).$$

Exemplo 126. A derivada de $f(x) = \ln(\operatorname{tgh}(3x))$ é, usando a regra da cadeia duas vezes,

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}(3x)} \cdot 2\operatorname{sech}^2(2x) = \frac{2\operatorname{sech}^2(2x)}{\operatorname{tgh}(3x)}.$$

Exemplo 127. A derivada de $f(x) = \operatorname{cotgh}(1 - x^3)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -\operatorname{cossech}^2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) = 3x^2 \cdot \operatorname{cossech}^2(1 - x^3).$$

Para as funções hiperbólicas inversas, usaremos novamente a derivada da função inversa, além das identidades hiperbólicas. Por exemplo, dado $y = \operatorname{argsenh} x$, temos que $x = \operatorname{senh} y$ e

$$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{senh} y)'} = \frac{1}{\cosh y} \underset{\substack{\uparrow \\ \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \cosh^2 y = 1 + x^2}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Para o cosseno hiperbólico podemos fazer analogamente, tomando apenas cuidado com o domínio, que é $D(\cosh x) = [1, +\infty)$:

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\operatorname{senh} y} \underset{\substack{\uparrow \\ \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y = 1 - x^2}}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{se } x > 1.$$

As demais derivadas das funções hiperbólicas inversas podem ser obtidas analogamente:

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}\,,\ |x| < 1,$$

$$(\operatorname{argsech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}\,,\ 0 < x < 1,$$

$$(\operatorname{argcossech} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}\,,\ x \neq 0,$$

$$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}\,,\ |x| > 1.$$

Exemplo 128. A derivada de $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{argcosh}(x^2)$ é

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra do produto}}}{=} (x^2)' \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 (\operatorname{argcosh}(x^2))'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia em } (\operatorname{argcosh}(x^2))'}}{=} 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 1}} = 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Exemplo 129. A derivada de $f(x) = \operatorname{argtgh}(\operatorname{sen}(3x))$, usando a regra da cadeia, é

$$f'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2(3x)} \cdot (\operatorname{sen}(3x))' \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{sen}^2(3x) + \cos^2(3x) = 1}}{=} \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3\cos(3x) = \frac{3}{\cos(3x)}.$$

3.11 Tabela de Derivadas

A seguir, apresentamos um resumo do que foi discutido nas seções anteriores em forma de uma tabela de derivadas.

Função	Derivada	Função	Derivada
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x} \log_a e$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sec x$	$\operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$, $\lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x$	$\operatorname{arccossec} x$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$, $\lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$	$\operatorname{arccotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$	$\operatorname{argsenh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $x > 1$
$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{argtgh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$	$\operatorname{argsech} x$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$
$\operatorname{cossech} x$	$-\operatorname{cotgh} x \operatorname{cossech} x$	$\operatorname{argcossech} x$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$, $x \neq 0$
$\operatorname{cotgh} x$	$-\operatorname{cossech}^2 x$	$\operatorname{argcotgh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert > 1.$

3.12 Derivadas Sucessivas

Vimos que dada uma função $f(x)$ diferenciável, podemos definir a função derivada $f'(x)$.

Se essa função $f'(x)$ for também diferenciável, definimos a *derivada segunda de* $f(x)$ (ou derivada de ordem 2), denotada por $f''(x)$ ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$, como sendo a derivada de $f'(x)$.

Se a derivada segunda $f''(x)$ for diferenciável, podemos definir a *derivada terceira de* $f(x)$ (ou derivada de ordem 3), denotada por $f'''(x)$ ou $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$, como sendo a derivada de $f''(x)$.

Em geral, se a $n-$ésima derivada de $f(x)$ existe e é derivável, podemos definir a $(n+1)-$ésima (ou derivada de ordem $n+1$) de $f(x)$, denotada por $f^{(n+1)}(x)$ ou $\dfrac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$, como sendo a derivada de $f^{(n)}(x)$.

Exemplo 130. Seja $f(x) = x^5$. Temos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4\\
f''(x) &= 20x^3\\
f'''(x) &= 60x^2\\
f^{(4)}(x) &= 120x\\
f^{(5)}(x) &= 120\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= 0, \text{ se } n \geq 6.
\end{aligned}
$$

Não necessariamente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$ sempre que $n \geq n_0$, como veremos a seguir.

Exemplo 131. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Temos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x\\
f'''(x) &= -\cos x\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x\\
f^{(5)}(x) &= \cos x\\
f^{(6)}(x) &= -\operatorname{sen} x\\
f^{(7)}(x) &= -\cos x\\
f^{(8)}(x) &= \operatorname{sen} x\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Exemplo 132. Seja $f(x) = e^x$. Temos que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 1$. Agora, se $f(x) = a^x$ para $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq e$, temos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a^x \cdot \ln a\\
f''(x) &= a^x \cdot (\ln a)^2\\
f'''(x) &= a^x \cdot (\ln a)^3\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= a^x \cdot (\ln a)^n, \text{ para todo } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

3.13 Derivação Implícita

As funções que trabalhamos até agora foram dadas *explicitamente*, isto é, eram funções cujas expressões $y = f(x)$ eram conhecidas e podiam ser usadas para calcular $f(x)$ para cada x do domínio. Além disso, era possível calcular $f'(x)$ usando as regras vistas.

Porém, algumas funções podem ser apresentadas de forma *implícita*, o que veremos a seguir.

Exemplo 133. Consideremos a função $y = f(x)$ dada pelas soluções da equação

$$y^3 + x = 2.$$

Vemos que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que o par (x, y) satisfaz a equação dada. Esse y pode ser conhecido facilmente:

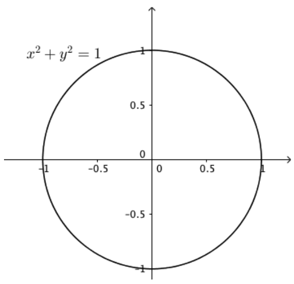
$$y^3 + x = 2 \iff y^3 = 2 - x \iff y = \sqrt[3]{2 - x}.$$

Isso significa que a função dada implicitamente por $y^3 + x = 2$ pode ser dada explicitamente por $y = \sqrt[3]{2 - x}$, bastando isolar o y.

Em geral, dizemos que $y = f(x)$ é uma função definida *implicitamente* por uma equação em x e y quando o par $(x, f(x))$ satisfaz essa equação.

Porém, nem sempre conseguimos explicitar uma função dada implicitamente.

Exemplo 134. Consideremos a equação $x^2 + y^2 = 1$.



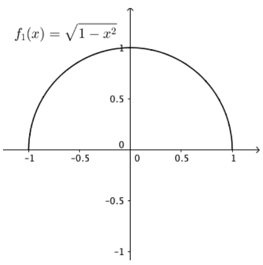
Sabemos que as soluções dessa equação representam um círculo de raio 1 centrado na origem, o que não é uma função, pois cada $x \in (-1, 1)$ se relaciona com dois valores de $y \in [-1, 1]$. Podemos, no entanto, encontrar várias funções que satisfazem essa equação, como por exemplo:

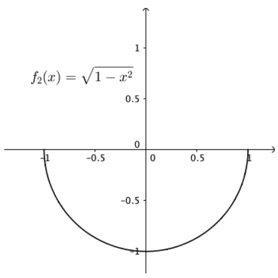
$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

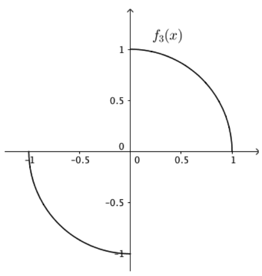
$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

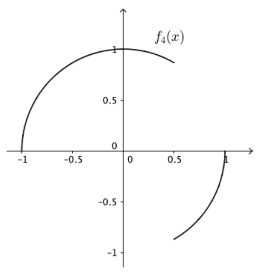
$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \le x < 0, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 1/2 \le x \le 1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 \le x < 1/2. \end{cases}$$









Vamos determinar a derivada no ponto de abscissa $x = 1/2$ em cada caso. Por exemplo, usando $f_1(x)$ ou $f_3(x)$, a derivada em $(1/2, \sqrt{3}/2)$ é dada por $\dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, isto é, vale $\dfrac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$. Já com as funções $f_2(x)$ ou $f_4(x)$, o ponto de coordenada $x = 1/2$ é $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. A derivada de $f_2(x)$ nesse ponto é dada por $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, isto é, vale $\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Já a função $f_4(x)$ não possui derivada em $x = 1/2$ pois não é contínua nesse ponto. Isso nos dá a ideia de que a derivada no ponto de abscissa $1/2$ depende da expressão explícita da função.

Porém, quando a função é derivável, podemos calcular essa derivada sem explicitar a função. De fato, voltemos à equação $x^2 + y^2 = 1$ representando implicitamente uma função $y = f(x)$, isto é:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1.$$

Podemos derivar essa expressão em ambos os lados:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia em } (f(x))^2}}{\Longrightarrow} 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x)f'(x) = -x \Longrightarrow f'(x) = \frac{-x}{f(x)} = \frac{-x}{y}.$$

Vamos usar essa expressão para calcular novamente as derivadas no ponto de abscissa $x = 1/2$ nos casos de $f(x)$ igual a cada uma das funções deriváveis $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ vistas acima. Para $f(x) = f_1(x)$ ou $f(x) = f_3(x)$ o ponto correspondente é $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Para $f(x) = f_2(x)$ o ponto correspondente é $(x, y) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Note que foram os mesmos valores obtidos anteriormente quando derivamos as expressões explícitas das funções. Isso significa que podemos obter a derivada de $f(x)$ (quando $f(x) \neq 0$) sem conhecer explicitamente $f(x)$.

Esse processo, chamado *derivação implícita*, pode ser feito para qualquer função derivável dada implicitamente por uma equação. No que segue, quando dissermos que uma função é dada implicitamente por uma equação, iremos admitir que essa função é derivável em todos os pontos onde essa derivada puder ser definida. Vamos ver outro exemplo.

Exemplo 135. Seja $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação

$$\ln(y) + y^2 = x^2.$$

Não é difícil ver que não conseguimos uma expressão explícita para $y = f(x)$. No entanto, podemos derivar ambos os lados da igualdade:

$$\ln(f(x)) + (f(x))^2 = x^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia em } (f(x))^2 \text{ e em } \ln(f(x))}}{\Longrightarrow} \frac{1}{f(x)} f'(x) + 2f(x)f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(x)\left(\frac{1}{f(x)} + 2f(x)\right) = 2x$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{2x\, f(x)}{1 + 2(f(x))^2}.$$

Exemplo 136. Vamos determinar a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ dada implicitamente pela expressão

$$e^y + xy = \sqrt{x}$$

no ponto $(1, 0)$. Como $y = f(x)$, temos

$$e^{f(x)} + x\, f(x) = \sqrt{x}.$$

Notamos que $g(x) = e^{f(x)}$ é uma função composta cuja derivada, usando a regra da cadeia, é

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Assim:

$$e^{f(x)} + x\, f(x) = \sqrt{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivando ambos os lados}}}{\Longrightarrow} e^{f(x)} f'(x) + f(x) + x\, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Quando $x = 1$, temos:

$$e^{f(1)} f'(1) + f(1) + f'(1) = \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ f(1)=0}}{\Longrightarrow} e^0 f'(1) + f'(1) = 1/2 \Longrightarrow 2f'(1) = 1/2 \Longrightarrow f'(1) = 1/4.$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva em $(1, 0)$ é $1/4$ e, então, a reta tangente é:

$$-x + 4y = -1.$$

Exemplo 137. A questão abaixo estava em uma prova de 2016-1.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente por $\operatorname{arctg}(y) + \dfrac{y}{x} = x - 1$ no ponto de ordenada $y = 0$ é:

a) -1 b) 0 c) 1/2 d) 1 e) 2

Vamos resolvê-la notando que $y = f(x)$ satisfaz

$$\operatorname{arctg}(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1.$$

Notamos que, pela regra da cadeia:

$$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

Assim:

$$\operatorname{arctg}(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivando ambos os lados}}}{\Longrightarrow} \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} + \frac{x\, f'(x) - f(x)}{x^2} = 1.$$

Queremos determinar a derivada quando $f(x) = 0$, assim, podemos simplificar a expressão anterior:

$$\frac{f'(x)}{1 + \cancelto{0}{(f(x))^2}} + \frac{x\, f'(x) - \cancelto{0}{f(x)}}{x^2} = 1 \Longrightarrow f'(x) + \frac{f'(x)}{x} = 1.$$

Ainda, voltando à expressão inicial, quando $f(x) = 0$, temos que $x = 1$ (usando que $\operatorname{arctg}(0) = 0$). Portanto, obtemos

$$f'(1) + \frac{f'(1)}{1} = 1 \Longrightarrow f'(1) = 1/2.$$

Exemplo 138. A questão abaixo estava em uma prova de 2015-2.

A função diferenciável $y = f(x)$ satisfaz a equação $\dfrac{\cos(x - y)}{x + y} = 1/2$. Se $f(1) = 1$, então a derivada da função f em $x = 1$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) -1/2 e) 1/2

Vamos resolvê-la. Para isso, notamos que $y = f(x)$ satisfaz:

$$\frac{\cos(x - f(x))}{x + f(x)} = 1/2.$$

Derivando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\frac{(\cos(x - f(x)))'(x + f(x)) - (x + f(x))' \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}}{\Longrightarrow} \frac{-\operatorname{sen}(x - f(x))(1 - f'(x))(x + f(x)) - (1 + f'(x)) \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} = 0.$$

Queremos determinar a derivada em $x = 1$, isto é, $f'(1)$. Temos:

$$\frac{-\operatorname{sen}(1 - f(1))(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cos(1 - f(1))}{(1 + f(1))^2} = 0.$$

Pode parecer uma expressão horrível, mas voltemos ao enunciado, que diz que $f(1) = 1$, isto é, $1 - f(1) = 0$. Assim:

$$\frac{-\cancelto{0}{\operatorname{sen}(1 - f(1))}(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cancelto{1}{\cos(1 - f(1))}}{(1 + f(1))^2} = 0 \Rightarrow \frac{-1 - f'(1)}{4} = 0.$$

Portanto, $f'(1) = -1$.

3.14 Exercícios

1. Determine a derivada das funções a seguir.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} + x^3$

   (c) $f(x) = 12x^{20} + 14x^4 + 13x$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

   (e) $f(x) = \dfrac{5x^4}{\sqrt{x}}$

   (f) $f(x) = 5\sqrt[3]{12x}$

   (g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   (h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^5 + x^4 + 3x + 2)$

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

   (j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + x^2 + 1}$

   (k) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}$

   (l) $f(x) = (1 - x^2)^{100}$

   (m) $f(x) = \sqrt{x-3}$

   (n) $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 3}$

   (o) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

   (p) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$

   (q) $f(x) = (x^3 + \sqrt{x+1})^{10}$

   (r) $f(x) = 2^{x^2+1}$

   (s) $f(x) = \log(x^5 + x^4)$

   (t) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(x^2)$

   (u) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

   (v) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

   (w) $f(x) = 2^x \cdot 3^x$

   (x) $f(x) = \ln x \cdot \operatorname{sen} x$

   (y) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

   (z) $f(x) = 4x^2 e^x$

2. Determine a derivada das funções a seguir.

   (a) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x \ln x}$

   (b) $f(x) = e^x(\sqrt{x} + \sec x)$

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

   (d) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

   (e) $f(x) = \ln(4x - 2)$

   (f) $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 7)^{10}$

   (g) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(e^x))$

   (h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

   (i) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^4$

   (j) $f(x) = 8^{3x^2-1}$

(k) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

(l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(m) $f(x) = e^{2x}\ln(x^2)$

(n) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$

(o) $f(x) = (\ln x + \sqrt{x})^3$

(p) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$

(q) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 3x)$

(r) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$

(s) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 - 2)$

(t) $f(x) = 2^{(\ln(\cos x))}$

(u) $f(x) = x^x$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

(w) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}$

(x) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^3}{2}\right)$

(y) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

(z) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

3. Verifique se a função $f(x) = 3x|x|$ é derivável no ponto $x = 0$.

4. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$ e mostre que $f(x)$ é não derivável em $x = 0$.

5. Mostre que se $f(x)$ é uma função par (ímpar) então $f'(x)$ é ímpar (par).

6. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^{a+1}}{x+a}$ em que a é uma constante real. Determine os valores de a para que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

7. Encontre a derivada da função $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)^3$ nos pontos 0, -2 e 2.

8. Sabendo que $f(2) = 1$, $f(8) = 5$, $f'(2) = 7$ e $f'(8) = -3$ encontre

   (a) $g'(2)$, onde $g(x) = [f(x)]^2$.

   (b) $h'(2)$, onde $h(x) = f(x^3)$.

   (c) $q'(2)$, onde $q(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ sendo $h(x)$ e $g(x)$ como acima.

9. Seja $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Ache todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ tais que $f'(x) = 0$.

10. Determine a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa x_0 indicado.

    (a) $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, $\quad x_0 = 1$.

    (b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$, $\quad x_0 = \pi/2$.

    (c) $y = (3-x^2)^4\sqrt[3]{5x-4}$, $\quad x_0 = 1$.

    (d) $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$, $\quad x_0 = 0$.

11. Calcule as derivadas até 3^a ordem das funções $y = f(x)$ a seguir.

    (a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

    (b) $y = \dfrac{1}{x}$

    (c) $y = \log(x+2)$

    (d) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

    (e) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

    (f) $y = e^{2\cos x}$

12. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$. Calcule $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ supondo que $f'(1) = 2$.

13. Determine os pontos em que a função a seguir é derivável e calcule a derivada nesses pontos.

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{se } x \leq -2, \\ x^2 - 3 & \text{se } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x < 0, \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

14. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f(x) = 2x + |x^2 - 2|$ é derivável. Determine a derivada nesses pontos.

15. É possível determinar $a, b \in \mathbb{R}$ de forma a ter a função a seguir derivável em $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{x} & \text{se } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

16. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a função a seguir seja derivável em todo seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{se } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{se } c < x. \end{cases}$$

17. Calcular $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que a função seja derivável em todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{se } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

Exercícios de provas anteriores

18. (2017-1) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} & \text{se } x < a \\ x - a + 1 & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

O valor de $a + b$ para que f seja derivável em $\mathbb{R}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2

19. (2017-1) Sobre a função $f(x) = e^{\cos x} + x$, podemos afirmar que:

a) $f'(0) < f''(0) < f(0)$
b) $f(0) < f''(0) < f'(0)$
c) $f'(0) < f(0) < f''(0)$
d) $f''(0) < f(0) < f'(0)$
e) $f''(0) < f'(0) < f(0)$

20. (2014-2) A derivada da função $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x - 1}$ em $x = 2$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 7 e) 11

21. (2014-2) Considere a função $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ ax + b, & \text{se } x \in (-\pi/2, 0], \end{cases}$$

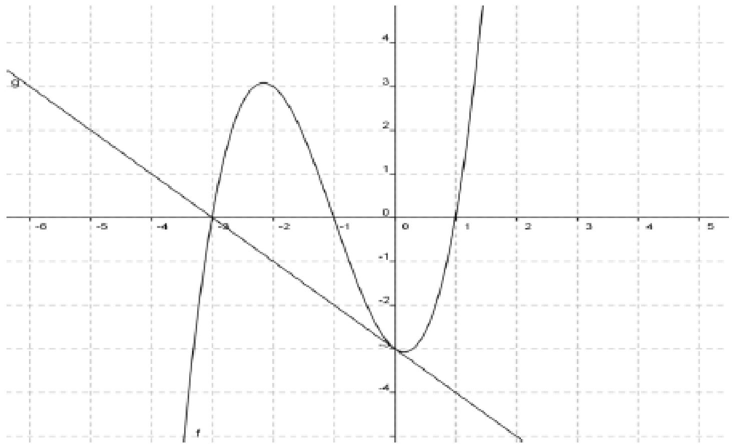
sendo a e b constantes reais. Podemos afirmar que o valor da soma $a + b$ para que a função f seja derivável em $x = 0$ é:

a) - 2 b) - 1 c) 0 d) 1 e) 2

22. (2015-2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx$, sendo a e b constantes reais. Sabendo que a tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$, podemos afirmar que o produto ab é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

23. (2015-1) Na figura abaixo estão representados parte dos gráficos de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da reta tangente g à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 0.



A equação da reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 0 é:

a) $x + y + 3 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $x - y - 3 = 0$
d) $x + y - 3 = 0$
e) $x + 3y + 3 = 0$

24. (2016-2) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente por $(1 + \cos(x^2y^2))^2 + x + y = 5$, no ponto de ordenada $y = 0$, é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1/2 d) 1 e) 2

25. (2016-2) A derivada da função $f(x) = \text{arctg}\,(2x^2 + 1)$ em $x = 1$ é igual a:

a) 1 b) 0 c) -1/2 d) 1/10 e) 2/5

26. (2016-2) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

É **CORRETO** afirmar que:

a) $f'_+(0) = f'_-(0) = 0.$
b) $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1.$
c) $f'_+(0) = f'_-(0) = 1.$
d) $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = 1.$
e) $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = -1.$

27. (2017-1) Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^{(x-1)} & \text{se} \quad x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$

Se $f'_-(1) = a$ e $f'_+(1) = b$ podemos afirmar que:

a) $a > b$ b) $ab > 1$ c) $|a| = |b|$ d) $a.b^{-1} < 0$ e) $2a = b$

28. (2017-1) A derivada da função $f(x) = \text{sen}\,(\ln(2x))$ em $x = 1/2$ é:

a) 1 b) 2 c) 1/4 d) -1 e) 1/2

29. (2017-1) Seja a uma constante real positiva e seja f uma função derivável em $x = a$.

O limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ é igual a:

a) $2\sqrt{a}f'(a)$ b) $\sqrt{a}f'(a)$ c) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}f'(a)$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}f'(a)$ e) $\dfrac{\sqrt{a}}{2}f'(a)$

30. (2016-1) A derivada da função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ em $x = 1$ é igual a:

a) 1 b) 0 c) 1/2 d) $\ln 2$ e) 2

31. (2015-2) A derivada segunda da função $f(x) = x \cdot \text{arctg}\,(3x)$ em $x = 0$ é:

a) 6 b) 3 c) 0 d) -3 e) -6

32. (2010-1) A inclinação da tangente à curva definida pela equação $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ no ponto $(2, 0)$ é:

a) $-2/5$ b) $2/5$ c) $-4/5$ d) $4/5$ e) 0

33. (2010-1) A derivada segunda da função $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$ é:

a) $\dfrac{1}{1+e^x}$ b) $\dfrac{-1}{1+e^x}$ c) $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ d) $\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ e) 0

34. (2010-1) Sejam $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. A derivada da função composta $(f \circ g)(x)$ é:

a) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$ c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}$ d) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$ e) $\dfrac{\cos x}{\cos^2 x + 1}$

35. (2013-1) A equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$ no ponto de abscissa 1 é dada por:

a) $y = -\dfrac{1}{e}(x-1)$ b) $y = \dfrac{1}{e}(x+1)$ d) $y = -e(x-1)$

c) $y = e(x-1)$ e) $y = \dfrac{1}{e}(x-1)$

36. (2013-2) A soma das constantes a e b para que o gráfico da função $f(x) = a + b\operatorname{sen}^2(x/2)$ e a curva definida implicitamente pela equação $y\cos x + xy = 5\pi x$ tenham a mesma reta tangente no ponto $(\pi/2, 5\pi)$ é:

a) $10 + 5\pi$ b) $10 - 5\pi$ c) $5\pi - 10$ d) 20 e) 5π

37. (2013-2) Sabendo que f é uma função derivável com $f(0) = 0$ e que

$$g(x) = 2(x-1)^2 + (f(x)+1)^2$$

é a função constante igual a 5, então $f'(0)$ é igual a:

a) - 2 b) 2 c) - 1 d) 1 e) 0

38. (2013-2) A derivada de $f(x) = \operatorname{arctg}(g(g(x)))$ em $x = -1$, sabendo que $g(-1) = -1$ e $g'(-1) = 4$, é:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

3.15 Respostas dos Exercícios

1.

(a) $-1/(x+1)^2$
(b) $(x^{5/2} + 6x^5 - 4)/(2x^3)$
(c) $240x^{19} + 56x^3 + 13$
(d) $-\frac{3}{4x^{7/4}}$
(e) $(35x^{5/2})/2$
(f) $(5(2/3)^{2/3})/x^{2/3}$
(g) $(1-x^2)/(x^2+1)^2$
(h) $(11x^5 + 9x^4 + 9x + 2)/(2\sqrt{x})$
(i) $(x^2 - 2x - 2)/(x-1)^2$
(j) $(-5x^3 - 3x^2 + 1)/(2\sqrt{x}(x^3 + x^2 + 1)^2)$
(k) $(5x-1)/(6(x-1)^{2/3}\sqrt{x+1})$
(l) $200x(x^2-1)^{99}$
(m) $1/2(\sqrt{x} - 3)$
(n) $x(2 - 1/\sqrt{x^2 - 3})$
(o) $(2x+1)/(2\sqrt{x^2+x+1})$
(p) $(3x^2 + 2x + 1)/(3(x^3 + x^2 + x + 1)^{2/3})$
(q) $10(3x^2 + 1/(2\sqrt{x+1}))(x^3 + \sqrt{x+1})^9$
(r) $2^{x^2+2}x\ln 2$
(s) $\log e\,(5x+4)/(x^2+x)$
(t) $(2e^{x^2}(x^2\ln(x^2)+1))/x$
(u) $2^{\operatorname{sen} x}\cos x \ln 2$
(v) $\operatorname{cotg} x$
(w) $6^x \ln 6$
(x) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \ln x\, \cos x$
(y) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
(z) $4e^x x(x+2)$

2.
(a) $\dfrac{x - 2\ln x - 2}{x^2 \ln^2 x}$
(b) $e^x(\sqrt{x} + \sec x) + e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{tg} x \sec x\right)$
(c) $\dfrac{x^2 - 2x^2\ln x + 1}{(x(x^2+1)^2}$
(d) $-\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
(e) $\dfrac{2}{2x-1}$
(f) $20x(2x^2-3)(x^4 - 3x^2 + 7)^9$
(g) $-e^x\operatorname{sen}(e^x)\cos(\cos(e^x))$
(h) $-(2x+1)/(3(x^2+x+1)^{4/3})$

(i) $-\dfrac{4(x+1)^3(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^5}$

(j) $8^{3x^2-1}(6x)\ln 8 = 3\cdot 2^{9x^2-2}x\ \ln 8$

(k) $\dfrac{2}{x^2-1}$

(l) $-\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)/(x+1)}(x+1)^2}$

(m) $\dfrac{2e^{2x}(x\ln(x^2)+1)}{x}$

(n) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

(o) $\dfrac{3(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\ln x)^2}{2x}$

(p) $\dfrac{e^{-x}(1-x\ln x)}{x}$

(q) $(2x+3)\cos(x(x+3))$

(r) $-\dfrac{2\text{sen}\,(\ln(x^2))}{x}$

(s) $2x\sec^2(x^2-2)$

(t) $-\ln(2)\text{tg}\,(x)2^{\ln(\cos x)}$

(u) $x^x(\ln x+1)$

(v) $\frac{\log e}{2}\text{cossec}\,x$

(w) $-\dfrac{(1+\cos^2 x)}{2\text{sen}^3 x}$

(x) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{4-x^6}}$

(y) $\text{sen}^{\,cos(x)}(\cos x\,\text{cotg}\,x - \text{sen}\,x\ \ln(\text{sen}\,x))$

(z) $\dfrac{2\text{sen}\,x}{(\cos x+1)^2}$

3. Sim.

4. $f'(x) = \text{sen}\,(1/x) - \dfrac{\cos(1/x)}{x}$ se $x \neq 0$.

5. $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$ e $-f(x) = f(-x) \Rightarrow -f'(x) = -f'(-x)$

6. $a = -1 \pm \sqrt{2}$

7. $f'(0) = 12,\ f'(2) = 64/27,\ f'(-2) = 48$

8. (a) 14 (b) -36 (c) 106/25

9. $\pi/4$, $3\pi/4$ e $5\pi/4$.

10. (a) $y = e/2$ (b) $y = x$ (c) $3y = -112x + 160$ (d) $y = x$

11. (a) $f'(x) = 6x-2,\ f''(x) = 6,\ f'''(x) = 0$
(b) $f'(x) = -1/x^2,\ f''(x) = 2/x^3,\ f'''(x) = -6/x^4$
(c) $f'(x) = (\log e)/(x+2),\ f''(x) = -(\log e)/(x+2)^2,\ f'''(x) = (2\log e)/(x+2)^3$
(d) $f'(x) = 4/(x+3)^2,\ f''(x) = -8/(x+3)^3,\ f'''(x) = 24/(x+3)^4$
(e) $f'(x) = -(2(x^2+1))/(x^2-1)^2,\ f''(x) = (4x(x^2+3))/(x^2-1)^3,\ f'''(x) = -(12(x^4+6x^2+1))/(x^2-1)^4$
(f) $f'(x) = -2e^{2\cos x}\text{sen}\,x,\ f''(x) = -2e^{2\cos x}(\cos x + \cos(2x) - 1)$
$f'''(x) = -8e^{2\cos x}\text{sen}^3 x + 2e^{2\cos x}\text{sen}\,x + 12e^{2\cos x}\text{sen}\,x\cos x$

12. 4

13. $$f'(x) = \begin{cases} 2(x+3) & \text{se } x < -2, \\ 2x & \text{se } -2 < x < -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x < 1, \\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)(x-1)^{-2} & \text{se } 1 < x < 2, \\ 2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

14. $$f'(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x+2, & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

15. Não.

16. $a = \dfrac{1}{2e}, b = 0, c = e^{1/2}$

17. $a = \dfrac{1}{\pi^2},\ b = \dfrac{2}{\pi},\ c = \dfrac{1}{\pi^2}$ e $d = \dfrac{-2}{\pi}$

18. b)	21. d)	24. a)	27. a)	30. a)	33. d)	36. a)
19. e)	22. e)	25. e)	28. b)	31. a)	34. d)	37. b)
20. c)	23. c)	26. e)	29. a)	32. c)	35. e)	38. e)