2.2 Construção de uma representação para o sistema do spin eletrônico de prata.

De acordo com as considerações gerais sobre o sistema de spin eletrônico, sabemos que devemos representar este sistema num espaço de Hilbert bidimensional. Como sempre, podemos mudar a representação por um mapeamento unitário de um espaço para outro. Por isso não faz diferença, que tipo de espaço bidimensional nos usemos. Podemos escolher qualquer um, por exemplo o $\mathbb{C}^2$.

Os estados $(z\uparrow)$ e $(z\downarrow)$ correspondem a duas direções mutuamente ortogonais em H. Como podemos girar duas direções ortogonais em outras duas direções ortogonais arbitrárias por meio de uma transformação unitária, não faz diferença quais duas direções tomar para representar estes estados. Então vamos escolher alguma base ortonormal $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ e representar as perguntas $[z\uparrow]$ e $[z\downarrow]$ pelos subespaços

$$\begin{aligned} [z\uparrow] \quad &\mapsto \quad \{|\uparrow\rangle a| \quad a \in \mathbb{C}\} \\ [z\downarrow] \quad &\mapsto \quad \{|\downarrow\rangle a| \quad a \in \mathbb{C}\} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

O estado $(x\uparrow)$ nos dá a probabilidade $\Pr\big[[z\uparrow];(x\uparrow)\big] = \Pr\big[[z\uparrow];(x\uparrow)\big] = 1/2$. Portanto, o vetor de estado de $(x\uparrow)$ deve ser da forma:

$$|x\uparrow\rangle = \frac{e^{ir_1}}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{e^{ir_2}}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \qquad \text{com} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R} \tag{2.2.2}$$

As fases e^{ir_1} e e^{ir_2} podem ser determinadas experimentalmente? Não, porque podemos muda-las por uma transformação unitária sem mudar as escolhas feitas até agora. O operador unitário

$$e^{ia_1}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + e^{ia_2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \qquad \text{com} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \tag{2.2.3}$$

muda as fases sem mudar a escolha de subespaços das equações (2.2.1). Então podemos escolher r_1 e r_2 arbitrariamente. Geralmente escolhe-se $e^{ir_1} = e^{ir_2} = e^{ir}$. Então temos

$$|x\uparrow\rangle = \frac{e^{ir}}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big) \tag{2.2.4}$$

O vetor de estado $(x\downarrow)$ deve ser ortogonal a $|x\uparrow\rangle$. Isto nos dá:

$$|x\downarrow\rangle = \frac{e^{ir'}}{\sqrt{2}}\big(-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big) \tag{2.2.5}$$

As fases e^{ir} e $e^{ir'}$ se mantém arbitrárias de acordo com o que aprendemos no fim da secção 1.4.

A seguir estudaremos o estado $(y\uparrow)$. Experimentalmente achamos freqüências relativas ½ para este estado com as perguntas $[z\uparrow]$, $[z\downarrow]$, $[x\uparrow]$, $[x\downarrow]$. Então nossa descrição teórica tem chance de descrever a realidade corretamente somente se

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left[z\uparrow\right];\left(y\uparrow\right)\right) &= \Pr\left(\left[z\downarrow\right];\left(y\uparrow\right)\right) = 1/2 \\ \Pr\left(\left[x\uparrow\right];\left(y\uparrow\right)\right) &= \Pr\left(\left[x\downarrow\right];\left(y\uparrow\right)\right) = 1/2 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

De acordo com a (1.3.X) concluimos

$$\left|y\uparrow\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle e^{ib_1} + \left|\downarrow\right\rangle e^{ib_2}\right) \tag{2.2.7}$$

É útil separarmos nas fases uma fase global $\exp\{i(b_1+b_2)/2\} \equiv \exp\{ic\}$, a qual é certamente arbitrária, e uma fase relativa $\exp\{i(b_2-b_1)/2\} \equiv \exp\{ib/2\}$, a qual pode ter um significado físico.

$$\left|y\uparrow\right\rangle = \frac{e^{ic}}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle e^{-ib/2} + \left|\downarrow\right\rangle e^{+ib/2}\right) \tag{2.2.8}$$

As fases $e^{-ib/2}$ e $e^{+ib/2}$ podem ser eliminadas com uma transformação do tipo (2.2.3)? A resposta é não. Não podemos mais mudar b sem destruir nossa escolha prévia da equação (2.2.4). Isto significa que b pode ser determinado experimentalmente. Com a (2.2.6) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \left|\left\langle x\uparrow\middle|y\uparrow\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\left(\left\langle\uparrow\right| + \left\langle\downarrow\right|\right)\left(\left|\uparrow\right\rangle e^{-ib/2} + \left|\downarrow\right\rangle e^{+ib/2}\right)\right|^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left|e^{-ib/2} + e^{ib/2}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(b) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Então vale $\cos(b) = 0$ e podemos concluir que

$$b = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \text{com} \qquad n \text{ inteiro} \tag{2.2.10}$$

Mudando n de 4 em 4 não modificamos as fases $e^{-ib/2}$ e $e^{+ib/2}$. Mudando n de 2 em 2 modificamos $e^{-ib/2}$ e $e^{+ib/2}$ por um fator (-1) , que pode ser absorvido na fase global e^{ic}. Mudando n de 1 em 1 alguma coisa parece mudar. Logo teremos duas aparentemente diferentes soluções:

$$b = \frac{\pi}{2} \tag{2.2.11}$$

e

$$b = -\frac{\pi}{2} \tag{2.2.12}$$

Podemos decidir fisicamente qual dos termos é o correto? Não, pois podemos transformar um do outro por uma transformação anti-unitária que deixa todas as escolhas feitas até agora inalteradas. Veja a seguinte transformação anti-unitária:

$$K\left(\left|\uparrow\right\rangle p + \left|\downarrow\right\rangle q\right) = \left|\uparrow\right\rangle p^* + \left|\downarrow\right\rangle q^* \tag{2.2.13}$$

K deixa $\left|\uparrow\right\rangle$ e $\left|\downarrow\right\rangle$ inalterados e modifica $\left|x\uparrow\right\rangle$ e $\left|x\downarrow\right\rangle$ apenas por uma fase global. Aplicando K ao $\left|y\uparrow\right\rangle$ trocamos justamente $e^{-ib/2}$ e $e^{+ib/2}$ e portanto transformamos a solução (2.2.11) na (2.2.12) e vice versa. Então a decisão entre

(2.2.11) e (2.2.12) é uma questão de escolha e não uma questão física. Geralmente escolhe-se $b = \pi/2$.

O vetor $\left|y\downarrow\right\rangle$ é determinado pelo fato de que $\left\langle y\uparrow \middle| y\downarrow\right\rangle = 0$. Resumindo os resultados que temos:

$$\left|x\uparrow\right\rangle = \frac{e^{ir}}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle\right)$$

$$\left|x\downarrow\right\rangle = \frac{e^{ir'}}{\sqrt{2}}\left(-\left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle\right)$$

$$\left|y\uparrow\right\rangle = \frac{e^{ic}}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle e^{-i\pi/4} + \left|\downarrow\right\rangle e^{+i\pi/4}\right) \tag{2.2.14}$$

$$\left|y\downarrow\right\rangle = \frac{e^{ic}}{\sqrt{2}}\left(-\left|\uparrow\right\rangle e^{-i\pi/4} + \left|\downarrow\right\rangle e^{+i\pi/4}\right) \tag{2.2.15}$$

Finalmente chegamos à determinação do vetor de estado para um estado puro de polarização arbitrária. Seja $\hat{u}$ um vetor normalizado no espaço real tridimensional do laboratório que determina a orientação de um magneto de Stern-Gerlach. Os dois resultados possíveis do experimento de Stern-Gerlach correspondentes definem duas perguntas que designaremos por $\left[\hat{u}\uparrow\right]$ e $\left[\hat{u}\downarrow\right]$. Designaremos o estado correspondente à propriedade $\left[\hat{u}\uparrow\right]$ por $\left(\hat{u}\uparrow\right)$ e o vetor de estado por $\left|\hat{u}\uparrow\right\rangle$. Seja $\hat{v}$ um segundo vetor normalizado no laboratório. Experimentalmente encontramos para as freqüências relativas perguntando por $\left[\hat{u}\uparrow\right]$ com o estado $\left(\hat{v}\uparrow\right)$ o valor $\left[\cos\frac{\sphericalangle\left(\hat{u},\hat{v}\right)}{2}\right]^2$, onde $\sphericalangle\left(\hat{u},\hat{v}\right)$ é o ângulo entre os vetores $\hat{u}$ e $\hat{v}$. Então a representação somente tem chance de descrever os resultados experimentais satisfatoriamente se as previsões teóricas cumprem

$$\Pr\left(\left[\hat{u}\uparrow\right];\left(\hat{u}\uparrow\right)\right) = \left[\cos\frac{\sphericalangle\left(\hat{u},\hat{v}\right)}{2}\right]^2 \tag{2.2.16}$$

É útil descrever o vetor $\hat{v}$ pelos ângulos polares:

Correspondentemente escreveremos $\left(\left(\theta,\varphi\right)\uparrow\right)$ no lugar de $\left(\hat{v}\uparrow\right)$. A partir de (2.2.16) temos

$$\Pr\left(\left[z\uparrow\right];\left(\left(\theta,\varphi\right)\uparrow\right)\right) = \left[\cos\frac{\theta}{2}\right]^2 \tag{2.2.17}$$

$$\Pr\left(\left[z\downarrow\right];\left(\left(\theta,\varphi\right)\uparrow\right)\right) = \left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]^2 \tag{2.2.18}$$

Isto implica em

$$\left|(\theta,\varphi)\uparrow\right\rangle \quad = \quad e^{if}\left\{\left|\uparrow\right\rangle e^{-ig/2}\cos\frac{\theta}{2} \quad + \quad \left|\downarrow\right\rangle e^{+ig/2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right\} \tag{2.2.19}$$

com alguma função ainda desconhecida $g = g(\theta,\varphi)$ e alguma função f arbitrária. A tarefa é determinar a função g.

O ângulo α entre o eixo-x e o vetor $\hat{v}$ satisfaz

$$\cos\alpha \quad = \quad \hat{x}\cdot\hat{v} \quad = \quad \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \tag{2.2.20}$$

Usando $\cos\alpha \;=\; \left(\cos(\alpha/2)\right)^2 - \left(\mathrm{sen}(\alpha/2)\right)^2$ temos

$$\left(\cos(\alpha/2)\right)^2 \quad = \quad \frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi+1}{2} \tag{2.2.21}$$

Inserindo isto na (2.2.16) obtemos

$$\Pr\left(\left[x\uparrow\right];\left((\theta,\varphi)\uparrow\right)\right) \quad = \quad \frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi+1}{2} \tag{2.2.22}$$

Por outro lado vale

$$\Pr\left(\left[x\uparrow\right];\left((\theta,\varphi)\uparrow\right)\right) \quad = \quad \left|\left\langle x\uparrow\right|(\theta,\varphi)\uparrow\rangle\right|^2 \tag{2.2.23}$$

Então temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi+1}{2} \quad &= \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle\uparrow\right| + \left\langle\downarrow\right|\right)\left(\left|\uparrow\right\rangle e^{-ig/2}\cos\frac{\theta}{2} \quad + \quad \left|\downarrow\right\rangle e^{+ig/2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 \quad = \\
&= \frac{1}{2}\left|e^{-ig/2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{+ig/2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right|^2 \quad = \\
&= \frac{1}{2}\left(1+2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cos g\right) \quad = \\
&= \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta\cos g
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Então segue

επχσεΛΒ

$$\cos g \quad = \quad \cos\varphi \tag{2.2.25}$$

O ângulo β entre eixo-y e $\hat{v}$ satisfaz

$$\cos\beta \quad = \quad \hat{y}\cdot\hat{v} \quad = \quad \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{2.2.26}$$

Isto nos dá

$$\Pr\left(\left[y\uparrow\right];\left((\theta,\varphi)\uparrow\right)\right) \quad = \quad \frac{\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi+1}{2} \tag{2.2.27}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + 1}{2} \quad =$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\pi/4} \left\langle \uparrow \right| + e^{-i\pi/4} \left\langle \downarrow \right| \right) \left(\left| \uparrow \right\rangle e^{-ig/2} \cos\frac{\theta}{2} \quad + \quad \left| \downarrow \right\rangle e^{+ig/2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \right) \right|^2 \quad = \tag{2.2.28}$$

$$= \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta \cos\left(g - \frac{\pi}{2} \right)$$

Então vale

$$\operatorname{sen} g \quad = \quad \operatorname{sen}\varphi \tag{2.2.29}$$

Das equações (2.2.25) e (2.2.29) concluímos $g = \varphi + n\,2\pi$, $n = \text{inteiro}$. Mudando n mudamos as fases $e^{-ig/2}$ e $e^{+ig/2}$ apenas por um fator (-1) o qual pode ser absorvido na fase global. Então temos

$$\left| (\theta,\varphi) \uparrow \right\rangle \quad = \quad e^{if} \left\{ \left| \uparrow \right\rangle e^{-i\varphi/2} \cos\frac{\theta}{2} \quad + \quad \left| \downarrow \right\rangle e^{+i\varphi/2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \right\} \tag{2.2.30}$$

e de $\left\langle (\theta,\varphi) \uparrow \middle| (\theta,\varphi) \downarrow \right\rangle = 0$ obtemos ainda:

$$\left| (\theta,\varphi) \downarrow \right\rangle \quad = \quad e^{if'} \left\{ - \left| \uparrow \right\rangle e^{-i\varphi/2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \quad + \quad \left| \downarrow \right\rangle e^{+i\varphi/2} \cos\frac{\theta}{2} \right\} \tag{2.2.31}$$

Este resultado completa a construção da representação desde que os observáveis e estados sejam apenas caracterizados pelas orientações dos aparatos. ehcseLB

O nosso exemplo de representação é um tanto decepcionante porque ele é puramente descritivo. Com os operadores no espaço de Hilbert não seremos capazes de calcular coisas além da equação (2.2.16). Com esta equação poderíamos fazer qualquer previsão teórica sem o uso de operadores no espaço de Hilbert. Esta situação muda se aumentarmos o conjunto de observáveis. Até agora consideramos apenas as orientações dos aparatos de Stern-Gerlach. O tempo que o átomo voa depois de sair da preparação e antes de entrar no aparato de medida não foi considerado como parâmetro relevante. De fato, se o espaço entre os aparatos de preparação e medida estiver livre de campos magnéticos este tempo de percurso seria um parâmetro não relevante. No entanto, com campos magnéticos no entre-espaço a situação é diferente. Neste caso os aparatos de preparação e medida precisariam uma indicação que informa o instante de preparação e o instante de medição. Com isto o conjunto de observáveis fica mais rico e o problema de representação também. O resultado anterior continuaria válido para medidas feitas imediatamente depois da preparação.