



Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística



Relatório Técnico – RTP 01/2013

**MÉTODO *MEAN SHIFT* PARA DETECÇÃO DE *OUTLIERS* EM MODELOS
NORMAIS ASSIMÉTRICOS**

Thalita do Bem Mattos
Dr. Clécio da Silva Ferreira

**Juiz de Fora
2013**

THALITA DO BEM MATTOS
CLÉCIO DA SILVA FERREIRA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**MÉTODO *MEAN SHIFT* PARA DETECÇÃO DE *OUTLIERS* EM MODELOS
NORMAIS ASSIMÉTRICOS**

Relatório Técnico de Pesquisa
apresentado para o Departamento de
Estatística da Universidade Federal de Juiz
de Fora, sob orientação do **Prof. Clécio da
Silva Ferreira.**

JUIZ DE FORA

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre o método de detecção de pontos candidatos a *outliers* em modelos de regressão normais assimétricos, baseado na metodologia proposta por Cook & Weisberg (1982). Modelos assimétricos têm sido amplamente estudados nos últimos anos, nas situações onde a suposição de normalidade não é satisfeita devido a falta de simetria dos dados. Técnicas para avaliação da qualidade de ajuste e análise de diagnósticos são importantes para a validação do modelo proposto. Para o modelo, um algoritmo EM é desenvolvido de forma a fornecer uma solução analítica para os parâmetros do modelo de regressão. Estudos de simulação foram realizados em um modelo de regressão linear simples, mostrando a eficiência do método em detectar pontos candidatos a *outliers*.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vi
1 INTRODUÇÃO	1
2 METODOLOGIA	3
2.1 Distribuição Normal Assimétrica Padrão	3
2.2 Distribuição Normal Assimétrica de Locação – Escala	5
2.3 Modelo de Regressão Normal Assimétrico	6
2.4 Detecção de <i>Outliers</i> em Modelos de Regressão	8
2.4.1 Algoritmo EM para a estimação de $\theta = (\beta^T, \sigma^2, \lambda, \gamma)^T$	8
2.4.2 Testes Assintóticos	11
3 RESULTADOS	13
3.1 Estudos de Simulação 1	13
3.2 Estudos de Simulação 2	17
3.3 Aplicação a Dados Reais	18
4 CONCLUSÃO	20
APÊNDICE	21
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	33

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Funções de densidade da normal assimétrica para diferentes valores de λ	4
Figura 2. Histograma dos dados simulados	14
Figura 3. Técnicas de Diagnóstico	15
Figura 4. Técnicas de Diagnóstico, observação perturbada	16
Figura 5. Qualidade do ajuste	19

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Estatísticas descritivas para os dados simulados	13
Tabela 2. Estimativas dos parâmetros do modelo NA	13
Tabela 3. Estimativas de γ e testes assintóticos para as observações 92, 93 e 95 .	14
Tabela 4. Estimativas de γ e testes assintóticos, para diversas intensidades de perturbações	16
Tabela 5. EMVS do modelo normal assimétrico (NA) para o conjunto de dados sobre qualidade de vida	18
Tabela 6. Estimativas de γ e testes assintóticos para as observações 20,42 e 73 ..	19

1. INTRODUÇÃO

A distribuição normal é a distribuição teórica mais utilizada na prática, pois é matematicamente conveniente trabalhar com ela, uma vez que suas propriedades são bastante conhecidas. Entretanto, existem muitos fenômenos que não podem ser descritos pela distribuição normal e nem por distribuições simétricas, por exemplo, quando há falta de simetria dos dados. Desta forma propõe-se como alternativa a utilização de uma distribuição, de forma que se consiga modelar a assimetria dos dados e, além disso, incluir a distribuição normal como um caso particular. Esta família de distribuições é denominada normal assimétrica.

A distribuição normal assimétrica foi formalmente introduzida por Azzalini (1985), que estudou suas propriedades e mostrou que a distribuição tem problemas na estimação do parâmetro que controla a assimetria, pelos métodos de estimação usuais (método dos momentos e de máxima verossimilhança).

Posteriormente, Azzalini e Dalla Vale (1996) trabalham com o caso multivariado, com ênfase para o caso bivariado e apresentam a construção da densidade via condicionamento e via transformação de variáveis. Azzalini e Capitanio (1999) enfatizaram aplicações estatísticas da versão multivariada.

Modelos assimétricos têm sido amplamente estudados nos últimos anos. Azzalini (2005) apresentou uma discussão em distribuições normais assimétricas com aplicações em modelos de regressão. Bauwens e Laurent (2004) consideram um estudo em modelos GARCH. Vilca-Labra e Leiva-Sánchez (2006) consideram uma extensão da distribuição de Birnbaum-Saunders sob estruturas assimétricas. No contexto de modelos lineares, Lachos et al. (2007a) consideram uma aplicação de técnicas de diagnóstico em modelos mistos lineares.

Desta forma, técnicas para a verificação da qualidade de ajuste em modelos assimétricos auxiliam a validar um modelo proposto. Análises de resíduos, de diagnóstico e técnicas gráficas são as metodologias mais utilizadas, fornecendo evidências sobre possíveis violações das suposições do modelo. Para reforçar os métodos de análise de diagnóstico, Cook e Weisberg

(1982) propõe um método para detecção de outliers em modelos de regressão, inserindo um parâmetro extra na i -ésima componente sistemática do modelo.

Não existem na literatura artigos sobre a utilização da técnica mean-shift (Cook & Weisberg, 1982) em modelos normais assimétricos, que é o objetivo central deste trabalho. Para alcançar este objetivo, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos são alcançados. Para detectar se alguma observação é um outlier, testes assintóticos como o teste da razão de verossimilhança e o teste do escore são utilizados neste contexto. Técnicas gráficas como o envelope simulado serão utilizadas para a inspeção visual dos pontos ajustados pelo modelo normal assimétrico. As análises e estudos de simulação serão feitos no software livre R (R Development Core Team, 2012).

2. METODOLOGIA

2.1. DISTRIBUIÇÃO NORMAL ASSIMÉTRICA PADRÃO

Inicialmente estudaremos o caso uniparamétrico, a qual denominaremos distribuição normal assimétrica padrão. Esta distribuição depende apenas de um parâmetro, o qual caracteriza a assimetria da sua função de densidade.

Definição 1: *Uma variável aleatória Z tem distribuição normal assimétrica padrão se sua função de densidade de probabilidade é dada por*

$$f_Z(z) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (1)$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são as funções de densidade de probabilidade e de distribuição de uma normal padrão, respectivamente.

O parâmetro λ caracteriza a forma da distribuição e também é denominado parâmetro de assimetria, pois valores negativos de λ indicam assimetria negativa e valores positivos de λ assimetria positiva. Se $\lambda = 0$ a densidade acima coincide com a densidade da distribuição normal padrão e portanto é simétrica. Utilizaremos a seguinte notação $Z \sim NA(\lambda)$. A Figura 1 ilustra o comportamento desta densidade para alguns valores de λ .

Proposição 1: *A função de distribuição associada à densidade (1) é denotada por $F_Z(z; \lambda)$ e dada por*

$$F_Z(z; \lambda) = 2\Phi_2(z, 0 | \mathbf{0}, \Omega), \quad \text{com } \Omega = \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ -\delta & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad z \in \mathbb{R}$$

sendo $\Phi_2(\cdot | \Omega)$ a função de distribuição de uma normal bivariada com média zero e matriz de variância Ω .

Através da Proposição 1 vemos que a função de distribuição da normal assimétrica pode ser obtida facilmente se tivermos acesso a um programa que calcule a distribuição acumulada de uma normal bivariada.

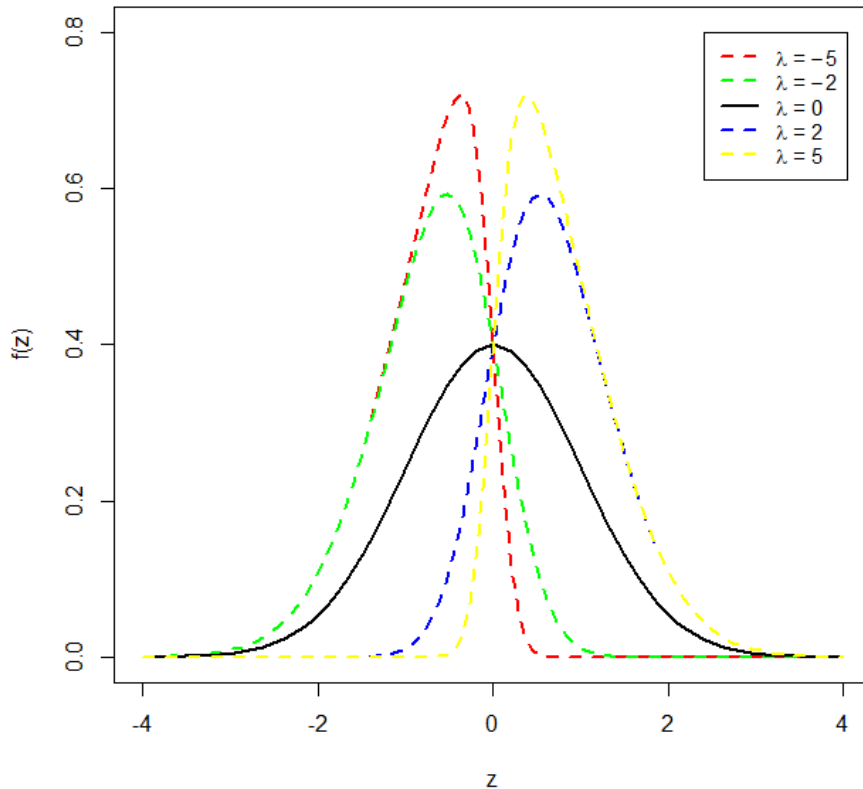


Figura 1: Funções de densidade da normal assimétrica para diferentes valores de λ

A densidade em (1) possui algumas propriedades interessantes que serão listadas neste trabalho, cujas provas podem ser obtidas em Azzalini (1985) e Azzalini (2004).

Denotamos por $NT(\mu, \sigma^2)$ a distribuição normal truncada à esquerda de zero (Johnson et al., 1994), com parâmetro de localização μ e de escala σ^2 , com densidade dada por $2\phi(Z)\mathbf{I}_{[0,\infty]}(Z)$, onde $\mathbf{I}_{[A,B]}$ denota a função indicadora.

Propriedades

1. Se $Z \sim NA(\lambda)$, então $|Z| \sim NT(0,1)$
2. Quando $\lambda \rightarrow \infty$, a densidade (1) converge a uma $NT(0,1)$
3. Se $Z \sim NA(\lambda)$, então $-Z \sim NA(-\lambda)$
4. A densidade (1) é log-côncava
5. $1 - F_Z(-z; \lambda) = F_Z(z; \lambda)$
6. $F_Z(z; 1) = \{\Phi(z)\}^2$

7. $\sup|\Phi(z) - F_Z(z)| = \pi^{-1} \arctan |\lambda|$
8. Se $Z \sim NA(\lambda)$ então $Z^2 \sim \chi_1^2$
9. (Representação estocástica de Henze, 1986) Se $U, V \sim N(0,1)$, independentes, então

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} |U| + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} V \sim NA(\lambda).$$

Esta última propriedade é útil para gerar amostras da distribuição normal assimétrica a partir da normal padrão. Será de grande utilidade também, para a implementação da inferência estatística.

A seguir, apresentaremos a função geradora de momentos (f.g.m) da distribuição normal assimétrica, apresentada em Azzalini (1985).

Proposição 2: A função geradora de momentos da normal assimétrica é dada por

$$M_Z(t) = 2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \Phi(\delta t), \text{ com } \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

A partir da Proposição 2, obtemos os momentos da normal assimétrica (ver Ferreira, 2008). Seja Z uma variável aleatória com distribuição $NA(\lambda)$, temos que a média e a variância são dadas por

$$E(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \text{ e } Var(Z) = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

2.2. DISTRIBUIÇÃO NORMAL ASSIMÉTRICA DE LOCAÇÃO-ESCALA

O modelo (1) é estendido introduzindo parâmetros de locação ($\mu \in \mathbb{R}$) e escala ($\sigma > 0$). Neste caso, utilizaremos a notação $Y \sim NA(\mu, \sigma^2, \lambda)$.

Definição 2: Uma variável aleatória Y tem distribuição normal assimétrica com parâmetros de locação μ e de escala σ^2 se sua função de densidade de probabilidade é da forma:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y-\mu}{\sigma}\right), y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Note que se $Z \sim NA(\lambda)$ e $Y = \mu + \sigma Z$, então $Y \sim NA(\mu, \sigma^2, \lambda)$. Ou seja, qualquer combinação linear de uma variável aleatória normal assimétrica padrão também terá distribuição normal assimétrica.

Proposição 3: A função de distribuição de (2), é denotada por $F_Y(y; \mu, \sigma^2, \lambda)$ e dada por

$$F_Y(y; \mu, \sigma^2, \lambda) = 2\Phi_2\left(\frac{y - \mu}{\sigma}, 0 \mid \mathbf{0}, \Omega\right), \text{ com } \Omega = \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ -\delta & 1 \end{bmatrix}, \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, z \in \mathbb{R}$$

sendo $\Phi_2(\cdot \mid \Omega)$ a função de distribuição de uma normal bivariada com média zero e matriz de variância Ω .

Proposição 4: A função geradora de momentos da normal assimétrica é dada por

$$M_Z(t) = 2 \exp\left(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) \Phi(\delta\sigma t), \text{ com } \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

E sua forma quadrática

$$D = \frac{(Y - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2. \quad (3)$$

A média e a variância de uma variável aleatória $Y \sim NA(\mu, \sigma^2, \lambda)$, são expressas por,

$$E(Y) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \text{ e } Var(Y) = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right).$$

Proposição 5: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tais que $X \sim NA(\mu, \sigma^2, \lambda)$ e $Y = a + bX$, a e $b \in \mathbb{R}$. Então

$$Y \sim NA(a + b\mu, b^2\sigma^2, \text{ sinal}(b)\lambda).$$

2.3. MODELO DE REGRESSÃO NORMAL ASSIMÉTRICO

Suponha que tenhamos m observações de uma variável resposta Y . Associado à j -ésima observação, tenhamos também um conjunto de p variáveis explicativas (conhecidas). Formulamos assim o modelo linear

$$Y_j = \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

em que \mathbf{x}_j^T é o vetor de observações das variáveis explicativas ($1 \times p$), $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$, ε_j são os erros independentes, cada ε_j supostamente seguindo uma distribuição $NA(0, \sigma^2, \lambda)$.

Note que $E(\varepsilon_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \neq 0$, para $\lambda \neq 0$. Isto pode ser contornado subtraindo o vício do intercepto ($\beta_0 - c\sigma\rho$).

O interesse é fazer inferência sobre o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^T, \sigma^2, \lambda^T)^T$.

O logaritmo da função verossimilhança para o modelo (4), denotado por $\ell(\boldsymbol{\theta})$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^m \log \left[2\phi(y_i | \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \Phi \left(\frac{\lambda(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma^2} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \log \left[2 \int_0^{+\infty} \phi(y_i | \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \phi(t_i | \lambda(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}), \sigma^2) dt_i \right]. \end{aligned}$$

Note que não existem soluções explícitas para o problema de maximização da função de verossimilhança acima. Esta pode ser maximizada numericamente usando programas como, por exemplo, Matlab, R e S-plus. Estes programas contêm rotinas prontas para tratar problemas de maximização (ou minimização) de qualquer função. No entanto, a menos que valores iniciais adequados sejam dados, não há garantia de se obter um máximo global, sendo necessária a implementação de métodos mais confiáveis como, por exemplo, o algoritmo EM.

Os passos necessários para a implementação do algoritmo EM para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) dos parâmetros do modelo definido em (4) encontra-se em Ferreira (2008).

2.4. DETECÇÃO DE OUTLIERS EM MODELOS DE REGRESSÃO

Para detectar se a i -ésima observação é influente, Cook & Weisberg (1982) sugerem o modelo de diagnóstico inserindo um parâmetro extra γ na componente sistemática $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned} Y_j &= \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \\ Y_i &= \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \gamma + \varepsilon_i \\ \varepsilon_j &\sim SN(0, \sigma^2, \lambda), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

sendo γ um parâmetro extra que, se diferente de 0, indica que a i -ésima observação é um candidato a *outlier*. Este método de detecção de outlier recebe o nome de “*Mean-Shift Outlier Model*”.

Considerando o seguinte teste de hipóteses

$$H_0: \gamma = 0 \quad \times \quad H_1: \gamma \neq 0. \quad (6)$$

Então, se a hipótese nula é rejeitada, a i -ésima observação é um possível *outlier*. Podemos utilizar as estatísticas da razão de Verossimilhança, Escore ou Wald para realizar o teste.

A função de log-verossimilhança associada ao modelo (5) é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) = \ell_{(i)}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) + \ell_i(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}), \quad \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^T, \sigma^2, \lambda, \gamma)^T, \quad (7)$$

onde $\ell_i(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) = \log 2 - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) + \log \left(\phi \left(\frac{Y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma}{\sigma} \right) \right) + \log \left(\Phi \left(\lambda \frac{Y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma}{\sigma} \right) \right)$ e

$\ell_{(i)}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) =$

$$(n-1) \log 2 - \frac{(n-1)}{2} \log(\sigma^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \log \left(\phi \left(\frac{Y_j - \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \log \left(\Phi \left(\lambda \frac{Y_j - \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right).$$

2.4.1. ALGORITMO EM PARA A ESTIMAÇÃO DE $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^T, \sigma^2, \lambda, \gamma)^T$

Seja \mathbf{y} o conjunto de dados observados e \mathbf{s} denotando o conjunto de dados faltantes. O dado completo $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}, \mathbf{s})$ é \mathbf{y} aumentado com \mathbf{s} . Denota-se por

$\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, a função log-verossimilhança dos dados completos e por $Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c)|\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\theta}}]$, o valor esperado desta função. Cada iteração do algoritmo EM envolve dois passos, um passo E (esperança) e um passo M (maximização), definidos como:

- Passo E: Calcule $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ como uma função de $\boldsymbol{\theta}$;
- Passo M: Encontre $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ que maximiza $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)})$.

Utilizando a representação estocástica de Henze (1986), o modelo de regressão (5) acima pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Y_j | T = t_j &\sim N\left(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta} + \frac{\sigma\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} t_j, \frac{\sigma^2}{1+\lambda^2}\right), \\ T_j &\sim NT(0,1), j = 1, \dots, n, j \neq i \\ Y_i | T = t_i &\sim N\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \gamma + \frac{\sigma\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} t_i, \frac{\sigma^2}{1+\lambda^2}\right), \\ T_i &\sim NT(0,1). \end{aligned}$$

A distribuição conjunta de \mathbf{y} e \mathbf{t} é dada por

$$\begin{aligned} f(y_j, t_j) &= 2 \phi(y_j | \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \phi(t_j | \lambda(y_j - \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}), \sigma^2) \mathbf{I}(t_j > 0), \quad j = 1, \dots, n, j \neq i \\ f^*(y_i, t_i) &= 2 \phi(y_i | \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \gamma, \sigma^2) \phi(t_i | \lambda(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma), \sigma^2) \mathbf{I}(t_i > 0) \end{aligned} \quad (8)$$

Seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ o conjunto de dados observados, e tratando $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)^T$ como dado faltante, segue que a função de log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}^T, \mathbf{t}^T)^T$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_c) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \log f(y_j, t_j) + \log f^*(y_i, t_i) \\ &\propto n \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ (1 + \lambda^2) [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - 2\gamma(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + \gamma^2] + \mathbf{t}^{2T} \mathbf{1}_n \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda[\mathbf{t}_{(i)}^T (\mathbf{y}_{(i)} - \mathbf{X}_{(i)}^T \boldsymbol{\beta}) + t_i(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) - \gamma t_i] \right\}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{t}^2 = (t_1^2, \dots, t_n^2)^T$, $\mathbf{1}_n$ é um vetor de 1's de tamanho n , $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T$ é a matriz de regressoras, de dimensão $n \times p$ e o termo $\mathbf{z}_{(i)}$ indica o vetor \mathbf{z} sem a i -ésima observação.

De (8), tem-se que

$$T_j | y_j \sim NT(\lambda(y_j - \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}), \sigma^2), j = 1, \dots, n, j \neq i \text{ e}$$

$$T_i | y_i \sim NT(\lambda(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma), \sigma^2).$$

Seja $\hat{t}_j = E[T_j | \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{y}_j]$ e $\hat{t}_j^2 = E[T_j^2 | \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{y}_j]$, $j = 1, \dots, n$. Então, usando os momentos da distribuição normal truncada (Lachos, 2004), tem-se que

$$\hat{t}_j = \hat{\lambda} \hat{\eta}_j + \hat{\sigma} W_\phi\left(\frac{\hat{\lambda} \hat{\eta}_j}{\hat{\sigma}}\right) \text{ e } \hat{t}_j^2 = \hat{\lambda}^2 \hat{\eta}_j^2 + \hat{\sigma}^2 + \hat{\lambda} \hat{\sigma} \hat{\eta}_j W_\phi\left(\frac{\hat{\lambda} \hat{\eta}_j}{\hat{\sigma}}\right), j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

com $W_\phi(x) = \frac{\phi(x)}{\Phi(x)}$, $\hat{\eta}_j = \hat{\lambda}(y_j - \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}})$, $j = 1, \dots, n, j \neq i$ e $\hat{\eta}_i = \hat{\lambda}(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\gamma})$

Considere $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \left(\boldsymbol{\beta}^{(k)T}, \sigma^{2(k)}, \lambda^{(k)}, \gamma^{(k)} \right)^T$ a estimativa de $\boldsymbol{\theta}$ na k -ésima iteração. Segue que a esperança com respeito a \mathbf{t} , condicionada em \mathbf{y} , da função log-verossimilhança completa (Passo E), tem a forma

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_c) | \mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}]$$

$$= n \log \sigma^{2(k)} - \frac{1}{2\sigma^{2(k)}} \left\{ (1 + \lambda^{(k)2}) [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)}) - 2\gamma^{(k)}(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + \gamma^{(k)2}] + \mathbf{t}^{2(k)T} \mathbf{1}_n - 2\lambda^{(k)} [\mathbf{t}_{(i)}^{(k)T} (\mathbf{y}_{(i)} - \mathbf{X}_{(i)}^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + t_i^{(k)}(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) - \gamma^{(k)} t_i^{(k)}] \right\}$$

Portanto, tem-se o seguinte algoritmo EM:

Passo E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$, calcule $\hat{t}_j^{(k)}$ e $\hat{t}_j^{2(k)}$, para $j = 1, \dots, n$, como em (9).

Passo M: Atualize $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}$ maximizando $Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})$ sob $\boldsymbol{\theta}$, o que leva às seguintes soluções analíticas:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \frac{\lambda^{(k)}}{1 + \lambda^{(k)2}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{t}}^{(k)} - \gamma^{(k)} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{x}_i,$$

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{1}{2n} \left\{ (1 + \lambda^{(k)2}) [Q(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) - 2\gamma^{(k)}(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + \gamma^{(k)2}] + \hat{\mathbf{t}}^{2(k)T} \mathbf{1}_n - 2\lambda^{(k)} \hat{\mathbf{t}}^{(k)T} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + 2\lambda^{(k)} \gamma^{(k)} \hat{t}_i^{(k)} \right\},$$

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \frac{\hat{\mathbf{t}}^{(k)T} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)}) - \gamma^{(k)} \hat{t}_i^{(k)}}{Q_\phi(\boldsymbol{\beta}^{(k)})}$$

$$\hat{\gamma}^{(k+1)} = (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) - \frac{\lambda^{(k)}}{1 + \lambda^{(k)2}} \hat{t}_i^{(k)}, \quad (10)$$

onde $Q(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)})$ e

$$Q_\phi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) - 2\gamma^{(k)}(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + \gamma^{(k)2}.$$

Claramente, se $\gamma = 0$, as equações do Passo M se reduzem às equações obtidas em Ferreira (2008) para o modelo normal assimétrico. Note que, quando $\lambda = 0$ e $\gamma = 0$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ e $\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{n}$ são os EMV de β e σ^2 , respectivamente, do modelo normal simétrico.

São usados como valores iniciais para $\boldsymbol{\theta}$ no algoritmo os estimadores de momentos (Rodríguez, 2005).

2.4.2. TESTES ASSINTÓTICOS

No teste de Escore, a estatística de teste é dada por

$$\xi_{SR} = \frac{U_\gamma(\boldsymbol{\theta})^2}{I_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta})} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_0},$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^T, \hat{\sigma}^2, \hat{\lambda}, 0)^T$ é o mesmo estimador de máxima verossimilhança (EMV) de um modelo de regressão normal assimétrico (o EMV obtido via algoritmo EM em Ferreira (2008)),

$$U_\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = \frac{(Y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma)}{\sigma^2} - \frac{\lambda}{\sigma} W_\phi(\lambda(Y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma)/\sigma)$$

$$I_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left(1 - \lambda^2 W_\phi^{(1)}(\lambda(Y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \gamma)/\sigma) \right), \quad (11)$$

com $W_\phi^{(1)}(x) = -W_\phi(x)(x + W_\phi(x))$.

A estatística de teste da Razão de Verossimilhanças é definida como

$$\xi_{RV} = 2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{y}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0; \mathbf{y})\},$$

$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$ definida em (7) e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como obtido em (10).

Por último, a estatística de teste de Wald é dada por

$$\xi_W = \gamma^2 I_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta})|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}},$$

$\gamma^2 I_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ dada em (11).

Sob H_0 e para grandes amostras, tem-se que ξ_{SR} , ξ_{RV} e $\xi_W \sim \chi_1^2$.

3. RESULTADOS

Nesta seção realizamos estudos de simulação para verificar a validade do algoritmo EM e do método proposto na seção 2.4.

3.1 ESTUDO DE SIMULAÇÃO 1

No primeiro estudo de simulação foram gerados dados de acordo com o seguinte modelo linear normal assimétrico:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \text{ onde } \varepsilon_i \sim SN(0, \sigma^2, \lambda), i = 1, \dots, 100, \quad (12)$$

sendo os valores da covariável $x_i, i = 1, \dots, 100$, gerados de uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Os valores fixados dos parâmetros foram $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \sigma^2 = 2$ e $\lambda = 3$.

Na Tabela 1 apresentamos as estatísticas descritivas para os dados simulados, como em (12). Notamos que a média é maior que a mediana confirmando a assimetria positiva dos dados ($\lambda > 0$).

Tabela 1: Estatísticas descritivas para os dados simulados

Mínimo	2.754
1º Quantil	4.658
Mediana	5.749
Média	5.874
3º Quantil	7.109
Máximo	9.413

A Tabela 2 apresenta os valores escolhidos e estimados dos parâmetros do modelo, através do algoritmo EM.

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros do modelo NA, (12)

	β_0	β_1	σ^2	λ	$\ell(\theta)$
Valores Verdadeiros	3	4	2	3	-
Estimativas	2.673	4.606	2.443	3.819	-135.578

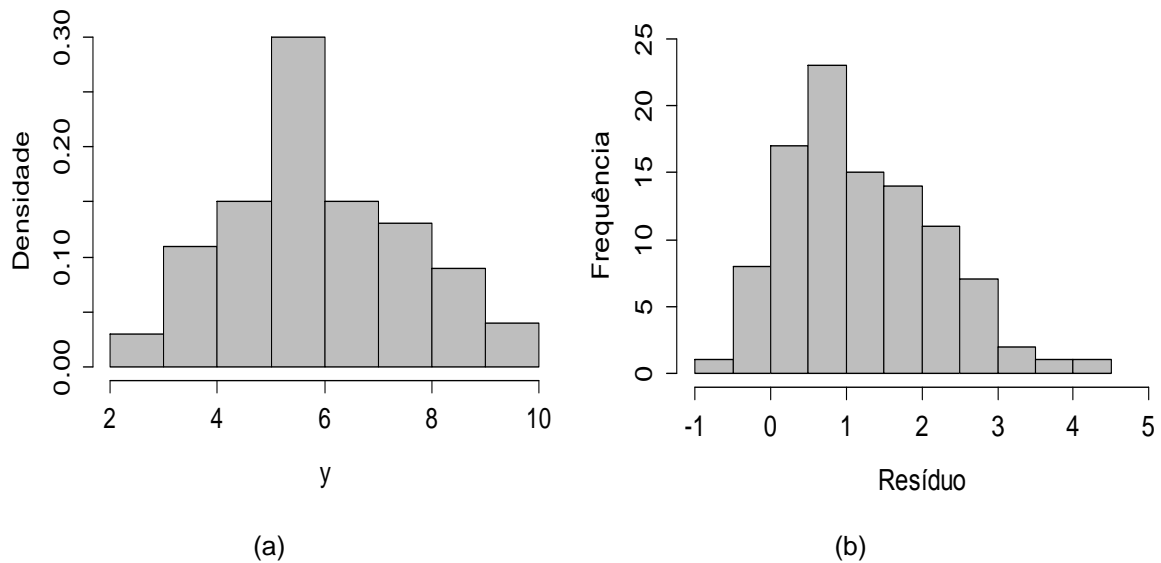


Figura 2: (a) Histograma dos dados simulados e (b) Histograma do resíduo do modelo

Fazendo o teste de detecção de *outliers* proposto aos maiores resíduos padronizados (Figura 3(b)), percebemos pela Tabela 3, que os pontos 92 e 93 são apontados como candidatos a *outliers*. Por outro lado, que o gráfico de envelope simulado não acusa pontos além da banda de confiança (Figura 3(a)). Como o gráfico de envelope simulado é um método artificial de qualidade de ajuste, notamos que o método proposto neste trabalho é mais confiável para o estudo de pontos aberrantes. Pode-se afirmar, portanto, que a metodologia de detecção de *outliers* proposta neste trabalho é robusta na identificação de pontos candidatos a *outliers*.

Tabela 3: Estimativas de γ e testes assintóticos para algumas observações.

	$\hat{\gamma}$	ξ_{SR} (p-valor)	ξ_{RV} (p-valor)	ξ_W (p-valor)
12	2.3547	3.6789 (0.0551)	3.4760 (0.0623)	2.3566 (0.1248)
16	-0.9665	1.9910 (0.1582)	2.6006 (0.1068)	4.9842 (0.0256)
58	-0.8815	6.2517 (0.0124)	11.3069 (0.0008)	225.6763 (0)
68	-0.9894	2.2634 (0.1325)	2.8455 (0.0916)	5.2507 (0.0219)
92	3.7424	8.0595 (0.0045)	8.2385 (0.0041)	6.5656 (0.0104)
93	3.1548	6.0264 (0.0141)	5.9577 (0.0147)	4.4474 (0.0350)
95	2.6156	4.4170 (0.0356)	4.2331 (0.0396)	2.9602 (0.0853)

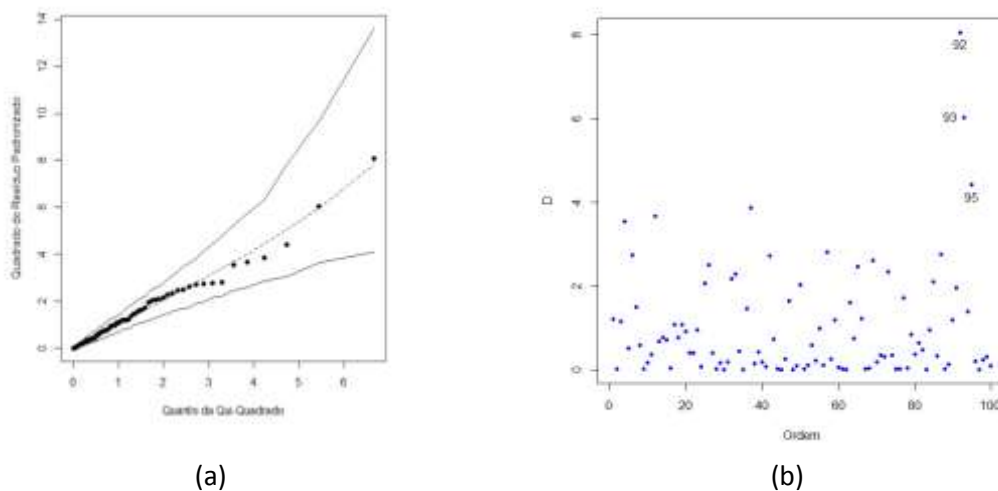


Figura 3: Técnicas de Diagnóstico: (a) Gráficos de envelope simulado (bandas de 95% de confiança) para o modelo simulado em (11). (b) Forma quadrática dos resíduos vs ordem das observações.

Para avaliar a capacidade do método proposto em diagnosticar *outliers* em modelos de regressão, faremos um estudo de perturbação gradual de pontos, de forma a alterar sua posição na massa dos dados. Escolhemos um ponto dentro da massa de dados e perturbamos seu valor y_i , em 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, -10%, -20% e -30% do seu valor (Figura 4(a)). A Tabela 4 apresenta as estimativas do parâmetro γ e as estatísticas dos testes assintóticos Razão de Verossimilhança, Wald e Escore, junto com seus respectivos p-valores, para cada perturbação.

Na Figura 4(a) as linhas vermelhas indicam os quantis teóricos da distribuição normal assimétrica. Notamos que os pontos 58, 92 e 93 estão situados fora deste intervalo de quantis e com isso eles foram detectados como candidatos a outliers, conforme a Tabela 3. Já os pontos 12, 16, 68 e 95 estão situados na fronteira do intervalo de quantis e não são detectados como candidatos a outliers.

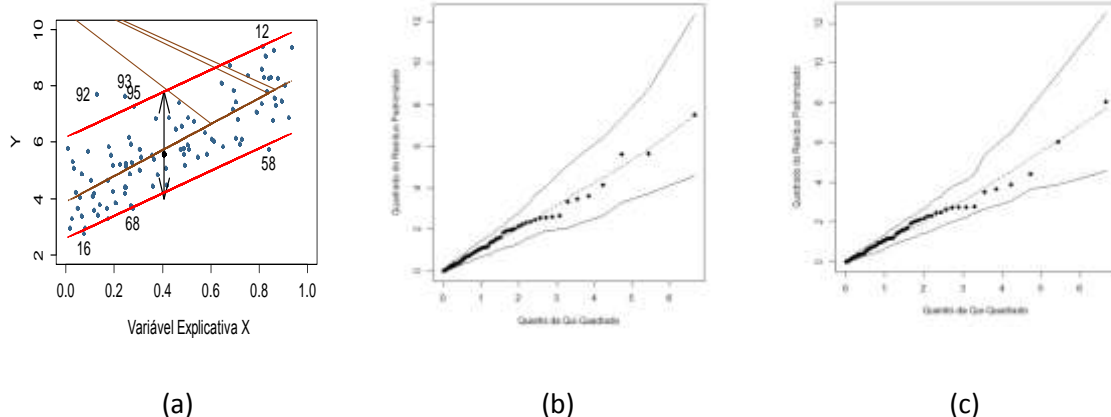


Figura 4: Técnicas de Diagnóstico, observação perturbada: (a) Gráfico de dispersão y vs x . A seta indica a perturbação para baixo e para cima em y_i . Gráficos de envelope simulado (bandas de 95% de confiança) para o modelo simulado em (11), com as perturbações de 50% (b) e -30% (c).

Percebe-se pela Tabela 4 que, quanto maior a perturbação, maiores são os valores absolutos de $\hat{\gamma}$ e menores são seus respectivos p-valores, confirmando a capacidade da metodologia em captar pontos fora da massa dos dados e que influenciam no ajuste do modelo. A discrepância na porcentagem de perturbação nos sentidos se deve à assimetria dos modelos, $Y_i|x_i \sim SN(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2, \lambda)$, logo pontos extremos na cauda leve da distribuição são mais suscetíveis a serem candidatos a *outliers*. Ainda os gráficos de envelopes não foram capazes de detectar a presença dos pontos influentes, detectados pelo método *mean-shift*, como pode ser visto na Figura4 (b e c).

Tabela 4: Estimativas de γ e testes assintóticos, para diversas intensidades de perturbações.

Porcentagem	$\hat{\gamma}$	ξ_{SR} (p-valor)	ξ_{RV} (p-valor)	ξ_W (p-valor)
50%	3.1872	5.6350(0.01761)	5.5526(0.01845)	4.1278(0.04218)
40%	2.6282	4.2027(0.04036)	2.4024(0.04486)	2.8068(0.09386)
30%	2.0692	2.9432(0.08624)	2.7076(0.09987)	1.7398(0.18716)
20%	1.5102	1.8824(0.17006)	1.6175(0.20344)	0.9268(0.33570)
10%	0.9512	1.0301(0.31013)	0.7663(0.38137)	0.3704(0.54281)
0%	0.3922	0.2326 (0.62960)	0.1740 (0.67656)	0.0944 (0.75869)
-10%	-0.1668	0.0540 (0.81619)	0.0468 (0.82866)	0.0638 (0.80060)
-20%	-0.7258	1.0305 (0.31004)	1.3275 (0.24924)	2.4258 (0.11935)
-30%	-1.2848	4.0302 (0.04469)	5.0698 (0.02435)	9.5099 (0.00204)

3.2 ESTUDO DE SIMULAÇÃO 2

Em um segundo momento foram gerados dados de acordo com o seguinte modelo linear normal assimétrico:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \text{ onde } \varepsilon_i \sim SN(0, \sigma^2, \lambda), i = 1, \dots, 1000,$$

sendo os valores da covariável $x_i, i = 1, \dots, 1000$, gerados de uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Os parâmetros de locação foram mantidos fixos e iguais a $\beta_0 = 2, \beta_1 = 3$, enquanto os parâmetros de escala e de assimetria tiveram os seguintes pareamentos: σ^2 assumindo valores 0,5; 1; 2 e λ assumindo valores 1;3;5;7.

Deste modo, foram gerados 12 conjuntos de dados com $\varepsilon_i \sim SN(0, \sigma^2, \lambda)$, $i = 1, \dots, 1000$. E para cada conjunto foi aplicado o método proposto na seção 2.4. As tabelas referentes aos resultados de simulação estão no Apêndice.

Baseados nos estudos destas simulações, concluímos que:

a) Mantendo o parâmetro de escala fixo e variando o parâmetro de assimetria:

a.1) Aumentando λ , aumenta o número de pontos candidatos a *outliers* na cauda pesada e diminui na cauda leve;

a.2) O intervalo entre os quantis superiores e inferiores diminui conforme aumenta λ ;

a.3) O valor de γ aumenta na cauda pesada e diminui na cauda leve;

b) Mantendo o parâmetro de assimetria fixo e variando o parâmetro de escala:

b.1) O intervalo entre os quantis superiores e inferiores aumenta conforme aumenta a variabilidade.

b.2) O valor de γ aumenta conforme aumenta a variabilidade.

Em cada simulação, verificamos que os possíveis candidatos a outliers se encontravam fora do intervalo entre os quantis superiores e inferiores, conforme o esperado.

Nos estudos de simulação, foram estudados valores de λ positivos. Para assimetria negativa, as conclusões seriam as mesmas acima, porém em direção contrária, à exceção de a.2).

3.3 APLICAÇÃO A DADOS REAIS

Para ilustrar a aplicação do método de detecção de *outliers* em modelos de regressão normal assimétrico, foi ajustado um modelo a um conjunto de dados sobre a qualidade de vida de pacientes (mulheres) com câncer de mama, em um estudo realizado pelo Centro de Atenção Integral à Saúde da Mulher (CAISM) em conjunto com a Faculdade de Ciências Médicas da Universidade Estadual de Campinas. Ferreira (2008) estudou o banco de dados com a aplicação do modelo de regressão normal assimétrico e a realizou uma análise de diagnóstico.

O modelo de regressão foi construído utilizando como variável dependente o índice de qualidade de vida (pcs) e como variáveis regressoras a variável indicadora tontura e o índice de massa corpórea do indivíduo, levando ao modelo

$$pcs_i = \beta_0 + \beta_1 tontura_i + \beta_2 imc_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim SN(0, \sigma^2, \lambda), i = 1, \dots, 97. \quad (13)$$

Ajustando o modelo, os parâmetros estimados estão descritos na Tabela 5.

Tabela 5: EMVS do modelo normal assimétrico (NA) para o conjunto de dados sobre qualidade de vida.

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\widehat{\sigma^2}$	$\hat{\lambda}$	$\ell(\hat{\theta})$
NA	68,573	-7,623	-0,351	169,409	-2,377	-346.20

A Figura 5 apresenta o envelope simulado (a) e as formas quadráticas dos resíduos ajustados (b), como em (3). Pela Figura 5(b) percebemos que os pontos 20, 42 e 73 são possíveis candidatos a *outlier*, pelo fato de ter um

resíduo padronizado bastante alto. Fazendo o teste de detecção de *outliers* proposto para estes pontos percebemos pela Tabela 6, que os pontos 20, 42 e 73 são apontados como candidatos a *outliers*, sendo que o gráfico de envelope não detectou pontos fora da banda de confiança.

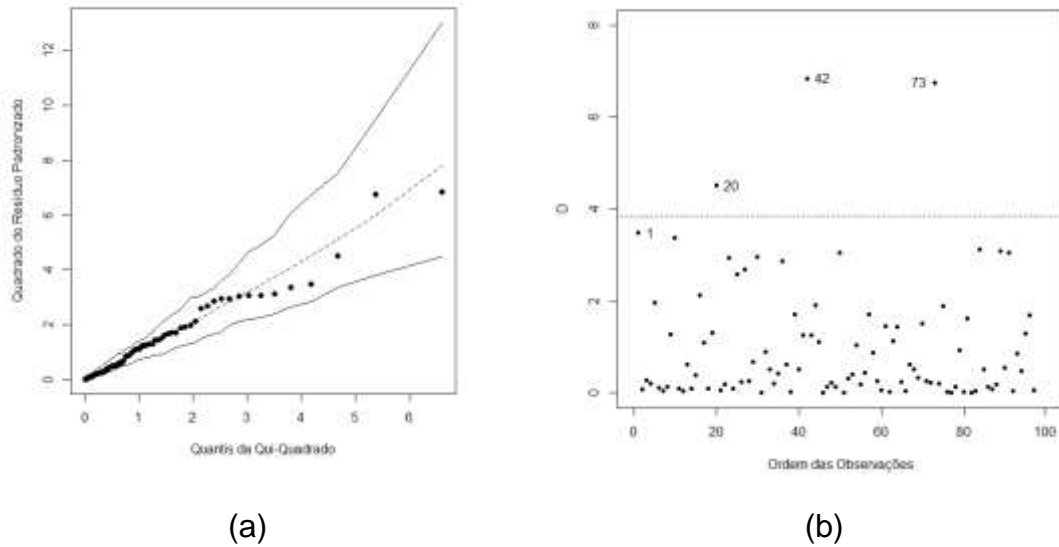


Figura 5: Qualidade do ajuste. (a) Gráfico de envelope simulado (bandas de 95% de confiança) para o modelo simulado em (13). (b) Forma quadrática dos resíduos vs ordem das observações.

Tabela 6: Estimativas de γ e testes assintóticos para as observações 20,42 e 73.

	$\hat{\gamma}$	ξ_{SR} (p-valor)	ξ_{RV} (p-valor)	ξ_W (p-valor)
20	-21.7479	4.5079(0.0337)	4.1979(0.0405)	2.8964(0.0888)
42	-27.0443	6.8342(0.0089)	6.7009(0.0096)	5.0434(0.0247)
73	-26.9983	6.7465(0.0094)	6.7123(0.0096)	5.1691(0.0230)

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos a metodologia *mean-shift* para detecção de *outliers* em modelos de regressão normais assimétricos. Os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo foram obtidos via Algoritmo EM, sendo de forma analítica na parte M. As estatísticas dos testes assintóticos de Wald, Escore e Razão de Verossimilhança foram obtidas, sendo as três utilizadas na verificação dos possíveis pontos candidatos a *outliers*. Os estudos de simulação revelaram padrões nas combinações dos parâmetros de assimetria e de escala. Ainda, a metodologia foi utilizada no ajuste de um conjunto de dados reais, revelando pontos mal ajustados não detectados pelo envelope simulado. Por fim, o método proposto demonstrou sua utilidade como uma ferramenta complementar no ajuste de modelos de regressão para dados assimétricos, principalmente quando técnicas gráficas (envelope simulado) falham na detecção de pontos mal ajustados.

	Candidatos a outliers	Mean-Shift		Testes Assintóticos						Quantis (2.5% / 97.5%)			Acumulada
		phi	RV	p-value	Score	p-value	Wald	p-value	Valor de Yi	qinf	qsup		
1	376	2,163022617	12,17293673	0,000484879	12,43668977	0,000420981	9,527158057	0,002024544	4,759545786	2,016700038	3,808416433	0,999664883	
2	203	2,056830257	11,12091933	0,000853595	11,40937285	0,000730745	8,59768753	0,003365901	6,67368419	4,082547235	5,87426363	0,999253684	
3	263	1,902440151	9,666822625	0,001876255	9,978396996	0,001583875	7,334294844	0,006755121	6,561571189	4,126432265	5,918148659	0,998374874	
4	282	1,792193366	8,666288152	0,003206129	9,006841176	0,002689709	6,496639688	0,010807857	6,972328647	4,66086094	6,452577335	0,997084044	
5	411	1,766064008	8,467422108	0,003615635	8,796674061	0,003017802	6,305140854	0,012038835	5,002577906	2,671444898	4,463131293	0,997338203	
6	2	1,692682578	7,854613144	0,00506912	8,190981419	0,0042099914	5,785606434	0,016157923	6,198956501	3,970532591	5,762248985	0,995750479	
7	215	1,63953058	7,424262662	0,006435019	7,765074433	0,005326614	5,423488524	0,019867626	6,214160707	4,040701091	5,832418385	0,994585622	
8	257	1,590065693	7,034349096	0,0079966093	7,379427959	0,006597415	5,096989989	0,023967399	4,759396205	2,603310027	4,395026421	0,994161548	
9	26	1,546919776	6,704575053	0,009616585	7,054331468	0,007907381	4,821225693	0,028111349	5,255221304	3,154345771	4,946062165	0,992607802	
10	402	1,536560668	6,626201741	0,010048932	6,976725518	0,008257656	4,756176574	0,029193328	5,30544187	3,21633059	5,008046985	0,992528495	
11	48	1,520779855	6,502296983	0,010773522	6,849107442	0,008868557	4,657659552	0,030915305	4,137068299	2,038721061	3,830437455	0,992522261	
12	692	1,510291687	6,426159506	0,011245147	6,77566122	0,009240925	4,593026277	0,032102285	4,413139185	2,331319526	4,12303592	0,991991001	
13	672	1,507529367	6,406604424	0,011369664	6,757197155	0,009337031	4,576102363	0,03242088	4,578516487	2,503063168	4,294779562	0,991774893	
14	689	1,453038271	6,01002153	0,014224854	6,365828741	0,011633875	4,248210264	0,039291718	5,180875154	3,174587696	4,966304091	0,989068205	
15	153	1,42211687	5,784079029	0,016171969	6,136862504	0,0132329202	4,067406142	0,043718359	3,970851994	1,969961332	3,761677727	0,988826945	
16	654	1,40222409	5,645000476	0,017505211	5,99964481	0,014308767	3,953397237	0,046776843	4,051083821	2,072209137	3,863925551	0,98779303	
17	86	1,396878689	5,611843913	0,017839481	5,970608606	0,01454626	3,923218771	0,047623616	5,000087541	3,047291777	4,8390008171	0,986459314	
18	298	1,385576645	5,530218918	0,018690767	5,886121453	0,015260675	3,859669855	0,04946006	6,399270907	4,49115504	6,282871434	0,983873322	
19	994	1,341687116	5,232706558	0,022166014	5,593541374	0,018026815	3,616725733	0,057201347	4,644211197	2,740048056	4,53176445	0,983624891	
Candidatos a outliers													
1	985	-1,01344983	14,30589814	0,000155377	12,50002022	0,000406948	22,32518538	2,30E-06	2,545627331	3,016572185	4,80828858	9,04E-05	
2	193	-0,91923893	11,17085742	0,000830922	9,782415058	0,001761887	17,45957987	2,93E-05	3,148100556	3,531737673	5,323454068	0,000339084	
3	344	-0,81148419	8,141866649	0,004325473	7,067396841	0,007849923	12,86783773	0,000334278	1,777786962	2,01106549	3,802781885	0,002430111	
4	65	-0,73352035	6,389279254	0,011481164	5,537524896	0,01861289	10,12021456	0,001466519	4,030118661	4,23578061	6,027497004	0,003349004	
5	497	-0,70049813	5,7292719	0,016684399	4,968055062	0,025819666	9,065241013	0,002605142	2,905307312	3,05231081	4,844027204	0,006353394	
6	482	-0,69210068	5,562643391	0,01834769	4,818429278	0,028156993	8,808655869	0,002998048	2,766707161	2,901529138	4,693245552	0,007207315	
7	125	-0,69450088	5,587143007	0,018092783	4,817613206	0,028170327	8,887721475	0,002870948	4,336317442	4,507113926	6,29883032	0,004952777	
8	483	-0,68520327	5,433883372	0,019749714	4,706976934	0,030040433	8,60354196	0,003355099	3,157251232	3,294222422	5,085988816	0,007049923	
9	743	-0,64640868	4,690901004	0,030322743	4,017841159	0,045021308	7,497065977	0,006179959	4,652809433	4,779632591	6,571348985	0,007819613	
10	12	-0,63471735	4,518067737	0,033538689	3,891853517	0,048520847	7,177306141	0,007383148	3,745668864	3,843051978	5,634768372	0,010466311	
11	860	-0,62420127	4,336876805	0,037295277	3,729729299	0,053452056	6,894914851	0,008644128	2,575718621	2,634903655	4,426620049	0,014978101	

$$2. \sigma^2 = 0.5, \lambda = 3$$

	Candidatos a outliers	Testes Assintóticos										Quantis (2,5% / 97,5%)			
		phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada			
1	233	1,840353478	8,647785411	0,003274591	8,80991581	0,002995979	6,795917459	0,009136656	6,243100255	4,047091839	5,720711419	0,997119279			
2	850	1,763795734	8,009926101	0,004652164	8,177239079	0,004241927	6,236028257	0,012517689	4,7079491	2,601857184	4,275476764	0,995669495			
3	59	1,701837811	7,511069878	0,006132162	7,684785986	0,005568828	5,799456074	0,016031133	6,232305743	4,174394055	5,848013635	0,994645396			
4	430	1,667725141	7,242488352	0,007119824	7,41437053	0,006470495	5,568726467	0,018284054	4,052954298	2,048827495	3,722447076	0,993247821			
5	511	1,638111684	7,016901743	0,008074383	7,194241025	0,007313792	5,37025202	0,020483018	4,601622644	2,62135188	4,294971461	0,992529042			
6	609	1,638056794	7,013865106	0,008088088	7,187799333	0,007340095	5,370381093	0,020481502	3,992454102	2,018378185	3,691997765	0,992331503			
7	80	1,562834304	6,449782378	0,011096593	6,631099161	0,010021341	4,88211652	0,027136325	6,587030512	4,664743041	6,338362622	0,990488143			
8	104	1,545174239	6,325253023	0,01190305	6,510316882	0,010725039	4,772300927	0,028921148	5,292065594	3,397737181	5,071356761	0,989336824			
9	809	1,500893104	6,007843732	0,014242421	6,195253962	0,012809334	4,500481971	0,033885301	5,131856816	3,282943595	4,956563175	0,987201251			
10	476	1,490229981	5,930943744	0,014877272	6,116234737	0,013394581	4,436819238	0,035171717	4,159094719	2,329935417	4,003554998	0,986159799			
11	373	1,462732057	5,740640596	0,016576746	5,929659935	0,014888115	4,27285822	0,038725739	4,849496601	3,041038612	4,714658192	0,984988781			
12	171	1,444664463	5,614122953	0,017816295	5,803201795	0,015997019	4,16640124	0,041233293	6,123730431	4,322463526	5,996083107	0,984562039			
13	1	1,424936653	5,482028876	0,019212947	5,673095617	0,01722703	4,053127612	0,044089588	4,999143212	3,226872253	4,900491833	0,982731105			
14	553	1,421584522	5,459054606	0,019467177	5,650377166	0,017451618	4,033703445	0,044599934	5,427734636	3,655061329	5,328680909	0,982575761			
15	36	1,419427893	5,444607242	0,019628828	5,63605626	0,017594741	4,021423536	0,044925778	5,34704722	3,577204677	5,250824258	0,982569453			
16	539	1,416217601	5,422857374	0,019874808	5,613604633	0,017821566	4,003521163	0,045405313	4,580642769	2,820862709	4,494482289	0,981885401			
17	547	1,411329849	5,38888193	0,020265452	5,578290022	0,018184469	3,9759757	0,046153707	4,100206356	2,349900465	4,023520045	0,98121997			
18	33	1,408889554	5,369260534	0,020494664	5,55792335	0,018397225	3,960814386	0,046571167	6,624492428	4,855058882	6,528678463	0,982542097			
19	833	1,405565549	5,348377342	0,020741565	5,538295496	0,018604695	3,942141938	0,047090782	6,366767756	4,602530836	6,276150416	0,982191228			
20	302	1,394789193	5,278347292	0,021592234	5,470091256	0,019344615	3,881710443	0,048814802	5,919356973	4,169283017	5,842902597	0,981203415			
21	142	1,36619826	5,090276559	0,024060354	5,281789028	0,021549594	3,723971187	0,053636661	4,073881384	2,368603961	4,042223542	0,977756791			
Candidatos a outliers															
		phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada			
1	500	-0,5681065	8,486222338	0,003578461	7,182013503	0,007363802	15,84341021	6,88E-05	3,098657534	3,328627718	5,002247298	0,000585674			
2	680	-0,52519072	6,799522761	0,009118224	5,735899688	0,016621551	12,80752463	0,000345228	3,579714695	3,758903936	5,423253516	0,001615543			
3	918	-0,49847986	5,865229964	0,015442841	4,912134444	0,026668666	11,15402416	0,000838496	4,11418434	4,258891719	5,9325113	0,003025486			
4	469	-0,4806267	5,348199765	0,020743678	4,473881472	0,034416723	10,21002547	0,001396792	2,881057317	3,019478026	4,693097606	0,003373677			
5	329	-0,44223857	4,218976282	0,039974271	3,464606032	0,062695441	8,202004072	0,004184414	4,7478393	4,826014977	6,499634558	0,008834354			

3. $\sigma^2 = 0.5, \lambda = 5$

	Candidatos a outliers	Testes Assintóticos						Quantis (2,5% / 97,5%)			Acumulada	
		Mean-Shift phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf		qsup
1	495	2,55854416	14,81731258	0,000118443	14,83755358	0,000117179	12,64028164	0,000377523	5,997931194	3,15375619	4,781608718	0,999925536
2	843	2,02246917	9,58767705	0,001958876	9,664320801	0,001858471	7,841203368	0,00510686	4,874181719	2,574379605	4,202232132	0,998585591
3	656	1,871077251	8,32030949	0,003920424	8,432764569	0,003685196	6,699386989	0,009644606	5,645629796	3,486502294	5,114354821	0,997235243
4	232	1,836525235	8,039308916	0,00527473	8,150892973	0,004930396	6,451582372	0,011085357	6,93281776	4,794206934	6,422059461	0,996960706
5	975	1,803805208	7,78270951	0,007462659	7,897501343	0,006973653	6,221921366	0,012617811	4,445013773	2,366837615	3,994690143	0,996001347
6	446	1,721259124	7,158090635	0,008815033	7,279742669	0,008236495	5,405143026	0,020077503	6,364580575	4,345130577	5,972983104	0,994813506
7	615	1,682295138	6,85992345	0,009443225	6,980165245	0,00881384	5,296281816	0,021370997	3,987988226	2,03572036	3,663572888	0,993515219
8	799	1,665459875	6,737019825	0,011978071	6,841980151	0,011145434	4,923220056	0,026498085	6,809215583	4,841392324	6,469244852	0,993070361
9	206	1,606152455	6,314112208	0,013800786	6,193349292	0,012823127	4,703686806	0,030097987	4,389200881	2,507160005	4,135012532	0,990701797
10	837	1,570201077	6,063449437	0,014369242	6,121173193	0,013357212	4,642707149	0,031185771	4,411910258	2,565142791	4,192995318	0,989258774
11	814	1,560057257	5,992203516	0,014940704	6,054418664	0,013871541	4,581500702	0,032830754	4,008864845	2,177130513	3,80498304	0,988585508
12	641	1,553711418	5,951361192	0,015204153	6,023922492	0,014113245	4,554583178	0,032830754	5,332040032	3,49073115	5,118583678	0,989018505
13	557	1,549849318	5,923446612	0,017438815	5,783910629	0,016173518	4,345482282	0,037107256	6,265304928	4,417617017	6,045469545	0,989298826
14	828	1,509679254	5,651684276	0,018376586	5,691866696	0,017043715	4,266418643	0,038872778	6,232514647	4,389657134	6,017509661	0,989087151
15	486	1,506874722	5,63432354	0,018823894	5,707626666	0,016891361	4,275566004	0,038664085	4,16724506	4,607252922	6,235105449	0,987519621
16	257	1,504085891	5,615616015	0,018859845	5,538882153	0,018598459	4,128876724	0,042157325	4,553014472	2,767168244	4,395020771	0,986292979
17	274	1,497550547	5,573047164	0,020096584	5,514171388	0,018863007	4,108589259	0,042665938	6,003277723	4,203701778	5,831554305	0,987018187
18	854	1,495936718	5,559888336	0,020485537	5,505718816	0,018954388	4,099870349	0,042886502	5,420023029	3,633321797	5,261174324	0,986393164
19	345	1,471808446	5,403484995	0,020560975	5,497335308	0,01945474	4,096000413	0,042984785	3,935249644	2,167811721	3,795664248	0,985264604
20	485	1,466661325	5,379361731	0,021040926	5,456663447	0,019493836	4,061936282	0,043866018	5,685492658	3,921331554	5,549184082	0,985074581
21	960	1,465950806	5,323399318	0,02135067	5,297939264	0,02135067	3,920678534	0,047695526	4,427217387	2,68114719	4,308999717	0,983986129
22	361	1,459919617	5,161783395	0,024763772	5,040329985	0,024763772	3,698091519	0,054474743	5,608669473	3,850451333	5,47830386	0,984724433
23	841	1,434434947	4,902798588	0,026813208	5,040329985	0,026813208	3,698091519	0,054474743	4,019924046	2,281064836	3,908917363	0,983533319
24	741	1,434434947	4,902798588	0,026813208	5,040329985	0,026813208	3,698091519	0,054474743	6,670702387	4,907927615	6,535780143	0,984993539
25	205	1,393385685	4,453123068	0,03483748	3,649692047	0,035607958	9,382768993	0,002184975	4,400722716	2,688359666	4,316212193	0,981770837
26	968								6,060631818	4,37008506	5,997937587	0,980197932
Candidatos a outliers		phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada
1	533	-0,480682798	8,297311921	0,00397038	6,966431096	0,008305298	16,65138545	4,49E-05	3,412068564	3,610919793	5,2387722	0,000293291
2	128	-0,46386486	7,480002017	0,00623388	6,2611782848	0,0123337379	15,13604291	0,000100035	3,645351843	3,823270772	5,451122299	0,000542613
3	703	-0,429442445	5,934924103	0,014843708	4,872791342	0,0272833355	12,35281831	0,000440321	4,622260118	4,748968672	6,376821199	0,002097443
4	78	-0,419425649	5,616879834	0,01778829	4,647280244	0,03110279	11,6452222	0,000643676	2,750288844	2,891142717	4,518995245	0,001474906
5	240	-0,418858735	5,552349117	0,018455901	4,561393423	0,032700458	11,58477746	0,000664939	4,467476003	4,586601288	6,213865415	0,002551963
6	793	-0,385806484	4,453123068	0,03483748	3,649692047	0,035607958	9,382768993	0,002184975	3,901782485	3,994971833	5,622824361	0,004535766

4. $\sigma^2 = 0,5, \lambda = 7$

5. $\sigma^2 = 1, \lambda = 1$

	Candidates a outliers	Mean-Shift					Testes Asintóticos					Quantis (2.5% / 97.5%)		
		phi	RV	p-value	Score	p-value	Wald	p-value	Valor de Yi	qint	qsup	Acumulada		
1	559	2.65956127	10.26123228	0.001358482	10.95963856	0.00093118	8.89929221	0.002852187	5.733093729	1.57864483	4.819684595	0.998381254		
2	90	2.658016478	10.25182243	0.001365456	10.95938476	0.000931307	8.87270926	0.002894652	7.465773165	3.271965745	6.513185857	0.998585471		
3	819	9.296396475	0.002296605	9.984878913	0.001578309	7.991986598	7.991986598	0.004698483	7.298623646	3.236376635	6.477596747	0.9978787908		
4	569	2.391214281	8.332840173	0.003893474	8.975453746	0.002736306	7.14144785	0.007532232	5.332285073	1.451891466	4.693111578	0.9960039		
5	626	2.346224463	8.024412241	0.0046151	8.652452619	0.003266214	6.858924083	0.008819964	7.669522802	3.781391354	7.022611466	0.996100744		
6	762	2.269355838	7.534277481	0.006249738	8.149376412	0.004307917	6.423461955	0.01162224	6.501985667	2.711891499	5.953111611	0.994701199		
7	709	2.260827228	7.480923665	0.006235608	8.091628969	0.004447017	6.376588465	0.01156355	6.304494117	2.52719583	5.768415941	0.994488437		
8	656	2.246184072	7.374897542	0.006614056	7.9376314058	0.004773493	6.301427117	0.012064081	5.011472233	1.282018663	4.522387744	0.993623035		
9	33	2.150935354	6.774616775	0.009246334	7.322818819	0.006808454	5.774765159	0.016257892	7.635816147	3.941516828	7.182736939	0.99291138		
10	320	2.136492862	6.691350524	0.009688178	7.238300966	0.007136448	5.700347861	0.016961551	7.387702634	3.71129743	6.952949855	0.992512855		
11	522	2.120671371	6.598732311	0.01020514	7.141913119	0.011669968	5.619283878	0.021763906	7.188457644	3.531561857	6.772781968	0.992076824		
12	323	1.997793621	5.876472266	0.015344536	6.360333113	0.011669968	5.008093489	0.02229077	7.158698545	3.623639712	6.864859823	0.988717072		
13	584	1.986268759	5.81954905	0.015849044	6.308992228	0.012033055	4.957645192	0.025975557	5.77170649	2.27667687	5.517896982	0.987365776		
14	550	1.973696696	5.748168796	0.016505854	6.228985059	0.012567575	4.896348673	0.026913544	6.14015805	2.649088299	5.890308411	0.987224641		
15	223	1.945886728	5.587833339	0.018085653	6.050150915	0.013905108	4.763651222	0.029066825	6.824453719	3.346701347	6.587921459	0.986739745		
16	105	1.922652692	5.451918638	0.019546848	5.891986608	0.015217863	4.663214014	0.030815457	4.491024515	1.091997293	4.333217405	0.983528873		
17	229	1.882890082	5.2429803	0.022035493	5.721934937	0.017238437	4.480664643	0.034280387	4.997620928	1.623316183	4.864536295	0.982389244		
18	93	1.794701104	4.776105326	0.028857316	5.158614812	0.023131339	4.094333945	0.04302718	4.740128903	1.45881878	4.700038891	0.977465517		
19	291	1.75586368	4.583228587	0.032286327	4.953800589	0.026033378	3.927256655	0.047509387	6.009832713	2.735604861	5.976824993	0.977046023		
20	179	1.753400117	4.56314984	0.032666941	4.924127954	0.026484165	3.914777311	0.047863356	6.989850425	3.698686606	6.939906718	0.978038157		
21	402	1.746690418	4.537291831	0.033164401	4.903366884	0.026804356	3.889771831	0.048581023	5.678698971	2.420882343	5.662102455	0.976048023		
22	754	1.742687918	4.517072871	0.033558199	4.880936471	0.027154883	3.873369127	0.04905795	5.581611479	2.329971472	5.571191584	0.975662859		
23	548	1.715549202	4.375956476	0.036449368	4.71847539	0.029840189	3.763711544	0.052376196	4.6075493	1.407017096	4.648237208	0.972266723		
Candidates a outliers														
1	382	-3.106572637	17.37150352	3.07E-05	16.39693634	5.14E-05	19.87084276	8.29E-06	1.910960844	3.489308507	6.730528618	2.43E-05		
2	327	-2.275526262	8.969386136	0.0002745408	8.582046579	0.003394936	9.933803759	0.001622709	2.997453605	3.729284775	6.970504887	0.00171833		
3	139	-2.196154915	8.339295627	0.0003879664	7.991052311	0.004700908	9.211252569	0.002405321	0.933939974	1.636430593	4.877650704	0.001946782		
4	177	-2.150791035	7.98871872	0.0047065971	7.664474901	0.005631865	8.803681888	0.005006233	1.246970942	1.899099421	5.140313533	0.002403643		
5	317	-2.139225539	7.900651406	0.0049417	7.582431434	0.005893989	8.701356266	0.003197934	1.353326069	1.992016897	5.233237008	0.002540755		
6	271	-2.075207615	7.404637203	0.0060505596	7.099195735	0.007711855	8.153333862	0.004298193	0.776821619	1.36231803	4.603538142	0.003155406		
7	326	-1.9985541	6.855739223	0.008835699	6.590230534	0.010253989	7.51287355	0.006125956	2.705375055	1.74858823	6.416078935	0.004976988		
8	926	-1.922350122	6.323624966	0.011913983	6.080007506	0.013672019	6.919231063	0.008527364	1.288732067	1.714733464	4.955953576	0.00586928		
9	685	-1.910932285	6.251426386	0.01240934	6.018081378	0.014160032	6.828419267	0.008971863	2.253906123	2.648675144	5.889895256	0.006594327		
10	265	-1.849854701	5.837846029	0.015685017	5.615206643	0.017805281	6.37519774	0.011572615	1.225875919	1.581548097	4.822768208	0.007611831		
11	868	-1.844159025	5.794375869	0.016077521	5.571088957	0.018295423	6.326552501	0.011884331	3.413531145	3.71272707	6.953947182	0.009322806		
12	995	-1.829186869	5.7052218	0.016914518	5.49282212	0.019094697	6.21925788	0.012636807	2.98385399	3.280339711	6.521559823	0.009412701		
13	719	-1.74559586	5.181775364	0.02282499	4.993146768	0.025447891	6.653279971	0.017602534	1.612268867	1.858137276	5.099357388	0.011235092		
14	842	-1.732639077	5.105574298	0.023849082	4.923683161	0.026490884	5.54571125	0.018525391	2.113288389	2.336135776	5.577355888	0.012159735		
15	871	-1.714199192	4.992745092	0.025453798	4.815192753	0.028209917	5.420021004	0.01990712	2.738382635	2.928664502	6.169884614	0.013578864		
16	373	-1.703160063	4.927249088	0.02643637	4.752158857	0.029261562	5.348371329	0.020741637	1.929715534	2.127496557	5.368716669	0.013240099		
17	358	-1.701233919	4.916432652	0.026602392	4.742486372	0.029426513	5.335407883	0.02089645	2.065050415	2.253660679	5.49488079	0.013448106		
18	944	-1.698567513	4.900603955	0.026847304	4.727967724	0.02967593	5.316636589	0.021122744	2.469216695	2.650622916	5.891844028	0.0133989322		
19	158	-1.675762922	4.763596053	0.029067757	4.595084787	0.032063757	5.165803894	0.023035794	2.927395079	3.075354514	6.316574626	0.015632729		
20	859	-1.666368831	4.705627383	0.030064027	4.535034874	0.03207078	5.108120806	0.023814101	1.420329946	1.591851463	4.833071575	0.014458938		
21	220	-1.619715972	4.433660471	0.03523668	4.272611762	0.038731356	4.806400351	0.028354214	3.625581166	3.70249174	6.941469285	0.01981356		
22	583	-1.58600295	4.305647326	0.037986036	4.15421803	0.041530946	4.659994222	0.030875094	3.313064986	3.373134593	6.614354705	0.020749694		
23	744	-1.588805954	4.270896992	0.038770459	4.1251022	0.042251469	4.617762034	0.0351651723	2.503510731	2.576522438	5.81774255	0.019919757		
24	53	-1.558508431	4.104434099	0.0427770903	3.964538498	0.046468258	4.434497732	0.035219581	2.083138876	2.135644105	5.376864217	0.021249154		
25	612	-1.543624867	4.024327645	0.044848493	3.888373637	0.048621486	4.344639466	0.037125627	2.789735452	2.8111789745	6.053009857	0.023362545		
26	148	-1.526706611	3.929768102	0.047438485	3.793909583	0.051449368	4.24404672	0.039388177	3.418639522	3.408321307	6.649541418	0.025798079		

	Candidates a outliers	Testes Assintóticos										Quantis (2,5% / 97,5%)	
		Mean-Shift	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada	
1	495	3,542888883	14,98280204	0,000108495	15,21864372	9,58E-05	11,98298017	0,000536887	7,235332371	2,904242113	5,438111738	0,999946239	
2	843	2,78566556	9,69701283	0,001845678	10,02998605	0,001540122	7,332803225	0,006770738	5,888916357	2,324865528	4,858735153	0,998930605	
3	656	2,477769841	7,879038632	0,005001106	8,239372761	0,00409913	5,781204191	0,01619844	6,502876923	3,236988217	5,770857841	0,997055193	
4	232	2,466247777	7,807539992	0,005202868	8,162357777	0,004276873	5,726449016	0,016711241	7,810026689	4,544692856	7,078562481	0,997049864	
5	837	2,390625575	7,394189695	0,00654349	7,756440597	0,005352133	5,377110267	0,020402645	5,483551027	2,315628714	4,849498339	0,995965798	
6	841	2,344899777	7,145242085	0,007516313	7,50792908	0,006142796	5,171070998	0,022966053	5,149931081	2,031550759	4,565420384	0,995286866	
7	295	2,332235967	7,076947863	0,007808189	7,440575183	0,006376951	5,114093087	0,023732267	7,598317055	4,467769256	7,001638881	0,995461709	
8	799	2,296539359	6,886893351	0,008683005	7,251396401	0,00708459	4,966975764	0,025985615	7,68751207	4,591878247	7,125747872	0,994939959	
9	557	2,254228804	6,669519403	0,009807563	7,039362325	0,007973742	4,774173301	0,028889714	7,152550417	4,16810294	6,701972565	0,994179515	
10	828	2,216758239	6,477048858	0,010927627	6,848843738	0,008869866	4,615147407	0,031690771	7,152550417	4,140143057	6,674012682	0,993471018	
11	615	2,175859324	6,266195576	0,01230631	6,635518476	0,00999651	4,445218475	0,034999112	4,731925517	1,786206283	4,320075908	0,992028436	
12	206	2,17277574	6,254247388	0,012389588	6,627327491	0,010042583	4,432411713	0,035262648	5,20654228	2,257645928	4,791515553	0,992103159	
13	975	2,163277652	6,20575763	0,012733544	6,578335362	0,0103222739	4,393387094	0,036078571	5,054899555	2,117323538	4,651193163	0,991834013	
14	641	2,115079028	5,970569827	0,014546579	6,349099709	0,011744088	4,197745359	0,040477763	6,143554398	3,241217073	5,775086698	0,990942864	
15	814	2,110881868	5,945034572	0,014758802	6,318499435	0,01194847	4,181186642	0,040875072	4,81020352	1,927616436	4,461486061	0,990406301	
16	345	2,109348476	5,93745342	0,01482242	6,31091069	0,011999719	4,175058403	0,041023149	4,799223811	1,918297644	4,452167269	0,990359911	
17	741	2,091904045	5,851092374	0,015567385	6,22479838	0,012597325	4,10512831	0,042753347	7,54955879	4,658413538	7,192283163	0,99064219	
18	960	2,067025071	5,735068895	0,016629416	6,1134643	0,013415592	4,007603501	0,045295491	5,276745935	2,431633112	4,965502737	0,989309787	
19	854	2,01911111	5,508116593	0,018928419	5,890098087	0,015226252	3,822213223	0,050577389	6,191400349	3,38380772	5,917677344	0,988101664	
Candidatos a outliers													
1	533	-1,3514243	10,21463093	0,001393309	8,993061355	0,002710066	15,65520993	7,60E-05	2,789080113	3,361405716	5,895275341	0,00024954	
2	128	-1,23829926	8,257626402	0,004058115	7,246224838	0,007105023	12,71773376	0,000362204	3,120204075	3,573756695	6,107626319	0,000809984	
3	703	-1,15909799	7,004025829	0,008132662	6,094079791	0,013563554	10,87829073	0,00097298	4,141606952	4,499454595	7,033324222	0,001917063	
4	793	-1,14026932	6,767980355	0,00928078	5,912679649	0,015032289	10,47216058	0,001211869	3,394322401	3,745457756	6,279327381	0,002030637	
5	738	-1,1173861	6,442198457	0,011144065	5,617620643	0,017780772	9,984610702	0,001578539	3,602681905	3,927904639	6,461774264	0,002527047	
6	78	-1,06946471	5,806221542	0,01596957	5,052406106	0,024591766	9,0140298	0,002679151	2,351491724	2,64162864	5,175498265	0,003368281	
7	240	-1,02486106	5,229780076	0,022220334	4,4528631405	0,033367344	8,151902792	0,004529312	2,311265944	2,551335785	5,08520541	0,00595764	
8	791	-1,01952461	5,180157135	0,022846258	4,493657617	0,034020814	8,058401771	0,004529312	2,246595193	2,466771399	5,000641023	0,005498868	
9	473	-0,99936789	4,938573547	0,026263703	4,277375132	0,03862295	7,690085144	0,00552501	4,514290373	4,7036649	7,237354524	0,007725147	
10	448	-0,9960715	4,872262443	0,027291697	4,196722327	0,040502191	7,624134865	0,00579229	3,062131431	3,233574755	5,76744438	0,008275955	
11	771	-0,95734987	4,469580727	0,034503457	3,870103929	0,049154278	6,951555512	0,008374638	3,119351974	3,287838459	5,821708083	0,008448888	
12	726	-0,95498683	4,4443478333	0,035034799	3,846945826	0,0494836663	6,9111245563	0,00856553	3,119351974	3,287838459	5,821708083	0,008448888	
13	884	-0,94512695	4,331779902	0,03740711	3,744767415	0,052973099	6,743893728	0,009406909	3,598731946	3,751767968	6,285637593	0,009416686	

6. $\sigma^2 = 1, \lambda = 3$

	Candidatos a outliers	Mean-Shift				Testes Assintóticos				Quantis (2.5% / 97.5%)			Acumulada
		phi	RV	p-value	Score	p-value	Wald	p-value	Valor de YI	qinf	qsup		
1	495	3,593108233	15,00143852	0,000107429	15,08636006	0,000102703	12,45157603	0,000417639	7,195862961	3,071251978	5,438107486	0,999936436	
2	843	2,833198598	9,709960645	0,001832719	9,878452155	0,001672256	7,679025952	0,005586631	5,844836009	2,491875392	4,858730901	0,99875133	
3	656	2,588406427	8,254025712	0,004066173	8,441971262	0,003666586	6,395108393	0,011443524	6,526559744	3,403998081	5,77088359	0,997274603	
4	232	2,549793894	8,029795478	0,004601403	8,215418154	0,004155394	6,203474347	0,01274998	7,813974068	4,711102721	7,078558229	0,997087582	
5	975	2,425955119	7,348121253	0,006713287	7,541543588	0,006029237	5,610092482	0,017857321	5,225710297	2,284333402	4,651188911	0,995136515	
6	799	2,329394521	6,834570801	0,008941017	7,031500741	0,008008821	5,168131827	0,023004943	7,641066731	4,758888112	7,12574362	0,994161944	
7	615	2,311049077	6,739051582	0,009432476	6,935979536	0,008447879	5,086642058	0,024110834	4,773654909	1,953216147	4,320071656	0,992961163	
8	446	2,275769648	6,560791127	0,010425001	6,762577113	0,009308923	4,930951489	0,026379789	7,084478283	4,262626364	6,629481873	0,992990959	
9	837	2,267279873	6,51746069	0,010682042	6,719218077	0,009537943	4,89410524	0,026948535	5,268527937	2,482638578	4,849494087	0,992196411	
10	206	2,23498747	6,353985407	0,01171179	6,556815963	0,010448315	4,754536982	0,029221153	5,177216507	2,424655792	4,791511301	0,991388984	
11	557	2,203306186	6,195838867	0,012805102	6,400240852	0,011410488	4,619426792	0,0316118	7,085392549	4,335112804	6,701968313	0,991331087	
12	828	2,187266421	6,116619773	0,013391664	6,321735843	0,011926682	4,551882271	0,032882579	7,040985114	4,307152921	6,67400843	0,990903199	
13	814	2,170910847	6,034542616	0,014028585	6,23825063	0,012501991	4,483733178	0,034218898	4,777295759	2,0946263	4,461481809	0,989449115	
14	641	2,164760071	6,00794738	0,014241585	6,215532868	0,012663423	4,458048022	0,034737171	6,106409304	3,408226937	5,775082446	0,989910443	
15	841	2,151154904	5,938707811	0,014811874	6,143706649	0,013188058	4,401860669	0,035899742	4,863274911	2,198560623	4,565416132	0,988891809	
16	345	2,107578642	5,72824034	0,016694202	5,93423047	0,014849551	4,224025001	0,039855511	4,704414123	2,085307508	4,452163017	0,987356965	
17	486	2,080899705	5,602304623	0,017936867	5,810289996	0,015932667	4,116789397	0,0425459586	7,155044254	4,524748709	6,891604218	0,987749944	
18	854	2,079799198	5,599619505	0,017964379	5,809988066	0,015935402	4,112490397	0,042567637	6,166073662	3,550817584	5,917673093	0,987219167	
19	257	2,079268598	5,596213485	0,017999339	5,805589788	0,015975309	4,110447246	0,04261909	5,285663112	2,684664031	5,05151954	0,986697317	
20	960	2,066766574	5,537094664	0,018617466	5,746612637	0,016520482	4,060820154	0,043889178	5,185691565	2,598642977	4,965498485	0,986168543	
21	741	2,064339295	5,522848177	0,018769675	5,72992698	0,016678176	4,051032995	0,044144324	7,443126227	4,825423403	7,192278911	0,987306881	
22	485	2,039397415	5,410050967	0,020021131	5,621347758	0,017742999	3,953140982	0,046783966	6,417907017	3,838827341	6,20568285	0,98585236	
23	295	2,032291016	5,374524709	0,020432907	5,583593297	0,018129488	3,925382426	0,047562372	7,217889162	4,63477912	7,001634629	0,986015937	
24	274	1,987723889	5,172047725	0,022953144	5,38425591	0,020319252	3,754022472	0,052680591	6,652605979	4,121197565	6,488053073	0,983870444	
Candidatos a outliers													
1	533	-0,90476403	9,229358206	0,002381651	7,892404412	0,004964283	16,58214507	4,66E-05	3,148609132	3,52841558	5,895271089	0,000251081	
2	128	-0,8537736	7,899012945	0,004946178	6,730257559	0,009479091	14,31885402	0,000154312	3,418315859	3,740766559	6,107622068	0,000610385	
3	703	-0,79603335	6,507255595	0,010743519	5,465957009	0,019390432	12,0169609	0,000527186	4,423906517	4,666464459	7,033319968	0,001866605	
4	78	-0,7570675	5,750681719	0,016482259	4,8446698	0,027731701	10,62527817	0,001115522	2,57320614	2,808638504	5,175494013	0,002048675	
5	793	-0,74628372	5,541004776	0,018575914	4,664818535	0,030786677	10,25096241	0,001366133	3,704859354	3,91246762	6,279323129	0,002916629	
6	240	-0,74429332	5,472603132	0,019316833	4,580235084	0,032342777	10,17979159	0,001419882	4,31018098	4,503508675	6,870364184	0,003474593	
7	738	-0,72258562	5,088828539	0,024080453	4,265047167	0,038904169	9,466224201	0,002092987	3,915194775	4,094914503	6,461770012	0,004089325	
8	791	-0,69303051	4,569172598	0,032552284	3,81303725	0,050855155	8,545368209	0,003464025	2,547648859	2,718345649	5,085201158	0,004546285	

7. $\sigma^2 = 1, \lambda = 5$

	Candidatos a outliers	Mean-Shift				Testes Assintóticos				Quantis (2.5% / 97.5%)			
		phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada	
1	495	2.55854416	3.618327888	14.81731258	0.000118443	14.83755305	0.000117179	12.64028147	0.00037523	7.15824349	3.133917626	5.438103748	0.999925536
2	843	2.02246917	2.860203374	9.58767705	0.001958876	9.684320481	0.001858471	7.8412033	0.00510686	5.809007381	2.55659604	4.85827162	0.998585591
3	656	1.871077251	2.646102867	8.32030949	0.003920424	8.432764301	0.003685197	6.699386952	0.009644607	6.522186126	3.468718729	5.770849851	0.997235243
4	232	1.836525235	2.597238913	8.039308914	0.0045773	8.150892725	0.004303997	6.451582355	0.011085357	7.800875805	4.776423369	7.078554491	0.996960706
5	975	1.803805208	2.550965849	7.78270951	0.005274862	7.897501093	0.004950513	6.221921326	0.012617811	5.288038957	2.349054051	4.651185173	0.996001347
6	446	1.722159124	2.435500852	7.158090636	0.007462659	7.279742448	0.006973653	5.666324336	0.017293655	4.327347012	4.6529478134	0.994813506	0.994813506
7	615	1.682295138	2.379124645	6.859923449	0.008815033	6.981311726	0.008236496	5.405143011	0.020077504	4.778860489	2.017936796	4.320067918	0.993070361
8	799	1.665459875	2.355315934	6.737019822	0.009443225	6.86016504	0.008813841	5.296281817	0.021370997	7.6065311	4.82360876	7.125739882	0.993515219
9	206	1.606152455	2.2714426	6.314112207	0.011978071	6.441979957	0.011145435	4.923220055	0.026498085	5.150984173	2.48937644	4.791507562	0.990701797
10	837	1.570201077	2.22059666	6.063449435	0.013800786	6.193349108	0.012823129	4.703686806	0.030097987	5.159082824	2.547359226	4.849490348	0.989258763
11	814	1.560057257	2.206254176	5.992203516	0.014369242	6.121173011	0.013357214	4.642707151	0.031185771	4.749810484	2.159346948	4.46147807	0.988585509
12	641	1.553711418	2.197279801	5.951361192	0.014705926	6.083490167	0.013645093	4.604619724	0.031885924	6.076951578	3.472947586	5.775078708	0.989018499
13	557	1.549849318	2.191817918	5.923446609	0.014940704	6.054418489	0.013871543	4.581500701	0.032318898	7.012858755	4.399833453	6.701964574	0.989298813
14	828	1.545321357	2.18541446	5.892655928	0.015204153	6.023922319	0.014113247	4.554583185	0.032830754	6.978067658	4.371873569	6.674004691	0.989087144
15	486	1.509679254	2.135008904	5.651684275	0.017438615	5.783910465	0.01617352	4.34548229	0.037107256	7.148448613	4.589469357	6.891600479	0.987519627
16	257	1.506874722	2.131042695	5.634323359	0.01761214	5.767705148	0.016323337	4.329410222	0.037459223	5.274952636	2.749384679	5.051515801	0.986292984
17	274	1.504085891	2.127098691	5.615616014	0.017801123	5.74919986	0.016496169	4.313164006	0.03781856	6.730902921	4.185918213	6.488049335	0.987018193
18	854	1.497550547	2.117856363	5.573047164	0.018238994	5.707626502	0.016891362	4.275566022	0.038664084	6.142315347	3.615538232	5.917669354	0.986339169
19	345	1.495936718	2.115574018	5.559888835	0.018376586	5.69186653	0.017043717	4.266418648	0.038872778	4.649562838	2.150028156	4.452159278	0.985264608
20	485	1.471808446	2.081451528	5.403484895	0.020096584	5.538881996	0.018598461	4.128876745	0.042157324	6.398448548	3.90354799	6.205679112	0.985074584
21	960	1.468193064	2.076338559	5.379361729	0.020376331	5.51471723	0.018863009	4.108589264	0.042665938	5.132679779	2.663363625	4.965494747	0.983986131
22	361	1.466661325	2.074172398	5.370037525	0.020485537	5.505718661	0.01895439	4.09987037	0.042886502	6.319163708	3.832667768	6.13479889	0.984724436
23	841	1.465950806	2.073167571	5.363626416	0.020560975	5.497335149	0.019045476	4.096000431	0.042984784	4.722399549	2.263281271	4.565412393	0.983533192
24	741	1.459919617	2.064638182	5.323399318	0.021040926	5.45666295	0.019493838	4.061936305	0.043880179	7.38308404	4.890144051	7.192275173	0.984993542
25	205	1.434434947	2.028597361	5.161783393	0.023089177	5.297939114	0.021350671	3.920678536	0.047695626	5.09222315	2.670576101	4.972707223	0.981770837
26	968	1.393385685	1.970544974	4.902798587	0.026813208	5.040329848	0.024763774	3.698091539	0.054474743	6.743095649	4.352301495	6.654432617	0.980197933
Candidatos a outliers													
		phi	phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada
1	533	-0.480682798	-0.67978809	8.297311921	0.00397038	6.966432036	0.008305294	16.65138756	4.49E-05	3.311918124	3.593136228	5.89526735	0.000293291
2	128	-0.46386486	-0.65600393	7.480002016	0.0062388	6.261729902	0.012337374	15.13604516	0.000100035	3.553871846	3.806487207	6.107618329	0.000542613
3	703	-0.429442445	-0.60732327	5.934924104	0.014843708	4.872791797	0.027283327	12.3528206	0.000440321	4.551992153	4.731185107	7.033316229	0.002097443
4	78	-0.419425649	-0.59315742	5.616879832	0.01778829	4.647280669	0.031102782	11.64522302	0.000643676	2.674161695	2.873359153	5.175490275	0.001474906
5	240	-0.418858735	-0.59235564	5.552349117	0.018455901	4.561398814	0.03270045	11.58477968	0.000664938	4.400592853	4.568223323	6.870360445	0.002551963
6	793	-0.385806484	-0.54561272	4.453123067	0.03483748	3.649692262	0.056079572	9.387269868	0.002184973	3.845398628	3.977188269	6.279919391	0.0004535766

8. $\sigma^2 = 1, \lambda = 7$

Candidatos a outliers		Testes Assintóticos										Quantis (2,5% / 97,5%)	
	Mean-Shift	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Vi	qint	qsup	Acumulada		
1	495	5,010402303	0,000108495	15,21863678	9,58E-05	11,98297422	0,000536888	8,908193016	2,783106434	6,366539223	0,999946239		
2	843	3,939526758	0,001845678	10,02998184	0,001540126	7,332800422	0,006770748	7,244058867	2,203729849	5,787162637	0,998930605		
3	656	3,504065595	0,005001106	8,239369507	0,004099137	5,781201983	0,01619846	7,73451664	3,115852537	6,699285326	0,997055193		
4	232	3,48780194	0,005202868	8,162354603	0,004276881	5,726446901	0,016711261	9,041436568	4,423557177	8,006989966	0,997049864		
5	837	3,380855947	0,00654349	7,75643756	0,005352142	5,377108355	0,020402668	6,674611735	2,194493035	5,777925823	0,995965798		
6	841	3,316189882	0,007516313	7,507926161	0,006142806	5,171069233	0,022966076	6,320470823	1,91041508	5,493847868	0,995285686		
7	295	3,298280564	0,007808189	7,440572371	0,006376961	5,114091464	0,02373229	8,773896732	4,346633577	7,930066365	0,995461709		
8	799	3,247797925	0,008683005	7,251393686	0,007084601	4,956974258	0,025985638	8,848629904	4,470742568	8,054175357	0,994939959		
9	557	3,187961747	0,009807563	7,039359704	0,007973753	4,774171914	0,02889737	8,360564784	4,046967261	7,630400049	0,994179515		
10	828	3,134970353	0,010927627	6,848841211	0,008869878	4,615146127	0,031690795	8,279194721	4,019007378	7,602440166	0,993471018		
11	615	3,077130522	0,01230631	6,63551599	0,009996524	4,445217218	0,034999137	5,830946695	1,665070604	5,248503393	0,992028436		
12	206	3,072769679	0,012389587	6,627325022	0,010042597	4,432410487	0,035262673	6,306879464	2,136510249	5,719943037	0,992103159		
13	975	3,05933735	0,012733544	6,578332913	0,010322753	4,393385886	0,036078596	6,150547702	1,996187859	5,579620648	0,991834013		
14	641	2,991174198	0,014546579	6,349097405	0,011744104	4,197744316	0,040477788	7,224606201	3,120081394	6,703514183	0,990942864		
15	814	2,985238504	0,014758802	6,31849711	0,011948486	4,181185558	0,040875098	5,883074505	1,806480757	5,389913545	0,990406301		
16	345	2,983069961	0,01482242	6,310908369	0,011999734	4,175057322	0,041023175	5,871406823	1,797161965	5,380594753	0,990359911		
17	741	2,983399826	0,015567385	6,224796176	0,012597341	4,105127354	0,042753371	8,625974697	4,537277859	8,120710648	0,99064219		
18	960	2,923215621	0,016629416	6,113462091	0,013415609	4,007602541	0,045295516	6,334094573	2,310497433	5,893930222	0,989309787		
19	854	2,855455045	0,018928419	5,890096012	0,01522627	3,822123398	0,050577414	7,233207615	3,26267204	6,846104829	0,988101664		
Candidatos a outliers		phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Vi	qint	qsup	Acumulada	
1	533	-1,91120188	10,21463094	0,001393309	8,993068221	0,002710056	15,65523008	7,60E-05	2,430879406	3,240270037	6,823702825	0,00024954	
2	128	-1,75121885	8,257626404	0,004058115	7,246229475	0,007105005	12,71775049	0,000362201	2,811200749	3,452621015	7,036053804	0,000809984	
3	703	-1,6392113	7,004025831	0,008132662	6,094082985	0,01356353	10,87830488	0,000972973	3,872245926	4,378318916	7,961751704	0,001917063	
4	793	-1,61258368	6,767980355	0,00928078	5,912682687	0,015032263	10,47217159	0,001211862	3,127741695	3,624322077	7,207754866	0,002030637	
5	738	-1,58022192	6,442198457	0,011144065	5,617623333	0,017780745	9,984621116	0,00157853	3,346834559	3,80676896	7,390201749	0,002527047	
6	78	-1,51245083	5,806221543	0,01596957	5,052408254	0,024591736	9,014039196	0,002679137	2,1101774	2,520492961	6,10392575	0,00336828	
7	240	-1,44937171	5,229780077	0,02220334	4,526832893	0,03367315	8,15191095	0,004301581	3,897269802	4,215363131	7,79879592	0,00595764	
8	791	-1,44182484	5,180157136	0,022846258	4,493659177	0,034020783	8,05841002	0,004529291	2,090690081	2,430200106	6,013632894	0,004988668	
9	473	-1,41331892	4,938573549	0,026263703	4,277376475	0,038622919	7,690092929	0,005552477	2,034259544	2,345635719	5,929068508	0,005798811	
10	448	-1,40865711	4,872262444	0,027291697	4,196723462	0,040502164	7,624142341	0,005759205	4,314713196	4,58252922	8,165962009	0,007275147	
11	771	-1,35389645	4,469580728	0,034503457	3,870104828	0,049153451	6,951562161	0,008374607	2,869981601	3,112439076	6,695871864	0,008273595	
12	726	-1,3505546	4,443478334	0,035034799	3,8469467	0,049836637	6,911252136	0,008565499	2,928426908	3,166702779	6,750135568	0,008448888	
13	884	-1,33661061	4,331779904	0,03740711	3,744768167	0,052973075	6,743900003	0,009406876	3,414206671	3,630632289	7,214065077	0,009416686	

$$10. \sigma^2 = 2, \lambda = 3$$

$$11. \sigma^2 = 2, \lambda = 5$$

	Candidatos a outliers	Testes Assintóticos										Quantis (2.5% / 97.5%)			Acumulada
		phi	RV	p-value	Score	p-value	Wald	p-value	Valor de Yi	qinf	qsup				
1	495	3.593108233	5.0814222683	15.00143852	0.0001072429	15.08635786	0.0001027203	12.45157474	0.00041764	8.852374841	3.019294049	6.36653321	0.999936436		
2	843	2.833198598	4.006748155	9.709960645	0.001832719	9.878450821	0.001672257	7.679025427	0.005586633	7.181719843	2.439917463	5.787156624	0.99875133		
3	656	2.588406427	3.660559677	8.254025711	0.004066173	8.441970168	0.00366588	6.395108138	0.011443526	7.768009205	3.352040152	6.699279313	0.997274603		
4	232	2.549793894	3.605953302	8.029795477	0.004601404	8.215417106	0.004153597	6.203474125	0.012749981	9.047019006	4.659744792	8.006983953	0.997087582		
5	975	2.425955119	3.430818894	7.348121253	0.006713287	7.54154263	0.00602924	5.610092236	0.017857323	6.39211057	2.232375474	5.579614635	0.995136515		
6	799	2.329394521	3.294261574	6.834570801	0.008941017	7.031499882	0.008008825	5.168131661	0.023004945	8.782946275	4.706930183	8.054169344	0.994161944		
7	615	2.311049077	3.268317286	6.739051584	0.009432476	6.935978672	0.008447883	5.086641819	0.024110837	5.889960967	1.901258219	5.24849738	0.992961163		
8	446	2.275769648	3.218424542	6.560791127	0.010425001	6.762576292	0.009308927	4.930951353	0.026379791	8.20136969	4.210668435	5.757907596	0.992990959		
9	837	2.267279873	3.206418279	6.517460692	0.010682042	6.719217251	0.009537948	4.89410504	0.026948538	6.370523164	2.430680649	5.77791981	0.992196411		
10	206	2.23498747	3.160749823	6.353985406	0.011711719	6.556815162	0.01044832	4.754536857	0.029221156	6.265406558	2.372697863	5.719937024	0.991388984		
11	557	2.203306186	3.115945721	6.195838866	0.012805102	6.400240088	0.011410493	4.619426692	0.031611802	8.172637791	4.283154876	7.630394036	0.991331087		
12	828	2.187266421	3.070131786	6.034542616	0.014028585	6.238249877	0.012501996	4.48373308	0.03472189	5.836535904	2.042688371	5.389907532	0.988449115		
13	814	2.170910847	3.061433371	6.007947381	0.014241585	6.215532127	0.012663428	4.458047899	0.034737174	7.172075105	3.356269009	6.70350817	0.989910443		
14	641	2.164760071	3.042192756	5.938707812	0.014811874	6.143705911	0.013188064	4.401860544	0.035899745	5.91507778	2.146602695	5.493841855	0.988891809		
15	841	2.151154904	2.98056661	5.728240341	0.016694202	5.934229764	0.014849557	4.224024899	0.039855514	5.737325675	2.03334958	5.38058874	0.987356965		
16	345	2.107578642	2.942836897	5.602304624	0.017936867	5.810289325	0.015932673	4.116789326	0.042459587	8.192590413	4.47279078	7.820029941	0.987749944		
17	486	2.080899705	2.941280447	5.599619504	0.017964379	5.809987389	0.015935408	4.112490345	0.042567638	7.197390271	3.498859655	6.846098816	0.9867219167		
18	854	2.07979198	2.940530063	5.596213484	0.017999339	5.805589106	0.015975315	4.11044719	0.042619092	6.311074279	2.632706102	5.979945263	0.986697317		
19	257	2.079268598	2.92284953	5.537094663	0.018617466	5.746611964	0.016520488	4.060820103	0.043889179	6.205324248	2.546685048	5.893924209	0.986165417		
20	960	2.066766574	2.919416939	5.52848178	0.018769675	5.729926323	0.016678182	4.051032934	0.044144326	8.47545631	4.773465474	8.120704635	0.987306881		
21	741	2.064339295	2.884143693	5.410050966	0.020021131	5.621347111	0.017743006	3.953140946	0.0467833967	7.434238869	3.786869413	7.134108574	0.985858236		
22	485	2.039397415	2.874093825	5.37452471	0.020432907	5.583592661	0.018129495	3.92538238	0.047562373	8.235890445	4.582821192	7.930060352	0.986015937		
23	295	2.032291016	2.811066288	5.172047724	0.022953144	5.384253302	0.020319259	3.754022453	0.052680591	7.649191748	4.069239636	7.416478797	0.98387045		
24	274	1.987723889													
Candidatos a outliers		phi	phi	RV	p-value	Score	p-value	Wald	p-value	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada		
1	533	-0.904764034	-1.27952936	9.229358205	0.002381651	7.892407695	0.004964274	16.58215246	4.66E-05	2.993930222	3.476457651	6.823696812	0.000251081		
2	128	-0.8537736	-1.20741789	7.899012946	0.004946178	6.730260033	0.009479078	14.31886319	0.000154311	3.232794477	3.68880863	7.03604791	0.000610385		
3	703	-0.796033346	-1.12576083	6.507255597	0.010743519	5.46595883	0.019390414	12.01696646	0.000527184	4.271477799	4.614540653	7.961745691	0.001866606		
4	78	-0.757067502	-1.07065489	5.750681719	0.016482259	4.844671075	0.0227731681	10.62528285	0.001115519	2.423728933	2.756680576	6.103919737	0.002048676		
5	793	-0.746283723	-1.0540432	5.541004776	0.018575914	4.664819676	0.030786656	10.25096682	0.00136613	3.566907266	3.860509692	7.207748853	0.00291663		
6	240	-0.74429332	-1.05258946	5.472603132	0.019316833	4.5802326162	0.032427257	10.17979598	0.001419879	4.178144098	4.451550746	7.798789907	0.003474593		
7	738	-0.722585624	-1.02189004	5.08882854	0.024080453	4.265048068	0.038904149	9.466229688	0.002052981	3.788794497	4.042956575	7.390195736	0.004089325		
8	791	-0.693030515	-0.9800929	4.569172598	0.032552284	3.81303792	0.050855135	8.545371717	0.003464019	2.424986005	2.66638772	6.013626881	0.004546285		

	Candidates a outliers	Testes Assintóticos										Quantis (2.5% / 97.5%)	
		Mean-Shift	phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada
1	495	5.117088505	14.81731258	0.000118443	14.83755247	0.000117179	12.64028106	0.000377523	8.799172875	3.110822868	6.366527923	0.999925536	
2	843	4.044938481	9.58767705	0.001958876	9.684320126	0.001858471	7.841203214	0.005106686	7.13105051	2.531446282	5.787151337	0.998585591	
3	656	3.742154666	8.32030949	0.003920424	8.432764003	0.003685198	6.699386887	0.009644607	7.761823977	3.443568971	6.699274026	0.997235243	
4	232	3.673050669	8.039308917	0.00457773	8.150892443	0.004303997	6.4511582273	0.011085357	9.028495264	4.7511273611	8.006978666	0.996960706	
5	975	3.607610648	7.782709512	0.005274862	7.897500815	0.004950315	5.221921249	0.012617812	6.480256607	2.323904293	5.579609347	0.996001347	
6	446	3.444318479	7.158090638	0.007462659	7.279742202	0.006973654	5.666324302	0.017293656	8.34109725	4.302197254	7.557902309	0.994813506	
7	615	3.364590474	6.859923451	0.008815033	6.981317021	0.008236497	5.405142981	0.020077504	5.897322769	1.992787038	5.248492092	0.993070361	
8	799	3.330919873	6.737019824	0.009443225	6.860164813	0.008813842	4.92322005	0.026498085	6.228308435	2.464226682	5.719931737	0.993515219	
9	206	3.212305055	6.314112208	0.011978071	6.441979742	0.011145437	4.703686811	0.030097987	6.215744402	2.522209468	5.777914523	0.989258774	
10	837	3.140402341	6.063449438	0.013800786	6.193348904	0.01282313	4.642707155	0.031185771	5.797665855	2.13419719	5.389902245	0.988585509	
11	814	3.120114696	5.992203517	0.014369242	6.121172808	0.013357215	4.604619735	0.031885924	7.13041559	3.447797828	6.703502882	0.989018505	
12	641	3.107423014	5.951361193	0.014705926	6.083489969	0.013645094	4.581500722	0.032318898	8.070059516	4.374683694	7.630388749	0.989298826	
13	557	3.099698812	5.923446612	0.014940704	6.054418295	0.013871544	4.554583199	0.032830754	8.032438837	4.346723811	7.602428866	0.989087151	
14	828	3.090642888	5.892655929	0.015204153	6.023922126	0.014113248	4.545482323	0.037107255	8.183262769	4.564319599	7.820024654	0.987519621	
15	486	3.019358729	5.651684278	0.017438615	5.783910283	0.016173521	4.345482323	0.037107255	8.183262769	2.724234921	7.820024654	0.986292979	
16	257	3.013749594	5.63432354	0.01761214	5.767704962	0.016323339	4.329410238	0.037107255	7.759920345	4.160768455	7.41647351	0.987018187	
17	274	3.008171933	5.615616015	0.017801123	5.749199678	0.01649617	4.313164028	0.03781856	7.759920345	4.160768455	7.41647351	0.987018187	
18	854	2.995101305	5.573047165	0.018238994	5.707626321	0.016891364	4.275566044	0.038664084	7.163790939	3.590388474	6.846093529	0.986339164	
19	345	2.99187358	5.559888336	0.018376586	5.691866346	0.017043719	4.266418665	0.038872777	5.659754245	2.124878398	5.380583453	0.985264604	
20	485	2.943617092	5.403484996	0.020096584	5.538881822	0.018598463	4.128876771	0.042157324	7.406720438	3.878398232	7.134103286	0.985204581	
21	960	2.936386624	5.379361732	0.020376331	5.514171054	0.01886301	4.10859301	0.042665937	6.130354261	2.638213867	5.893918922	0.983986129	
22	361	2.933322847	5.370037526	0.020485537	5.505718488	0.018954392	4.099870397	0.042886501	7.32395429	3.80751801	7.063223065	0.984724433	
23	841	2.91901806	5.363626417	0.020560975	5.497334974	0.019045478	4.096000453	0.042984784	5.715849933	2.238131513	5.493836568	0.98353319	
24	741	2.91983943	5.323399319	0.021040926	5.456663127	0.01949384	4.061936335	0.043860179	8.390543836	4.86494293	8.120699348	0.984993539	
25	205	2.868870072	5.161783396	0.023089177	5.297938948	0.021350674	3.920678582	0.047695625	6.070152443	2.645426343	5.901131398	0.981770837	
26	968	2.786771533	4.902798588	0.026813208	5.040329695	0.024763777	3.689091577	0.054474741	7.708245254	4.327151737	7.582856792	0.980197932	
Candidates a outliers		phi	RV	p-valor	Score	p-valor	Wald	p-valor	Valor de Yi	qinf	qsup	Acumulada	
1	533	-0.96136541	8.297311923	0.00397038	6.96643308	0.008305289	16.65139266	4.49E-05	3.170284013	3.56798647	6.823691525	0.000293291	
2	128	-0.92772952	7.480002018	0.0062388	6.261729879	0.012337368	15.13604976	0.000100035	3.424499592	3.780337449	7.036042504	0.000542613	
3	703	-0.85888472	5.934924104	0.014843708	4.872792303	0.027283319	12.35282261	0.00044032	4.452618242	4.706035349	7.961740404	0.002097443	
4	78	-0.83885112	5.616879834	0.01778829	4.647281142	0.031102773	11.64522644	0.000643675	2.566501648	2.848209394	6.103914449	0.001474906	
5	240	-0.83771729	5.552349117	0.018455901	4.561394249	0.032700442	11.58478155	0.000664937	4.306005796	4.543079565	7.79878462	0.00251963	
6	793	-0.77161283	4.453123067	0.03483748	3.6496925	0.056079564	9.387271282	0.002184972	3.765659813	3.952038511	7.207743565	0.004535766	

12. $\sigma^2 = 2, \lambda = 7$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azzalini. A. (1985) A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal Statistics*. **12**. 171-178.

_____ (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families (with discussion). *Scandinavian Journal Statistics*. **32**. 159-188.

Bauwens. L. e Laurent. S. (2004). A new class of multivariate skew densities with application to GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*. **23**. 346-354.

Cook. R.D. e Weisberg. S. (1982). *Residuals and Influence in Regression*. London: Chapman and Hall.

Ferreira. C.S. (2008). *Inferência e diagnóstico em modelos assimétricos*. Tese de Doutorado. Departamento de Estatística. IME-USP. São Paulo.

Ferreira. C.S., Bolfarine. H. and Lachos. V.H. (2011). Skew scale mixtures of normal distributions: Properties and estimation. *Statistical Methodology*. **8**. 154-171.

Henze. N. (1986). A probabilistic representation of the “skew-normal” distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*. **13**. 271-275.

Lachos. V.H. (2004). *Modelos lineares mistos assimétricos*. Tese de Doutorado. Departamento de Estatística. IME-USP. São Paulo.

Lachos. V.H., Bolfarine. H., Arellano-Valle. R.B. and Montenegro. L.C. (2007). Likelihood based inference for multivariate skew-normal regression models. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. **36**. 1769-1786.

R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna. Austria. URL: <http://www.R-project.org>.

Rodríguez. C.L.B. (2005). *Inferência bayesiana no modelo normal assimétrico*. Dissertação de mestrado. Departamento de Estatística. IME-USP. São Paulo.

Vilca-Labra. F. e Leiva-Sánchez. V. (2006). A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. **35**. 229-244.