1.2 Propriedades de um sistema quântico

Vimos na secção anterior que os valores de observáveis medidos num sistema quântico nem sempre podem ser considerados atributos do sistema. Este fato traz conseqüências profundas para a descrição matemática dos observáveis. Para elaborar uma descrição matemática reduziremos primeiramente a complexidade dos objetos em questão. Não investigaremos logo observáveis de qualquer natureza, mas limitarmos-nos, nesta secção, a perguntas experimentais sobre um sistema que permitam apenas as respostas *sim* ou *não*. Isto não limita a aplicabilidade dos resultados. Se quisermos, por exemplo, perguntar experimentalmente "qual é a sua energia" podemos fazer perguntas do tipo "sua energia está entre 1,5 J e 1,6 J ?", "sua energia está entre 1,6 J e 1,7 J ?", "sua energia está entre 1,65 J e 1,70 J ?" ....etc. .

Possuir energia entre 1,65 J e 1,70 J pode ser considerado uma *propriedade* do sistema num determinado estado. Usaremos a palavra propriedade sempre em conexão com uma pergunta simples que permite apenas as respostas *sim* e *não*. Mas vimos na secção anterior que para determinados estados certas perguntas experimentais podem não ser apropriados e nestes casos não podemos atribuir a propriedade ao sistema neste estado. Correspondentemente vamos definir:

Um sistema em um estado $\hat{\psi}$ possui a propriedade $\widehat{A}$ se e somente se a pergunta experimental sobre $\widehat{A}$ obtém <u>reprodutivelmente</u> a resposta *sim*.

Um sistema em um estado $\hat{\psi}$ possui a propriedade não$\widehat{A}$ se e somente se a pergunta experimental sobre $\widehat{A}$ obtém <u>reprodutivelmente</u> a resposta *não*.

Quanticamente existe a possibilidade que a pergunta sobre a propriedade $\widehat{A}$ com o sistema no estado $\hat{\psi}$ é uma pergunta inapropriada e neste caso as respostas experimentais variam quando a experiência for repetida. Neste caso não vamos atribuir nem a propriedade $\widehat{A}$ e nem a propriedade não$\widehat{A}$ ao sistema.

Podemos definir uma estrutura lógica para as propriedades. Vamos dizer que uma propriedade $\widehat{A}$ implica na propriedade $\widehat{B}$ se todo sistema que tiver a propriedade $\widehat{A}$ tem também a propriedade $\widehat{B}$. Isto define uma ordem parcial nas propriedades. Se $\widehat{A}$ implica em $\widehat{B}$ vamos também dizer que $\widehat{A}$ é menor que $\widehat{B}$. Esta semi-ordem tem a estrutura de um reticulado. Vamos escrever a menor propriedade que é maior que $\widehat{A}$ e maior que $\widehat{B}$ com o símbolo $\widehat{A} \oplus \widehat{B}$. Estamos tentados de chamar esta propriedade de "$\widehat{A}$ ou $\widehat{B}$ ". No entanto, convém tomar certo cuidado. Vamos lembrar da experiência de Young para partículas. As propriedades $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ podem, por exemplo, ser a localização da partícula nos respectivos furos A e B do anteparo. Na passagem da partícula pelo anteparo na experiência que mostra o "padrão Francisco" temos de fato uma partícula com a propriedade $\widehat{A} \oplus \widehat{B}$. Mas, temos que distinguir este caso da seguinte situação: imaginem que eu ajustei o canhão dos elétrons ontem apontando para apenas um dos dois furos. Hoje não me lembro mais para qual furo apontei o canhão e meu colega no laboratório me pergunta pelo estado que a máquina prepara. Eu respondo "O estado tem a propriedade $\widehat{A}$ ou a propriedade $\widehat{B}$ " . De fato esta afirmação não descreve uma propriedade objetiva do sistema, mas descreve o meu estado de conhecimento. Vamos formular as afirmações mais cuidadosamente: Se um sistema num estado $\widehat{\psi}$ tiver a propriedade $\widehat{A}\oplus\widehat{B}$ significa que perguntas a respeito de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ recebem reprodutivelmente um sim, o sim pode aparecer ou na pergunta por $\widehat{A}$ ou na pergunta por $\widehat{B}$, mas nenhuma das duas opções precisa ser reprodutível. No caso de "$\widehat{A}$ ou $\widehat{B}$" uma das duas perguntas precisa obter respostas reprodutíveis, mas não importa qual das duas. Este segundo caso não vamos considerar uma propriedade do sistema.

Vamos também definir um símbolo para a maior propriedade que é menor que duas propriedades $\widehat{A}$ é $\widehat{B}$. Este ínfimo é o "e" que vamos escrever como $\widehat{A}\wedge\widehat{B}$.

Veremos primeiramente como é a representação matemática de propriedades na física clássica. Na mecânica clássica os estados puros correspondem a pontos no espaço fase. Um observável, como a energia, seria uma funções no espaço fase e a propriedade de ter energia entre 1,65 J e 1,70 J corresponde ao conjunto de pontos cujos valores da função energia H tem valores neste intervalo (compare a Figura 1.2.1). Em geral podemos dizer que uma propriedade corresponde a um conjunto de pontos no espaço fase.

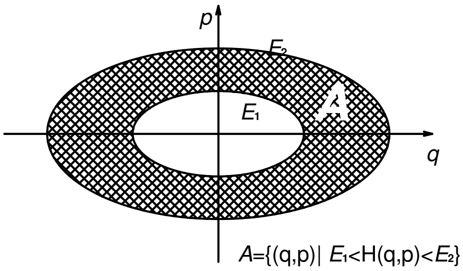


Fig. 1.2.1 Exemplo da propriedade de ter energia entre E_1 e E_2 para um oscilador harmônico.

A maneira de representar os estados e por pontos (q_e, p_e) e as propriedades $\widehat{A}$ por conjuntos do espaço fase obedece às seguintes regras:

$$e \mapsto (q_e, p_e)$$
$$\widehat{A} \mapsto A \qquad (1.2.1)$$
$$e \quad \text{tem a propriedade} \quad \widehat{A} \quad \Leftrightarrow \quad (q_e, p_e) \in A$$

$$e \quad \text{tem a propriedade} \quad \text{não}\widehat{A} \quad \Leftrightarrow \quad (q_e, p_e) \notin A \qquad (1.2.2)$$

Podemos manter uma regra do tipo (1.2.1) também para o caso quântico, mas a regra (1.2.2) não pode ser usada, pois isto eliminaria a possibilidade da pergunta ser inapropriada. Então vamos representar estados $\widehat{\psi}$ por elementos ψ de algum espaço H e perguntas simples $\widehat{A}$ por certos subconjuntos $A \subset H$ de tal forma que vale

$$\widehat{\psi} \mapsto \psi$$
$$\widehat{A} \mapsto A \qquad (1.2.3)$$
$$\widehat{\psi} \quad \text{tem a propriedade} \quad \widehat{A} \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in A$$

Mas, temos que pensar o que poderia substituir a regra (1.2.2) para o caso quântico.

A resposta à pergunta $\widehat{A}$ é *sim* ou *não* e nada mais, qualquer que seja o estado do sistema. Então as representações das propriedades $\widehat{A}$ e não$\widehat{A}$ devem de alguma maneira cobrir todos os pontos de H. Mas por outro lado, sabemos que existem estados que não tem a propriedade $\widehat{A}$ e nem a não$\widehat{A}$. Logo as representações de $\widehat{A}$ e de não$\widehat{A}$ devem deixar lugar suficiente para representar este tipo de estado. Isto nos lembra muito o complemento ortogonal em espaços lineares com produto escalar. Se A é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert o complemento ortogonal $A^{\perp}$ juntamente com A cobrem tudo em H, no sentido de que qualquer vetor em H pode ser escrito como uma soma de um vetor em A e um vetor em $A^{\perp}$. Mas, por outro lado, A e $A^{\perp}$ deixam muito espaço aberto. Existem muitos vetores que nem pertencem à A nem à $A^{\perp}$. Somos então levados ao seguinte esquema:

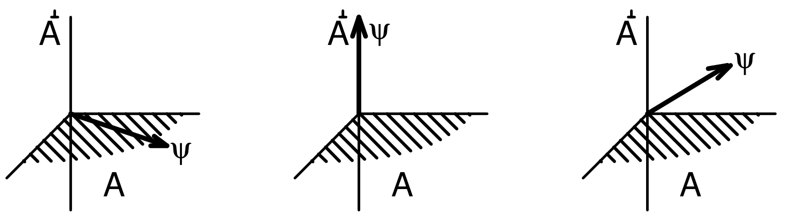
(a) Representamos estados puros de um sistema quântico por vetores ψ em algum espaço de Hilbert H. O vetor é chamado de *vetor de estado* e o espaço de *espaço de estados*.

(b) Representamos propriedades por subespaços fechados de H de modo que $\psi \in A$ significa que o sistema possui a propriedade $\widehat{A}$ no estado $\widehat{\psi}$.

(c) A propriedade não$\widehat{A}$ é representada pelo complemento ortogonal de A: não$\widehat{A} \mapsto A^{\perp}$.

(d) No caso que a pergunta $\widehat{A}$ for inapropriada para o estado $\widehat{\psi}$ o vetor ψ que representa $\widehat{\psi}$ seria uma combinação linear de um vetor em A e outro em $A^{\perp}$.

A figura 1.2.2 representa estas situações para um espaço de estados hipotético tridimensional real. Mais tarde veremos que os espaços de estados são sempre complexos, mas para muitas questões a nossa capacidade de visualizar geometria tridimensional real é suficiente para ajudar na compreensão dos conceitos.



o sistema tem a propriedade A

o sistema tem a propriedade não A

o sistema não tem a propriedade A nem a propriedade não A

Fig.1.2.2 Representação simbólica de uma propriedade, sua negação e do estado.

Nada muda no esquema acima se mudarmos o vetor de estado ψ para ψa onde a é algum número. O único valor proibido de a é zero porque o vetor zero pertence a todos os subespaços e por isto não pode representar um estado. Em poucos minutos veremos que é conveniente escolher um vetor de estado sempre como um vetor normalizado, $\|\psi\| = 1$. Com esta escolha o vetor zero é excluído automaticamente.

Para poder-mos acompanhar as explicações da teoria com algum exemplo concreto discutiremos agora um sistema quântico extremamente simples: o spin do átomo de prata, que pode ser observado com experiências de Stern-Gerlach.

Nestas experiências envia-se um feixe de átomos de prata através de um campo magnético heterogêneo de modo que o feixe incidente é perpendicular ao vetor campo magnético e está no plano de simetria da configuração do campo, como indicado na figura 1.2.3.

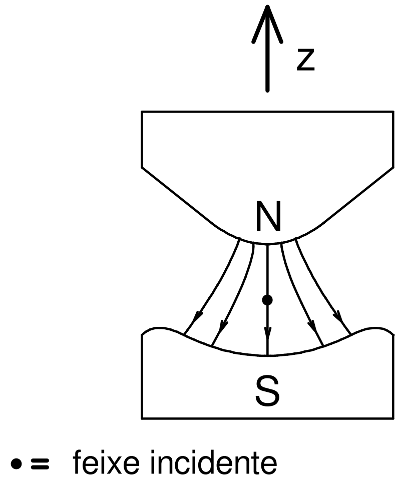


Fig. 1.2.3 Experimento de Stern Gerlach

Os átomos de prata carregam um momento magnético $\vec{m}$ o qual, no campo magnético, contribui com

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

para a energia potencial total da partícula. Num campo heterogêneo esta energia potencial nos fornece a força

$$\vec{F} = \text{grad}\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right) \quad .$$

Se os átomos do feixe incidente não têm nenhum tipo de polarização seus momentos magnéticos devem estar orientados aleatoriamente em todas as direções. Correspondentemente esperar-se-ia que uma variedade contínua de deflexões na direção z fosse surgir, como indicado na figura 1.2.4.

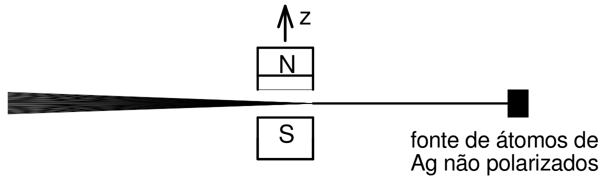


Fig. 1.2.4 Desvios do feixe de átomos que se espera classicamente por causa da força sobre os dipolos magnéticos no campo heterogêneo.

Entretanto, muito surpreendentemente, observa-se que apenas duas deflexões surgem, como indicado na figura 1.2.5

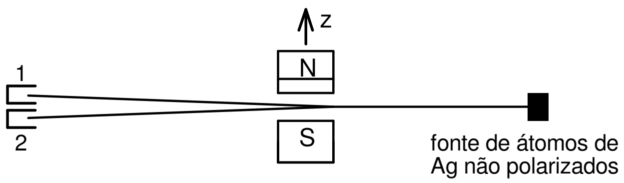


Fig. 1.2.5 Os átomos desviam formando apenas dois feixes.

Não tentaremos explicar este estranho comportamento agora, mas podemos simplesmente registrar os comportamentos e usar o sistema como um exemplo. Imaginamos dois detectores nas posições 1 e 2 da figura 1.2.5. Suponha que estes detectores sejam capazes de detectar até um único átomo de prata. Sempre que um átomo entrar em um detector teremos feito um experimento. Se o átomo for registrado em 1 podemos dizer que a pergunta $[z\uparrow]$ foi respondida com um *sim* e a pergunta $[z\downarrow]$ com um *não*. Se o átomo for registrado em 2 a situação será a inversa, ou seja, $[z\uparrow]$ com *não* e $[z\downarrow]$ com *sim*. Suponhamos que mandamos os átomos um a um através do aparato de Stern Gerlach de modo que nunca possa ocorrer dos dois contadores registrarem um evento simultaneamente.

Se a fonte dos átomos consiste simplesmente de um forno de onde átomos evaporam formando um feixe, não teríamos nenhuma seleção da orientação dos dipolos magnéticos. Neste caso 50% das respostas da pergunta $[z\uparrow]$ seriam *sim* e consequentemente também 50% *não*. Esta flutuação seria apenas fruto de uma preparação insuficiente. Podemos melhorar a preparação, usando um outro aparato de Stern Gerlach como filtro. Este filtro recebe os átomos do forno de evaporação e divide o feixe em dois: um $z\uparrow$ e um $z\downarrow$. O feixe inferior é bloqueado e deixamos somente o feixe de $z\uparrow$ emergir do aparato. Este aparato Stern Gerlach com o bloqueio do feixe inferior, junto com a fonte de átomos, pode ser considerado um aparato de preparação de estado do spin do átomo de prata. Se deixarmos o feixe que emerge deste aparato de preparação incidir sobre outro aparato de Stern Gerlach, também com a orientação z, teremos 100% de respostas *sim* na pergunta $[z\uparrow]$, como indicado simbolicamente na figura 1.2.6

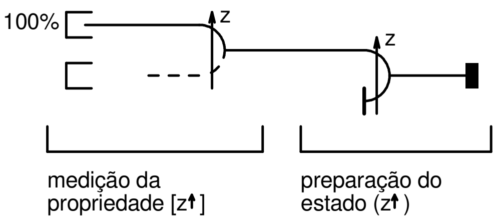


Fig. 1.2.6 Representação simbólica da preparação do estado $(z\uparrow)$ e medição da propriedade $[z\uparrow]$.

A preparação mais nítida eliminou as flutuações. Mas somente as perguntas $[z\uparrow]$ e $[z\downarrow]$ receberiam respostas reprodutíveis. Se substituíssemos o segundo aparato de Stern Gerlach por um orientado na direção x teríamos ainda 50% de respostas positivas de 50% negativas na pergunta $[x\uparrow]$ (compare a figura 1.2.7).

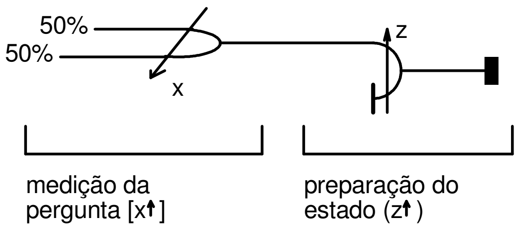


Fig. 1.2.7 Respostas flutuantes na pergunta $[x\uparrow]$ com o estado $(z\uparrow)$.

Estas flutuações não são devido a uma má preparação. Poder-se-ia tentar melhorar a preparação botando um segundo filtro que seleciona de acordo com o critério $(x\uparrow)$ como indicado na figura 1.2.8. De fato a pergunta $[x\uparrow]$ receberia com este segundo filtro respostas reprodutíveis, mas a reprodutibilidade para perguntas $[z\uparrow]$ seria destruída pelo segundo filtro (compare a figura 1.2.9).

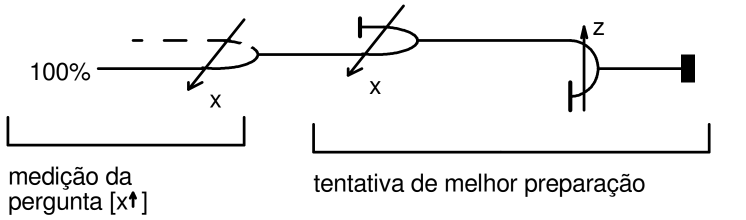


Fig. 1.2.8 Tentativa de melhor preparação do estado.

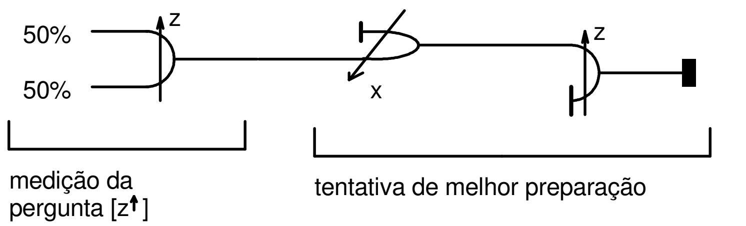


Fig. 1.2.9 Evidência que a tentativa de polarizar na direção z e na direção x não funciona.

Toda evidência experimental indica que o estado preparado por um único filtro já é puro, e a flutuação observada quando se pergunta por $[x\uparrow]$ com um estado $(z\uparrow)$ é um típico exemplo de flutuação quântica. Isto é, a pergunta $[x\uparrow]$ é má pergunta com o estado $(z\uparrow)$.

Veremos agora que tipo de espaço de Hilbert pode servir como espaço de estados para este sistema. Para descobrir o espaço apropriado precisamos caracterizar as propriedades um pouco mais. Definimos acima: uma propriedade $\widehat{A}$ implica numa propriedade $\widehat{B}$ se qualquer estado que possui a propriedade $\widehat{A}$ possui também a propriedade $\widehat{B}$. Na representação no espaço de Hilbert isto significa que o subespaço A que representa $\widehat{A}$ é um subespaço do espaço B que representa $\widehat{B}$; $\widehat{A}\,\text{implica em}\,\widehat{B} \Leftrightarrow A \subset B$. Por este motivo podemos também dizer que $\widehat{A}$ é uma propriedade menor que $\widehat{B}$. A relação "$\widehat{A}$ implica em $\widehat{B}$" significa que sabemos mais sobre o estado $\widehat{\psi}$ sabendo que ele tem a propriedade $\widehat{A}$ do que se soubermos apenas que ele tem a propriedade $\widehat{B}$. Se soubermos que $\widehat{\psi}$ tem alguma propriedade $\widehat{B}$ podemos tentar aprender mais sobre o estado perguntando também sobre propriedades menores. Entretanto pode ser que não existam propriedades menores. Este é o caso quando $\widehat{B}$ na representação no espaço de Hilbert corresponde à um subespaço unidimensional. Fisicamente isto significa: se sabemos que $\widehat{\psi}$ possui a propriedade $\widehat{B}$ nós conhecemos $\widehat{\psi}$ completamente. Neste caso chamaremos $\widehat{B}$ de uma propriedade elementar. Experimentando com os átomos de prata em aparatos de Stern Gerlach chega-se a conclusão que não adianta perguntar por propriedades menores que os $[z\uparrow]$, $[z\downarrow]$, $[x\uparrow]$ e $[x\downarrow]$. Tudo indica que estas propriedades são elementares. Com esta informação podemos determinar o espaço de Hilbert para o sistema spin.

$[z\uparrow]$ é uma propriedade elementar e, por isso, representada por um subespaço unidimensional. $[z\downarrow]$ é a mesma coisa que não$[z\uparrow]$ e, por isso, $[z\downarrow]$ é representado pelo complemento ortogonal do espaço de $[z\uparrow]$. Mas, $[z\downarrow]$ é também uma propriedade elementar e então corresponde a um subespaço unidimensional. Logo o espaço deve ser bidimensional.

Vejamos agora se o espaço pode ser um espaço vetorial real. A resposta às perguntas $[z\uparrow]$ e $[z\downarrow]$ são *sim* com probabilidade 50% se o estado for $(x\uparrow)$. Nós ainda são sabemos como estas probabilidades estão relacionadas à situação geométrica no espaço de Hilbert, entretanto, o vetor de estado do estado $(x\uparrow)$ deve ser simétrico em relação aos espaços de $[z\uparrow]$ e $[z\downarrow]$ já que as probabilidades são iguais. A mesma situação se mantém para o caso do estado $(x\downarrow)$. Além disso o espaço de $[x\downarrow]$ deve ser ortogonal ao espaço de $[x\uparrow]$. Então estamos sendo levado a um esquema como aquele indicado na figura 1.2.10

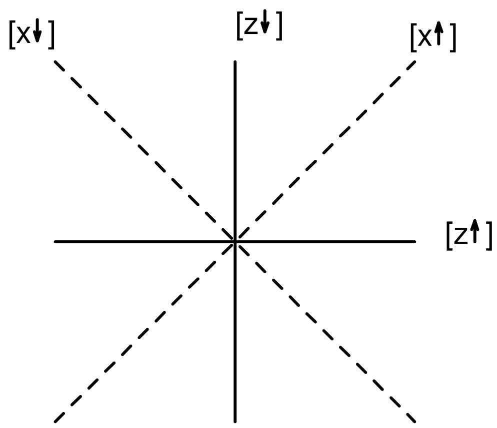


Fig. 1.2.10 Representação das propriedades $[z\uparrow]$, $[z\downarrow]$, $[x\uparrow]$ e $[x\downarrow]$.

Até agora só falamos sobre as perguntas $[z\uparrow]$, $[z\downarrow]$, $[x\uparrow]$ e $[x\downarrow]$. Mas poderíamos polarizar também os átomos na direção *y*. Acharíamos que $[y\downarrow] = \text{não}[y\uparrow]$ e que as probabilidades de achar *sim* para $[z\uparrow]$, $[z\downarrow]$, $[x\uparrow]$ e $[x\downarrow]$ no estado $(y\uparrow)$ seriam todos 50%. Repare que ter 4 vezes 50% de probabilidade não é nenhuma contradição por que as propriedades $[z\uparrow]$ e $[x\uparrow]$ não são mutuamente excludentes. Vemos então que $[y\uparrow]$ e $[y\downarrow]$ devem ser representados por dois subespaços mutuamente ortogonais em situação simétrica em relação aos quatro subespaços que representam $[z\uparrow]$, $[z\downarrow]$, $[x\uparrow]$ e $[x\downarrow]$. Entretanto, não existem mais subespaços na figura 1.2.10 que sejam simétricos aos subespaços já desenhados. Por outro lado já concluímos que o espaço deve ser apenas bidimensional. O único caminho para introduzir mais subespaços simetricamente aos que já introduzimos sem aumentar a dimensão do espaço é utilizar um espaço vetorial complexo. No $\mathbb{C}^2$ podemos ter três pares de subespaços todos simétricos em relação aos outros dois:

$$[z\uparrow] \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\}, \qquad [z\downarrow] \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$[x\uparrow] \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} | \, c \in \mathbb{C} \right\}, \qquad [x\downarrow] \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} -c \\ c \end{pmatrix} | \, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$[y\uparrow] \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} c \\ ic \end{pmatrix} | \, c \in \mathbb{C} \right\}, \qquad [y\downarrow] \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} -ic \\ c \end{pmatrix} | \, c \in \mathbb{C} \right\}$$

Neste exemplo do spin do átomo de prata necessitamos de um espaço de Hilbert complexo. Verifica-se que isto é válido em geral. Até onde sabemos sobre os sistemas quânticos hoje em dia, todos eles podem ser representados em algum espaço de Hilbert complexo. . ehcseLB

Usaremos a seguinte notação para os espaços de Hilbert complexos: simbolizamos o espaço com a letra H, e para vetores $\varphi \in H$, $\psi \in H$ escrevemos o produto escalar como (φ, ψ) sendo esta operação linear no fator da direita e anti-linear no fator da esquerda; $(\varphi, a\psi) = a(\varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)^*$. Ocasionalmente utilizaremos também a notação de Dirac.