

Capítulo 2

Limite de uma função

Podemos afirmar que o conceito de limite é uma das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial. Seu processo de construção surge historicamente a partir de problemas geométricos como, por exemplo, no cálculo da área de regiões planas e na determinação retas tangentes à uma curva. Apresentaremos rapidamente esses dois problemas que motivaram a definição de limite, como no livro *Cálculo com Geometria Analítica - Vol.1* de George Simmons (Editora Makron Brooks).

2.1 O problema das áreas - método de exaustão

A área de um retângulo é o produto das medidas de sua base e sua altura. Já a área de um triângulo é a metade do produto das medidas de sua base e altura. Como um polígono pode ser sempre decomposto em triângulos, sua área é a soma das áreas desses triângulos.

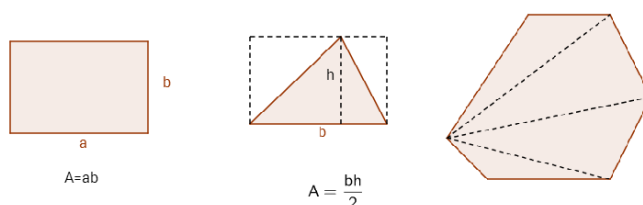


Figura 2.1: Áreas.

O círculo é uma figura mais complicada. Os gregos resolveram o problema de achar a sua área de uma maneira natural.

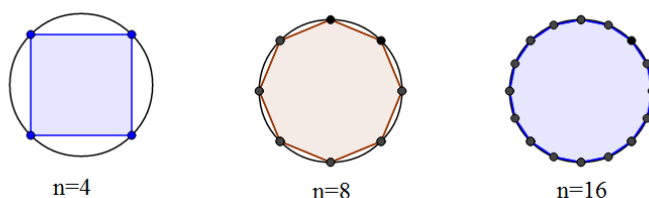


Figura 2.2: Método para aproximar a área do círculo.

Primeiro eles aproximaram essa área, inscrevendo um quadrado. Depois eles melhoram a aproximação, passo a passo, dobrando o número de lados, isto é, inscrevendo um octógono regular, depois um polígono regular de 16 lados e assim por diante. As áreas desses polígonos inscritos

aproximam a área exata do círculo com uma precisão cada vez melhor. Vamos ver que esse processo chega à fórmula $A = \pi r^2$ para a área do círculo de raio r .

Suponha que o círculo tenha inscrito nele um polígono com um número grande n de lados, como na Figura 2.3.

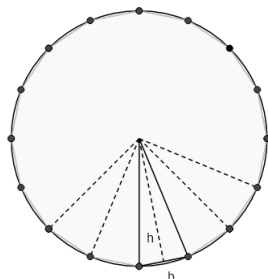


Figura 2.3: Círculo com polígono de n lados.

Cada um dos triângulos isósceles mostrados na figura anterior tem área igual a $\frac{bh}{2}$ e a soma dessas áreas é igual a área do polígono, que é uma aproximação da área do círculo. Se p denota o perímetro do polígono, então temos que

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh + \dots + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h(b + b + \dots + b) = \frac{1}{2}hp.$$

Como o número de lados cresce, h “tende” a r (em símbolos $h \rightarrow r$) e p “tende” ao comprimento do círculo $c = 2\pi r$ (em símbolos $p \rightarrow c$). Portanto,

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2}hp \longrightarrow \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(2\pi r) = \pi r^2.$$

Esse processo é conhecido por *método de exaustão* porque a área do círculo foi *exaurida* pelas áreas dos polígonos inscritos.

2.2 Reta tangente a uma curva

Um problema básico do Cálculo Diferencial é o problema das tangentes: determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto P dado.

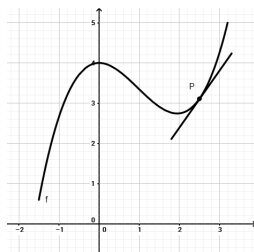


Figura 2.4: Reta tangente à uma curva.

Antes de tentar calcular o coeficiente angular da reta tangente, devemos decidir primeiro o que é uma reta tangente. No caso de uma circunferência não há dificuldade. Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto, chamado ponto de tangência. As retas não tangentes ou não interceptam a circunferência ou interceptam em dois pontos.

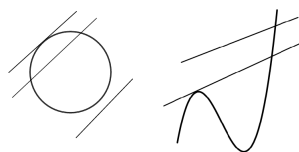


Figura 2.5: Relações entre círculo e retas e entre curvas e retas.

Essa situação reflete a ideia intuitiva que a maioria das pessoas tem de tangente a uma curva num dado ponto como sendo a reta que “toca” a curva naquele ponto. Ela sugere também a possibilidade de definir uma tangente a uma curva como uma reta que intercepta a curva em apenas um ponto, mas em geral essa ideia é insatisfatória, como vemos na Figura 2.5.

O conceito moderno de reta tangente originou-se com Fermat, em torno de 1630. Considere uma curva, gráfico da função $y = f(x)$, e P um ponto nessa curva. Considere Q um segundo ponto próximo de P sobre essa curva e desenhe a reta secante PQ . A reta tangente em P pode ser definida como a posição limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva na direção de P .

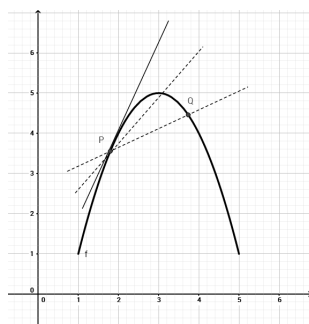


Figura 2.6: Posição limite da secante.

Mas como calcular o coeficiente angular da reta tangente? Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto na curva $y = f(x)$. Para começar o processo escolha um segundo ponto $Q = (x_1, y_1)$ sobre a curva. O coeficiente angular da secante PQ é

$$m_{sec} = \text{coeficiente angular da reta } PQ = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

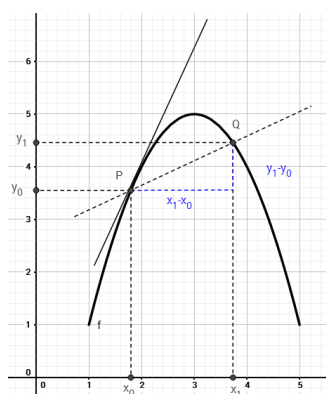


Figura 2.7: Cálculo do coeficiente angular.

Em seguida, façamos x_1 se aproximar de x_0 , de modo que o ponto variável Q se aproxime do ponto P , ao longo da curva. Quando acontece isso, a secante muda de posição e se aproxima da tangente em P como sua posição limite. É também intuitivo que o coeficiente angular m

da tangente é o valor limite aproximado pelo coeficiente angular m_{sec} da secante. Se usarmos o símbolo $\rightarrow$ para indicar “se aproxima” (ou “tende”), então dizemos que quando x_1 tende a x_0 , m_{sec} tende a m e escrevemos:

$$m = \lim_{P \rightarrow Q} m_{sec} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

A formalização do conceito de limite de uma função visto através do método da exaustão e do cálculo do coeficiente angular de uma reta tangente será nosso objeto de estudo ao longo do capítulo.

2.3 Definição de limite

Intuitivamente dizemos que uma função f tem limite L quando x tende para a , se é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L , desde que tomemos valores de x , $x \neq a$, suficientemente próximos de a .

Inicialmente, vamos desenvolver essa ideia intuitiva, estudando o comportamento de uma função $y = f(x)$ próximo a um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio.

Consideramos, por exemplo, a função a seguir, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Vamos construir uma tabela de valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1, pela esquerda (isto é, quando $x < 1$) e pela direita (isto é, quando $x > 1$):

$x < 1$	$x - 1$	$f(x)$	$x > 1$	$x - 1$	$f(x)$
0	-1	2	2	1	4
0,5	-0,5	2,5	1,5	0,5	3,5
0,7	-0,3	2,7	1,3	0,3	3,3
0,9	-0,1	2,9	1,1	0,1	3,1
0,99	-0,01	2,99	1,09	0,01	3,09
0,999	-0,001	2,999	1,009	0,001	3,009
0,9999	-0,0001	2,9999	1,0009	0,0001	3,0009
0,99999	-0,00001	2,99999	1,00009	0,00001	3,00009
0,999999	-0,000001	2,999999	1,000009	0,000001	3,000009
0,9999999	-0,0000001	2,9999999	1,0000009	0,0000001	3,0000009
0,99999999	-0,00000001	2,99999999	1,00000009	0,00000001	3,00000009

Observando as tabelas, concluímos que: quando x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 3. A noção de proximidade fica mais precisa se utilizarmos o valor absoluto: no caso, o que observamos é que quando $|x - 1|$ fica pequeno $|f(x) - 3|$ fica pequeno também. Veja que essa relação de implicação vem da própria função, pois quando $x \neq 1$, isto é, $x \in \text{Dom } f$, então:

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} - 3 \right| = |x + 2 - 3| = |x - 1|$$

Assim, a distância entre $f(x)$ e 3 depende da distância entre x e 1.

Para outro exemplo, vamos considerar $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Aqui, o domínio de f é todo o conjunto dos reais. Vamos analisar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 1. Para isso, vamos assumir que $|x - 1|$ está ficando pequeno, como no exemplo anterior.

$x < 1$	$x - 1$	$f(x)$
0	-1	1
0,5	-0,5	1,25
0,7	-0,3	1,35
0,9	-0,1	1,45
0,99	-0,01	1,495
0,999	-0,001	1,4995
0,9999	-0,0001	1,49995
0,99999	-0,00001	1,499995
0,999999	-0,000001	1,4999995
0,9999999	-0,0000001	1,49999995
0,99999999	-0,00000001	1,499999995

$x > 1$	$x - 1$	$f(x)$
2	1	2
1,5	0,5	1,75
1,3	0,3	1,65
1,1	0,1	1,55
1,09	0,01	1,545
1,009	0,001	1,5045
1,0009	0,0001	1,50045
1,00009	0,00001	1,500045
1,000009	0,000001	1,5000045
1,0000009	0,0000001	1,50000045
1,00000009	0,00000001	1,500000045

Pelas tabelas, vemos que quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de $\frac{3}{2}$. Na verdade, como fizemos no exemplo anterior, podemos notar que

$$\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} |x - 1|$$

Isto é, a distância entre $f(x)$ e $\frac{3}{2}$ depende da distância entre x e 1. Por exemplo, se a distância entre x e 1 for menor do que 0,0001, isto é, $|x - 1| < 0,0001$, então a distância entre $f(x)$ e $\frac{3}{2}$ será

$$\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2} |x - 1| < 0,00005$$

Vemos que o tamanho 0,0001 foi apenas um exemplo, pois podemos escolher qualquer número positivo, o menor que seja, e fazer o mesmo raciocínio.

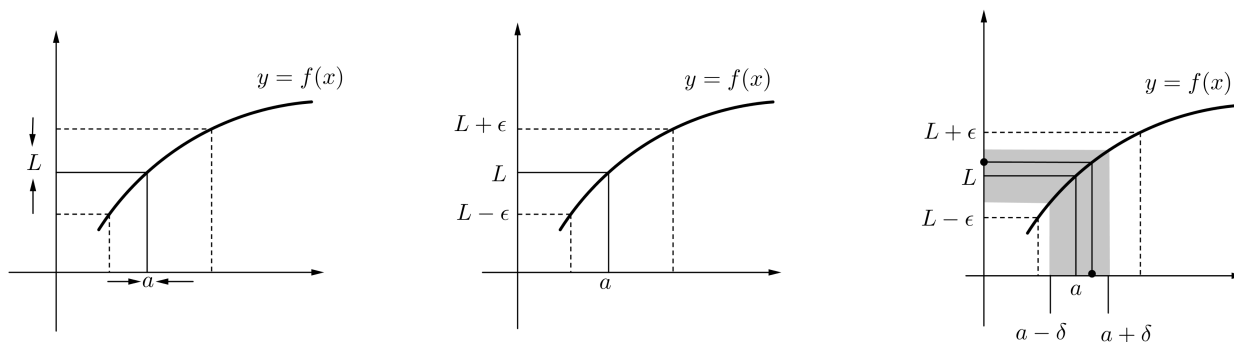
Estamos prontos para a definição formal de limite. Compare-a com os exemplos anteriores.

Definição 17. Sejam a um número real e I um intervalo aberto contendo a . Seja f uma função definida em I , exceto, talvez, no próprio a . Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é L e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Observação 27. Como vimos no primeiro exemplo dessa seção, para a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não é necessário que a função f esteja definida em a . Nos interessa o comportamento de $f(x)$ quando x está próximo de a .

Teorema 2. Se existe limite de uma função $f(x)$, quando x tende a a , então ele é único.

Exemplo 13. Sejam k um número real e $f(x) = k$ a função constante. Então para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$. Primeiro, notamos que $|f(x) - k| = |k - k| = 0$, que é menor do que qualquer número positivo. Então, fixando qualquer $\varepsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos que independentemente de $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$ sempre teremos $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Exemplo 14. Sejam a um número real e $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. De fato, fixando qualquer $\varepsilon > 0$, então escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos:

$$0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Exemplo 15. Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3) = 1$. Para isso, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(2x - 3) - 1| < \varepsilon.$$

Observe que $|(2x - 3) - 1| = |2x - 4| = |2(x - 2)| = 2|x - 2|$. Logo: se $0 < |x - 2| < \delta$, então $|(2x - 3) - 1| = 2|x - 2| < 2\delta$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado, escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ teremos que

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(2x - 3) - 1| = |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exemplo 16. O exemplo anterior pode ser generalizado para qualquer função afim $f(x) = ax + b$ quando x tende a c , onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. De fato, para mostrar que $\lim_{x \rightarrow c} (ax + b) = ac + b$, vemos primeiro que $|ax + b - (ac + b)| = |ax - ac| = a|x - c|$. Assim, fixando $\varepsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$ temos que

$$0 < |x - c| < \frac{\varepsilon}{a} \Rightarrow |ax + b - (ac + b)| = |ax - ac| = a|x - c| < a\delta = \frac{a\varepsilon}{a} = \varepsilon.$$

2.4 Propriedades do limite de uma função

Teorema 3. Sejam f e g funções definidas em um intervalo I contendo a , exceto, possivelmente, em a . Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:

$$L1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M;$$

$$L2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM;$$

$$L3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ se } M \neq 0;$$

$$L4) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ se } L > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ ou } L < 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ ímpar.}$$

Uma consequência imediata das propriedades L1 e L2 é o exemplo dado a seguir.

Exemplo 17. Se $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 := \sum_{i=0}^n b_i x^i$ é uma função polinomial, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right) \underset{\text{L1}}{=} \sum_{i=0}^n \left(\lim_{x \rightarrow a} b_i x^i \right) \underset{\text{L2}}{=} \sum_{i=0}^n b_i a^i = p(a).$$

Pelo exemplo anterior, uma função polinomial é nosso primeiro exemplo de *função contínua*, isto é, uma função tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in D(f)$. Voltaremos a isso mais a frente.

Exemplo 18. Pelo exemplo 17, temos: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5) = 2^2 + 6 + 5 = 15$.

Exemplo 19. Pela propriedade L3 e o exemplo 17, como 3 não é raiz de $x^3 - 7$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-5}{x^3-7} \right) = \frac{3-5}{3^3-7} = -\frac{1}{10}.$$

Exemplo 20. Pela propriedade L4 e o Exemplo 17,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^3 - 4x + 1} = \sqrt{(-2)^3 + 8 + 1} = \sqrt{1} = 1.$$

Exemplo 21. Como, pelo exemplo 17 e a propriedade L3, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2} = 2$, segue da propriedade L2 que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2} \right)^2 = 4$.

Observação 28. Os seguintes limites que envolvem as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas não serão demonstrados aqui.

1. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$,

3. $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b$.
6. $\lim_{x \rightarrow b} \log_a x = \log_a b$ (para $b > 0$).

Além disso, temos que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então:

7. $\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \sin L$
9. $\lim_{x \rightarrow b} a^{f(x)} = a^L$.
8. $\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \cos L$
10. $\lim_{x \rightarrow b} \log_a f(x) = \log_a L$, se $L > 0$.

2.5 Forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$

Se f e g são funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende a a , pode ou não existir e, portanto, é denominado forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, já que o limite pode ou não existir, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 22. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{3}{2}$.

Exemplo 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}}{x-1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Exemplo 24. Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1} \right)$. Esse tipo de problema será tratado mais a frente.

Nesse momento, para resolvermos limites com a forma indeterminada $0/0$, devemos trabalhar a expressão do quociente $f(x)/g(x)$ a fim de não mais ter uma indeterminação. Vamos começar calculando os limites dos exemplos 22 e 23.

No primeiro, temos que 1 é raiz do numerador e do denominador, então vamos fatorá-los, o que é feito através de divisão de polinômios.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } x^3 - 1 \text{ e } x^2 - 1}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x-1)} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x-1 \neq 0}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x+1} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L3}}}{=} \frac{3}{2}$$

No segundo, novamente 1 é raiz do numerador e do denominador, mas a função não é racional. Nesse caso, vamos racionalizar o quociente, isto é, multiplicar por 1 como uma fração de numerador e denominador iguais a $\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}$. Usaremos ainda o fato de que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}}{x-1} \right) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{racionalizando}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+1})} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x-1 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Vamos fazer mais exemplos:

Exemplo 25. Mais um exemplo com fatoração.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} \right) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{colocando } x-1 \text{ em evidência}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{(x-1)(2x^2 - x - 1)} \right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x-1 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuamos com } 0/0, \text{ dividimos por } x-1 \text{ de novo}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(2x+1)} \right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x-1 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+2}{2x+1} \right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Note que se tivéssemos fatorado o numerador e o denominador, teríamos poupado trabalho:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)^2(3x+2)}{(x-1)^2(2x+1)} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x-1 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+2}{2x+1} \right) = \frac{5}{3}$$

Exemplo 26. Mais uma exemplo com racionalização.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3} \right) & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{racionalizando}}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 2}{\sqrt{1+x} + 2} \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x-3 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para alguns limites do tipo 0/0, pode ser útil fazer uma mudança de variáveis, como veremos a seguir.

Exemplo 27. Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x-2} \right)$ fazendo uma troca de variáveis do tipo $y = \sqrt[3]{4x}$.

Como $x \rightarrow 2$, temos que $y \rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. Ainda, como $y = \sqrt[3]{4x}$, temos que $4x = y^3$, donde $x = \frac{y^3}{4}$. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x-2} \right) & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fazendo } y = \sqrt[3]{4x}}}{=} \lim_{y \rightarrow 2} \left(\frac{y-2}{\frac{y^3}{4} - 2} \right) = \lim_{y \rightarrow 2} \left(4 \cdot \frac{y-2}{y^3 - 8} \right) \\ & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } y^3 - 8}}{=} \lim_{y \rightarrow 2} \left(4 \cdot \frac{y-2}{(y-2)(y^2 + 2y + 4)} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } y \neq 2}}{=} \lim_{y \rightarrow 2} \left(\frac{4}{y^2 + 2y + 4} \right) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 28. Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$ fazendo a seguinte troca de variáveis $y = \sqrt[6]{x}$.

Temos que

$$y = \sqrt[6]{x} \Rightarrow y^2 = \sqrt[3]{x} \text{ e } y^3 = \sqrt{x}$$

Além disso, como $x \rightarrow 1$, temos que $y \rightarrow \sqrt[6]{1} = 1$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fazendo } y = \sqrt[6]{x}}}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{y^2 - 1}{y^3 - 1} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando}}}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y^2 + y + 1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } y-1 \neq 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{y+1}{y^2 + y + 1} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2.5.1 Limites Fundamentais

O limite da função $\sin x/x$ quando $x \rightarrow 0$ é um exemplo de indeterminação do tipo 0/0, porém vamos provar o seguinte:

Limite Trigonométrico Fundamental. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Para isso, vamos precisar do seguinte resultado:

Teorema do Confronto. *Sejam f , g e h funções que satisfazem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x numa vizinhança de a . Suponha ainda que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.*

Antes de provar o limite trigonométrico fundamental, vamos ver um exemplo de uso do Teorema do Confronto.

Exemplo 29. Supondo que para todo $x \neq 1$ temos

$$-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

podemos inferir que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 3x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

Então, pelo Teorema do Confronto $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Sobre o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, vamos começar com uma ideia que depende do fato de que quando o raio do círculo é 1, então a medida do arco $O'P$ (denotada por $\text{arc}O'P$) é exatamente x , a medida do ângulo $\widehat{POD}$ (veja figura 2.8). Isso só é verdade para ângulos medidos em radianos, não em graus.

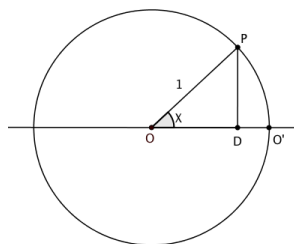


Figura 2.8: Ideia da prova de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

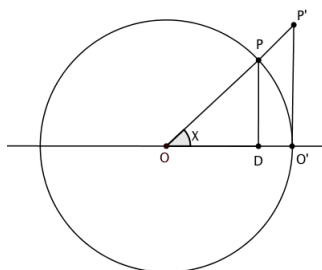
Além disso, notamos que $\overline{OP} = 1$ (o raio do círculo), o que implica em $\sin x = \frac{\overline{DP}}{\overline{OP}} = \overline{DP}$. Dessa forma

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{DP}}{\text{arc}O'P}$$

Dessa forma, quando x tende a 0, D se aproxima de O' e $\overline{DP}$ se aproxima de $\text{arc}O'P$.

Um argumento mais formal será visto a seguir.

Se $x \in (0, \pi/2)$, consideremos a figura:



Temos que

$$\underbrace{\text{Área do } \triangle POO'}_{=\frac{\overline{PD}}{2}} < \underbrace{\text{Área do setor } POO'}_{=\frac{\text{arc} PO'}{2}} < \underbrace{\text{Área do } \triangle P'OO'}_{=\frac{\overline{P'O'}}{2}}$$

onde usamos o fato de que $\overline{OO'}$ é o raio do círculo e, portanto, 1. Segue então que

$$\underbrace{\overline{PD}}_{=\text{sen } x} < \underbrace{\text{arc} PO'}_{=x} < \underbrace{\overline{P'O'}}_{=\text{tg } x}$$

Dividindo por $\text{sen } x$, temos:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ou seja} \quad 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Como seno e a identidade são funções ímpares e cosseno é uma função par, vale também

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\text{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\text{sen } x}{x} < 1,$$

para $x \in (-\pi/2, 0)$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Os exemplos a seguir mostram como usar o limite fundamental trigonométrico para calcular outros limites envolvendo funções trigonométricas.

Exemplo 30.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

↑
limite fundamental e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

Exemplo 31.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(4x)}{4x}}{\frac{x}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(4x)}{4x}}{1/4} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} = 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y}{y} = 4$$

↑
usando $y=4x$ ↑
limite fundamental

Exemplo 32. Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{sen}(5x)}$, notamos que

$$\frac{\text{sen}(4x)}{\text{sen}(5x)} = \frac{4x \frac{\text{sen}(4x)}{4x}}{5x \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} = \frac{4}{5} \frac{\frac{\text{sen}(4x)}{4x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{5x}}$$

Argumentando como no exemplo anterior, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{5x}$$

Portanto concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{sen}(5x)} = \frac{4}{5}$$

Exemplo 33. Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$, que é uma indeterminação do tipo $0/0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando que } \sin^2 x + \cos^2 x = 1}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Outro resultado interessante sobre limites que pode ser aplicado para alguns limites envolvendo funções trigonométricas é o seguinte:

Teorema 4. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada $I - \{a\}$ (onde I é um intervalo contendo a), então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

A ideia de prova desse teorema vem também do Teorema do Confronto: se $g(x)$ é limitada, então existe $n > 0$ tal que $-n \leq g(x) \leq n$. Se $f(x) > 0$ próximo a a , então

$$-n f(x) < f(x)g(x) < f(x)n.$$

Então, pelo Teorema do Confronto, segue o resultado. Poderíamos fazer parecido para o caso em que $f(x) < 0$.

Exemplo 34. No gráfico à esquerda na figura 2.9, vemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ não existe.

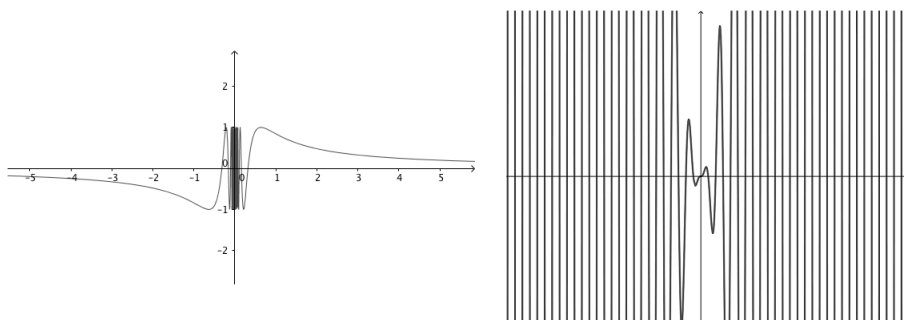


Figura 2.9: Gráficos de $f(x) = \sin(1/x)$ e $g(x) = x^2 \sin(1/x)$

Porém, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0$ já que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ e $|\sin(1/x)| \leq 1$.

O próximo limite também tem inicialmente a forma indeterminada $0/0$. Ele será enunciado sem demonstração, mas no fim deste capítulo daremos uma demonstração usando o limite que define a constante de Euler.

Limite Exponencial Fundamental. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Observação 29. Quando a base da função exponencial for a constante de Euler teremos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2.6 Limites Laterais

Ao considerarmos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, estamos interessados no comportamento da função $y = f(x)$ para valores de x próximos de a , podendo ser x maior ou menor que a . Entretanto, algumas funções tem um comportamento diferente à direita e à esquerda de a .

Exemplo 35. Considere a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$, então

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, se x está próximo de 0 e à direita de 0, então os valores de $f(x)$ são sempre iguais a 1. Por outro lado, se x está próximo de 0 e à esquerda de 0, então os valores de $f(x)$ são sempre iguais a -1 .

Representamos essa situação da seguinte maneira:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

O símbolo $x \rightarrow 0^+$ indica que estamos considerando somente valores de x maiores que 0 e o símbolo $x \rightarrow 0^-$ indica que estamos considerando somente valores de x menores que 0.

Definição 18. (Limite lateral à direita) Seja f uma função definida no intervalo aberto (a, b) . Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L , se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L bastando para isso tomarmos valores de x suficientemente próximos de a e à direita de a . Isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente definimos limite lateral à esquerda.

Definição 19. (Limite lateral à esquerda) Seja f uma função definida no intervalo aberto (c, a) . Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L , se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L bastando para isso tomarmos valores de x suficientemente próximos de a e à esquerda de a . Isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 30. As propriedades L1, L2, L3 e L4 do Teorema 3 continuam válidas para limites laterais, ou seja, se trocarmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow a^+$.

Exemplo 36. Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$. Como $x \rightarrow 2^+$ quer dizer que $x > 2$, temos que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \sqrt{2-2} = 0$. Por outro lado, se $x \rightarrow 2^-$, temos que $x < 2$, donde $x-2 < 0$ e a função não está definida para valores negativos. Assim, não podemos calcular o limite à esquerda $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Exemplo 37. Considere a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Temos que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$. Assim, nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, não estão definidos os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente. No entanto

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

Limites laterais são especialmente importantes no cálculo de limites de funções definidas por partes, já que a existência do limite de $f(x)$ quando x tende a a está condicionada à existência dos limites laterais da seguinte forma:

Teorema 5. Se f está definida em um intervalo aberto I contendo a , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

Exemplo 38. Vamos calcular, se possível, o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1, \\ -1, & \text{se } x = 1 \\ -2 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quando $x < 1$, a função é $x^2 - 4$, donde

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 4) = -3.$$

Já quando $x > 1$, temos $f(x) = -2 - x$, donde

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2 - x) = -3.$$

Então, pelo teorema 5, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$.

Note que não usamos o fato de $f(1) = -1$, já que no cálculo do limite estamos interessados no comportamento da função quando x se aproxima de 1, mas é diferente de 1. Ainda, note que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3 \neq -1 = f(1)$$

isso quer dizer que a função $f(x)$ não é contínua em $x = 1$. Esse será o assunto da próxima seção.

Note ainda que poderíamos calcular facilmente outros limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 4 = -4 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} -2 - x = -5$$

pois a lei da função na proximidade de 0 ou de 3 não muda.

Exemplo 39. Vamos calcular, se possível, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ onde $f(x) = \frac{|3x^2 - 5x - 2|}{x - 2}$, $x \neq 2$. Primeiro, notamos que essa é uma função por partes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}, & \text{se } x \leq -1/3 \\ \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x - 2}, & \text{se } -1/3 < x < 2 \\ \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } -1/3 < x < 2}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x - 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } -3x^2 + 5x + 2}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(3x + 1)(x - 2)}{x - 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x - 2 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} -(3x + 1) = -7$$

Por outro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x > 2}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } 3x^2 - 5x - 2}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x + 1)(x - 2)}{x - 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x - 2 \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x + 1 = 7$$

Portanto, pelo Teorema 5, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Exemplo 40. (Questão da 1ª prova de 2017-1) Vamos calcular, se existir, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3|x|}{2x}$. Temos que $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, assim, é necessário analisar os limites laterais. Temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-3)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$\uparrow$ $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0$ $\uparrow$ fatorando $x^2 - 3x$ $\uparrow$ como $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+3)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3}{2} = \frac{3}{2}$$

$\uparrow$ $x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0$ $\uparrow$ fatorando $x^2 - 3x$ $\uparrow$ como $x \neq 0$

Como os limites laterais são distintos, segue que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3|x|}{2x}$.

2.7 Função contínua

Definição 20. Seja f uma função definida no intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é contínua em a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Observação 31. Note que estamos exigindo, na verdade, 3 condições para que f seja contínua em a :

1. existe $f(a)$,
2. existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemplo 41. Para todo $a \in (0, +\infty)$, a função $y = \sqrt{x}$ é contínua em a .

Exemplo 42. (veja o exemplo 17) A função polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é contínua em a , para todo $a \in \mathbb{R}$, já que

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 = p(a).$$

Nesse caso, como é contínua em todo $a \in D(p)$, dizemos apenas que $p(x)$ é contínua.

Definição 21. Dizemos que uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Definição 22. Seja f uma função definida no intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é descontínua em a se f não for contínua em a , isto é, se:

$$\text{não existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a).$$

Exemplo 43. A função do exemplo 38 é descontínua em 1 pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3 \neq -1 = f(1)$. Porém, nos demais $a \in \mathbb{R}$, a função é contínua (pois é polinomial). De fato, $D(f) = \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} -2 - x = -2 - a = f(a), & \text{se } a > 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} x^2 - 4 = a^2 - 4 = f(a), & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 44. A função $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \neq 1, \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é descontínua em 1. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3 \neq 4 = f(1)$$

Porém, para os demais $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f é contínua (pois é polinomial).

Exemplo 45. Vamos determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & \text{se } x < -1 \\ b, & \text{se } x = -1 \\ -x + 1, & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$. Para $x < -1$ e $x > -1$, a função é polinomial e, portanto, contínua. Para $x = -1$, devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = b$$

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - a = -a + 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -x + 1 = 2$$

Assim, para que exista $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, devemos ter $a = -1$. Por fim,

$$b = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

Exemplo 46. (Questão da 1ª prova de 2017-1) Consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 - 3 & \text{se } x < a \\ x^2 - 7 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Vamos determinar os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$. Primeiro, para $x \neq a$ a função f é polinomial e portanto contínua. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} x^4 - 4x^2 - 3 = a^4 - 4a^2 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} x^2 - 7 = a^2 - 7.$$

Logo, para que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é necessário que

$$a^4 - 4a^2 - 3 = a^2 - 7 \Leftrightarrow a = \pm 1 \text{ ou } a = \pm 2.$$

Além disso, como

$$f(a) = a^2 - 7 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

o que fizemos anteriormente já basta. Portanto, temos que f é contínua se e somente se $a = \pm 1$ ou $a = \pm 2$.

Teorema 6. *Sejam f e g funções contínuas em a , então são contínuas em a as funções $f + g$, fg e f/g , se, neste último caso, $g(a) \neq 0$.*

Exemplo 47. Toda função racional é contínua em seu domínio, o que já sabíamos pela propriedade L3 de limites (ver Teorema 3).

Exemplo 48. (Questão da 1ª prova de 2016-2) Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax + 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

Vamos determinar a e b de forma que f seja contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 1$, a função é racional, donde é contínua. Para $x = 1$, temos que $f(1) = b$, donde devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + 2}{x - 1} = b$$

Para o limite existir, devemos ter 1 como raiz de $x^2 - ax + 2$, isto é,

$$1 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Portanto, $b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 2 = -1$.

Teorema 7. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e g contínua em b ,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(b), \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Em particular, a composição de funções contínuas é contínua.

Exemplo 49. Se $f(x)$ é uma função polinomial e $g(x) = \sqrt{x}$, então $g \circ f(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em a se $f(a) > 0$ (veja propriedade L4 no Teorema 3).

Como a continuidade depende da existência do limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, faz sentido estudar também continuidade lateral, analogamente ao que fizemos com limites laterais:

Definição 23. Seja f uma função definida no intervalo $[a, b)$ com $a < b$. Dizemos que f é contínua à direita de a se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Seja f uma função definida no intervalo $(c, a]$ com $c < a$. Dizemos que f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Em particular, se f for uma função definida no intervalo aberto I com $a \in I$, f é contínua em a se e somente se for contínua à esquerda e à direita de a .

Definição 24. Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se f for contínua em (a, b) , contínua à direita de a e contínua à esquerda de b .

Exemplo 50. Voltando à função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ do exemplo 37. Sabemos que $D(f) = [-1, 1]$ e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ se } a \in (-1, 1)$$

Portanto, f é contínua em seu domínio $[-1, 1]$.

Teorema 8. (Teorema do Valor Intermediário) Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L for um número real tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = L$.

Observação 32. Como consequência desse teorema temos que:

1. o gráfico de uma função contínua num intervalo pode ser traçado sem tirar o lápis do papel.
2. se f for contínua em $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo 51. Seja $f(x) = x^4 - 5x + 3$. Temos que $f(0) = 3$ e $f(1) = 1 - 5 + 3 = -1$, assim, pelo Teorema 8, existe pelo menos um $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = 0$. Ainda, $f(2) = 2^4 - 10 + 3 = 9$, então existe pelo menos mais uma raiz de $f(x)$ em $[1, 2]$.

2.8 Limites infinitos

Vamos começar analisando o comportamento de algumas funções ilimitadas.

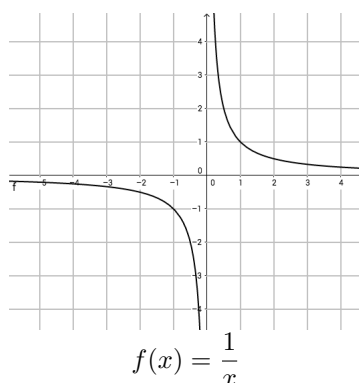
Exemplo 52. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é limitada: quando x se aproxima de 0 pela direita ou esquerda, temos:

$x < 0$	$\frac{1}{x}$
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,0001	-10000
-0,00001	-100000
-0,000001	-1000000
$\vdots$	$\vdots$

$x > 0$	$\frac{1}{x}$
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
0,000001	1000000
$\vdots$	$\vdots$

Isto é, a medida que $x > 0$ se aproxima de zero, $f(x)$ atinge valores positivos arbitrariamente grandes. Por outro lado, quando $x < 0$ se aproxima de zero, $f(x)$ atinge valores negativos com módulos arbitrariamente grandes. Por isso, temos que os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ não existem. O comportamento observado, na verdade, é que o módulo de $\frac{1}{x}$ cresce indefinidamente quando x se aproxima de 0.

Mais formalmente, temos que dados $M > 0$ e $N < 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre $x \in (0, \delta)$, tem-se que $f(x) = \frac{1}{x} > M$ e se $x \in (-\delta, 0)$, então $f(x) = \frac{1}{x} < N$.



Na notação de limite, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Em geral, fazendo uma análise como a do exemplo 52, temos que para $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Em qualquer um desses casos, dizemos que a reta $x = 0$ (ou seja, o eixo y) é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

A definição formal de um limite infinito é dada a seguir:

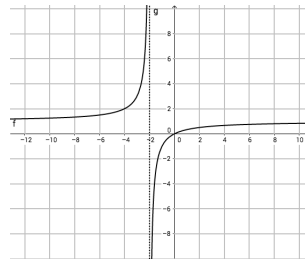
Definição 25. Dizemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ se dado $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > M$.

Dizemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ se dado $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < N$.

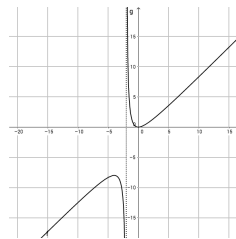
Observação 33. Os limites infinitos com $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$ são análogos, trocando $0 < |x - a| < \delta$ por $x \in (0, \delta)$ ou $x \in (-\delta, 0)$, respectivamente.

Definição 26. Em qualquer um dos casos da definição 25 ou da observação 33, dizemos que a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $f(x)$.

Vamos modificar um pouco os exemplos vistos, considerando o comportamento das funções $f(x) = \frac{x}{x+2}$ e $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$ definidas em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ nas proximidades de $x = -2$.



$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$



$$g(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

Vemos que ambas funções são ilimitadas, pois quando x se aproxima de -2 , tanto $|f(x)|$ quanto $|g(x)|$ crescem arbitrariamente. Vemos ainda que o denominador é o mesmo e se aproxima de 0 quando x se aproxima de -2 , sendo negativo quando $x \rightarrow -2^-$ e positivo quando $x \rightarrow -2^+$. Além disso, ambos os numeradores são diferentes e não se aproximam de 0 quando x se aproxima de -2 , porém, nessa vizinhança, têm sinais opostos. A questão do sinal do numerador e do denominador é, então, determinante para dizermos que a função tende a $-\infty$ ou $+\infty$.

Teorema 9. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Então:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ próximo de a .
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ próximo de a .

Observação 34. O teorema 9 continua válido para $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$ no lugar de $x \rightarrow a$.

Observação 35. Em qualquer um dos casos do Teorema 9 ou da observação 34, temos que $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemplo 53. Seja $f(x) = \frac{x}{x+2}$. Temos que $\lim_{x \rightarrow -2} x = -2 \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 0$. Fazendo o estudo de sinal de $f(x)$, temos:

	-2	0
x	---	+++
$x + 2$	---	+++
$f(x) = \frac{x}{x+2}$	+++	---

Dessa forma, $f(x) = \frac{x}{x+2} > 0$ se $x \rightarrow -2^-$ e $f(x) = \frac{x}{x+2} < 0$ se $x \rightarrow -2^+$. Portanto, segue do Teorema 9 que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} = -\infty$$

Exemplo 54. Seja $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$. Temos que $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4 \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 0$. Como $x^2 > 0$ quando $x \rightarrow -2$, temos que o sinal de $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$ depende apenas do sinal de $x + 2$, que é negativo se $x \rightarrow -2^-$ e positivo se $x \rightarrow -2^+$. Tudo isso pode ser visto no seguinte estudo de sinal:

	-2	0
x^2	+++	+++
$x + 2$	---	+++
$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$	---	+++

Dessa forma, $g(x) = \frac{x^2}{x+2} < 0$ se $x \rightarrow -2^-$ e $g(x) = \frac{x^2}{x+2} > 0$ se $x \rightarrow -2^+$. Segue do Teorema 9 que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$$

Exemplo 55. (Questão da 1ª prova de 2016-2) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)} = -\infty$.

Primeiro, temos que $\lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 < 0$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2(x+2) = 0$. Assim, o numerador é negativo em uma vizinhança de -2 e o sinal do quociente depende do sinal do denominador $x^2(x+2)$. Como $x^2 > 0$ quando $x \neq 0$, segue que o sinal do denominador $x^2(x+2)$ depende apenas do sinal de $x+2$. Agora, como $x \rightarrow -2^+$, temos que $x > -2$, donde $x+2 > 0$. Logo, $x^2(x+2) > 0$ quando $x \rightarrow -2^+$. Essa discussão pode ser resumida na seguinte tabela:

	-2	0	1	
$x - 1$	---	---	---	1 + + +
x^2	+++	+++	0	+++
$x + 2$	---	+++	+++	+++
$\frac{x - 1}{x^2(x + 2)}$	+++	---	---	1 + + +

Portanto, segue do Teorema 9 que $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x - 1}{x^2(x + 2)} = -\infty$

Exemplo 56. (Questão da 1ª prova de 2017-1) Vamos estudar o $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 1}{4 - x^2}$. Temos que $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 - 1 = 7 > 0$ e ainda que $\lim_{x \rightarrow 2^+} 4 - x^2 = 0$. Como o numerador é positivo na vizinhança de 2, o sinal do quociente depende apenas do sinal do denominador. Temos

$$x \rightarrow 2^+ \implies x > 2 \implies x^2 > 4 \implies -x^2 < -4 \implies 4 - x^2 < 0$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 1}{4 - x^2} = -\infty$

Exemplo 57.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty,$$

pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$ e, para $x \in (-\pi/2, 0)$, $\cos x > 0$ donde concluímos que $\frac{\cos x}{x} < 0$ nesse intervalo. Portanto, do Teorema 9 o resultado segue.

Exemplo 58. Seja $a = \pi/2 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Para ver isso, observe que $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ e que $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a = 0$. Além disso, se $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, então $\operatorname{tg} x < 0$ e se $x \in (k\pi, \pi/2 + k\pi)$ então $\operatorname{tg} x > 0$. Portanto, segue do Teorema 9 o resultado.

Exemplo 59. Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ e se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.

2.9 Limites no infinito

Já investigamos comportamentos de funções quando x se aproxima de um valor fixado. Agora, gostaríamos de estudar os casos em que x cresce ou decresce ilimitadamente. Isto é, os casos em que $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Como um primeiro exemplo, consideremos a função $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Nas tabelas abaixo, temos os valores de $f(x)$ para alguns valores de módulo grande de x . Em ambos os casos, vemos que $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ se aproxima de 1, o que é fácil de entender, pois em $\frac{1}{x}$ estamos dividindo 1 por um número de módulo muito grande, obtendo um número de módulo muito pequeno.

$x \rightarrow -\infty$	$1 - \frac{1}{x}$
-10	1,1
-100	1,01
-1000	1,001
-10000	1,0001
-100000	1,00001
-1000000	1,000001
-10000000	1,0000001
-100000000	1,00000001
$\vdots$	$\vdots$

$x \rightarrow +\infty$	$1 - \frac{1}{x}$
10	0,9
100	0,99
1000	0,999
10000	0,9999
100000	0,99999
1000000	0,999999
10000000	0,9999999
100000000	0,99999999
$\vdots$	$\vdots$

Tentando ser um pouco mais precisos no caso em que x cresce indefinidamente, vamos considerar o seguinte: podemos tornar x grande o suficiente de forma a tornar $1 - \frac{1}{x}$ arbitrariamente perto de 1. Vamos começar escolhendo uma “tolerância” para essa distância, isto é, um número positivo arbitrário pequeno. Consideremos, por exemplo, 0,000001. Quão grande devemos escolher x para termos $0,999999 < 1 - \frac{1}{x} < 1$?

Temos que

$$0,999999 < 1 - \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow -0,000001 < -\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 0,000001 \Leftrightarrow x > \frac{1}{0,000001} = 1000000$$

Isto é, tomando $x > 1000000$, temos que $1 - f(x) < 0,000001$.

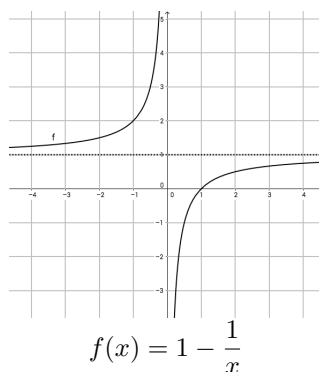
Esse argumento funcionará para qualquer tolerância $\epsilon > 0$ escolhida: existirá $M > 0$ tal que sempre que $x > M$, teremos $0 < 1 - f(x) < \epsilon$. Dessa forma, dizemos que quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 1$ e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

Fazendo o mesmo tipo de raciocínio quando x decresce ilimitadamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

No gráfico da função, vemos esses comportamentos:



A reta $y = 1$ é chamada, nesse caso, assíntota horizontal do gráfico da função.

As definições a seguir generalizam os comportamentos apresentados:

Definição 27. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $M > 0$ tal que sempre que $x > M$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 28. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, a)$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N < 0$ tal que sempre que $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 29. Em qualquer um dos casos da definições 27 e 28, dizemos que $y = L$ é uma assíntota horizontal para o gráfico de $f(x)$.

Exemplo 60. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Seja $\epsilon > 0$. Sempre que $x > \frac{1}{\epsilon} > 0$, temos que $0 < \frac{1}{x} < \epsilon$. Por outro lado, sempre que $x < -\frac{1}{\epsilon} < 0$, temos que $-\epsilon < \frac{1}{x} < 0$. Isso significa que dado $\epsilon > 0$, sempre que $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, temos que $\left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$. Dessa forma, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Decorrem das definições 27 e 28, mas não mostraremos, que:

Teorema 10. Se duas funções f, g possuem limites quando x tende a $+\infty$, digamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = L_1 + L_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L_1L_2 \in \mathbb{R}$$

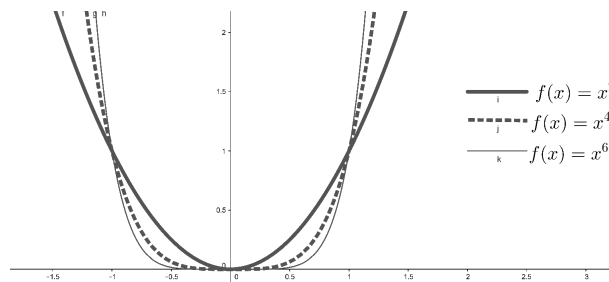
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \in \mathbb{R}, \text{ se } L_2 \neq 0$$

Observação 36. O Teorema 10 continua válido trocando $x \rightarrow +\infty$ por $x \rightarrow -\infty$

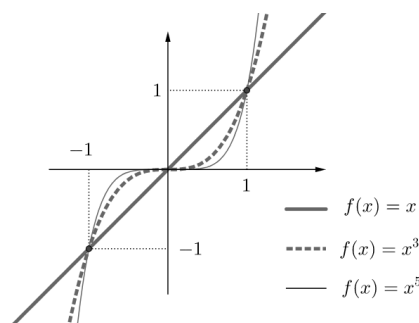
Exemplo 61. Seja n um inteiro positivo, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, então segue do Teorema 10:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Algumas funções têm comportamento ainda diferente. Por exemplo, o gráfico a seguir mostra as funções $y = x^n$ para $n \in \{2, 4, 6\}$. O que observamos é que quando x cresce ou decresce ilimitadamente, a função $y = x^n$, nesses casos, cresce ilimitadamente.



De fato, potências pares de números reais não-nulos são sempre positivas e crescem ilimitadamente. Já para potências ímpares, quando x decresce ilimitadamente, x^n também decresce ilimitadamente.



Teorema 11. Seja $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Vejamos a definição formal do caso em que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x cresce ilimitadamente.

Definição 30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se e somente se fixado $M > 0$, existe $N > 0$ tal que sempre que $x > N$, então $f(x) > M$

Observação 37. Os limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ são definidos de forma análoga. Faça isso.

Podemos usar o Teorema 11 para estudar o comportamento de polinômios e funções racionais quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, como veremos nos exemplos a seguir:

Exemplo 62. Vamos ver alguns exemplos de limites de polinômios usando o exemplo 61 e o Teorema 11.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^4 + 4x^3 - 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

↑
como $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^4 = +\infty$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 + 4x^3 - 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

↑
como $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 = +\infty$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 - x^2 + 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

↑
como $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 - x^2 + 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$$

$\uparrow$
 como $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$

Esses exemplos nos mostram que o comportamento da função polinomial quando $x \rightarrow \pm\infty$ depende apenas do comportamento do monômio de maior grau.

Exemplo 63. Vamos ver alguns exemplos de limites de funções racionais novamente usando o exemplo 61 e o Teorema 11.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\left(1 + \frac{3}{x} \right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty}}{=} -\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{2x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{2x \cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} \right)}{2x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0}}{=} 0$$

Pelo que aconteceu no exemplo anterior, dizemos que os limites de funções racionais quando $x \rightarrow \pm\infty$ são indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$: podem existir (isto é, resultar em um número) ou não.

Vamos ver agora exemplos de limites quando $x \rightarrow \pm\infty$ envolvendo polinômios e raízes.

Exemplo 64.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \sqrt{\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = +\infty \\ &\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{como } \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ pois } x > 0 \quad &\quad \quad \text{como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2}x = +\infty \end{aligned}$$

Exemplo 65.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} \sqrt{\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \\
&\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{como } \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ pois } x < 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{como } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty}}{=} -\infty
\end{aligned}$$

Exemplo 66. (Questão da 1ª prova de 2017-1) Vamos calcular, se existir, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 5}}{3 - x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 5}}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} \\
&\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{como } \sqrt{x^2} = |x|}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} \stackrel{\substack{\uparrow \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{3}{x} - 1\right)} \\
&\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}}{\cancel{x} \left(\frac{3}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{3 + \frac{5}{x^2}}}{\frac{3}{x} - 1} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0}}{=} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 67. (2016-2) Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{\sqrt{16x^6 - x + 1}}{2x^3 - x^2 + 20} \right)$.

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^6 - x + 1}}{2x^3 - x^2 + 20} = -2 \quad (\text{prove isso!})$$

Dessa forma, segue que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{\sqrt{16x^6 - x + 1}}{2x^3 - x^2 + 20} \right) = \sin \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{16x^6 - x + 1}}{2x^3 - x^2 + 20} \right) \right) = \sin(-2)$$

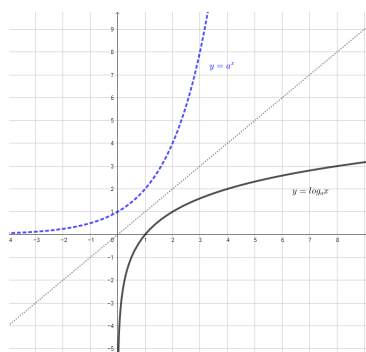
Exemplo 68. O limite abaixo tem uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$ entre parênteses:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

Vamos começar multiplicando e dividindo por $\sqrt{x^2 - 1} + x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} \\
&\stackrel{\substack{\uparrow \\ \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ pois } x > 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
&\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x'}{x' \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{-1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Exemplo 69. Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$$

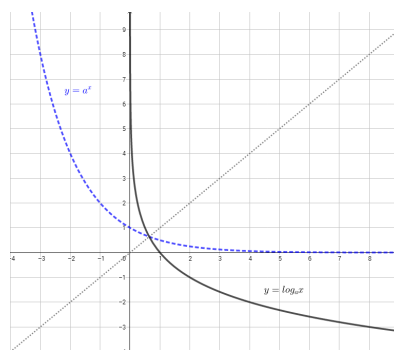
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$



Mais exemplos de uso do Teorema do Confronto.

Exemplo 70. Vamos calcular o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$. Como $-1 \leq \sin x \leq 1$, segue que $\frac{-1}{x} \leq \sin x \leq \frac{1}{x}$ se $x > 0$ (o que é o caso, pois $x \rightarrow +\infty$). Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$, segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Exemplo 71. Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \cos x}{x + 3} = 0$. Primeiro, notamos que $-1 \leq \cos x \leq 1$, donde $-1 \leq -\cos x \leq 1$. Somando 2 em cada termo, temos $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$. Agora, como $x \rightarrow +\infty$, temos que $x + 3 > 0$, donde

$$\frac{1}{x + 3} \leq \frac{2 - \cos x}{x + 3} \leq \frac{3}{x + 3}$$

Usando o fato de que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 3} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x + 3}$ e o Teorema do Confronto, encerramos a prova.

Exemplo 72. (2016-2) Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x - 2\cos x)}{5x^2 + 1}$. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x - 2\cos x)}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{5x^2 + 1} - \frac{2x \cos x}{5x^2 + 1} \right)$$

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3 + 1/x^2)}{x^2(5 + 1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 1/x^2}{5 + 1/x^2} = \frac{3}{5}$$

Temos ainda que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x \cos x}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{5x^2 + 1} \cos x$$

Como $\cos x$ é limitado e $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{5x^2 + 1} = 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x \cos x}{5x^2 + 1} = 0$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x - 2\cos x)}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$$

2.9.1 Mais Limites Exponenciais

Uma das definições possíveis para a constante de Euler é:

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Essa caracterização de e nos permite calcular vários limites importantes.

Exemplo 80. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

De fato, fazendo a mudança de variável $t = -x$ temos que $x \rightarrow -\infty$ implica $t \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1} \right)^t.$$

Agora faça $y = t - 1$. Então, quando $t \rightarrow +\infty$ temos que $y \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1} \right)^t = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{y+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \left(1 + \frac{1}{y} \right) = e \cdot 1 = e.$$

Exemplo 81. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Fazendo a mudança de variável $t = 1/x$ temos que $x \rightarrow 0^+$ implica $t \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Quando $x \rightarrow 0^-$, $t \rightarrow -\infty$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Exemplo 82. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\log_a(1+h)}{h} = \frac{1}{\ln a}$.

De fato, fazendo a mudança de variável $t = 1/h$ temos que $h \rightarrow 0^+$ implica $t \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\log_a(1+h)}{h} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(1+\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \log_a(1+\frac{1}{t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \log_a(1+\frac{1}{t})^t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Exemplo 83. $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{\ln e} = 1$.

Podemos agora mostrar o Limite Exponencial Fundamental usando o limite que define a constante de Euler.

Exemplo 84. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Para esse limite, façamos $z = a^x$. Então, quando $x \rightarrow 0^+$, $z \rightarrow 1^+$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z - 1}{\log_a(z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{\log_a(z)}{z-1}}.$$

Agora fazemos $t = z - 1$. Então, quando $z \rightarrow 1^+$ temos que $t \rightarrow 0^+$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z - 1}{\log_a(z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{\log_a(z)}{z-1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{1/\ln a} = \ln a.$$

Observação 38. Os limites dados nos exemplos anteriores valem ainda para $x \rightarrow 0^-$.

2.10 Exercícios

1. Calcule os limites, se existirem.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5)$

(e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2x^2 - x}{3x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-5}{x^3-7} \right)^3$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{6x^2 + 11x + 3}{2x^2 - 5x - 12}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}}{x-1}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4} \right)^3$
- (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{x^2-2x}$
- (q) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+9}{x^2-1}$
- (r) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{|x-4|}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-3+|x-1|}{x+2}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{x^2+4x+3}$
- (u) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$
- (v) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
- (w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$
- (x) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{1-2x^2}$
- (y) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$
- (z) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}$

2. Calcule os limites, se existirem.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-4x}{2x-3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{3x^2+5x-2}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-2x+2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{(x-1)^2}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{(x-2)^2}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{(x-1)^2}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x+2}{|x+1|}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x}{(x-3)^2}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-13x^2+51x-63}{x^3-4x^2-3x+18}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9x+9}-3}{x}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3+3x^2-4x}$
- (o) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{4-t}-2}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$
- (q) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+x+2}{x^3-x-6}$
- (r) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-10x^2+28x-24}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x^2+3x}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$
- (u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7-x+2x^2-3x^3-5x^4}{4+3x-x^2+x^3+2x^4}$

$$(w) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^4 - 137)^5}{(x^2 + 429)^{10}}$$

$$(y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x^{10} + 32)^3}{(1 - 2x^6)^5}$$

$$(z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right)$$

3. Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Marque a alternativa incorreta:

- (a) $f(1) = 2$.
 - (b) A função não possui raízes reais.
 - (c) A reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .
 - (d) A reta $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .
 - (e) O gráfico de f intercepta $y = x$ em pelo menos 2 pontos.
4. Sobre a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

pode-se afirmar que

- (a) É definida e contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) É definida e contínua somente para $x > 3$.
 - (c) É definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e descontínua apenas em $x = 3$.
 - (d) É definida e contínua somente para $x \leq 3$.
 - (e) É definida e contínua somente para $x \neq 3$.
5. Determine, se existir, o limite da função a seguir quando x tende a 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|}, & \text{se } x \neq 1 \\ 4, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

A função é contínua em $\mathbb{R}$?

6. Considere as seguintes afirmativas:

- I. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.
- II. Se existe $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- III. Se f é uma função definida em $[a, b]$ e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Temos que

- (a) Todas as afirmativas são verdadeiras.
- (b) Todas as afirmativas são falsas.
- (c) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
- (d) Apenas a afirmativa II é falsa.
- (e) Apenas a afirmativa III é falsa.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função **contínua** $y = f(x)$ definida no intervalo $[-4, 8]$ dada por

$$\begin{cases} x + 6, & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ ax + b, & \text{se } 0 < x < 4 \\ 2x - 10, & \text{se } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Podemos afirmar que $a + b$ vale

- (a) -12 (b) -2 (c) 0 (d) 4 (e) 6

8. Marque a alternativa correta:

- (a) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$
 (b) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
 (c) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$
 (d) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
 (e) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = -\infty$

9. Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ tem pelo menos uma solução real.

10. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

11. Ache as assíntotas horizontais de $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 5}$. Existem assíntotas verticais?

12. Determine, se existirem as assíntotas verticais e horizontais das funções a seguir.

- (a) $f(x) = \frac{2}{x-5}$ (c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 3}$
 (b) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|-1}$ (d) $f(x) = \frac{x+9}{x^2 - 81}$

13. Calcule os limites laterais nos pontos de descontinuidade das funções a seguir.

- (a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{if } x < 2; \\ x^2 + 1, & \text{if } x > 2. \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & \text{if } x < 1; \\ x^2, & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$
 (b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$. (d) $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{if } x < -2; \\ x^2 + 3x - 1, & \text{if } x \geq -2. \end{cases}$

14. (2016-2) Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x - a + \frac{2}{x}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

Sabendo que f é contínua, podemos afirmar que:

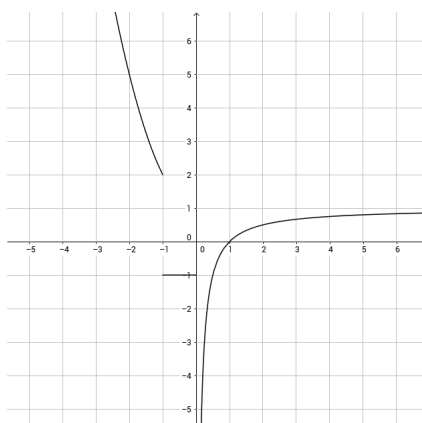
- (a) $ab > 0$ (b) ab é ímpar (c) $a + b = 0$ (d) $a + b < 0$ (e) $a < b$

15. (2016-2) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Podemos afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1} \text{ vale:}$$

- (a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) $+\infty$

16. (2016-2) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada pelo gráfico abaixo.



Marque a afirmação **CORRETA**.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)} = -\infty$ (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{f(x)} = 1$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+1} = +\infty$
 (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x)} = 0$ (d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \infty$

17. Calcule

- (a) (2016-1) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos x + \operatorname{tg} x \right)$
 (b) (2017-1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{\operatorname{tg} x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x}$
 (c) (2017-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$ (i) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin \theta}{\theta - \pi/2}$ (o) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$ (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 \cos x}{(x + 2)^3}$ (p) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg} x$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$ (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2 + 9}$
 (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ (r) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x}$ (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\operatorname{tg}^3 x}$ (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + \sin x}$
 (t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

18. Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$?

19. Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$?

20. Use o Teorema do Confronto para calcular:

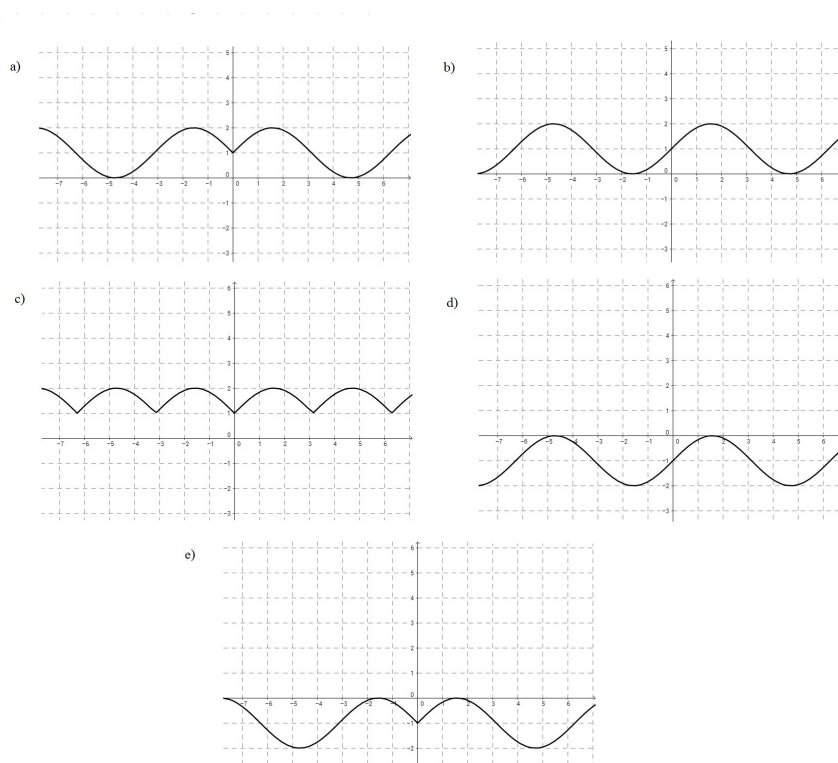
(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2(2x)}{3 - 2x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \sin(1/x^2)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \cos(2/x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 10}$

21. (2016-2) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = \sin|x| + 1$ é:



22. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{2^{5x} - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x}$

(j) (2016-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{4x}$

23. Faça os seguintes exercícios dos livro *Cálculo A*.

(a) Página 75, números 35 e 37;

(b) Página 94, número 14;

(c) Páginas 103, 104 e 105.

2.11 Respostas dos exercícios

1. (a) 15 (e) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ (h) $1/4$ (l) $1/8$ (p) $-1/8$ (t) $1/4$ (x) $+\infty$
 (b) $-1/1000$ (f) 2 (i) $\sqrt{2}/4$ (m) $\sqrt{2}$ (q) $5/3$ (u) 6 (y) $1/2$
 (c) 5 (g) $7/11$ (j) 1 (n) 1 (r) -1 (v) $1/6$ (z) $+\infty$
 (d) 2 (k) 3 (o) -9 (s) 3 (w) $+\infty$
2. (a) -2 (e) $+\infty$ (i) $-\infty$ (m) $3/2$ (q) $1/11$ (u) $+\infty$ (y) $1/2$
 (b) 0 (f) $-\infty$ (j) $+\infty$ (n) $3/5$ (r) $-5/4$ (v) $-5/2$ (z) 1
 (c) $-\sqrt{2}$ (g) $+\infty$ (k) $+\infty$ (o) -4 (s) $-1/12$ (w) 32
 (d) $+\infty$ (h) $-\infty$ (l) $-4/5$ (p) $1/6$ (t) -4 (x) $-125/32$
3. (b) 4. (c) 5. $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 6. (c) 7. (d) 8. (e)
9. $f(x) = x^3 - 4x + 8$ é contínua em $\mathbb{R}$, $f(-3) = -7$ e $f(1) = 5$. Logo, pelo TVI, existe $c \in (-3, 1)$ tal que $f(c) = 0$.
10. Sim, existe $x \in [-2, 0]$.
11. Assíntota vertical: $x = -5/3$. Assíntotas horizontais: $y = \pm\sqrt{2}/3$.
12. (a) Assíntota vertical: $x = 5$. Assíntota horizontal: $y = 0$
 (b) Assíntota vertical: $x = -1$. Assíntota horizontal: $y = 1$
 (c) Assíntota vertical: $x = 3$
 (d) Assíntota vertical: $x = 9$. Assíntota horizontal: $y = 0$
13. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3$
14. (b) 15. (b) 16. (b)
17. (a) $\sqrt{3}$ (e) $3/4$ (i) 0 (m) $1/2$ (q) $1/9$
 (b) 1 (f) $-1/2$ (j) 2 (n) 2 (r) -1
 (c) 0 (g) 2 (k) 2 (o) -1 (s) $1/2$
 (d) 0 (h) $1/2$ (l) 1 (p) -1 (t) 0
18. Não 19. $k = 0$
20. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 5
21. (a)
22. (a) e^2 (c) e^{-6} (e) e^4 (g) $\frac{2 \ln 3}{5 \ln 2}$ (i) 2
 (b) e^3 (d) e^{-5} (f) $\ln 8$ (h) e^2 (j) $3/4$