1.3 Probabilidades

Se usarmos nas regras (a) – (d) da secção anterior vetores normalizados para representar os estados puros, podemos expressar o fato que um sistema num estado $\hat{\psi}$ possui a propriedade $\widehat{A}$ com a ajuda da norma da projeção ortogonal do vetor de estado ψ no subespaço A que representa a propriedade $\widehat{A}$:

$$\hat{\psi} \quad \text{tem a propriedade } \widehat{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \mathcal{P}_A \psi \right\|^2 = 1 \tag{1.3.1}$$

onde ψ é o vetor de estado que representa o estado $\hat{\psi}$, A é o subespaço fechado que representa a propriedade $\widehat{A}$ e P_A é o projetor ortogonal que projeta em A:

$$\mathcal{P}_A\left(H\right) = A\,, \qquad \mathcal{P}_A \mathcal{P}_A = \mathcal{P}_A\,, \qquad \mathcal{P}_A^{\dagger} = \mathcal{P}_A \qquad (1.3.2).$$

Ter a propriedade $\text{não}\widehat{A}$ pode ser expresso também pela norma da projeção:

$$\hat{\psi} \quad \text{tem a propriedade } \text{não}\widehat{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \mathcal{P}_A \psi \right\|^2 = 0 \qquad (1.3.3).$$

Podemos também usar a projeção no complemento ortogonal

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\text{não}\widehat{A}} \underset{def.}{=} \mathbf{1} - \mathcal{P}_A \\ &\hat{\psi} \quad \text{tem a propriedade } \text{não}\widehat{A} \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \mathcal{P}_{\text{não}\widehat{A}} \psi \right\|^2 = 1 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Se $\widehat{B}$ for uma propriedade que implica em $\text{não}\widehat{A}$, o subespaço que representa $\widehat{B}$ é subespaço do complemento ortogonal de A e os correspondentes operadores de projeção $\mathcal{P}_A$ e $\mathcal{P}_B$ comutam. Neste caso $\mathcal{P}_A + \mathcal{P}_B$ é também projetor ortogonal e este representa a propriedade $\left(\widehat{A} \oplus \widehat{B}\right)$. ehcs eL B

Se medirmos uma propriedade tal que $0 < \left\| \mathcal{P}_A \psi \right\|^2 < 1$ fizemos uma pergunta inadequada ao sistema. Fazer perguntas inadequadas não tem sentido. Então neste caso devemos tomar uma das seguintes atitudes:

(a) Mudar a pergunta.

(b) Mudar o estado.

Infelizmente, na maioria dos casos, o físico experimental não ficará contente com nenhuma das duas opções. O que chamamos aqui de pergunta corresponde a um equipamento complicadíssimo de medida e o que chamamos de estado corresponde a outro equipamento complicadíssimo de preparação. Pedir ao físico experimental a mudança de um destes itens significa na prática um transtorno e provavelmente envolveria anos de trabalho de construção de outro aparato. Mas, felizmente existe uma terceira opção bem mais simples e um tanto surpreendente:

(c) Manter a mesma pergunta e o mesmo estado, mas mudar o sistema.

Como isto é possível mudar o sistema e manter o estado? Os estados não eram atributos dos sistemas? Isto é possível no seguinte sentido: ao invés de usar um sistema S com estado $\hat{\psi}$ usaremos um número muito grande N de exemplares identicamente preparados do sistema S, todos os exemplares com o mesmo estado $\hat{\psi}$. Chamaremos este tipo de sistema composto de N sistemas identicamente preparados de um *ensemble*. Um ensemble é um novo sistema e naturalmente o estado deste novo sistema não é o antigo $\widehat{\psi}$. Mas, o estado do ensemble está intimamente ligado ao antigo $\widehat{\psi}$. Na tentativa de construir uma teoria acrescentamos aqui uma hipótese bastante razoável sobre o estado de um ensemble de N sistemas no estado $\widehat{\psi}$:

> Se o estado $\widehat{\psi}$ de um sistema S é representado pelo vetor ψ no espaço de Hilbert H, então o estado do ensemble de N sistemas S no estado $\widehat{\psi}$ é representado pelo vetor $\psi \otimes \psi \otimes ...... \otimes \psi$ no espaço de produto tensorial $H^N = H \otimes H \otimes ...... \otimes H$.

Se S é um sistema quântico vamos chamar o sistema que consiste de N exemplares do sistema S de S^N. Vamos escrever as perguntas $\widehat{A}$ e não$\widehat{A}$ simbolicamente com a ajuda dos respectivos números 1 e 0 da seguinte forma: $\widehat{A}_1 \underset{def.}{=} \widehat{A}$ e $\widehat{A}_0 \underset{def.}{=}$ não$\widehat{A}$. Para uma dada N-upla $a \in \{0,1\}^N$ vamos definir a pergunta composta $\widehat{\boldsymbol{A}}_a$ feita ao sistema S^N como a pergunta que coincide para o k-ésimo membro do S^N com a pergunta $\widehat{A}_{a_k}$. Então por exemplo, $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\langle 1,1,0,1,0,0,....\rangle}$ significa a pergunta: "o primeiro sistema de S^N tem a propriedade $\widehat{A}$, o segundo sistema de S^N tem a propriedade $\widehat{A}$, o terceiro tem a propriedade não$\widehat{A}$, o quarto tem a propriedade $\widehat{A}$, ... ? ".[1] Se $\widehat{A}$ era representado pelo projetor $\mathcal{P}_A$, a pergunta composta será representada pelo projetor $\mathcal{P}_{A_{a_1}} \otimes \mathcal{P}_{A_{a_2}} \otimes ...... \otimes \mathcal{P}_{A_{a_N}}$. Para diferentes N-uplas $a \in \{0,1\}^N$ e $b \in \{0,1\}^N$ as perguntas compostas $\widehat{\boldsymbol{A}}_a$ e $\widehat{\boldsymbol{A}}_b$ são excludentes e por tanto $\mathcal{P}_{A_{a_1}} \otimes \mathcal{P}_{A_{a_2}} \otimes ...... \otimes \mathcal{P}_{A_{a_N}}$ e $\mathcal{P}_{A_{b_1}} \otimes \mathcal{P}_{A_{b_2}} \otimes ...... \otimes \mathcal{P}_{A_{b_N}}$ comutam. A pergunta $\left(\widehat{\boldsymbol{A}}_a \oplus \widehat{\boldsymbol{A}}_b\right)$ é representada pela soma dos projetores; $\mathcal{P}_{A_{a_1}} \otimes \mathcal{P}_{A_{a_2}} \otimes ...... \otimes \mathcal{P}_{A_{a_N}} + \mathcal{P}_{A_{b_1}} \otimes \mathcal{P}_{A_{b_2}} \otimes ...... \otimes \mathcal{P}_{A_{b_N}}$.
Agora vamos definir o seguinte número entre 0 e 1:

$$p \underset{def.}{=} \left\| \mathcal{P}_A \psi \right\|^2 \qquad (1.3.5).$$

Além disso vamos definir para uma dada N-upla $a \in \{0,1\}^N$ a freqüência relativa

$$r(a) \underset{def.}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} a_k \qquad (1.3.6)$$

Para um número real $\varepsilon > 0$, seja $\widehat{R}_\varepsilon$ a pergunta se a freqüência relativa de respostas positivas numa medida da propriedade $\widehat{A}$ medida no sistema S^N fica entre os valores $p - \varepsilon$ e $p + \varepsilon$. Esta pergunta é representada pelo projetor ortogonal

$$\mathcal{R}_\varepsilon \underset{def.}{=} \sum_{r(a) \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]} \mathcal{P}_{A_{a_1}} \otimes \mathcal{P}_{A_{a_2}} \otimes ...... \otimes \mathcal{P}_{A_{a_N}} \qquad (1.3.7)$$

[1] Se todos os membros de S^N estiveram no mesmo estado (o que se supõe no caso de um ensemble) uma pergunta do tipo $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\langle 1,1,0,1,0,0,....\rangle}$ não parece ser sensata. Mas, a pergunta pode ser definida e para estados não do tipo ensemble ela pode ser sensata. Para estados do tipo ensemble veremos que certas combinações de perguntas do tipo $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\langle 1,1,0,1,0,0,....\rangle}$ podem ser sensatas e de fato boas perguntas. ehcseLB

Agora vamos supor que o sistema S^N esteja num estado de ensemble com os membros todos no estado $\widehat{\psi}$. Com o teorema de Pitágoras e com a definição do número p dada pela fórmula (1.3.5), podemos escrever o quadrado da norma da projeção do vetor de estado do ensemble com este projetor na seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{R}_\varepsilon(\psi\otimes\psi\otimes\ldots\psi)\right\|^2 &= \sum_{r(a)\in[p-\varepsilon,p+\varepsilon]} \left\|\mathcal{P}_{A_{a_1}}\otimes\mathcal{P}_{A_{a_2}}\otimes\ldots\ldots\otimes\mathcal{P}_{A_{a_N}}(\psi\otimes\psi\otimes\ldots\psi)\right\|^2 \\
&= \sum_{N(p-\varepsilon)\le k\le N(p+\varepsilon)} \frac{N!}{k!(N-k)!}\,p^k(1-p)^{N-k}
\end{aligned}
$$

(1.3.8)

No lado direito desta fórmula aparece uma soma de valores da conhecida distribuição binomial. Conhecemos suas propriedade perfeitamente. Sabemos que para qualquer valor positivo e fixo de ε o limite desta expressão para $N\to\infty$ vale 1:

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\mathcal{R}_\varepsilon(\psi\otimes\psi\otimes\ldots\psi)\right\|^2 = 1 \qquad (1.3.9)$$

Isto significa (compare com a fórmula (1.3.1)) que a pergunta se a freqüência relativa das respostas para as perguntas por $\widehat{A}$ no ensemble fica no intervalo $[p-\varepsilon,p+\varepsilon]$ se torna no limite uma boa pergunta mesmo que a pergunta original por $\widehat{A}$ tenha sido uma má pergunta. Então conseguimos substituir uma má pergunta por uma pergunta adequada sem ter que construir novos equipamentos. Basta repetir a mesma experiência inúmeras vezes. A freqüência relativa não é uma propriedade objetiva do sistema S, mas ela é uma propriedade objetiva do ensemble. Mas, podemos atribuir o número p ao sistema individual como *probabilidade* de obter uma resposta positiva fazendo a medida $\widehat{A}$. Uma probabilidade não é uma propriedade do sistema. Ela é simplesmente uma opinião expressa numericamente. Probabilidades são expectativas eles não podem ser medidas experimentalmente. O que se mede são freqüências relativas. A probabilidade é uma previsão. Caso seu valor coincida com uma freqüência relativa podemos ficar contentes.

A probabilidade $\Pr\left[\widehat{A};\widehat{\psi}\right]$ de observar um "sim" na pergunta por $\widehat{A}$ com o estado $\widehat{\psi}$ é dada na representação no espaço de Hilbert pela expressão

$$\Pr\left[\widehat{A};\widehat{\psi}\right] = \left\|\mathcal{P}_A\psi\right\|^2 \qquad (1.3.10).$$

Para duas propriedades excludentes, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{B}\Rightarrow \text{não}\widehat{A}$, segue com o teorema de Pitágoras

$$\Pr\left[\left(\widehat{A}\oplus\widehat{B}\right);\widehat{\psi}\right] = \Pr\left[\widehat{A};\widehat{\psi}\right]+\Pr\left[\widehat{B};\widehat{\psi}\right] \qquad (1.3.11),$$

o que é bastante razoável. Com as propriedades (1.3.2) dos projetores ortogonais podemos escrever a fórmula da probabilidade (1.3.10) ainda numa outra forma mais conveniente:

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[\widehat{A};\widehat{\psi}\right] &= \left\|\mathcal{P}_A\psi\right\|^2 = \left(\mathcal{P}_A\psi,\mathcal{P}_A\psi\right) = \left(\psi,\mathcal{P}_A^{\dagger}\mathcal{P}_A\psi\right) = \\
&= \left(\psi,\mathcal{P}_A\mathcal{P}_A\psi\right) = \left(\psi,\mathcal{P}_A\psi\right)
\end{aligned}
\qquad (1.3.12)
$$

onde (φ,ψ) significa o produto escalar dos vetores φ e ψ. Com o projetor ortogonal $|\psi\rangle\langle\psi|$, que projeta no subespaço $\{\varphi\in H \,|\, \exists(c\in\mathbb{C}):\varphi=c\psi\}$, podemos escrever esta probabilidade ainda como um traço de um produto de operadores:

$$\Pr\left[\widehat{A};\widehat{\psi}\right] \;=\; Tr\left(|\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{P}_A\right) \qquad (1.3.13).$$

Caso o estado e não for puro podemos pensar nele como uma mistura probabilística de estados puros $\widehat{\psi}_1$, $\widehat{\psi}_2$, $\widehat{\psi}_3$, ... com pesos p_1, p_2, p_3 .... que expressam nossa opinião sobre qual seria o verdadeiro estado puro. Correspondentemente a probabilidade de um “sim” na pergunta pela propriedade $\widehat{A}$ seria uma média ponderada das respectivas probabilidades com os estados $\widehat{\psi}_1$, $\widehat{\psi}_2$, $\widehat{\psi}_3$, ... :

$$\Pr\left[\widehat{A};\, e\right] \;=\; \sum_k p_k \Pr\left[\widehat{A};\widehat{\psi}_k\right] \qquad (1.3.14),$$

com $\sum_k p_k = 1$, $\forall k : 0 \le p_k \le 1$. Usando a fórmula (1.3.13) e o fato que a operação traço é uma operação linear podemos escrever isto na forma

$$\Pr\left[\widehat{A};\, e\right] \;=\; Tr\left(\mathcal{P}_A \sum_k p_k\, |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right) \qquad (1.3.15)$$

O operador

$$\rho \underset{def.}{=} \sum_k p_k\, |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \qquad (1.3.16)$$

é um operador compacto, positivo com traço bem definido, de fato com traço 1[2]. Este tipo de operador pode ser usado para representar qualquer estado, tanto estados puros como estados mistos. Então a forma geral da probabilidade de obter um “sim” para a pergunta pela propriedade $\widehat{A}$ na representação do sistema no espaço de Hilbert é

$$\Pr\left[\widehat{A};\, e\right] \;=\; Tr\left(\mathcal{P}_A\, \rho_e\right) \qquad (1.3.17)$$

onde ρ_e é um operador positivo com traço 1 que representa o estado e . . ehcseLB

Um estado e é misto quando existem dois estados distintos e_a e e_b , $e_a \neq e_b$ e um número q maior que zero e menor que 1 tal que as probabilidades para as respostas para todas as perguntas satisfazem $\Pr\left[\widehat{A};\, e\right] \;=\; q\Pr\left[\widehat{A};\, e_a\right] + (1-q)\Pr\left[\widehat{A};\, e_b\right]$. Os estados não mistos são chamados de puros. Este critério depende da disponibilidade de perguntas. Para sistemas que permitem fazer uma ampla gama de perguntas os estados puros são exatamente aquelas que podem ser representados por vetores de estado. Mas para sistemas com menos perguntas que possam ser feitas existem vetores de estado que representam também estados mistos. Neste curso consideraremos apenas o primeiro caso onde o conjunto de perguntas é tão amplo que todos os vetores representam estados puros.

Vale ainda mencionar uma probabilidade particularmente importante, quando se mede num estado puro $\widehat{\psi}$ e se pergunta por outro estado puro $\widehat{\varphi}$. Verbalmente poderíamos formular estas medida como a seguinte pergunta feita ao sistema físico: “o seu estado é

[2] Pode-se mostrar que este tipo de operador tem um espectro puramente discreto e somente o auto-valor 0 pode ter um grau de degenerescência infinito.

$\hat{\varphi}$?" Na representação no espaço de Hilbert os estados $\hat{\psi}$ e $\hat{\varphi}$ seriam representados por respectivos vetores $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$. A pergunta seria representada pelo projetor ortogonal $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ que projeta em $|\varphi\rangle$. A probabilidade de receber a resposta "sim" é dada por

$$\left\| |\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle \right\|^2 \quad = \quad \left|\langle\varphi|\psi\rangle\right|^2 \tag{1.3.18}$$

É importante notar um detalhe da física quântica: existem aparatos que fazem perguntas do tipo "o seu estado é $\hat{\varphi}$?" mas **não existem aparatos que fazem a pergunta "qual é o seu estado?"**