MECÂNICA

Michèle Farage

4 de junho de 2009

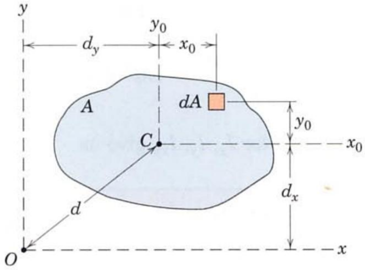
Produto de inércia de áreas

O momento de inércia de uma área é diferente para cada eixo em relação ao qual ele é calculado.

Em algumas aplicações estruturais ou mecânicas é preciso conhecer a orientação dos eixos em relação aos quais se tem, respectivamente, o máximo e o mínimo momentos de inércia.

Para este fim, é necessário calcular o produto de inércia e os momentos de inércia da área em relação a um par de eixos x,y.

Definição



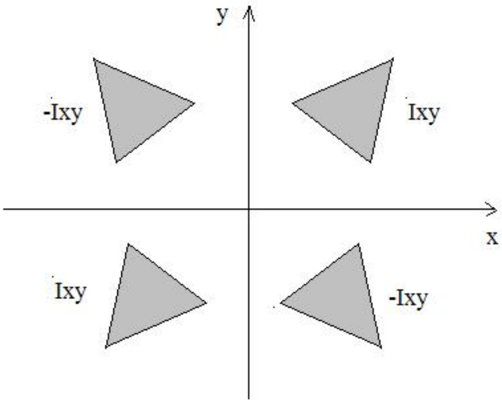
O Produto de inércia de um elemento de área dA localizado no ponto de coordenadas x, y é: $dI_{xy} = xydA$
Então, para a área A, o produto de inércia é:

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

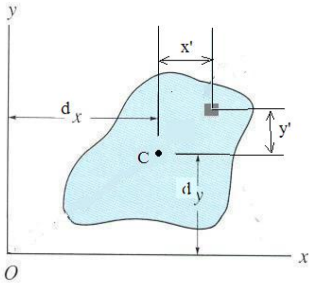
Características

O produto de inércia tem unidade de comprimento elevado à quarta potência.

Pode ser: positivo, negativo ou nulo (quando x ou y é um eixo de simetria).

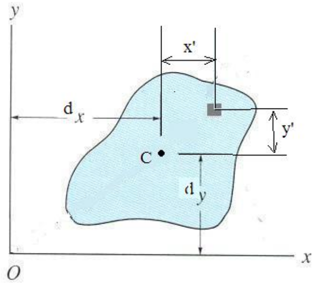


Teorema dos eixos paralelos



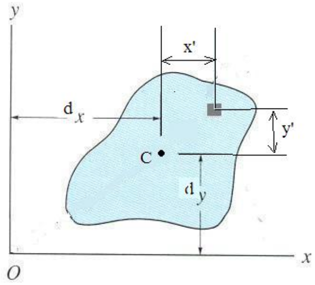
$$I_{xy} = \int_A xydA =$$

Teorema dos eixos paralelos



$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_A (x' + \Delta_x)(y' + \Delta_y)dA$$

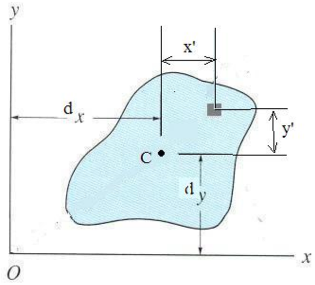
Teorema dos eixos paralelos



$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_A (x' + \Delta_x)(y' + \Delta_y)dA$$

$$I_{xy} = \int_A x'y'dA + \Delta_x \int_A y'dA + \Delta_y \int_A x'dA + \Delta_x\Delta_y \int_A dA$$

Teorema dos eixos paralelos



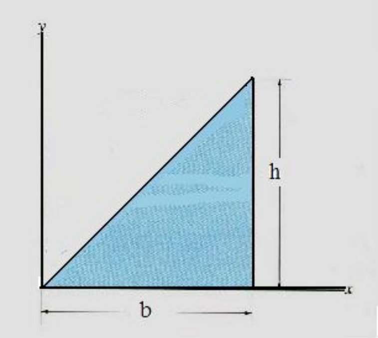
$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_A (x' + \Delta_x)(y' + \Delta_y)dA$$

$$I_{xy} = \int_A x'y'dA + \Delta_x \int_A y'dA + \Delta_y \int_A x'dA + \Delta_x\Delta_y \int_A dA$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A\Delta_x\Delta_y$$

Exemplo

Determinar I_{xy} empregando o teorema dos eixos paralelos.



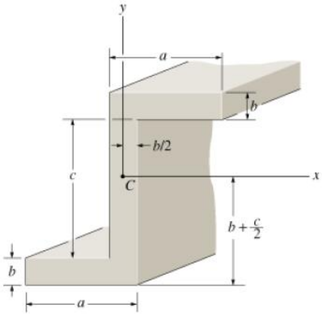
Exercício proposto

Determinar o produto de inércia da área da seção transversal da viga mostrada abaixo em relação aos eixos que passam pelo centróide C.

$\mathbf{a} := 4\mathbf{in}$

$\mathbf{b} := 1\mathbf{in}$

$\mathbf{c} := 5\mathbf{in}$

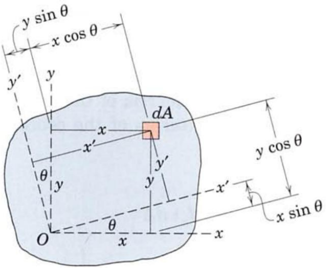


Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

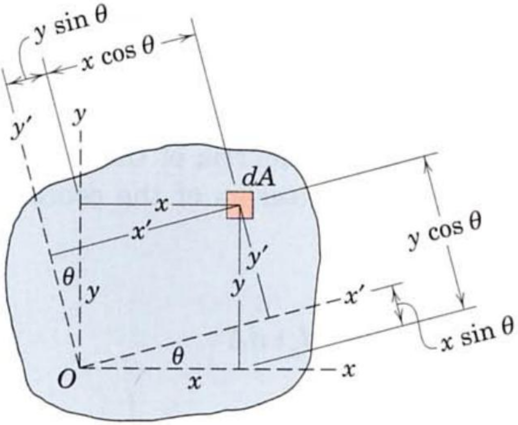
São empregadas leis de transformação que relacionam os momentos e o produto de inércia de uma área em relação a um par de eixos inclinados u e v com os relativos a um sistema x,y.

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

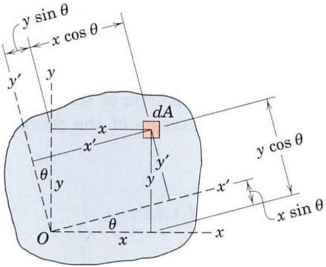
São empregadas leis de transformação que relacionam os momentos e o produto de inércia de uma área em relação a um par de eixos inclinados u e v com os relativos a um sistema x,y.



Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados



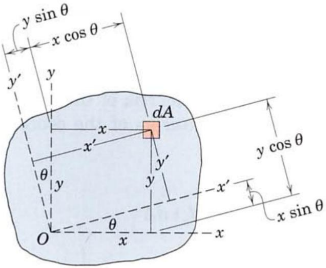
Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados



Leis de transformação:

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados



Leis de transformação:

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$v = y\cos\theta - x\sin\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\quad\quad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uvdA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uvdA = (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uvdA = (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta) dA$$

Expandindo e integrando:

$$I_u = I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uvdA = (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)dA$$

Expandindo e integrando:

$$I_u = I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$I_v = I_x\sin^2\theta + I_y\cos^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$ $\qquad$ $v = y\cos\theta - x\sin\theta$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a u e v:

$$dI_u = v^2 dA = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uvdA = (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)dA$$

Expandindo e integrando:

$$I_u = I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$I_v = I_x\sin^2\theta + I_y\cos^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$I_{uv} = I_x\sin\theta\cos\theta - I_y\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

$$J_O = I_u + I_v =$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

J_O independe da orientação dos eixos u e v.

Momentos principais de inércia de uma área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

Momentos principais de inércia de uma área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Momentos principais de inércia de uma área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Momentos principais de inércia de uma área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

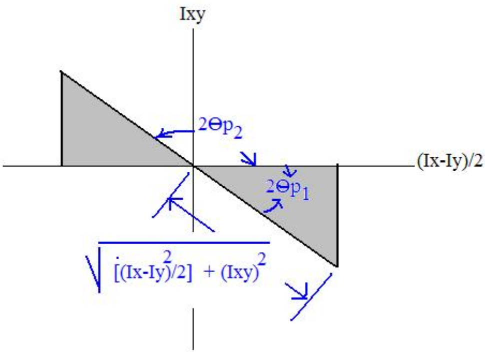
$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Dada a origem O, os eixos principais de inércia têm orientação definida pelo ângulo θ_p.

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$



Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1}:

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1}:

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2}:

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1}:

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2}:

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1}:

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2}:

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{uv} = 0 \longrightarrow$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1}:

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2}:

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

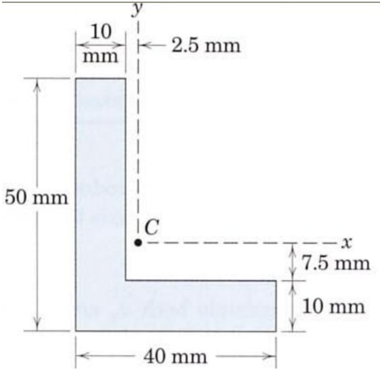
$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{uv} = 0 \longrightarrow$ todo eixo de simetria é eixo principal de inércia.

Exemplo

Determinar as orientações dos eixos principais de inércia passando pelo centróide da seção L e determine os momentos de inércia máximo e mínimo correspondentes.



Raio de giração

Raio de giração de uma área plana é uma grandeza usada em projetos de colunas (pilares). A definição é dada por:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

O raio de giração é usado para calcular o índice de esbeltez de barras, que define o comportamento do elemento estrutural em problemas relacionados à estabilidade (flambagem).