

# Espaços de Hilbert, Espectro, EDP's

Jens Mund

DF-UFJF, Período 2020-3

## Resumo

Notas de aula *incompletas* do período 2020-3. O ponto central é o teorema espectral sobre diagonalização de operadores auto-adjuntos agindo num espaço de Hilbert. Como aplicação, o operador Laplace é diagonalizado para várias regiões no  $\mathbb{R}^3$ , com condições de contorno especificadas (Dirichlet ou Neumann). Essa análise serve para resolver as EDP's de Poisson, difusão, e de onda nas respectivas regiões (pelo chamado método de Fourier). Alguns detalhes (seções 2.4.5-7) ainda não são digitadas.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Espaços de Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1	Espaços vetoriais; produto escalar . . . . .	1
1.2	Bases ortonormais e BON's generalizadas . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Teorema espectral</b>	<b>10</b>
2.1	Em espaços vetoriais de dimensão finita . . . . .	10
2.2	Operadores auto-adjuntos . . . . .	13
2.3	Teorema espectral . . . . .	13
2.4	Análise espectral do operador Laplace . . . . .	17
2.4.1	Considerações gerais. . . . .	17
2.4.2	Intervalo em $\mathbb{R}$ . . . . .	20
2.4.3	Retângulo no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	20
2.4.4	Disco no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
2.4.5	Cilindro no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22
2.4.6	Esféra no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22
2.4.7	Bola no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>EDPs</b>	<b>22</b>
3.1	Equação de Poisson . . . . .	22
3.2	EDP de difusão . . . . .	23
3.3	Equação de onda . . . . .	25
3.4	Equação de onda no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
<b>A</b>	<b>Convergência de sequências de funções</b>	<b>26</b>

## 1 Espaços de Hilbert

### 1.1 Espaços vetoriais; produto escalar

Literatura: Cap. 10 e 11 em Butkov [6], Cap. 10 em Lemos [11].

[6, Cap. 10.3]: Um conjunto  $V$  é chamado de espaço vetorial<sup>1</sup> (sobre o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos) se existe uma operação  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(u, v) \rightarrow u + v$  (“soma de vetores”) e uma operação  $\odot$  :  $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ ,  $(c, v) \mapsto cv$  (“multiplicação do vetor  $v$  com o escalar  $c$ ”) satisfazendo as seguintes requerimentos. Existe um elemento  $0 \in V$  (“vetor nulo”), tal que  $\forall u \in V$  vale  $u + 0 = u$ , e certas condições de compatibilidade sejam satisfeitas:  $\forall u, v, w \in V$  e  $\forall c, c' \in \mathbb{C}$  vale

$$u + v = v + u, \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad 1u = u \\ c(c'u) = (cc')u, \quad c(u + v) = cu + cv, \quad (c + c')u = cu + c'u.$$

Exemplos: Vetores deslocamento no espaço físico;  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $C(\mathbb{R})$ ,  $C^\infty(\mathbb{R})$ , soluções de uma EDO homogênea...

Uma soma (finita) da forma  $c_1v_1 + \dots + c_nv_n \equiv \sum_{i=1}^n c_iv_i$ , com  $c_i \in \mathbb{C}$  e  $v_i \in V$ , chamamos de *combinação linear* de vetores.

**Definição 1** Um número finito de vetores  $v_1, \dots, v_n$  é linearmente independente :  $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_iv_i = 0$  implica  $c_1 = \dots = c_n = 0$ .

Seja  $B \subset V$  um subconjunto de  $V$ .

$B$  é linearmente independente :  $\Leftrightarrow$  Cada subconjunto *finito* de  $B$  é linearmente independente.

O *span* de  $B$ , em símbolos  $\text{span}(B)$ , é o conjunto de todas combinações lineares finitas de vetores em  $B$ .

$B$  é chamado de *base* de  $V$  se  $B$  é linearmente independente e  $\text{span}(B) = V$ .

**Definição 2** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço linear. Uma *norma* em  $\mathcal{H}$  é uma aplicação  $n : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  satisfazendo  $n(\psi) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$ ,  $n(c\psi) = |c|n(\psi)$  e a desigualdade do triângulo,

$$n(\psi + \phi) \leq n(\psi) + n(\phi). \quad (1)$$

**Definição 3** [6, Cap. 10.6] Seja  $\mathcal{H}$  um espaço linear. Um *produto escalar* em  $\mathcal{H}$  é uma aplicação  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\psi, \phi \mapsto (\psi, \phi)$  antilinear e linear no primeiro e segundo argumento, respetivamente, que satisfaz<sup>2</sup>

$$(\phi, \psi) = \overline{(\psi, \phi)} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

e que é *positivo definido* no sentido que

$$(\psi, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

e a igualdade “=” vale somente se  $\psi = 0$ .

Dizemos que dois vetores  $\psi_1, \psi_2$  são *ortogonais*, em símbolos  $\psi_1 \perp \psi_2$ , se  $(\psi_1, \psi_2) = 0$ . Dado um produto escalar, definimos

$$\|\psi\| := \sqrt{(\psi, \psi)}. \quad (2)$$

Veremos embaixo que  $\|\cdot\|$  é uma norma. Observa que ela satisfaz<sup>3</sup>

$$\|\psi_1 + \psi_2\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 + 2\Re(\psi_1, \psi_2).$$

Se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são ortogonais, segue o Teorema de Pitágoras

$$\|\psi_1 + \psi_2\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 \quad \text{se } (\psi_1, \psi_2) = 0. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Ou espaço linear. Os elementos de  $V$  denotaremos por  $u, v, \dots$ , ou as vezes por  $\psi, \phi, \dots$

<sup>2</sup> $\bar{z}$  denota o complexo conjugado de  $z \in \mathbb{C}$ .

<sup>3</sup> $\Re z$  denota a parte real de  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 4** i)  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ : Denotamos os elementos por  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  etc. Produto escalar:

$$(u, v) \doteq \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i'. \quad (4)$$

ii)  $\mathcal{H} = l^2$ : Os elementos são seqüências infinitas  $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots)$  tal que

$$\|\underline{c}\|^2 \doteq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty.$$

Produto escalar:

$$(\underline{c}, \underline{c}') \doteq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{c_i} c_i'.$$

iii)  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ : Os elementos são as funções<sup>4</sup> quadraticamente integráveis,  $\int |f(x)|^2 dx < \infty$ . Produto escalar:

$$(\psi, \phi) \doteq \int \overline{\psi(x)} \phi(x) dx.$$

□

Para um conjunto  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  definimos o *complemento ortogonal*  $\mathcal{D}^\perp$  por

$$\mathcal{D}^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} : (\phi, \psi) = 0 \forall \phi \in \mathcal{D}\}.$$

Observa que  $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$ , pois  $\psi \in \mathcal{H}^\perp$  implica que  $(\psi, \psi) = 0$ , ou seja,  $\psi = 0$ .

Um sistema ortogonal (SOG) é uma família  $\{\varphi_i, i \in I\}$  de vetores  $\varphi_i$ , onde  $i$  percorre algum conjunto de índices<sup>5</sup>  $I$ , que são mutuamente ortogonais:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \|\varphi_i\|^2 \delta_{ij} = \begin{cases} \|\varphi_i\|^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (5)$$

Se além disso os vetores  $\varphi_i$  são normalizadas,  $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ , a família é chamada um sistema ortonormal (SON).

Se  $\psi = \sum_{i \in I} c_i \varphi_i$  é uma combinação linear dos vetores  $\{\varphi_i, i \in I\}$ , então os coeficientes  $c_i$  naquela expansão são dados por

$$c_i = \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2}. \quad (6)$$

**Lemma 5 (Projeção sobre um subespaço)** *Seja  $U \doteq \text{span}\{\varphi_i, i \in I\}$  o subespaço de  $\mathcal{H}$  gerado pelo SON  $\{\varphi_i, i \in I\}$ , onde  $I$  é finito. Então qualquer  $\psi \in \mathcal{H}$  possui uma única decomposição*

$$\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}, \quad \text{onde } \psi_{\parallel} \in U \text{ e } \psi_{\perp} \in U^\perp. \quad (7)$$

A saber,

$$\psi_{\parallel} := \sum_{i \in I} \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2} \varphi_i =: P_U \psi \quad (8)$$

$$\text{e } \psi_{\perp} := \psi - \psi_{\parallel}.$$

<sup>4</sup>Na verdade, classes de equivalência: Duas funções são identificadas se eles coincidem em “quase todos” pontos.

<sup>5</sup>Nos vamos supor que  $I$  é finito ou enumerável.

A aplicação linear  $\psi \mapsto \psi_{\parallel}$  definido na Eq. (8) é chamado o *projetor* sobre  $U$ , em símbolos  $P_U$ . (Exercício: Mostre que este operador é um projetor no sentido que  $P_U \circ P_U = P_U$ .) Vale mencionar que  $P_U \psi$  é o vetor que **minimiza a distância** entre  $\psi$  e  $U$ , pois para qualquer  $u \in U$  vale

$$\|\psi - u\|^2 = \|\psi_{\parallel} + \psi_{\perp} - u\|^2 = \|\psi_{\parallel} - u\|^2 + \|\psi_{\perp}\|^2$$

que é minimal se  $\|\psi_{\parallel} - u\|^2 = 0$ , ou seja, se  $u = \psi_{\parallel}$ .

*Comprovante.* Defina  $\psi_{\parallel}$  segundo Eq. (8). Por construção, esse vetor é em  $U$ . Calculamos para  $j \in I$ :

$$(\varphi_j, \psi_{\parallel}) = (\varphi_j, \sum_{i \in I} \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2} \varphi_i) = \sum_{i \in I} \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2} \underbrace{(\varphi_j, \varphi_i)}_{\|\varphi_i\|^2 \delta_{ij}} = (\varphi_j, \psi).$$

Isso implica que  $(\varphi_j, \psi_{\perp}) \equiv (\varphi_j, \psi - \psi_{\parallel}) = (\varphi_j, \psi) - (\varphi_j, \psi_{\parallel}) = 0$  para todo  $j \in I$ , o que implica por sua vez que  $\psi_{\perp} \in U^{\perp}$ .

Falta só mostrar a unicidade. Seja  $\psi = \psi'_{\parallel} + \psi'_{\perp}$  uma outra decomposição com as propriedades mencionadas no lemma. A identidade  $\psi_{\parallel} + \psi_{\perp} = \psi = \psi'_{\parallel} + \psi'_{\perp}$  implica que

$$\psi_{\parallel} - \psi'_{\parallel} = \psi'_{\perp} - \psi_{\perp} =: \chi.$$

Isso é um vetor em  $U$  (lado esquerdo) e também em  $U^{\perp}$  (lado direito): Em particular, ele é ortogonal em si mesmo,  $(\chi, \chi) = 0$ , o que implica que  $\chi = 0$ , ou seja,  $\psi'_{\parallel} = \psi_{\parallel}$  e  $\psi'_{\perp} = \psi_{\perp}$ .  $\square$

**Proposição 6 (Gram-Schmidt)** *Se  $B$  é um conjunto enumerável de vetores em  $\mathcal{H}$ , então existe um SON  $B'$  que gera o mesmo subespaço de  $\mathcal{H}$ , i.e.,  $\text{span}(B) = \text{span}(B')$ .*

*Comprovante.* [1, Cap. 3.1], [6, Cap. 10.8, Thm. 4], [11, Thm. 10.13].  $\square$

Para qualquer  $\psi, \phi$  in  $\mathcal{H}$  vale a desigualdade de **Cauchy e Schwarz**:<sup>6</sup>

$$|(\phi, \psi)| \leq \|\phi\| \|\psi\|. \quad (9)$$

*Comprovante.* Se  $\phi = 0$ , a desigualdade é trivial. Então, seja  $\phi \neq 0$ . Neste caso,  $\psi$  possui a decomposição (7),  $\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}$  com  $\psi_{\parallel} = \frac{(\phi, \psi)}{\|\phi\|^2} \phi \perp \psi_{\perp}$ , então pelo Pitágoras

$$\|\psi\|^2 = \|\psi_{\parallel}\|^2 + \|\psi_{\perp}\|^2 \geq \|\psi_{\parallel}\|^2 \equiv \|\phi\|^{-2} |(\phi, \psi)|^2,$$

que dá (9).  $\square$

<sup>6</sup>Agora podemos mostrar que  $\|\cdot\|$  satisfaz a desigualdade do triângulo (1):

$$\|\psi + \phi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\Re(\psi, \phi) \leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2|(\psi, \phi)| \leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\|\psi\| \|\phi\| = (\|\psi\| + \|\phi\|)^2.$$

**Noções topológicas.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço com norma  $\|\cdot\|$ .

Uma sequência  $\psi_n$  converge para  $\psi$  sse  $\|\psi_n - \psi\| \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ .

$K \subset \mathcal{H}$  é um subespaço fechado sse  $\psi_n \in K, \psi_n \rightarrow \psi$  implica  $\psi \in K$ .

Seja  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  um subconjunto de  $\mathcal{H}$ . O fecho de  $\mathcal{D}$ , em símbolos  $\mathcal{D}^-$ , é o menor conjunto fechado em  $\mathcal{H}$  que contém  $\mathcal{D}$ , i.e.,

$$\mathcal{D}^- \doteq \{\psi \in \mathcal{H} \mid \exists \psi_n \in \mathcal{D} : \psi_n \rightarrow \psi\}.$$

Um subconjunto  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  é chamado de *denso* em  $\mathcal{H}$ , se o fecho dele coincide com  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}^- = \mathcal{H}$ . (Exemplo:  $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}$ .)

Uma sequência  $\psi_n$  em  $\mathcal{H}$  é chamada de *sequência de Cauchy* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número  $N$  tal que para todos  $n, m > N$  vale

$$\|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon.$$

Se toda sequência de Cauchy converge em  $\mathcal{H}$ , o espaço é chamado de completo, ou *espaço de Banach*, ou *espaço de Hilbert* se a norma provém de um produto escalar, veja (2).

Exemplos: Todo espaço vetorial de dimensão finita é completo;  $L^2(\mathbb{R})$  e  $l^2$  também são completos.

Sejam  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  dois espaços lineares com normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  respectivamente. Uma aplicação  $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  é chamada *contínua* em  $\psi \in \mathcal{H}_1$  se  $\psi_n \rightarrow \psi$  em  $\mathcal{H}_1$  implica  $F(\psi_n) \rightarrow F(\psi)$  em  $\mathcal{H}_2$ . Se  $F$  é *linear*, as seguintes afirmações são (obviamente) equivalentes:

i)  $F$  é contínua em algum  $\psi \in \mathcal{H}_1$ ,

ii)  $F$  é contínua em todos  $\psi \in \mathcal{H}_1$ ,

iii)  $F$  é contínua em 0.

(Neste caso ela é chamada simplesmente contínua.) Vale mencionar que isto é equivalente com a existência de um número  $M > 0$  tal que para todo  $\psi \in \mathcal{H}_1$  vale

$$\|F(\psi)\|_2 \leq M\|\psi\|_1.$$

Consideremos dois casos especiais de aplicações lineares: Se  $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ , chamamos  $F$  de um *operador* em  $\mathcal{H}_1$ . Se  $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ , chamamos  $F$  de um *funcional*.

**Exemplo 7** Seja  $\phi \in \mathcal{H}$  fixo. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra-se que o funcional

$$\psi \mapsto (\phi, \psi)$$

é contínuo. Isso por sua vez implica que o projetor  $P_U$  definido em (??) é contínuo.  $\square$

A inversão também vale se  $\mathcal{H}$  é completo [13]:

**Lemma 8 (Riesz)** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  um funcional contínuo. Então existe um vetor (único)  $\phi_F$  t.q.*

$$F(\psi) = (\phi_F, \psi) \quad \text{para todos } \psi \in \mathcal{H}. \quad (10)$$

## 1.2 Bases ortonormais e BON's generalizadas

Nesta seção seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert (em particular, completo), e  $I \doteq \mathbb{N}$ .

**Proposição 9 (Desigualdade de Bessel)** *Se  $\{\varphi_i, i \in I\}$  é um SON, então para qualquer  $\psi \in \mathcal{H}$  vale a desigualdade*

$$\sum_{i \in I} |(\varphi_i, \psi)|^2 \leq \|\psi\|^2.$$

Veja [11, Thm. 10.14].

*Comprovante.* Denotamos o espaço gerado pelo SON  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  de  $U_n$ . Segundo Lema 5, nosso vetor  $\psi$  possui a decomposição (7),  $\psi = P_{U_n}\psi + \psi_\perp$ , onde  $P_{U_n}\psi$  é perpendicular em  $\psi_\perp$ . Pelo Pitágoras, temos

$$\|\psi\|^2 = \|P_{U_n}\psi\|^2 + \|\psi_\perp\|^2 \geq \|P_{U_n}\psi\|^2 = \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, \psi)|^2$$

Passando ao limite  $n \rightarrow \infty$ , segue a desigualdade de Bessel.  $\square$

**Lemma 10** *Seja  $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$  é um SON, e seja  $c_1, c_2, \dots$  uma sequência de números complexos tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$ .<sup>7</sup> Então para qualquer  $\psi \in \mathcal{H}$  a série de vetores*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \quad (11)$$

converge, e a norma do vetor limite é  $(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

*Comprovante.* Denotando por  $\psi_n \doteq \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$  a  $n$ -ésima soma parcial, calcula-se  $\|\psi_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$ . Similarmente temos para  $m < n$ :

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 \equiv \left\| \sum_{i=m}^n c_i \varphi_i \right\|^2 = \sum_{i=m}^n |c_i|^2 = s_n - s_m, \quad (12)$$

onde  $s_n \doteq \sum_{i=1}^n |c_i|^2$ . Esta sequência converge por hipótese, e portanto é uma sequência de Cauchy. Daí, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m > N$  vale  $|s_n - s_m| < \varepsilon^2$ . A Eq. (12) implica  $\|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon$ , ou seja,  $\{\psi_n\}$  é uma sequência de Cauchy. Como  $\mathcal{H}$  é completo, ela converge.  $\square$

**Corolário 11** *Se  $\{\varphi_i, i \in I\}$  é um SON, então para qualquer  $\psi \in \mathcal{H}$  a série de vetores*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, \psi) \varphi_i \quad (13)$$

converge.

Veja [11, Cor. 10.15].

*Comprovante.* A série é da forma do Lema 10, com  $c_i \doteq (\varphi_i, \psi)$ . A sequência  $\sum_{i=1}^n |c_i|^2$  é monotonicamente crescendo, e limitado superiormente por  $\|\psi\|^2$  pela desigualdade de Bessel. Assim, ela converge, ou seja, satisfaz a hipótese do Lema 10. Este próprio lema afirma a convergência (13).  $\square$

**Definição 12** Uma BON em  $\mathcal{H}$  é um SON  $\{\varphi_i, i \in I\}$  tal que todo vetor  $\psi \in \mathcal{H}$  possui uma expansão

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i \quad (14)$$

no sentido da Eq. (11).

---

<sup>7</sup>Em outras palavras, a sequência  $c_1, c_2, \dots$  está em  $l^2$ .

(Exemplo:  $\{(1,0,0,\dots), (0,1,0,\dots), \dots\}$  em  $l^2$ , veja Exemplo 10.2.1 in [11].)

Observe que os coeficientes  $c_i$  naquela expansão são unicamente determinadas, a saber

$$c_i = (\varphi_i, \psi). \quad (15)$$

Pelo Lema 10, a norma de  $\psi$  satisfaz a identidade de Parseval (generalizada):

$$\|\psi\|^2 = \sum_i |c_i|^2. \quad (16)$$

É um fato que todo espaço de Hilbert possui uma BON. (Veja [11, Thm 10.18] no caso enumerável.) Além disso, todas BON's de um dado espaço  $\mathcal{H}$  possuem a mesma cardinalidade, a chamada *dimensão* do espaço. Ela pode ser finita, contável, ou não-contável. Nos vamos considerar somente o caso de dimensão contável (inclusive finita). (Neste caso, o espaço de Hilbert é chamado de separável.)

**Exemplo 13** A família  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , onde

$$\varphi_n(x) \doteq \sqrt{\frac{1}{a}} e^{ik_n x}, \quad k_n \doteq n \frac{2\pi}{a}, \quad (17)$$

fornece uma BON em  $L^2([0, a])$ .

*Comprovante.* O teorema de Fourier afirma que uma função  $f$  contínua e periódica com período  $a$  pode ser expandida como

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ik_n x}, \quad c_n \doteq \frac{1}{a} \int_0^a e^{-ik_n x} f(x) dx, \quad (18)$$

com  $k_n$  como em (17). Se  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , a convergência é uniforme. Convergência uniforme implica convergência no sentido de  $L^2([0, a])$  [13]. Falta mostrar que “estas” funções são densas em  $L^2([0, a])$ . Veja também [13].  $\square$

$\square$

**Teorema 14** Seja  $\{\varphi_i, i \in I\}$  uma família de vetores linearmente independentes. Ela é uma BON se, e somente se, para todos  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  vale a chamada relação de Parseval:

$$(\phi, \psi) = \sum_{i \in I} (\phi, \varphi_i) (\varphi_i, \psi). \quad (19)$$

*Comprovante.* Se os  $\varphi_i$  fornecem uma BON, as Eqs. (14) e (15) implicam a Eq. (19). Vamos demonstrar a direção inversa. Escrevendo<sup>8</sup>

$$\psi' := \sum_{i \in I} (\varphi_i, \psi) \varphi_i,$$

a Eq. (19) afirma que para todos  $\phi$  vale  $(\phi, \psi) = (\phi, \psi')$ . Isso quer dizer que o vetor  $\psi - \psi'$  está em  $\mathcal{H}^\perp$ , que contém apenas o vetor 0, implicando em  $\psi = \psi'$ . Isso mostra que para todo  $\psi \in \mathcal{H}$  vale

$$\psi = \sum_{i \in I} (\varphi_i, \psi) \varphi_i, \quad (20)$$

ou seja, as Eqs. (14) e (15). Falta mostrar que os  $\varphi_i$  são um sistema ortonormal. Para esses fins, aplicamos a equação acima para  $\psi = \varphi_j$ :

$$\varphi_j = \sum_{i \in I} (\varphi_i, \varphi_j) \varphi_i.$$

Pela independência linear, isso implica  $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ .  $\square$

---

<sup>8</sup>O limite existe pelo Cor. 11.

**BON's contínuas em  $L^2(\mathbb{R}^D)$**  [7, Cap. II.A.3]. Consideramos a família de funções (ondas planas)  $e_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$ , definidas por

$$e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \doteq (2\pi)^{-D/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (21)$$

Elas não são em  $L^2(\mathbb{R}^D)$ , mas mesmo assim existe o “produto escalar” com certas outras funções: Se  $\psi \in \mathcal{D} \doteq L^2(\mathbb{R}^D) \cap L^1(\mathbb{R}^D)$ , então existe para todo  $\mathbf{k}$  o “produto escalar”<sup>9</sup>

$$(e_{\mathbf{k}}, \psi) := \int \overline{e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d^D \mathbf{x} = (2\pi)^{-D/2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) d^D \mathbf{x} \equiv \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad (22)$$

ou seja, o valor da transformada Fourier da função  $\psi$  em  $\mathbf{k}$ . Consequentemente definimos também

$$(\psi, e_{\mathbf{k}}) := \overline{(e_{\mathbf{k}}, \psi)} \equiv \overline{\hat{\psi}(\mathbf{k})}. \quad (23)$$

Com essas definições, a identidade de Parseval

$$\int d^D \mathbf{x} \overline{\phi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) = \int d^D \mathbf{k} \overline{\hat{\phi}(\mathbf{k})} \hat{\psi}(\mathbf{k})$$

pode ser escrita como

$$(\phi, \psi) = \int d^D \mathbf{k} (\phi, e_{\mathbf{k}}) (e_{\mathbf{k}}, \psi). \quad (24)$$

Essa equação é completamente análoga à Eq. (19). Por isso a família  $\{e_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^D\}$  é chamada de uma *BON contínua* em  $L^2(\mathbb{R}^D)$ . Em analogia com a Equ. (20), escrevemos

$$\psi = \int d^D \mathbf{k} (e_{\mathbf{k}}, \psi) e_{\mathbf{k}}. \quad (25)$$

Como outro exemplo, consideramos a família de distribuições-delta  $\delta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ . Eles também não são em  $L^2(\mathbb{R}^D)$ , mas mesmo assim o “produto escalar” com funções contínuas existe: Para  $\psi \in \mathcal{D} \doteq C(\mathbb{R}^D) \cap L^2(\mathbb{R}^D)$  escrevemos

$$(\delta_{\mathbf{a}}, \psi) := \int \delta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d^D \mathbf{x} \equiv \psi(\mathbf{a}) \quad e \quad (\psi, \delta_{\mathbf{a}}) := \overline{(\delta_{\mathbf{a}}, \psi)} = \overline{\psi(\mathbf{a})}.$$

A identidade

$$(\phi, \psi) = \int d^D \mathbf{a} \overline{\hat{\phi}(\mathbf{a})} \hat{\psi}(\mathbf{a})$$

pode ser agora lida como a Eq. (19):

$$(\phi, \psi) = \int d^D \mathbf{a} (\phi, \delta_{\mathbf{a}}) (\delta_{\mathbf{a}}, \psi). \quad (26)$$

Então a família  $\{\delta_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^D\}$  também é uma BON contínua em  $L^2(\mathbb{R}^D)$ . Escrevemos também

$$\psi = \int d^D \mathbf{a} (\delta_{\mathbf{a}}, \psi) \delta_{\mathbf{a}}.$$

---

<sup>9</sup>Mais rigorosamente falando,  $e_{\mathbf{k}}$  é uma aplicação linear (um “funcional”) de  $\mathcal{D}$  em  $\mathbb{C}$ . O valor de  $e_{\mathbf{k}}$  aplicado em  $\psi \in \mathcal{D}$  designamos, em abuso de notação, por  $(e_{\mathbf{k}}, \psi)$ .



**BON's contínuas em  $\mathcal{H}$  arbitrário** [7, Cap. II. C. 2]. Que tipo de objeto pode substituir as funções  $e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  ou distribuições  $\delta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$  num espaço de Hilbert geral  $\mathcal{H}$ ? Naqueles exemplos, as funções  $e_{\mathbf{k}}$  (ou distribuições  $\delta_{\mathbf{a}}$ ) podem ser encaradas como aplicações lineares de um certo subespaço denso para os números complexos, ou seja, funcionais.

Em geral, escolha-se um sub-espaço denso  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  e considera-se as aplicações lineares de  $\mathcal{D}$  em  $\mathbb{C}$  (contínuas numa certa topologia). O conjunto de tais funcionais é também um espaço linear, chamado o *dual* de  $\mathcal{D}$ , em símbolos  $\mathcal{D}'$ . O espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  pode ser considerado como subespaço de  $\mathcal{D}'$ , identificando  $\psi \in \mathcal{H}$  com a aplicação<sup>10</sup>

$$\mathcal{D} \ni \phi \mapsto (\psi, \phi) \in \mathbb{C}.$$

Então temos as inclusões

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$$

(“Tripla de Gelfand” ou “*rigged Hilbert space*” [4]). Abusando a notação, vamos denotar uma aplicação  $\chi \in \mathcal{D}'$  por

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \phi &\mapsto (\chi, \phi), \end{aligned}$$

como se tratasse de um produto escalar. Consequentemente definimos para  $\phi \in \mathcal{D}, \chi \in \mathcal{D}'$  e  $c \in \mathbb{C}$ :

$$(\phi, \chi) \doteq \overline{(\chi, \phi)}, \quad (c\chi, \phi) \doteq \bar{c}(\chi, \phi).$$

Os elementos de  $\mathcal{D}'$  são chamados de *vetores generalizados* ou também de *bra's*.

Uma *BON contínua* sobre  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  é uma família de vetores generalizados  $\{\chi_k \in \mathcal{D}', k \in \Omega\}$ , onde  $\Omega$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  para algum  $n$ , tal que para todo  $\psi \in \mathcal{D}$  vale

$$(\psi, \psi) = \int_{\Omega} d^n k (\psi, \chi_k) (\chi_k, \psi). \quad (27)$$

Escrevemos como antes formalmente

$$\psi = \int_{\Omega} d^n k (\chi_k, \psi) \chi_k. \quad (28)$$

**Relações de ortogonalidade e de completeza.** Se  $\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots\}$  é uma BON a relação de completeza (14) pode ser escrita

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_{\varphi_i} = \mathbf{1}, \quad (29)$$

onde  $P_{\varphi}$  é o projetor definido na Eq. (8) para  $n = 1$ . Analogamente, se  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  é um subespaço e  $\chi \in \mathcal{D}'$  um vetor generalizado, denotamos a aplicação  $\phi \mapsto (\chi, \phi)\chi$  de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}'$  por  $P_{\chi}$ :

$$P_{\chi} \phi := (\chi, \phi)\chi. \quad (30)$$

Se  $\{\chi_k, k \in \Omega\}$  é uma BON contínua sobre  $\mathcal{D}$ , a equação (28) pode ser agora escrita como

$$\int_{\Omega} d^n k P_{\chi_k} = \mathbf{1}. \quad (31)$$

<sup>10</sup>A topologia em  $\mathcal{D}$  deve ser tal que esta aplicação seja contínua.

Se o espaço de Hilbert for o  $L^2(\mathbb{R}^D)$ , então a relação de completeza pode ser escrita como

$$\sum_i \overline{\varphi_i(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (32)$$

$$\int_{\Omega} d^n k \overline{\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})} \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (33)$$

no caso de uma BON ou BON contínua, respetivamente.

**Notação de Dirac** [7, Cap. II. B]. (Veja também [1, Cap. 3] no caso da dimensão finita.) Dado um subespaço  $\mathcal{D}$  com dual  $\mathcal{D}'$ , é costume chamar os vetores em  $\mathcal{D}$  de *ket's*, e os vetores generalizados em  $\mathcal{D}'$  de *bra's*.<sup>11</sup> Na notação de Dirac, os kets são denotados por  $|\phi\rangle \in \mathcal{D}$ , e os bra's de  $\langle\chi| \in \mathcal{D}'$ . A imagem de  $|\phi\rangle \in \mathcal{D}$  sob  $\langle\chi| \in \mathcal{D}'$  (a qual nós temos denotado por  $(\chi, \phi)$ ) é denotado por  $\langle\chi|\phi\rangle$  – um *bra-cket*. Como acima, os vetores  $\psi \in \mathcal{H}$  são considerados casos especiais de vetores generalizados, e consequentemente, o produto escalar é escrito como  $\langle\psi|\phi\rangle$ , sendo interpretado como a imagem de  $|\phi\rangle$  sob o bra  $\langle\psi| \in \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ .

Com esta notação, o projetor  $P_\phi$  (??) pode ser escrito como  $P_\phi = \|\phi\|^{-2} |\phi\rangle\langle\phi|$  ou, se  $\phi$  é normalizado:

$$P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad \text{se } \|\phi\| = 1, \quad (34)$$

e similarmente a aplicação  $P_\chi$  da Eq. (30). Com isso, as relações de completeza (29) e (31) escrevem-se

$$\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbf{1},$$

$$\int_{\Omega} d^n k |\chi_{\mathbf{k}}\rangle\langle\chi_{\mathbf{k}}| = \mathbf{1},$$

respetivamente.

## 2 Teorema espectral

### 2.1 Em espaços vetoriais de dimensão finita

Literatura: Cap. 3.5 em [1].

**Operadores e matrizes hermiteanos.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  com produto escalar  $(\cdot, \cdot)$ , e seja  $A$  um operador em  $V$ . O operador *adjunto* de  $A$ , em símbolos  $A^*$ , é o operador definido por

$$(A^*u, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in V. \quad (35)$$

(Exercício: Mostre que isso define um operador. Dica: Lema de Riesz.) Um operador  $A$  é chamado de *hermiteano* se  $A^* = A$ , ou seja, se para todos  $u, v \in V$  vale  $(u, Av) = (Au, v)$ .

<sup>11</sup>Notação de [7]:  $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}' = \mathcal{E}^*$ . Vale mencionar que, em contraste ao que está sendo sugerido na literatura [7, Cap. II.B.2], não existe “um subespaço discriminado”,  $\mathcal{D}$ , de estados. Dependendo do problema, escolhe-se um subespaço adequado, por exemplo para empregar o teorema espectral de um dado observável, ver abaixo.

**Exemplo 15** Seja  $\underline{A}$  uma matriz  $n \times n$  com entradas  $A_{ij}$  complexas. Ela será considerada como um operador no espaço vetorial  $\mathbb{C}^n$ : Ela aplica o vetor  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  no vetor  $\underline{A}\mathbf{v}$  com componentes

$$(\underline{A}\mathbf{v})_i \doteq \sum_{j=1}^n A_{ij}v_j. \quad (36)$$

Verificamos que o operador adjunto  $\underline{A}^*$  corresponde à matriz transposta e conjugada:

$$(\underline{A}^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}. \quad (37)$$

Realmente, recordando o produto escalar (4) em  $\mathbb{C}^n$ , temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \underline{A}\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n \overline{u_i}(\underline{A}\mathbf{v})_i = \sum_{i,j=1}^n \overline{u_i}A_{ij}v_j = \sum_{i,j=1}^n \overline{\overline{A_{ij}u_i}v_j} = \sum_{i,j=1}^n \overline{(\underline{A}^*)_{ji}u_i}v_j = \sum_{i=1}^n \overline{(\underline{A}^*\mathbf{u})_j}v_j \\ &= (\underline{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (38)$$

Em particular, uma matriz é hermiteana se  $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ .  $\square$

Esse exemplo não é tal particular: Todo espaço vetorial  $V$  da dimensão  $n$  é isomorfo com  $\mathbb{C}^n$ , e os operadores (hermiteanos) em  $V$  correspondem a matrizes (hermiteanas). Em detalhes, seja  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma BON em  $V$ . Definimos uma aplicação linear  $U$  de  $V$  sobre  $\mathbb{C}^n$  por

$$U\left(\sum_i c_i u_i\right) \doteq (c_1, \dots, c_n)^T. \quad (39)$$

Ela é obviamente bijetor, e ela preserve o produto escalar: Para  $v = \sum_i c_i u_i$  e  $v' = \sum_i c'_i u_i$  vale

$$(v, v') = \left(\sum_i c_i u_i, \sum_j c'_j u_j\right) = \sum_{i,j} \overline{c_i} c'_j (u_i, u_j) = \sum_i \overline{c_i} c'_i = (Uv, Uv').$$

Um operador  $U$  com essa propriedade,  $(Uv, Uv') = (v, v')$ , é chamado de *unitário*. (É fácil mostrar que isso é equivalente com  $U^* = U^{-1}$ .) A um operador  $A$  em  $V$  corresponde um operador  $\underline{A}$  em  $\mathbb{C}^n$ , ou seja uma matriz, pela definição

$$\underline{A} \doteq UAU^{-1}. \quad (40)$$

Ao operador adjunto  $A^*$  corresponde a matriz adjunta,  $UA^*U = (UAU^{-1})^*$ . Em particular, se  $A$  é hermiteano,  $A = A^*$ , o mesmo vale para a matriz correspondente,  $\underline{A} = \underline{A}^*$ .

A matriz que corresponde ao operador unidade  $\mathbb{1}$ ,  $\mathbb{1}v = v$ , é a matriz-unidade  $I$ ,  $I_{ij} \doteq \delta_{ij}$ ,  $U\mathbb{1}U^{-1} = I$ , independentemente da BON com qual  $U$  é definido.

**BON's de auto-vetores de operadores hermiteanos.** Recordamos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um *auto-valor* de  $A$  se existe um vetor  $v \neq 0$  tal que  $Av = \lambda v$ , ou seja,

$$(A - \lambda\mathbb{1})v = 0. \quad (41)$$

Tal vetor  $v$  é chamado de *auto-vetor* de  $A$ . Se existem  $d$  auto-vetores linearmente independentes com o mesmo auto-valor  $\lambda$ , chamamos  $\lambda$  de degenerado com *multiplicidade*  $d$ .

**Lemma 16** *Seja  $A$  um operador hermiteano. Então vale:*

*i) Todo auto-valor de  $A$  é real.*

*ii) Auto-vetores de  $A$  com auto-valores diferentes são ortogonais, mais precisamente: Sejam  $\lambda \neq \lambda'$  auto-valores diferentes do operador  $A$ , com auto-vetores correspondentes  $v, v'$ . Então  $(v, v') = 0$ .*

*Comprovante.* Sejam  $\lambda, \lambda'$  auto-valores com auto-vetores correspondentes  $v, v'$ . Então vale

$$\begin{aligned}(v, Av') &= (v, \lambda'v') = \lambda' (v, v') \\ (Av, v') &= (\lambda v, v') = \bar{\lambda} (v, v').\end{aligned}$$

Como os lados esquerdos coincidem (pois  $A$  é hermiteano), concluímos que

$$(\bar{\lambda} - \lambda')(v, v') = 0. \quad (42)$$

No caso  $v' = v$  e  $\lambda' = \lambda$ , essa equação é  $(\bar{\lambda} - \lambda) \|v\|^2 = 0$ . Como  $\|v\|^2 \neq 0$ , concluímos que  $\bar{\lambda} = \lambda$ , ou seja,  $\lambda$  é real. Para mostrar o item *ii*), pegamos  $\lambda \neq \lambda'$ . Agora a Eq. (42) é  $(\lambda - \lambda')(v, v') = 0$  e implica que  $(v, v') = 0$ , como afirmado em *ii*).  $\square$

**Teorema 17** *Todo operador hermiteano possui uma BON de auto-vetores.*

*Comprovante.* Num primeiro passo, pegamos uma BON de  $V$  e consideramos o isomorfismo  $U$  definido em (39). A Eq. (41) é equivalente com

$$(\underline{A} - \lambda I)\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \neq 0,$$

onde  $\underline{A} = UAU^{-1}$  e  $\mathbf{v} \doteq Uv$ . Isso implica que a matriz  $\underline{A} - \lambda I$  não é injetor, equivalentemente, a determinante dela é zero. Mas a determinante é um polinômio do grau  $n$ , então possui zeros pelo teorema fundamental da álgebra. Seja  $\lambda_1$  um dos zeros. Agora revertamos a argumentação: O fato que a determinante da matriz  $\underline{A} - \lambda_1 I$  é zero implica que ela não é injetor, ou seja, existe algum vetor  $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  tal que  $(\underline{A} - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 = 0$ . Então o vetor  $u_1 \doteq U^{-1}\mathbf{u}_1$  satisfaz  $Au_1 = \lambda_1 u_1$ .

Num segundo passo, consideramos o complemento ortogonal de  $u_1$ ,  $V_1 \doteq (\mathbb{C}u_1)^\perp$ , que tem dimensão  $n - 1$ . Como o operador  $A$  é hermiteano, ele deixa  $V_1$  invariante: Para todo  $v_1 \in V_1$  vale

$$(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1) = \lambda_1(u_1, v_1) = 0,$$

o seja,  $Av_1$  também está contido em  $V_1$ . Então a restrição  $A_1 \doteq A|_{V_1}$  é um operador (ou endomorfismo) em  $V_1$ ,<sup>12</sup> e obviamente ele também é hermiteano. Agora pegamos uma BON do subespaço  $V_1$ , e repetimos o argumento do primeiro passo para construir um auto-vetor  $u_2 \in V_1$ .

No terceiro passo consideramos o espaço  $V_2 \doteq \text{span}\{u_1, u_2\}^\perp$ , verificamos que  $A$  deixa ele invariante também, e construímos um auto-vetor  $u_3 \in V_2$  como antes; Assim vai até o  $n - 1$ -ésimo passo que fornece um auto-vetor  $u_{n-1} \in V_{n-2} \doteq \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-2}\}^\perp$ .

No último passo consideramos o espaço  $V_{n-1} \doteq \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp$ . Ele é unidimensional, ou seja, existe um vetor  $u_n \in V_{n-1} \setminus \{0\}$  tal que  $V_{n-1} = \mathbb{C}u_n$ . Verificamos como antes que  $A$  deixa  $V_{n-1}$  invariante. Isso implica que existe algum  $\lambda_n$  tal que  $Au_n = \lambda_n u_n$ , terminando a construção.  $\square$

<sup>12</sup>( $A_1$  é definido por  $A_1 v_1 \doteq Av_1$  para  $v_1 \in V_1$ .)

## 2.2 Operadores auto-adjuntos

Seja  $A$  um operador num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se  $A$  é contínuo, o domínio coincide (sem perder generalidade) com o espaço  $\mathcal{H}$  inteiro. Neste caso, o operador *adjunto*  $A^*$  é definido por:  $A^*\psi$  é o único vetor tal que para todo  $\phi \in \mathcal{H}$  vale

$$(A^*\psi, \phi) = (\psi, A\phi). \quad (43)$$

A maioria de operadores que correspondem à observáveis na MQ são não-contínuos. Um operador não-contínuo  $A$  geralmente não pode ser definido em todos vetores, mas apenas no chamado *domínio*,  $D(A)$ . Neste caso, definimos primeiro o domínio de  $A^*$  por

$$D(A^*) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \phi \mapsto (\psi, A\phi) \text{ é contínuo para } \phi \in D(A)\}.$$

Se  $\psi$  está em esse espaço, o Lema de Riesz afirma que existe um único vetor  $\chi \in \mathcal{H}$  tal que vale  $(\chi, \phi) = (\psi, A\phi)$  para todo  $\phi \in D(A)$ . Como  $\chi$  depende obviamente linearmente de  $\psi$ , podemos escrever  $\chi =: A^*\psi$ . Isto define o operador adjunto  $A^*$  de  $A$ .

O operador  $A$  é chamado de *hermiteano* se  $D(A) \subset D(A^*)$  e  $A^*|_{D(A)} = A$ . Equivalentemente,  $A$  é hermiteano se para todo  $\phi, \psi \in D(A)$  vale

$$(\psi, A\phi) = (A\psi, \phi). \quad (44)$$

Um operador  $A$  é chamado de *auto-adjunto* sse

$$D(A^*) = D(A) \quad \text{e} \quad A^* = A.$$

Obviamente,  $A$  hermiteano implica  $A$  auto-adjunto, mas a inversão vale somente para operadores contínuos. Os operadores que correspondem a observáveis na Mecânica Quântica devem ser auto-adjuntos, por que eles sempre possuem uma BON de auto-vetores (generalizados), ver abaixo, propriedade indispensável para a interpretação do formalismo.

**Exemplo 18** O operador  $X$  de multiplicação (correspondente ao observável posição na MQ), definido por  $(X\psi)(x) \doteq x\psi(x)$  no domínio

$$D(X) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty\},$$

é um operador auto-adjunto em  $L^2(\mathbb{R})$ . Demonstração em [11,13]. □

## 2.3 Teorema espectral

No seguinte seja  $A$  um operador em algum espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , com domínio  $D(A)$ . Recordamos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um auto-valor de  $A$  se existe um vetor  $\varphi \neq 0$  tal que<sup>13</sup>

$$(A - \lambda\mathbb{1})\varphi = 0. \quad (45)$$

---

<sup>13</sup>Neste caso, obviamente o operador  $A - \lambda\mathbb{1}$  não é injetor. Mais geralmente, o *espectro* de  $A$ , em símbolos  $\sigma(A)$ , é o conjunto dos números  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que o operador  $A - \lambda\mathbb{1}$  não possui um inverso contínuo. Supomos que o operador  $A$  possui auto-valores. Ele obviamente deixa invariante o span de todos auto-vetores para todos auto-valores. Sendo hermiteano, ele também deixa invariante o complemento ortogonal,

$$\mathcal{H}_{\text{cont}} := \{\text{auto-vetores}\}^\perp.$$

Então podemos considerar a restrição de  $A$  em  $\mathcal{H}_{\text{cont}}$ . Este operador obviamente não tem auto-valores, e o espectro dele é chamado de *espectro contínuo* de  $A$ , em símbolos  $\sigma_{\text{cont}}(A)$ :

$$\sigma_{\text{cont}}(A) := \sigma(A|_{\mathcal{H}_{\text{cont}}}).$$

(O espectro contínuo pode conter auto-valores!) Os elementos chamaremos de auto-valores generalizados.

Se existem  $d$  auto-vetores linearmente independentes com o mesmo auto-valor  $\lambda$ , chamamos  $\lambda$  de degenerado com *multiplicidade*  $d$ . Observa que a Eq. (45) é equivalente com

$$(\varphi, (A^* - \bar{\lambda}\mathbf{1})\psi) = 0$$

para todos  $\psi$  no domínio do adjunto  $A^*$ . Isso motiva a definição de um auto-vetor generalizado: Supomos que nos temos discriminado um subespaço denso  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ .

**Definição 19** Um vetor generalizado  $\chi \in \mathcal{D}'$  é chamado de um *auto-vetor generalizado* de  $A$  com auto-valor generalizado  $\lambda$  se para todo  $\psi \in \mathcal{D} \cap D(A^*)$  com  $A\psi \in \mathcal{D}$  vale

$$(\chi, (A^* - \bar{\lambda}\mathbf{1})\psi) = 0. \quad (46)$$

(Lembra que agora  $(\chi, \cdot)$  não é necessariamente o produto escalar, mas sim a ação linear  $\chi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .) As vezes escrevemos simbolicamente

$$(A - \lambda\mathbf{1})\chi = 0 \quad (47)$$

em vez de (46).

Recordamos que num espaço de Hilbert de dimensão finita todo operador hermitiano possui uma BON de auto-vetores. A afirmação análoga, o teorema espectral, vale no caso de dimensão infinita para operadores auto-adjuntos.

**Exemplo 20** *i)* Consideramos o operador multiplicação  $X$  do Exemplo 18: A família  $\{\delta_a, a \in \mathbb{R}\}$  é uma BON contínua em  $L^2(\mathbb{R})$  de auto-vetores generalizados de  $X$  sobre  $\mathcal{D} := C_0(\mathbb{R})$ ,<sup>14</sup> pois para todo  $\phi \in \mathcal{D}$  e  $a \in \mathbb{R}$  vale  $X^*\phi = X\phi$  e

$$(\delta_a, X\phi) = a\phi(a) = a(\delta_a, \phi).$$

*ii)* A família de ondas planas  $\{e_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^D\}$ , ver Eq. (21), é uma BON contínua em  $L^2(\mathbb{R}^D)$  de auto-vetores generalizados do operador (correspondente ao momento na mecânica quântica),  $P_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ , sobre  $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$ ,<sup>15</sup> pois para todo  $\phi \in \mathcal{D}$  e  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$  vale  $P_j^*\phi = P_j\phi$  e

$$(e_{\mathbf{k}}, P_j\phi) = \frac{1}{i}\widehat{(\partial_j\phi)}(\mathbf{k}) = k_j\hat{\phi}(\mathbf{k}) = k_j(e_{\mathbf{k}}, \phi).$$

Então,  $e_{\mathbf{k}}$  é um auto-vetor generalizado da componente- $j$  do momento,  $P_j$ , com auto-valor generalizado  $k_j$ .

*iii)* A mesma família de ondas planas no  $\mathbb{R}^D$  é uma BON contínua de auto-vetores generalizados do operador Laplace  $\Delta$  sobre  $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$ , pois este operador é hermitiano e para todo  $\phi \in \mathcal{D}$  e  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$  vale

$$(e_{\mathbf{k}}, \Delta\phi) = \widehat{(\Delta\phi)}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^2(e_{\mathbf{k}}, \phi). \quad (48)$$

□

O teorema espectral afirma que essa situação prevalece para todo operador auto-adjunto. Existem vários enunciados equivalentes desse teorema. Os matemáticos preferem a forma usando a “medida com valores projetores” [11, 13]. Nós vamos conhecer este teorema numa forma mais útil para a mecânica quântica, a qual se encontra em [4] e [3].

<sup>14</sup>Denotamos por  $C_0(\mathbb{R})$  as funções contínuas com suporte limitado.

<sup>15</sup>Denotamos por  $C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$  as funções suaves (infinitamente deriváveis) com suporte limitado.

**Teorema 21 (Teorema espectral nuclear)** *Seja  $A$  um operador auto-adjunto. Então vale:*

*i) O espaço  $\mathcal{H}$  decompõe em três partes<sup>16</sup>*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pp}}(A) \oplus \mathcal{H}_{\text{ac}}(A) \oplus \mathcal{H}_{\text{sc}}(A), \quad (49)$$

*invariantes sob  $A$ , com as seguintes propriedades.*

$\mathcal{H}_{\text{pp}}(A)$  *possui uma BON  $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$  de auto-vetores de  $A$ .*

$\mathcal{H}_{\text{ac}}(A)$  *possui uma BON contínua de auto-vetores generalizadas de  $A$ ; mais precisamente: Existe uma família de vetores generalizados sobre algum subespaço denso  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_{\text{ac}}(A)$*

$$\{\chi_{k,j} \in \mathcal{D}', k \in \Omega, j = 1, \dots, d(k)\}$$

*onde  $\Omega$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  para algum  $n$ , tal que para todo  $\psi \in \mathcal{D}$  vale*

$$\psi = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{d(k)} (\chi_{k,j}, \psi) \chi_{k,j} d^n k \quad (50)$$

*no sentido da Eq. (28), e tal que vale  $A\chi_{k,j} = \lambda(k) \cdot \chi_{k,j}$  no sentido da Eq. (47).*

*Finalmente, em  $\mathcal{H}_{\text{sc}}(A)$  existe uma BON “generalizada” de auto-vetores generalizados, onde a medida  $d^n k$  em (50) é substituída por uma medida  $d\mu(k)$  que é singular contínua [13].*

*ii) O domínio  $D(A)$  no qual  $A$  é auto-adjunto é dado por*

$$D(A) = \left\{ \psi \mid \sum_i \lambda_i^2 |(\varphi_i, \psi)|^2 + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda(k)^2 |(\chi_{k,j}, \psi)|^2 d^n k < \infty \right\}, \quad (51)$$

*e em  $\psi \in D(A)$  o operador  $A$  age como*

$$A\psi = \sum_i \lambda_i (\varphi_i, \psi) \varphi_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda(k) (\chi_{k,j}, \psi) \chi_{k,j} d^n k. \quad (52)$$

Os índices (pp, ac, sc) se referem à medida espectral do operador  $A$  [13]: pp = “pure point”, ac = “absolutamente contínuo”, sc = “singular contínuo”.

A maioria dos operadores de interesse na MQ não possuem espectro “singular contínuo”, ou seja, o subespaço  $\mathcal{H}_{\text{sc}}(A)$  é ausente. Vale mencionar que na mecânica quântica no caso do Hamiltoniano  $H$ , o espaço  $\mathcal{H}_{\text{pp}}(H)$  coincide com os estados ligados e  $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H)$  com os estados de espalhamento.

O número  $d(k)$  é a multiplicidade do auto-valor generalizado  $\lambda(k)$ . O conjunto dos auto-valores de  $A|_{\mathcal{H}_{\text{pp}}}$  é o chamado *espectro discreto* de  $A$  (!!), e o conjunto dos números  $\lambda(k)$ ,  $k \in \Omega$ , é o chamado *espectro contínuo*.

**Lemma 22** *O espectro de um operador auto-adjunto é real.*

*Comprovante.* A relação de completeza (27) implica as duas equações

$$\begin{aligned} (\psi, A\phi) &= \int_{\Omega} d\mu(k) \overline{(\chi_k, \psi)} (\chi_k, A\phi) = \int_{\Omega} d\mu(k) \overline{\lambda(k)} \overline{(\chi_k, \psi)} (\chi_k, \phi), \\ (A^*\psi, \phi) &= \int_{\Omega} d\mu(k) \overline{(\chi_k, A^*\psi)} (\chi_k, \phi) = \int_{\Omega} d\mu(k) \lambda(k) \overline{(\chi_k, \psi)} (\chi_k, \phi). \end{aligned}$$

<sup>16</sup>Escrevemos  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  se  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$ .

(Na primeira linha escrevemos  $(\chi_k, A\phi) = (\chi_k, A^*\phi) = \overline{\lambda(k)}(\chi_k, \phi)$  pois  $A = A^*$  e  $\chi_k$  é um auto-vetor generalizado no sentido da Eq. (46). Na segunda linha escrevemos  $\overline{(\chi_k, A^*\psi)} = \overline{\lambda(k)}(\chi_k, \psi) = \lambda(k)\overline{(\chi_k, \psi)}$ .) Como  $A$  é auto-adjunto, as duas linhas coincidem, implicando em  $\lambda(k) = \lambda(k)$  para todo  $k \in \Omega$ .  $\square$

**Os projetores espectrais.** Dado um operador auto-adjunto  $A$  com uma BON generalizada  $\{\chi_k, k \in \Omega\}$  de auto-vetores generalizados, definimos para cada  $I \subset \mathbb{R}$  um operador  $E_I$  por

$$E_I\psi := \int_{k:\lambda(k) \in I} d\mu(k) (\chi_k, \psi) \chi_k. \quad (53)$$

Verifique-se que este operador é um projetor ortogonal.<sup>17</sup> (Este fato vamos também mostrar em frente, veja Eq. (55).) Ele é chamado o *projetor espectral* do operador  $A$  para o intervalo  $I$ . Vale destacar que os projetores espectrais são unicamente associados com o operador  $A$ , enquanto que os dados  $\mathcal{D}, \Omega, d\mu(k), \chi_k$  caracterizando a BON de auto-vetores generalizados para o operador  $A$  não são únicos. A família de projetores  $E_I, I \subset \mathbb{R}$  é chamada a medida com valores projetores associada com  $A$ . O teorema espectral pode ser formulado em termos dessa medida, ver [11, 13].

**Cálculo funcional.** Literatura: Cap. 3.5 (“Functions of Matrices”, p. 224 f) em [1] no caso da dimensão finita.

Seja  $A$  um operador auto-adjunto em  $\mathcal{H}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função mensurável [14, 15]. Então define-se o operador  $f(A)$  pela seguinte maneira: Seja  $\{\chi_k\}$  uma BON generalizada de auto-vetores generalizados cuja existência foi afirmada no teorema espectral 21. O domínio de  $f(A)$  é dado por

$$D(f(A)) := \left\{ \phi \in \mathcal{H} : \underbrace{\int_{\Omega} d\mu(k) |f(\lambda(k))|^2 |(\chi_k, \phi)|^2}_{= \|f(A)\phi\|^2} < \infty \right\}.$$

Para  $\phi \in D(f(A))$  define-se

$$f(A)\phi := \int_{\Omega} d\mu(k) f(\lambda(k)) (\chi_k, \phi) \chi_k$$

no sentido da Eq. (28). (Exemplo:  $A^{-1}$ !)

Um fato importante é que a aplicação  $f \mapsto f(A)$  é um isomorfismo de álgebras involutivas: Em particular, vale

$$(f \cdot g)(A) = f(A)g(A), \quad \bar{f}(A) = (f(A))^*, \quad 1(A) = \mathbf{1}, \quad (54)$$

onde as funções  $f \cdot g$  e  $\bar{f}$  são definidas por  $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$  e  $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$ , e  $1$  é a função constante:  $1(x) = 1$ .

Como exemplo, aplicamos o cálculo funcional à função característica  $c_I$  de um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , veja Eq. (??). Obviamente, o operador  $c_I(A)$  é justamente o operador  $E_I$  definido na Eq. (53). Como a função característica satisfaz  $c_I \cdot c_I = c_I = \bar{c}_I$ , a Eq. (54) implica

$$c_I(A)c_I(A) = c_I(A) = c_I(A)^*. \quad (55)$$

Isto significa justamente que o operador  $c_I(A)$  é um projetor ortogonal, como afirmado acima.

<sup>17</sup>Um *projetor* é um operador  $P$  com  $P^2 = P$ . ( $P^2 := P \circ P$ .) Um projetor *orthogonal* é um projetor hermitiano.



**Mecânica quântica.** Na mecânica quântica, estados de um sistema são descritos por vetores normados em um espaço de Hilbert,  $\|\psi\| = 1$ . Ademais, observáveis do sistema são descritos por operadores auto-adjuntos neste espaço, e os possíveis valores de um observável constituem justamente o espectro do operador correspondente. A probabilidade que a medição de um observável  $A$  resulta em algum valor no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , se o sistema for preparado no estado correspondente a  $\psi \in \mathcal{H}$ , é dada por

$$\|E_I \psi\|^2 \equiv (\psi, E_I \psi) = \int_{k: a(k) \in I} d\mu(k) |(\chi_k, \psi)|^2, \quad (56)$$

onde  $E_I \equiv c_I(\hat{A})$  é o projetor espectral do operador auto-adjunto correspondente a  $A$ .

A evolução temporal do sistema é descrito por uma curva  $t \mapsto \psi_t$  em  $\mathcal{H}$ , regida pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_t = \hat{H} \psi_t, \quad (57)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano do sistema. Se nos temos uma BON de auto-vetores generalizados de  $\hat{H}$  na mão, a solução dessa equação pode ser construída usando o cálculo funcional: Defina

$$U_t := \exp(-it\hat{H}/\hbar)$$

no sentido do cálculo funcional. Este operador é unitário<sup>18</sup> para todo  $t$ , e a família  $t \mapsto U_t$  satisfaz a propriedade

$$U_t U_s = U_{t+s}, \quad U_0 = \mathbf{1}.$$

Mais importante, ela satisfaz a EDO

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_t = \hat{H} U_t. \quad (58)$$

Isso implica que para qualquer  $\phi$  no domínio do Hamiltoniano, a curva  $\psi_t := U_t \phi$  satisfaz a equação de Schrödinger (57) com condição inicial  $\psi_0 = \phi$ .

## 2.4 Análise espectral do operador Laplace

O operador Laplace  $\Delta$  no  $\mathbb{R}^n$  é definido por

$$\Delta f \doteq \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f.$$

### 2.4.1 Considerações gerais.

Nos consideramos uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitada e conexa, cuja borda  $\partial\Omega$  é uma hiper-superfície suave (pelo menos em pedaços). O Laplace é considerado como um operador no espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$  com 2 domínios diferentes, correspondentes às condições de Dirichlet ou Neumann, respectivamente:

$$C_D^2(\Omega) := \{f \in C^2(\Omega) \mid f(\mathbf{r}) = 0 \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega\} \quad (59)$$

$$C_N^2(\Omega) := \{f \in C^2(\Omega) \mid \mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = 0 \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega\}. \quad (60)$$

Aquí,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à hiper-superfície  $\partial\Omega$ .

<sup>18</sup>Para demonstrar isto, escrevemos  $U_t = f(\hat{H})$ , onde  $f(x) := \exp(-itx/\hbar)$ . A Eq. (54) implica

$$U_t U_t^* = f(\hat{H}) \bar{f}(\hat{H}) = (f \cdot \bar{f})(\hat{H}) = 1(\hat{H}) = \mathbf{1},$$

pois  $f \cdot \bar{f}$  é a função constantemente 1.

**Lemma 23** *O operador Laplace, com um dos dois domínios (59) ou (60), satisfaz as seguintes propriedades.*

- i) *Ele é hermiteano com respeito ao produto escalar em  $L^2(\Omega)$ .*
- ii) *Todos auto-valores são não-positivos ( $\leq 0$ ). Com domínio (59), 0 não é um auto-valor, enquanto com domínio (60), 0 é sim um auto-valor (com auto-vetores as funções constantes).*

*Comprovante.*

□

Como os auto-valores são negativos, podemos escrever eles na forma  $\lambda = -k^2$ . Com isso, a equação (41) para os auto-vetores  $v$  tem a forma

$$(\Delta + k^2 \mathbf{1})v = 0. \quad (61)$$

Essa equação é chamada de *equação de Helmholtz*.

**Teorema 24** *O operador Laplace, com um dos dois domínios (59) ou (60), possui uma BON de auto-funções  $v_n \in C_{D/N}^2(\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , com auto-valores  $\lambda_n$  correspondentes,*

$$\Delta v_n = \lambda_n \cdot v_n,$$

*com a seguinte propriedade: A seqüência  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$  tal rápido que a serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty \quad (62)$$

*converge.*

Uma demonstração desse teorema encontra-se em [9]. Nos vamos adotar a convenção que os auto-calores são enumerados de tal maneira que  $0 = \lambda_0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$ , e o auto-valor  $\lambda_0 \equiv 0$  aparece só no caso de CC de Neumann.

A convergência da serie (62) implica na convergência *uniforme* da expansão de uma função em termos das auto-funções. Recordamos que para toda função  $f \in L^2(\Omega)$  a série<sup>19</sup>

$$\sum_{n=1}^N (v_n, f) v_n \quad (63)$$

converge para  $f$  no sentido de  $L^2$  se  $N \rightarrow \infty$ . Para  $r \in \mathbb{N}$  denotamos por  $C_D^{2r}(\Omega)$  e  $C_N^{2r}(\Omega)$  os espaços de funções  $f$  em  $C^{2r}(\Omega)$  tal que  $f, \Delta f, \dots, \Delta^{r-1} f$  satisfazem a condição de contorno respectiva:

$$\begin{aligned} C_D^{2r}(\Omega) &:= \{f \in C^{2r}(\Omega) \mid f = \Delta f = \dots = \Delta^{r-1} f = 0 \text{ em } \partial\Omega\} \\ C_N^{2r}(\Omega) &:= \{f \in C^{2r}(\Omega) \mid \mathbf{n} \cdot \nabla f = \mathbf{n} \cdot \nabla \Delta f = \dots = \mathbf{n} \cdot \nabla \Delta^{r-1} f = 0 \text{ em } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

**Corolário 25** *Sejam  $v_n \in C_{D/N}^2(G)$  uma BON de auto-funções do operadores Laplace que satisfazem a seguinte propriedade: Existe um número  $M > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $\mathbf{r} \in \Omega$  vale*

$$|v_n(\mathbf{r})| \leq M. \quad (64)$$

- i) *Para  $f \in C_{D/N}^{2r}(\Omega)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , os coeficientes de Fourier caem como*

$$|(v_n, f)| \leq \frac{c}{|\lambda_n|^r}. \quad (65)$$

<sup>19</sup>Lembra que  $(v_n, f) = \int_{\Omega} d^n \mathbf{r} \overline{v_n(\mathbf{r})} f(\mathbf{r})$ .

ii) Para  $f \in C^4_{D/N}(\Omega)$  a série (63) converge para  $f$  uniformemente, e para  $f \in C^6_{D/N}(\Omega)$  a série

$$\sum_{n=1}^N (v_n, f) \Delta v_n \equiv \sum_{n=1}^N (v_n, f) \lambda_n v_n \quad (66)$$

converge para  $\Delta f$ , também uniformemente.

A última afirmação significa que o operador Laplace “age embaixo do somatório”:

$$\Delta f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n,$$

uniformemente.

*Comprovante.* Ad *i*). Recordamos a segunda identidade de Green:

$$\int_{\Omega} ((\Delta g)f - g\Delta f) d^n \mathbf{r} = \oint_{\partial\Omega} ((\nabla g)f - g\nabla f) \cdot d\mathbf{a}.$$

(Ela segue da regra de produto  $\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$ , e do teorema de Gauss.) Podemos supor que  $\lambda_n \neq 0$ . Nesse caso podemos escrever  $v_n = \frac{1}{\lambda_n} \Delta v_n$ . Então temos

$$\begin{aligned} (v_n, f) &= \frac{1}{\lambda_n} (\Delta v_n, f) \equiv \frac{1}{\lambda_n} \int_{\Omega} (\Delta \bar{v}_n) f d^n \mathbf{r} \\ &\stackrel{(IG)}{=} \frac{1}{\lambda_n} \left[ \int_{\Omega} \bar{v}_n \Delta f d^n \mathbf{r} + \oint_{\partial\Omega} ((\nabla v_n)f - v_n \nabla f) \cdot d\mathbf{a} \right] = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\Omega} \bar{v}_n \Delta f d^n \mathbf{r} \end{aligned}$$

Na Eq. (IG) usamos a identidade de Green, e depois descartamos os termos de contorno, pois ambos  $v_n$  e  $f$  satisfazem a condição de contorno (ou de Dirichlet ou de Neumann). Repetindo esse argumento  $r$  vezes, chegamos em

$$\begin{aligned} (v_n, f) &= \frac{1}{(\lambda_n)^r} \left[ \int_{\Omega} \bar{v}_n \Delta^r f d^n \mathbf{r} + \oint_{\partial\Omega} ((\nabla v_n) \Delta^{r-1} f - v_n \nabla \Delta^{r-1} f) \cdot d\mathbf{a} \right] \\ &= \frac{1}{(\lambda_n)^r} \int_{\Omega} \bar{v}_n \Delta^r f d^n \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Com isso temos

$$|(v_n, f)| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^r} |(v_n, \Delta^r f)| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^r} \|\Delta^r f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(No último passo usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que  $v_n$  é normado.) Por hipótese,  $\Delta^r f$  é uma função contínua numa região compacta e por isso é em  $L^2(\Omega)$ , ou seja,  $\|\Delta^r f\|_{L^2} < \infty$ .<sup>20</sup> Isso mostra a cota (65).

Ad *ii*). Usando (64), concluímos que para  $f \in C^4_{D/N}(\Omega)$  ( $r = 2$ ) os termos da série (63) satisfazem a cota

$$|(v_n, f) v_n(\mathbf{r})| \leq \frac{c}{\lambda_n^2}$$

para todo  $\mathbf{r} \in \Omega$ . Como a série  $\sum_n \lambda_n^{-2}$  converge pelo Teorema 24, o critério de Weierstrass (“teste M de Weierstrass”) é aplicável, afirmando que a série (63) converge uniformemente. Similarmente, para  $f \in C^6_{D/N}(\Omega)$  ( $r = 3$ ) os termos da serie (66) são uniformemente limitados por  $c|\lambda_n|^{-2}$ , então essa série converge uniformemente.

<sup>20</sup> ...

Ademais, por uma generalização do Lemma 32, o Laplace pode ser posto em evidência do somatório,  $\sum c_n \Delta v_n = \Delta \sum c_n v_n$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

Daremos alguns exemplos para o Teorema 24 no seguinte. A saber, consideremos como  $\Omega$  um intervalo na reta real, um retângulo em  $\mathbb{R}^2$  e um cubo no  $\mathbb{R}^n$ . No capítulo “Funções Especiais” consideremos ainda o disco em  $\mathbb{R}^2$ , a esfera em  $\mathbb{R}^3$  e a bola em  $\mathbb{R}^3$ . A análise espectral do Laplace em essas regiões levará às funções de Bessel, polinômios de Legendre, harmônicas esféricas e funções de Bessel esféricas.

### 2.4.2 Intervalo em $\mathbb{R}$ .

O operador Laplace em uma dimensão é justamente a segunda derivada,  $\Delta f = f''$ . Consideramos o Laplace como um operador no espaço de Hilbert  $L^2(I)$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo, com domínio contido em  $C^2(I)$ . Para obter um operador auto-adjunto (e não só hermiteano), precisamos restringir o domínio, por especificação de condições de contorno. Consideremos três domínios ou tipos de condições de contorno (CC de Dirichlet, Neumann ou periódicos), cada um implicando em uma família de auto-funções que fornece uma BON's em  $L^2([0, a])$ :

$$C_D^2([0, a]) := \{f \in C^2([0, a]) \mid f(0) = 0 = f(a)\} \quad (\text{CC de Dirichlet}) \quad (67)$$

$$C_N^2([0, a]) := \{f \in C^2([0, a]) \mid f'(0) = 0 = f'(a)\} \quad (\text{CC de Neumann}) \quad (68)$$

$$C_P^2([0, a]) := \{f \in C^2([0, a]) \mid f(0) = f(a), f'(0) = f'(a)\} \quad (\text{CC periódicas}) \quad (69)$$

Em  $C_D^2([0, a])$  consideramos a família  $\{u_n^D, n \in \mathbb{N}\}$ , onde

$$u_n^D(x) \doteq \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(k_n x), \quad k_n \doteq n \frac{\pi}{a}. \quad (70)$$

Em  $C_N^2([0, a])$ , consideramos a família  $\{u_n^N, n \in \mathbb{N}_0\}$ , onde ( $k_n$  como na Eq. (70))

$$u_n^N(x) \doteq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_n x), & n > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}, & n = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Em  $C_P^2([0, a])$ , consideramos a família  $\{u_n^P, n \in \mathbb{Z}\}$ , onde

$$u_n^P(x) \doteq \sqrt{\frac{1}{a}} \exp(ik_n x), \quad k_n \doteq n \frac{2\pi}{a}. \quad (72)$$

Observa que o  $k_n$  aqui é o duplo do que nas Eqs. (70) e (71).

**Teorema 26** Cada uma das três famílias  $\{u_n^D, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{u_n^N, n \in \mathbb{N}_0\}$  e  $\{u_n^P, n \in \mathbb{Z}\}$  fornece uma BON de auto-vetores do operador Laplace em  $L^2([0, a])$ .

Observe que os respectivos domínios nos quais o operador  $\Delta$  é auto-adjunto são maiores que os conjuntos  $C_D^2$ ,  $C_N^2$  e  $C_P^2$ , respectivamente: Eles são dados por (51).

*Comprovante.* Verifique-se facilmente que todas as funções são auto-vetores do operador  $\Delta$ .

Já verificamos no Exemplo 13 que a família  $\{u_n^P, n \in \mathbb{Z}\}$  é uma BON em  $L^2([0, a])$ . Dirichlet e Neumann: Siehe Handskript S. 34.  $\square$

### 2.4.3 Retângulo no $\mathbb{R}^2$

Separação de variáveis!

### 2.4.4 Disco no $\mathbb{R}^2$

Aquí, a região  $\Omega$  seja o disco com raio  $a$ ,

$$D_a \doteq \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{r}\| \leq a\}.$$

Consideremos coordenadas polares no disco,  $r \doteq \|\mathbf{r}\|$  e  $\varphi \doteq \arctan y/x$ . Nessas coordenadas, o operador Laplace tem a forma

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2. \quad (73)$$

Procuramos soluções  $u \in C_D^2(D_a)$  da equação de Helmholtz (61), satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet:  $u(a, \varphi) = 0$  para todos  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Para esses fins, procuramos soluções da forma  $u(r, \varphi) =: R(r)\Phi(\varphi)$ . Com isso,  $\partial_r u(r, \varphi) = R'(r)\Phi(\varphi)$  e  $\partial_\varphi u(r, \varphi) = R(r)\Phi'(\varphi)$ . A condição de Dirichlet e a continuidade e diferenciabilidade implicam

$$R(a) = 0, \quad \Phi(2\pi) = \Phi(0), \quad \Phi'(2\pi) = \Phi'(0) \quad (74)$$

respetivamente. A Eq. (61) de Helmholtz,  $(\Delta + k^2)u = 0$ , implica

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r R\right)\Phi + \frac{1}{r^2} R\Phi'' + k^2 R\Phi = 0.$$

Multiplicando os 2 lados por  $r^2/(R\Phi)$  dá

$$\underbrace{\frac{r \partial_r r \partial_r R}{R}} + r^2 k^2 + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}} = 0. \quad (75)$$

Temos uma equação da forma  $f(r) + g(\varphi) = 0$ , que implica que  $f$  e  $g$  são constantes: Existe uma constante  $\lambda$  tal que  $g(\varphi) = -f(r) = \lambda$  para todos  $r, \varphi$ . Em particular,  $\Phi'' = \lambda\Phi$ , ou seja, a função  $\Phi$  é um auto-vetor do Laplace no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Pela condição de contorno (74), ela pertence ao  $C_P^2([0, 2\pi])$ . Por isso ela deve ser proporcional a uma das auto-funções  $u_n^P$ : Existe um  $c \in \mathbb{C}$  e um  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\lambda = -m^2$  e

$$\Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) := ce^{im\varphi}, \quad \Phi'' = -m^2\Phi. \quad (76)$$

A equação para  $R$  vira

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r - \frac{m^2}{r^2} + k^2\right)R = 0. \quad (77)$$

Introduzindo a variável  $a$ -dimensional  $x \doteq kr$ , e escrevendo  $R(r) =: y(x)$ , isso é equivalente à EDO de Bessel

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (78)$$

Tem duas soluções linearmente independentes dessa EDO. Uma delas (a função de Neumann  $N_m$ ) é singular na origem  $r = 0$  e deve ser desconsiderada no nosso contexto (pois  $R$  deve ser contínua). A outra solução é a *funções de Bessel*  $y = J_{|m|}$ ,

$$J_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(m+\nu)!} (x/2)^{m+2\nu}, \quad m \geq 0. \quad (79)$$

(Veja [6, Cap. 9.7]. Em [1], essa solução da EDO (78) é construída em detalhes na p. 570 ff, Cap. 9.5, e discutida em Cap. 11.1.) Cada uma dessas funções tem um conjunto denumerável de zeros: Denotamos por  $x_{m,\nu}$  o  $\nu$ -ésimo zero da função  $J_{|m|}$ ,

tal que  $x_{m,1} < x_{m,2} < \dots$ . A condição de contorno (74),  $R(a) \equiv J_{|m|}(ka) = 0$  que nossa solução  $R(r) = J_{|m|}(kr)$  deve satisfazer implica que  $ka$  coincide com um dos zeros de  $J_{|m|}$ , ou seja, existe um  $\nu$  tal que

$$k = \frac{x_{m,\nu}}{a} =: k_{m,\nu}.$$

Nossa solução para  $R$  é então  $R(r) = R_{m,\nu}(r) = J_{|m|}(k_{m,\nu}r)$ .

Resumindo, achamos a solução

$$u(r, \varphi) = u_{m,\nu}(r, \varphi) = e^{im\varphi} J_{|m|}(k_{m,\nu}r). \quad (80)$$

que satisfaz a equação de Helmholtz  $\Delta u_{m,\nu} = -(k_{m,\nu})^2 u_{m,\nu}$ . Na verdade, isso já é uma BON de auto-funções do operador  $\Delta$ :

**Corolário 27** *Depois normalização, a família  $\{u_{m,\nu}, m \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}_0\}$  é uma BON em  $L^2(D_a)$ .*

### 2.4.5 Cilindro no $\mathbb{R}^3$

### 2.4.6 Esfera no $\mathbb{R}^3$

### 2.4.7 Bola no $\mathbb{R}^3$

## 3 EDPs

Literatura:

[6], Cap. 11.6: Sturm-Liouville, 11.7,11.8: EDO's, EDP's. Cap. 8.6: Método de Fourier.

[1], Cap. 10: Sturm-Liouville. 10.5: Funções de Green.

[8,10] [2, Cap. 5]: Método de Fourier.

[5, Cap. 10], [16, Cap. IV]

Consideremos as EDP's de Poisson, difusão, e de onda, todas não-homogêneas, mas com condições de contorno homogêneas (ou de Dirichlet ou de Neumann), e resolvemo-las pelo chamado método de Fourier.

### 3.1 Equação de Poisson

Seja  $h$  uma função dada na região  $\Omega$  (limitada). Procuramos uma solução  $u(\mathbf{r})$  da EDP

$$\Delta u = h \quad \text{em } \Omega, \quad (81)$$

a qual ainda deve satisfazer uma das condições de contorno

$$u(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \partial G \quad (\text{D}), \quad \text{ou} \quad (82)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \partial G \quad (\text{N}) \quad (83)$$

A primeira (D) é chamado a condição de contorno de Dirichlet, e a segunda a de Neumann. ( $h$  também deve satisfazer a condição de contorno correspondente.) A EDP (81) aparece na física como equação de Poisson, onde  $u$  significa o potencial eletrostático  $V$ , e  $h$  é  $(-1)/\varepsilon_0$  vezes a densidade de carga  $\rho$ . Em geral,  $u$  é algum campo observável do sistema, a EDP (81) caracteriza um estado estacionário (de equilíbrio) do sistema, e o lado direito ( $h$ ) tem o papel de uma fonte.

Para achar a solução, o primeiro passo é determinar uma BON  $\{v_n\}$  de auto-funções do operador Laplace em  $C_D^2(\Omega)$  no caso de condição de contorno (D), ou em

$C_N^2(\Omega)$  no caso de condição de contorno (N). Supondo que as duas funções  $u$  e  $h$  são em  $L^2(\Omega)$  (que é o caso se eles são contínuas), podemos fazer as expansões em termos da BON

$$u = \sum_n c_n v_n, \quad h = \sum_n (v_n, h) v_n. \quad (84)$$

Observa que os coeficientes de Fourier  $c_n$  da função  $u$  são desconhecidos, enquanto que os coeficientes  $(v_n, h)$  de  $h$  são conhecidos. Supondo ainda que  $u$  é no domínio de auto-adjunctice do operador  $\Delta$  (dado por (51), maior que  $C_{D/N}^2(\Omega)$ ), podemos trocar o Laplace com o somatório infinito, ver Eq. (52), e a EDP (81) vira

$$\sum_n \underbrace{c_n \lambda_n}_{\lambda_n} v_n = \sum_n \underbrace{(v_n, h)}_{(v_n, h)} v_n,$$

onde usamos  $\Delta v_n = \lambda_n \cdot v_n$ . Por independência linear dos  $v_n$ , isso implica

$$c_n = \frac{(v_n, h)}{\lambda_n} \quad \text{se } \lambda_n \neq 0.$$

No caso de condições de Neumann, um auto-valor é zero,  $\lambda_0 = 0$ , e o coeficiente  $c_0$  correspondente é indeterminado. Para todos outros auto-valores existe um  $\delta > 0$  tal que  $|\lambda_n| > \delta$  pelo Teorema 24. Então  $|c_n|^2 \leq |(v_n, h)|^2 / \delta^2$ , e a série  $\sum |c_n|^2$  converge. Isto implica pelo Lema 10 que a série

$$u \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v_n, h)}{\lambda_n} v_n \quad (85)$$

converge no sentido de  $L^2$ . Concluimos que isso é a solução da EDP (81) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e que ela é única (módulo uma constante no caso (N)).

Se a função  $h$  é suficientemente bem-comportado, podemos afirmar mais:

**Teorema 28** *Supoem que os  $v_n$  satisfazem a cota (64). Se  $h \in C_{D/N}^4(\Omega)$ , a série (85) converge uniformemente no fecho  $\bar{\Omega}$  de  $\Omega$ , e satisfaz a EDP (81) e a condição de contorno correspondente.*

*No caso de CC de Dirichlet (todos  $\lambda_n$  são  $\neq 0$  e) a solução é única, e no caso de CC de Neumann a solução é única módulo uma constante.*

### 3.2 EDP de difusão

Consideramos a EDP

$$\left(\Delta - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t}\right) u(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r}, t), \quad (86)$$

onde  $D$  é uma constante positiva, e  $h$  é uma função conhecida. Procuramos uma solução  $u(\mathbf{r}, t)$  dessa EDP para todo  $(\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+$ , a qual ainda deve satisfazer uma das condições de contorno (D ou N)

$$u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{r}, t) \in \partial G \times \mathbb{R}_0^+ \quad (\text{D}), \quad \text{ou} \quad (87)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall (\mathbf{r}, t) \in \partial G \times \mathbb{R}_0^+ \quad (\text{N}) \quad (88)$$

Além disso, requeremos a condição inicial (CI):

$$u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (89)$$

onde  $u_0$  é uma função dada. A EDP (86) aparece na física como equação de difusão, onde  $u$  significa a concentração de uma substância,  $D$  é o coeficiente de difusão, e  $h$  é uma “densidade de fonte” (dividido por  $D$ ) [6].

Como antes, o primeiro passo é determinar uma BON  $\{v_n\}$  de auto-funções do operador Laplace, com domínio  $C_D^2(\Omega)$  no caso de condição de contorno (D), e  $C_N^2(\Omega)$  no caso de condição de contorno (N). Escrevemos  $u(\mathbf{r}, t) =: u_t(\mathbf{r})$  e  $h(\mathbf{r}, t) =: h_t(\mathbf{r})$  e consideremos  $t$  como parâmetro. (A função  $u_0(\mathbf{r}) \equiv u(\mathbf{r}, 0)$  é dada pela condição inicial (89).) As duas funções  $u_t$  e  $h_t$  são supostamente contínuas, numa região compacta, e daí são em  $L^2(\Omega)$ . Fazemos as expansões em termos da BON

$$u_t = \sum_n c_n(t) v_n, \quad h_t = \sum_n (v_n, h_t) v_n. \quad (90)$$

Como antes, o objetivo é determinar os coeficientes de Fourier  $c_n(t)$  da função (desconhecida)  $u_t$ . Trocando (com justificativa posterior!) o Laplace com o somatório infinito, a EDP (86) vira

$$\sum_n \underbrace{(\lambda_n c_n(t) - \frac{1}{D} \dot{c}_n(t))}_{\Delta v_n} v_n = \sum_n \underbrace{(v_n, h_t)}_{b_n(t)} v_n,$$

onde usamos  $\Delta v_n = \lambda_n \cdot v_n$ . Por independência linear dos  $v_n$ , isso implica para cada  $n$  a EDO

$$\dot{c}_n(t) - D \lambda_n c_n(t) = -D (v_n, h_t) =: -D b_n(t).$$

A solução dessa EDO é

$$c_n(t) = c_n(0) e^{\lambda_n D t} - D \int_0^t dt' b_n(t') e^{\lambda_n D (t-t')}. \quad (91)$$

(Observe que  $\lambda_n = -|\lambda_n| < 0$ .) As constantes  $c_n(0)$  são determinadas pela condição inicial através da expansão (90):

$$c_n(0) = (v_n, u_0). \quad (92)$$

Concluimos que a solução da EDP (86) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e condição inicial (89) deveria ser a série

$$u(\mathbf{r}, t) \doteq \sum_n \left\{ c_n(0) e^{\lambda_n D t} - D \int_0^t dt' b_n(t') e^{\lambda_n D (t-t')} \right\} v_n(\mathbf{r}), \quad (93)$$

com  $c_n(0) \doteq (v_n, u_0)$  e  $b_n(t) \doteq (v_n, h_t)$ . Recordamos que  $\lambda_n \equiv -|\lambda_n| < 0$ .

**Teorema 29** *i) Para todo  $t \geq 0$  fixo, a série (93) converge no sentido de  $L^2(\Omega)$ , e fornece a única solução da EDP (86) com condição de contorno (87) ou (88) e condição inicial (89).*

*ii) Supoem que os  $v_n$  satisfazem a cota (64). Se  $u_0 \in C_{D/N}^4(\Omega)$ , a série*

$$u(\mathbf{r}, t) \doteq \sum_n (v_n, u_0) e^{-|\lambda_n| D t} v_n(\mathbf{r})$$

*converge uniformemente em  $\bar{\Omega}$ , e  $u$  é em  $C^\infty(G \times \mathbb{R}^+)$  e satisfaz a EDP (86) homogênea (com  $h = 0$ ), a condição de contorno correspondente, e a condição inicial (89).*

(Unicidade??) Se  $u_0$  não é em  $C_{D/N}^4(\Omega)$ , a série (85) converge no sentido de distribuições, e ela ainda satisfaz a EDP no sentido de distribuições. (Check!!)

**Exemplo 30** Esfriando um cilindro longo: “Example 2” do Cap. 9.7 em [6], p. 368 ff. □



### 3.3 Equação de onda

Procuramos uma solução  $u(\mathbf{r}, t)$  da EDP (chamada equação de onda)

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r}, t) \quad (94)$$

para todo  $(\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ , a qual ainda deve satisfazer uma das condições de contorno (87) ou (88) (com  $\mathbb{R}_0^+$  substituído por  $\mathbb{R}$ ), e as condições iniciais (CI):

$$u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (95)$$

$$\dot{u}(\mathbf{r}, 0) = \dot{u}_0(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (96)$$

onde  $u_0$  e  $\dot{u}_0$  são funções dadas e nos escrevemos  $\dot{u}(\mathbf{r}, t) \doteq \partial_t u(\mathbf{r}, t)$ . Como antes, começamos com uma BON  $\{v_n\}$  de auto-funções do operador Laplace, com domínio  $C_D^2(\Omega)$  no caso de condição de contorno (D), e  $C_N^2(\Omega)$  no caso de condição de contorno (N) e fazemos as expansões (90). A equação de onda (94) vira

$$\sum_n \underbrace{(\lambda_n c_n(t) - \frac{1}{c^2} \ddot{c}_n(t))}_{v_n} = \sum_n \underbrace{(v_n, h_t)}_{v_n},$$

implicando para cada  $n$  na EDO

$$\ddot{c}_n(t) - \omega_n^2 c_n(t) = -c^2 b_n(t), \quad \text{onde } \omega_n^2 \doteq c^2 \lambda_n \text{ e } b_n(t) \doteq (v_n, h_t). \quad (97)$$

As constantes  $c_n(0)$  e  $\dot{c}_n(0)$  são determinadas pelas condições iniciais (95), (96) através da expansão (90):

$$c_n(0) = (v_n, u_0), \quad \dot{c}_n(0) = (v_n, \dot{u}_0). \quad (98)$$

A solução da EDO (102) com essas condições iniciais é

$$c_n(t) = \frac{(v_n, \dot{u}_0)}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) + (v_n, u_0) \cos(\omega_n t) - c^2 \int_0^t \frac{\text{sen}(\omega_n(t-t'))}{\omega_n} b_n(t') dt'. \quad (99)$$

(Usamos a função de Green do Exemplo 14 em [12]. Concluimos que a solução da equação de onda (94) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e condições iniciais (95), (96) é a série

$$u(\mathbf{r}, t) \doteq \sum_n c_n(t) v_n(\mathbf{r}), \quad (100)$$

com  $c_n(t)$  dado pela Eq. (99).

**Exemplo 31** Vibrações de uma membrana circular: “Example 1” do Cap. 9.7 em [6], p. 363 ff.  $\square$

### 3.4 Equação de onda no $\mathbb{R}^n$

Consideramos a equação de onda no  $\mathbb{R}^n$ , e substituímos a condição de contorno (87) pela condição que para todo  $t \in \mathbb{R}$  a função  $u_t$  seja em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Consideremos apenas o caso homogêneo da EDP,  $h = 0$ .

Em  $\mathbb{R}^n$ , o operador Laplace não possui uma BON, mas sim uma BON contínua de auto-vetores generalizados, a saber as “ondas planas”  $e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \doteq (2\pi)^{-n/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ , veja Eq. (48) no Example 20, item *iii*). A expansão (90) é substituída pela “expansão” contínua, ou seja, transformada de Fourier,

$$u_t = \int_{\mathbb{R}^n} c_t(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}} d^n \mathbf{k} \quad (101)$$

A equação de onda (94) homogênea (com  $h = 0$ ) vira

$$-\int (|\mathbf{k}|^2 c_t(\mathbf{k}) + \frac{1}{c^2} \ddot{c}_t(\mathbf{k})) e_{\mathbf{k}} d^n \mathbf{k} = 0,$$

devido ao e o fato que  $\Delta e_{\mathbf{k}} = -|\mathbf{k}|^2 e_{\mathbf{k}}$ , veja Eq. (48). Isso implica para cada  $\mathbf{k}$  na EDO

$$\ddot{c}_t(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k})^2 c_t(\mathbf{k}) = 0, \quad \text{onde } \omega(\mathbf{k})^2 \doteq c^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (102)$$

As “constantes”  $c_0(\mathbf{k})$  e  $\dot{c}_0(\mathbf{k})$  são determinadas pelas condições iniciais (95), (96) através da expansão (101):

$$c_0(\mathbf{k}) = (e_{\mathbf{k}}, u_0) \equiv \widehat{u}_0(\mathbf{k}), \quad \dot{c}_0(\mathbf{k}) = (e_{\mathbf{k}}, \dot{u}_0) \equiv \widehat{\dot{u}}_0(\mathbf{k}). \quad (103)$$

A solução da EDO (102) com essas condições iniciais é

$$c_t(\mathbf{k}) = \frac{\widehat{\dot{u}}_0(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k})} \text{sen}(\omega(\mathbf{k})t) + \widehat{u}_0(\mathbf{k}) \text{cos}(\omega(\mathbf{k})t). \quad (104)$$

Concluimos que a solução da equação de onda (94) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e condições iniciais (95), (96) é

$$u(\mathbf{r}, t) \doteq (2\pi)^{-n/2} \int c_t(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{k}. \quad (105)$$

com  $c_t(\mathbf{k})$  dado pela Eq. (104).

Onda plana: ...!!

## A Convergência de sequências de funções

O seguinte teorema encontra-se em [14, Thm. 7.17].

**Teorema 32** *Seja  $f_n$  uma sequência de funções diferenciáveis no intervalo  $[a, b]$  que satisfaz as seguintes hipóteses.*

1. *Existe algum ponto  $x_0 \in [a, b]$  onde a sequência  $f'_n(x_0)$  converge ;*
2. *A sequência das derivadas  $f'_n$  converge uniformemente.*

*Então a sequência  $f_n$  também converge uniformemente para uma função diferenciável  $f$ , e*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

## Referências

- [1] H. Arfken, G. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 6th ed., Elsevier (Academic Press), Amsterdam, 2005.
- [2] V. I. Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer, 2004.
- [3] A. S. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980.
- [4] A. Bohm and M Gadella, *Dirac kets, Gamow vectors and Gel'fand triplets*, Lecture notes in Physics, vol. 348, Springer, 1969.
- [5] Boyce and Di Prima, *Elementary differential equations*.
- [6] E. Butkov, *Física matemática*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1988.

- [7] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum mechanics*, vol. 1, J. Wiley, 1977.
- [8] J. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e EDP's*, IMPA/Editora Edgard Blücher Ltda., 1977.
- [9] Jr. R. Iório and V. Iório, *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*.
- [10] V. Iório, *EDP: Um curso de graduação*, 4 ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.
- [11] N. A. Lemos, *Convite à Física Matemática*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013.
- [12] J. Mund, *Distribuições, transformada de fourier*, UFJF, 2019, Notas de aula.
- [13] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I, II*, Academic Press, New York, 1975/1980.
- [14] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
- [15] ———, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
- [16] Weinberger, *A first course in PDE*.