Medidas Físicas Indiretas

1 Objetivo

Aplicar os métodos de análise de dados à grandezas físicas que são medidas indiretamente, isto é, grandezas que dependem de outras grandezas, as quais podem ser medidas diretamente. Observar que as incertezas calculadas nas medidas diretas são propagadas para as medidas indiretas.

Para uma melhor compreensão dos resultados desta experiência, é importante que o estudante faça uma revisão dos métodos de medidas físicas indiretas, apresentados na seção 2.9 do texto "***Análise de dados para Laboratório de Física***", disponível no Moodle.

2 Introdução teórica

Na maioria dos experimentos, a medição de uma grandeza f de interesse é feita de maneira indireta, sendo esta grandeza obtida a partir de medidas de uma ou mais grandezas primárias. O cálculo de f é feito a partir de uma função conhecida das grandezas primárias. Estas grandezas são também denominadas grandezas de entrada, enquanto a grandeza f é denominada grandeza de saída. Um exemplo é o cálculo da densidade de um objeto, no qual se mede a massa e o volume do mesmo. A massa e volume são as grandezas de entrada enquanto a densidade é a grandeza de saída. A partir do conceito da incerteza $u(x)$ de uma medida direta x, é possível estimar a incerteza combinada ou propagada $u(f)$ para a grandeza indireta f. Como demonstrado no texto "***Análise de dados para Laboratório de Física***", no caso em que a grandeza indireta f é função somente de uma grandeza direta x, isto é, $f = f(x)$, a incerteza $u(f)$ em função da incerteza $u(x)$ será dada, aproximadamente, por

$$u(f) \approx \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\langle x\rangle} u(x) \tag{1}$$

Na Tab.1 são apresentadas as incertezas propagadas para algumas relações funcionais de acordo com a Eq.1. É importante enfatizar que esses resultados são somente uma boa estimativa para a propagação de incerteza, desde que $u(x)$ seja pequeno. O motivo disso é discutido no texto "***Análise de dados para Laboratório de Física***".

Relação funcional	Valor médio	Incerteza propagada
$f(x) = ax$; $a =$ constante	$\langle f\rangle = a\,\langle x\rangle$	$u(f) = au(x)$
$f(x) = x^a$; $a =$ constante	$\langle f\rangle = \langle x\rangle^a$	$u(f) = a\,\langle x\rangle^{a-1}\,u(x)$
$f(x) = e^x$	$\langle f\rangle = e^{\langle x\rangle}$	$u(f) = e^{\langle x\rangle}u(x)$
$f(x) = ln\ x$	$\langle f\rangle = ln\ \langle x\rangle$	$u(f) = \frac{1}{\langle x\rangle}u(x)$
$f(x) = sen\ x$	$\langle f\rangle = sen\,\langle x\rangle$	$u(f) = cos\,\langle x\rangle\,u(x)$

Tab. 1: Expressões para os cálculos dos valores médios e incertezas propagadas de algumas grandezas $f(x)$ que possuem somente uma variável.

A Eq.1 permite calcular a incerteza na medida da grandeza f quando esta é função somente de uma única variável x. Entretanto, é mais frequente o caso onde o resultado de uma experiência é dado em função de duas ou mais medidas independentes. Como demonstrado também no texto "***Análise de dados para Laboratório de Física***", no caso de uma grandeza f obtida a partir das duas grandezas independentes x e y, isto é, $f = f(x, y)$, a incerteza $u(f)$ em função das incertezas $u(x)$ e $u(y)$ será dada por

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\langle x\rangle} u(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\langle y\rangle} u(y)\right)^2}. \tag{2}$$

Nesta equação é necessário introduzir o conceito de "derivada parcial", escrevendo o símbolo ∂ no lugar de d, para ressaltar o fato que as derivadas da função $f(x, y)$, em relação a uma das variáveis, devem ser executadas assumindo constante a outra variável. Isso só é possível porque as grandezas x e y podem ser medidas independentemente uma da outra. Recorrendo-se a Eq.2, é possível verificar as incertezas propagadas para todas as funções de duas variáveis independentes mostradas na Tab.2.

Relação funcional	Valor médio	Incerteza propagada
$f(x,y) = ax \pm by$; $a, b =$ constante	$\langle f\rangle = a\langle x\rangle \pm b\langle y\rangle$	$u(f) = \sqrt{a^2u(x)^2 + b^2u(y)^2}$
$f(x,y) = xy$	$\langle f\rangle = \langle x\rangle\langle y\rangle$	$u(f) = \sqrt{\langle y\rangle^2 u(x)^2 + \langle x\rangle^2 u(y)^2}$
$f(x,y) = \dfrac{x}{y}$	$\langle f\rangle = \dfrac{\langle x\rangle}{\langle y\rangle}$	$u(f) = \dfrac{1}{\langle y\rangle^2}\sqrt{\langle y\rangle^2 u(x)^2 + \langle x\rangle^2 u(y)^2}$

Tab. 2: Expressões para os cálculos dos valores médios e incertezas propagadas de algumas grandezas $f(x, y)$ que possuem duas variáveis independentes.

Nesse momento, fica evidente o caso geral onde $f = f(x, y, z, ...)$ é uma função de várias variáveis independentes. Nesse caso, a incerteza propagada pode ser calculada através de uma extensão óbvia da Eq.2 dada por

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\langle x\rangle} u(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\langle y\rangle} u(y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=\langle z\rangle} \delta z\right)^2 + ...} \tag{3}$$

3 Material Necessário

Papel-cartão, paquímetro, régua milimetrada, balança tri-escala ou Vernier.

4 Procedimento experimental

1. **Medida da densidade superficial ρ do papel-cartão usando um paquímetro, uma régua e uma balança tri-escala ou Vernier**.

    (a) Utilizando uma régua, cada aluno do grupo deve medir independentemente e anotar o comprimento a do papel-cartão (lado maior). Usando um paquímetro, cada aluno deve medir a largura b do papel-cartão. O número de medidas de a e b deverá ser, portanto, igual ao número de componentes do grupo. Em todas as anotações, deve-se levar em conta o número de algarismos significativos de cada medida. As anotações devem ser feitas no caderno em uma tabela como a Tab. 3.

    (b) Cada aluno do grupo deve medir a massa m do papel com a balança disponível na bancada e anotar todas as medidas no caderno em uma tabela (como a Tab.4), levando em conta o número de algarismos significativos das medidas.

comprimento (mm)		largura (mm)	
$\sigma_{ap} =$		$\sigma_{ap} =$	
i	a_i	i	b_i
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	

Tab. 3: Tabela de dados para o comprimento a e largura b do papel cartão.

massa (g)	
$\sigma_{ap} =$	
i	m_i
1	
2	
3	
4	

Tab. 4: Tabela de dados para a massa m do papel cartão.

5 Análise de dados

2. Calcule o valor médio das medidas de comprimento do papel $\langle a \rangle$.

3. Calcule o desvio padrão da média, σ_m das medidas de comprimento usando a função estatística da sua calculadora, ou manualmente, seguindo os seguintes passos: calcule a soma dos valores medidos para o comprimento da folha de papel, a_i, ou seja, Σa_i; calcule a soma de cada a_i ao quadrado, ou seja $\Sigma(a_i)^2$; utilize a fórmula

$$\sigma_m(a) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\Sigma(a_i)^2 - \frac{1}{n}(\Sigma a_i)^2}{(n-1)}}$$

   OBS: o desvio padrão amostral que as calculadoras científicas usualmente calculam corresponde à formula acima porém sem o termo $\frac{1}{\sqrt{n}}$

4. Levando em conta a incerteza intrínseca do aparelho de medida, σ_{ap}, calcule a incerteza total da medida do comprimento, $u(a)$, como sendo

$$u(a) = \sqrt{\sigma_m^2(a) + \sigma_{ap}^2}$$

5. Expresse o valor final da medida do comprimento como sendo

$$a = \langle a \rangle \pm u(a)$$

   OBS: Não se esqueça que a incerteza da medida na expressão acima deve conter apenas um algarismo significativo e que o número de casas decimais ou potência de dez de $\langle a \rangle$ deve ser o mesmo de $u(a)$

6. Repita os passos acima, desta vez para a largura do papel, e obtenha $b = \langle b \rangle \pm u(b)$

7. Repita os passos acima, desta vez para a massa do papel, e obtenha $m = \langle m \rangle \pm u(m)$

8. Calcule o valor mais provável para a área A da folha de papel como sendo $\langle A \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$

9. Calcule a incerteza propagada $u(A)$

$$u(A) = \sqrt{\langle b \rangle^2 u(a)^2 + \langle a \rangle^2 u(b)^2}$$

10. Escreva a área como sendo $A = \langle A \rangle \pm u(A)$.

11. Calcule o valor mais provável para a densidade superficial do papel,$\langle \rho \rangle = \frac{\langle m \rangle}{\langle A \rangle}$

12. Calcule incerteza propagada $u(\rho)$

$$u(\rho) = \frac{1}{\langle A \rangle^2} \sqrt{\langle A \rangle^2 u(m)^2 + \langle m \rangle^2 u(A)^2}$$

13. Escreva a densidade como sendo $\rho = \langle \rho \rangle \pm u(\rho)$, ajustando corretamente o número de algarismos significativos da incerteza.

14. Calcule a incerteza relativa da densidade e de cada uma das grandezas que são usadas no seu cálculo (comprimento, largura e massa do papel) usando a fórmula

$$\epsilon_{rel}(x) = \frac{u(x)}{\langle x \rangle}$$

    Qual incerteza de medida direta teve impacto maior na incerteza final da densidade? Como esta medida poderia ser aprimorada?

15. Compare a densidade superficial do papel-cartão, obtida na experiência, com o valor 200 g/m^2, anunciado pelo fabricante.