



Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística



Relatório Técnico – RTE 03/2013

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Joaquim H. Vianna Neto

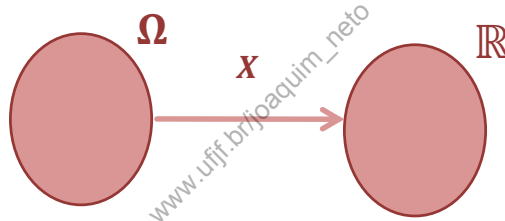
**Juiz de Fora
2013**

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

www.ufjf.br/joaquim_netto

3.1 Introdução

Informalmente, uma variável aleatória (v.a.) é uma característica numérica do resultado de um experimento. Matematicamente, uma variável aleatória é uma função com domínio Ω e contradomínio \mathbb{R} . Porém, nem toda função deste tipo é uma variável aleatória. Para saber sobre as condições que uma função deve satisfazer para ser uma variável aleatória, consulte James (1981).



Exemplo 3.28: Em um experimento que consiste em lançar uma moeda n vezes, o número de caras observado é uma característica numérica do experimento. ■

Exemplo 3.29: Suponhamos agora um experimento que consiste em escolher um número ao acaso em $[0,1]$. Podemos definir uma v.a. X que associa o resultado do experimento ao seu quadrado. Assim,

$$\Omega = [0,1]$$

e

$$X(\omega) = \omega^2, \forall \omega \in \Omega.$$

Exemplo 3.30: Suponhamos um experimento que consiste em escolher um número ao acaso no círculo unitário. Podemos definir uma v.a. X que associa o resultado do experimento à distância entre o ponto escolhido e a origem. Assim,

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e, com $\omega = (x,y)$,

$$X(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Notação: Seja $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Consideremos os seguintes conjuntos:

- $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$
- $[X < x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$
- $[X \geq x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}$
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$
- $[X \in A] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$

■

3.2 Função de distribuição acumulada

Definição 3.20: A função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável aleatória X , representada por F é definida por

$$F(x) = P([X \leq x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Obs: A função de distribuição acumulada também é chamada de simplesmente de função de distribuição. ■

Exemplo 3.31: Suponhamos um experimento que consiste em escolher um número ao acaso em $\Omega = [-1, 1]$. Sejam X uma v.a. que associa o número escolhido ao seu quadrado e F a f.d.a. de X .

- Calcule $F(0.25)$.
- Determine F .
- Construa o gráfico de F .

Solução:

a)

$$\begin{aligned} F(0.25) &= P([X \leq 0.25]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 0.25\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega^2 \leq 0.25\}) = P(\{\omega \in \Omega : -0.5 \leq \omega \leq 0.5\}) \\ &= (\text{pela definição geométrica de probabilidade}) = \\ &= \frac{0.5 - (-0.5)}{1 - (-1)} = 0.5. \end{aligned}$$

b) Para $x < 0$, temos que

$$\begin{aligned} F(x) &= P([X \leq x]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega^2 \leq x\}) = (\text{como } x < 0) = P(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Para $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} a) F(x) &= P([X \leq x]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega^2 \leq x\}) = P(\{\omega \in \Omega : -\sqrt{x} \leq \omega \leq \sqrt{x}\}) \\ &= (\text{pela definição geométrica de probabilidade}) = \\ &= \frac{\sqrt{x} - (-\sqrt{x})}{1 - (-1)} = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

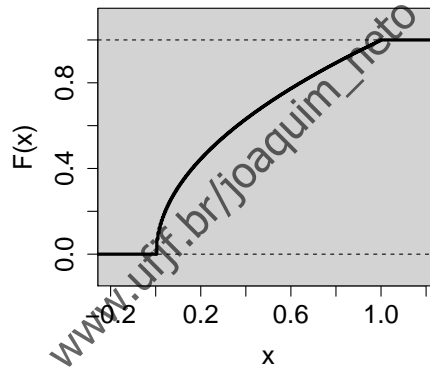
Finalmente, se $x > 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P([X \leq x]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega^2 \leq x\}) \\ &= (\text{como } x > 1) = P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

c)



■

3.3 Variável Aleatória discreta e função de probabilidade

Definição 3.21: Uma variável aleatória X é discreta se toma um número finito ou enumerável de valores, ou seja, se existe um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $P([X \in \{x_1, x_2, \dots\}]) = 1$.

Se X for uma v.a. discreta, a função

$$p(x) = P([X = x])$$

é chamada de função de probabilidade de X .

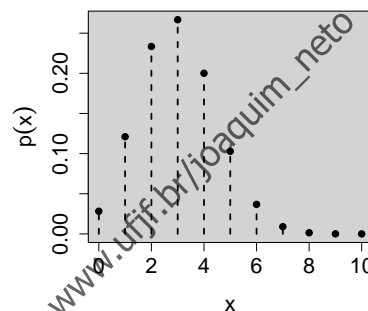


Gráfico de uma função de probabilidade.

■

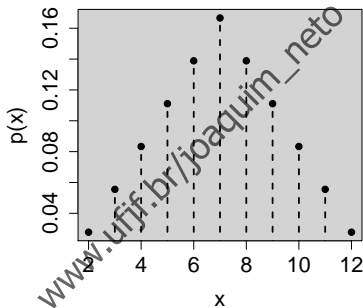
Exemplo 3.32: Suponhamos um experimento que consiste em jogar dois dados. Suponhamos ainda que os resultados são equiprováveis, ou seja, que cada resultado possível tem a mesma probabilidade. Seja X uma variável aleatória que associa cada resultado à soma dos números obtidos em cada dado.

- a) Faça o gráfico da função de probabilidade de X .
- b) Faça o gráfico da função de distribuição de X .

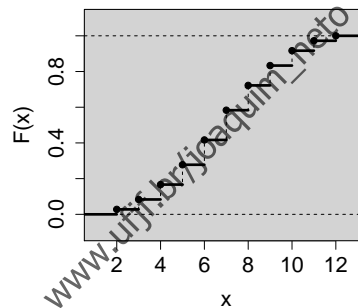
Solução: Veja abaixo uma tabela com os valores de x , $p(x)$ e $F(x)$.

x	$p(x)$	$p(x)$ (decimal)	$F(x)$	$F(x)$ (decimal)
2	1/36	0.028	1/36	0.028
3	2/36	0.056	3/36	0.083
4	3/36	0.083	6/36	0.167
5	4/36	0.111	10/36	0.278
6	5/36	0.139	15/36	0.417
7	6/36	0.167	21/36	0.583
8	5/36	0.139	26/36	0.722
9	4/36	0.111	30/36	0.833
10	3/36	0.083	33/36	0.917
11	2/36	0.056	35/36	0.972
12	1/36	0.028	1	1

A partir da tabela, podemos construir os gráficos.



(a) Função de probabilidade



(b) Função de distribuição acumulada

■

Exemplo 3.33: Suponhamos um experimento que consiste em arremessar um dado honesto. Seja X a v.a. associada ao número observado na face voltada para cima após o dado parar. Sejam $p(x)$ e $F(x)$ a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X , respectivamente.

- a) Calcule $p(2)$.
- b) Calcule $p(3.5)$.
- c) Calcule $F(2)$.
- d) Calcule $F(3.7)$.
- e) Calcule $F(500)$.
- f) Calcule $F(-9)$.

g) Construa o gráfico de $p(x)$.

h) Construa o gráfico de $F(x)$.

Solução: Temos que a) $p(2) = P([X = 2]) = 1/6$.

b) $p(3.5) = P([X = 3.5]) = 0$.

c) $F(2) = P([X \leq 2])$
 $= P([X = 1]) + P([X = 2])$
 $= 1/6 + 1/6 = 2/6$.

d) $F(3.7) = P([X \leq 3.7])$
 $= P([X = 1]) + P([X = 2]) + P([X = 3])$
 $= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$.

e) $F(500) = P([X \leq 500])$
 $= P([X = 1]) + P([X = 2]) + P([X = 3])$
 $+ P([X = 4]) + P([X = 5]) + P([X = 6])$
 $= 1$.

f) $F(-9) = P([X \leq -9])$
 $= P(\emptyset) = 0$. ■

Obs: Se X é uma v.a. discreta e $A \subset \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P([X \in A] \cap [X \in \{x_1, x_2, \dots\}]) \\ &= P(X \in (A \cap \{x_1, x_2, \dots\})) \\ &= P\left(\bigcup_{i: x_i \in A} [X = x_i]\right) \\ &= \sum_{i: x_i \in A} P([X = x_i]). \end{aligned}$$

Resultado 3.28: Uma função $p(x)$ é função de probabilidade de alguma variável aleatória discreta se, e somente se, existir um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que

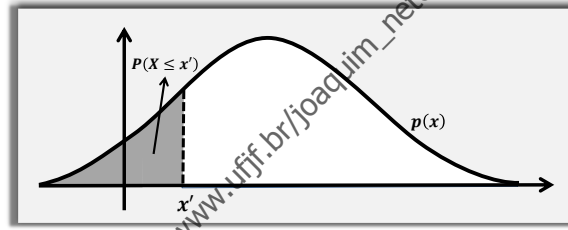
- $p(x) > 0$ para $x \in \{x_1, x_2, \dots\}$,
 - $p(x) = 0$ caso contrário e
 - $\sum_i p(x_i) = 1$.
-

3.4 Variável Aleatória Contínua e Densidade

Definição 3.22: Uma variável aleatória X é contínua se existe uma função integrável $p(x) \geq 0$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se X for contínua, $p(x)$ é chamada de função densidade de probabilidade de X , ou simplesmente densidade de X .



Resultado 3.29: Se X é uma v.a. contínua então $P(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Resultado 3.30S: e X é uma v.a. contínua então, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$P(X \leq a) = P(X < a),$$

$$P(X \geq a) = P(X > a), \text{ e}$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= P(a < X \leq b)$$

$$= P(a \leq X < b).$$

Prova: Veremos apenas a prova da primeira equação, pois as demais possuem provas análogas.

$$P(X \leq a) = P([X < a] \cup [X = a]) = (\text{pelo axioma 3}) =$$

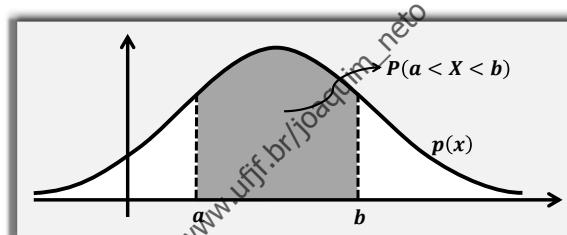
$$= P(X < a) + P(X = a)$$

$$= P(X < a) + 0$$

$$= P(X < a).$$

Resultado 3.31: Se X é uma v.a. contínua com densidade $p(x)$, então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$



Prova:

$$\begin{aligned}P(A \leq X \leq b) &= P(A < X \leq b) = P([X \leq b] \cap [X \leq A]^c) \\&= P(X \leq b) - P(X \leq A) \\&= F(b) - F(A) \\&= \int_{-\infty}^b p(x) dx - \int_{-\infty}^A p(x) dx = \int_A^b p(x) dx.\end{aligned}$$

Exemplo 3.34: Seja X uma variável aleatória com densidade

$$p(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Encontre a função de distribuição acumulada de X .

b) Calcule $P(0.2 < x < 0.7)$.

Solução: a)

- Para $x \leq 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- Para $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_0^x 6(t - t^2) dt = 6 \int_0^x t - t^2 dt \\&= 6 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \Big|_0^x \right) = 6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = 3x^2 - 2x^3.\end{aligned}$$

- Para $x \geq 1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 p(t) dt + \int_0^1 p(t) dt + \int_1^x p(t) dt = \int_0^1 6(t - t^2) dt = 1.$$

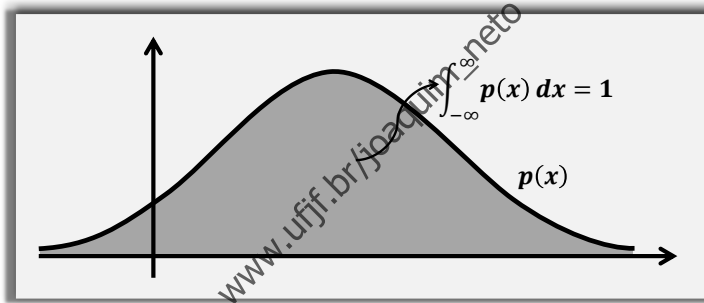
b) Usando a função de distribuição acumulada encontrada no item anterior, temos

$$\begin{aligned}P(0.2 < x < 0.7) &= F(0.7) - F(0.2) \\&= 3 \times 0.7^2 - 2 \times 0.7^3 - (3 \times 0.2^2 - 2 \times 0.2^3) \\&= 0.68\end{aligned}$$

Resultado 3.32: Uma função $p(x)$ é densidade de alguma variável aleatória contínua se, e somente se,

- $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$



■

Resultado 3.33: Uma função F é uma função de distribuição se, e somente se, as condições abaixo forem satisfeitas:

- $x \leq y$ implicar $F(x) \leq F(y)$, ou seja, F for uma função não decrescente.
- $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$, ou seja, F for contínua à direita.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Prova: Ver James (1981).

■

Resultado 3.34: Para os pontos x onde $F(x)$ é derivável, temos que $p(x) = F'(x)$.

Prova: Teorema Fundamental do Cálculo Obs: Este resultado estabelece que a densidade de uma v.a. contínua pode ser obtida derivando a função de distribuição acumulada.

■

Exemplo 3.35: Sejam $k \in \mathbb{R}$ e X uma v.a. com função de distribuição acumulada

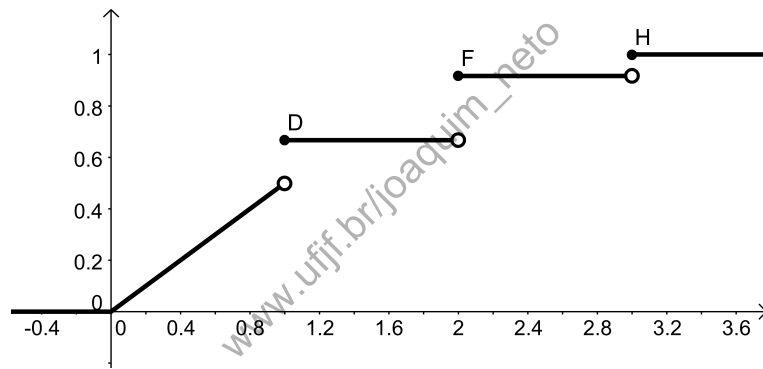
$$F(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}(1 - e^{-x}), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

- Calcule o valor de k .
- Encontre a densidade de X .

Solução:

a) Lembre-se que o limite da função de distribuição acumulada quando x tende a infinito é igual a 1. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2}(1 - e^{-x}) \right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{k}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{k}{2} &= 1 \\ \Rightarrow k &= 2. \end{aligned}$$



b) Como a densidade é dada pela derivada da função de distribuição acumulada, temos que

- Se $x \leq 0$,

$$p(x) = F'(x) = (0)' = 0.$$

- Se $x > 0$,

$$p(x) = F'(x) = (1 - e^{-x})' = e^{-x}.$$

Logo

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

■

3.5 Variável aleatória mista

Exemplo 3.36: A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{3}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12}, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

- Faça o gráfico de $F(x)$.
- Calcule $P(X = 2)$.
- Calcule $P(X < 2)$.
- Calcule $P(X = 1)$.
- Calcule $P(X > \frac{1}{2})$.
- Calcule $P(1 < X < 3)$.

Solução:

a)

b) $P(X = 2) = \frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25.$

c) $P(X < 2) = P(X \leq 2) - P(X = 2) = \frac{11}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0,66666.$

d) $P(X = 1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} = 1,16666.$

e) $P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$

f)

$$\begin{aligned}
 P(1 < X < 3) &= P(X < 3) - P(X \leq 1) \\
 &= P(X \leq 3) - P(X = 3) - P(X \leq 1) \\
 &= 1 - (1 - \frac{11}{12}) - \frac{2}{3} \\
 &= 0,25.
 \end{aligned}$$

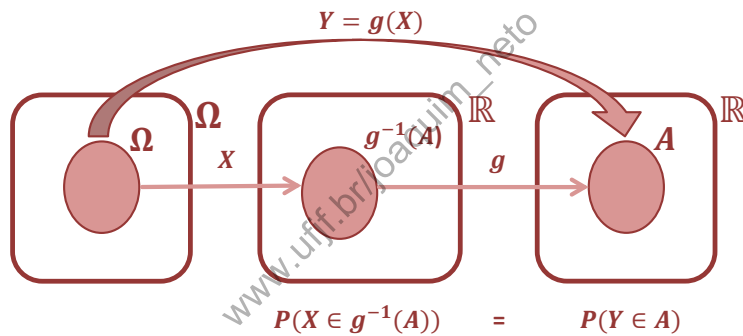
■

3.6 Função de uma variável aleatória

Se X é uma variável aleatória, então qualquer função de X , digamos $g(X)$, é também uma variável aleatória. Assim, podemos considerar uma variável $Y = g(X)$, onde g é uma função com domínio e contradomínio \mathbb{R} .

Para cada subconjunto A de \mathbb{R} , consideremos um novo conjunto, denotado por $g^{-1}(A)$, e definido por

$$g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A\}.$$



A partir da distribuição de probabilidades da variável X , podemos calcular chances para a variável Y . Este cálculo pode ser feito com a equação

$$\begin{aligned}
 P(Y \in A) &= P(g(X) \in A) \\
 &= P(X \in g^{-1}(A)).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.37: Seja X uma v.a. com função de probabilidade

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{15}, & \text{para } x = -1, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre a distribuição de $Y = X^2$.

Solução: A tabela abaixo exibe uma relação entre valores e chances.

x	y	$p_X(x)$
-1	1	1/15
1	1	1/15
2	4	4/15
3	9	9/15

Resumindo as informações da tabela acima, podemos construir uma tabela que com a distribuição de chances de Y , a saber:

y	$p_Y(y)$
1	$2/15$
4	$4/15$
9	$9/15$

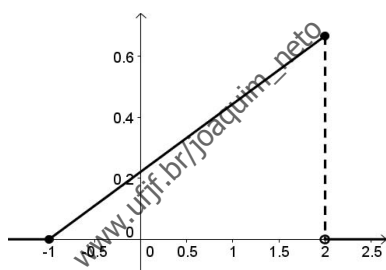
Exemplo 3.38: Seja X uma v.a. com densidade

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x+1), & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

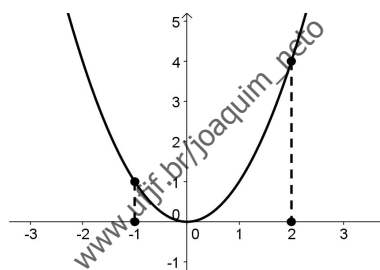
a) Encontre a função de distribuição acumulada de $Y = X^2$.

b) Encontre a densidade $p_Y(y)$ de $Y = X^2$.

Solução: a) Primeiro, observe o gráfico da densidade e o gráfico da função $g(x) = x^2$.



(c) Densidade de X



(d) Função $g(x) = x^2$

Sejam $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ as funções de distribuição acumulada de X e Y , respectivamente. Vamos encontrar $F_Y(y)$.

- Para $y \leq 0$, temos

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(\emptyset) = 0.$$

- Para $0 < y \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \in g^{-1}([Y \leq y])) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(t+1) dt = \frac{2}{9} \left(\left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right) \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{y}{2} + \sqrt{y} - \frac{y}{2} + \sqrt{y} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{y}}{9} \end{aligned}$$

- Para $1 < y \leq 4$, temos

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \in g^{-1}([Y \leq y])) \\
 &= P(-1 < X \leq \sqrt{y}) \\
 &= \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(t+1) dt = \frac{2}{9} \left(\left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_{-1}^{\sqrt{y}} \right) \\
 &= \frac{2}{9} \left(\frac{y}{2} + \sqrt{y} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{y + 2\sqrt{y} + 1}{9}.
 \end{aligned}$$

- Por fim, se $y > 4$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \in g^{-1}([Y \leq y])) \\
 &= P(-1 < X \leq 2) = 1.
 \end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{1 + \sqrt{y}}{9}, & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ \frac{y + 2\sqrt{y} + 1}{9}, & \text{se } 1 < y \leq 4 \\ 1, & \text{se } y > 4 \end{cases}.$$

b) Agora, para encontrar a densidade de Y , basta derivar a função de distribuição acumulada obtida no item anterior, ou seja,

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{2y^{-0.5}}{9}, & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1 + y^{-0.5}}{9}, & \text{se } 1 < y \leq 4 \\ 0, & \text{se } y > 4 \end{cases}.$$

■

Definição 3.23 (suporte): Sejam X uma v.a. e $Y = g(X)$ uma transformação de X . Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned}
 X &= \{x : p_X(x) > 0\} \text{ e} \\
 Y &= \{y : y = g(x) \text{ para algum } x \in X\}.
 \end{aligned}$$

O conjunto X é chamado de suporte de X .

■

Resultado 3.35: Sejam X uma v.a. e $Y = g(X)$ uma transformação de X .

- Se g for uma função crescente em X , $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$ para $y \in Y$.

- Se g for uma função decrescente em X e X for contínua, $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$ para $y \in \mathcal{Y}$.

■

Exemplo 3.39 (Relação da exponencial com a uniforme): Seja X uma v.a. com densidade¹

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Encontre a densidade de $Y = g(X) = -\ln(X)$.

Solução: Consideremos os conjuntos $X = (0, 1)$ e $\mathcal{Y} = (0, \infty)$. Primeiro, observe que g é decrescente em X (derive a função g para uma verificação formal deste fato). Além disso, $g^{-1}(y) = e^{-y}$ e

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Pelo resultado 3.6, temos que²

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) = 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y}, \text{ para } y \in (0, \infty).$$

Naturalmente, $F_Y(y) = 0$ para $y \leq 0$.

■

Resultado 3.36 (densidade de uma transformação): Sejam X uma v.a. e $Y = g(X)$ uma transformação de X , onde g é uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente. Suponhamos ainda que $p_X(x)$ é contínua³ em X e que $g^{-1}(y)$ é derivável em \mathcal{Y} . A densidade de Y é dada por

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, & \text{se } y \in \mathcal{Y} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

Prova: Usando o resultado anterior e a regra da cadeia,

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} p_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y), & \text{se } g \text{ for crescente} \\ -p_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y), & \text{se } g \text{ for decrescente} \end{cases},$$

que pode ser expressa de forma concisa como (3.1).

■

Exemplo 3.40: Seja X uma v.a. com densidade

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

¹Mais adiante, veremos que esta é a distribuição uniforme.

²Mais adiante, veremos que esta é a distribuição exponencial.

³A continuidade de $p_X(x)$ garante a diferenciabilidade de $F_X(x)$.

Encontre a densidade $p_Y(y)$ de $Y = X^2$.

Solução: Consideremos os conjuntos $X = (0, 2)$ e $Y = (0, 4)$. Temos que $Y = g(X)$, onde $g(x) = x^2$ e, como g é uma função estritamente crescente em X , temos que

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \begin{cases} p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, & \text{se } y \in Y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_X\left(y^{\frac{1}{2}}\right) \left| \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right|, & \text{se } 0 < y < 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } 0 < y < 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

■

3.7 QUANTIL e MEDIANA

Definição 3.24: Seja p um número real tal que $0 < p < 1$. O quantil $q(p)$ de uma v.a. contínua X é um número real tal que

$$P(X \leq q(p)) = p.$$

Obs:

- Podemos obter $q(p)$ a partir da densidade com a equação

$$\int_{-\infty}^{q(p)} p(x) dx = p.$$

- Podemos obter $q(p)$ a partir da acumulada com a equação

$$q(p) = F^{-1}(p).$$

■

Definição 3.25: A mediana de uma v.a. contínua X é dada por $q(0,5)$. ■

Exemplo 3.41: Seja X uma v.a. com densidade

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Calcule a mediana de X .

Solução: Para $x < 1$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{q(0,5)} p(x) dx = 0.5 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_0^{q(0,5)} 3x^2 dx = 0.5 \Rightarrow \\ & \Rightarrow q(0,5)^3 = 0.5 \Rightarrow \\ & \Rightarrow q(0,5) = \sqrt[3]{0.5}. \end{aligned}$$

■

3.8 Valor esperado

Definição 3.26:

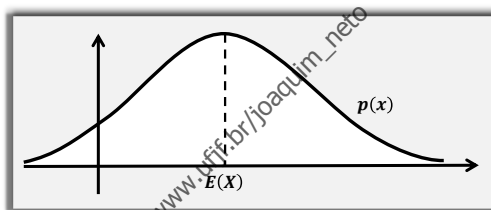
- Se X é uma v.a. discreta que assume valores no conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, o valor esperado de X é

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots + x_n p(x_n).$$

- Seja X uma v.a. contínua, o valor esperado de X é

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx,$$

quando a integral está bem definida.



Obs: O valor esperado também é chamado de esperança ou expectativa.

■

Exemplo 3.42: Uma empresa comercializa um produto que possui um determinado prazo de validade. Para cada unidade vendida do produto, a empresa recebe R\$8,00 reais e tem um custo de R\$2,00. Sabendo que a probabilidade de um produto ser vendido antes de vencer seu prazo de validade é de 90%, quanto a seguradora espera lucrar em uma unidade do produto?

Solução: Seja X o lucro da empresa em uma unidade do produto. Se o produto for vendido, temos que X assume o valor $R\$8,00 - R\$2,00 = R\$6,00$. Caso contrário, X assume o valor $-R\$2,00$. Assim,

$$E(X) = R\$6,00 \times 0,9 + (-R\$2,00) \times 0,1 = R\$5,20.$$

Logo, o lucro esperado em uma unidade do produto é de $R\$5,20$ reais. ■

Exemplo 3.43: Sejam $k \in \mathbb{R}$ e X uma v.a. com densidade

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{k}, & \text{se } 1 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- a) Encontre o valor de k .
b) Calcule o valor esperado de X .

Solução:

a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^3 \frac{x-1}{k} dx &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{k} \left(\frac{x^2}{2} - x \Big|_1^3 \right) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= 2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_1^3 x \left(\frac{x-1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{14}{6}. \end{aligned}$$

■

3.9 Valor esperado da função de uma v.a.

Resultado 3.37: Sejam X e $Y = g(X)$ duas variáveis aleatórias.

- Se X é discreta e assume valores em um conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$, então

$$E(Y) = \sum_i g(x_i) p_X(x_i).$$

- Se X é contínua, então

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx.$$

■

3.10 Propriedades do valor esperado

Resultado 3.38: Se $a, b \in \mathbb{R}$ e X é uma v.a., temos que

a) $E(a) = a,$

b) $E(aX + b) = aE(X) + b$ e

Prova:

a) $E(a) = a \cdot 1 = a.$

b) VAMOS provar o resultado assumindo que X é discreta. A prova para X contínua é análoga (basta trocar os somatórios por integrais).

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^N (ax_i + b) P([(aX + b) = (ax_i + b)]) = \sum_{i=1}^N (ax_i + b) P([X = x_i]) \\ &= a \sum_{i=1}^N x_i p(x_i) + b \underbrace{\sum_{i=1}^N p(x_i)}_1 = aE(X) + b. \end{aligned}$$

Como consequência imediata do resultado acima, temos que

- $E(aX) = aE(X), \forall a \in \mathbb{R}$ e
- $E(X - E(X)) = 0.$

■

3.11 Momento

Definição 3.27:

- O k-ésimo momento da variável aleatória X , é definido por

$$E(X^k).$$

- Seja $a \in \mathbb{R}$. O k-ésimo momento em torno de a da variável aleatória X , é definido por

$$E((X - a)^k).$$

- O k-ésimo momento central da variável aleatória X , é definido por

$$E((X - E(X))^k).$$

■

3.12 VARIÂNCIA

Definição 3.28: Seja X uma v.a. discreta que assume valores no conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. A VARIÂNCIA de X é

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

■

Exemplo 3.44: Uma empresa comercializa um produto que possui um determinado prazo de validade. Para cada unidade vendida do produto, a empresa recebe R\$9,00 reais e tem um custo de R\$2,00. Nestas condições a probabilidade de um produto ser vendido antes de vencer seu prazo de validade é de 80%.

- Quanto a empresa espera lucrar em uma unidade do produto?
- Qual é a variabilidade do lucro da empresa em uma unidade do produto?
- Faça uma comparação entre esta empresa e a empresa apresentada no exercício 3.8 (compare a expectativa de lucro por unidade do produto e a variabilidade do lucro/prejuízo por unidade).

Solução:

a) Seja X o lucro da empresa em uma unidade do produto. Se o produto for vendido, temos que X assume o valor R\$9,00 - R\$2,00 = R\$7,00. Caso contrário, X assume o valor -R\$2,00. Assim,

$$E(X) = R\$7,00 \times 0.8 + (-R\$2,00) \times 0.2 = R\$5,20.$$

Logo, o lucro esperado em um carro segurado é de R\$5,20 reais.

b) A variabilidade do lucro da seguradora em um carro segurado é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^N (x_i - E(X))^2 p(x_i) \\ &= (-2 - 5,20)^2 0.2 + (7 - 5,20)^2 0.8 \\ &= 12,96. \end{aligned}$$

c) Note que o valor esperado da unidade do produto nesta empresa é igual ao da empresa apresentada no exemplo 3.8 (R\$5,20). Por outro lado, a variabilidade do lucro em uma unidade do produto desta empresa é maior (aplicando os passos do item (b) no exemplo 3.8, temos $\text{Var}(X) = 5,76$). Assim, podemos concluir que ambas as empresas possuem a mesma expectativa de lucro por carro. Porém, a empresa deste exercício possui uma variabilidade de lucro maior, ou seja, está sujeita a perdas maiores mas, por outro lado, possui a possibilidade de lucrar mais (mais agressiva).

■

3.13 Propriedades da VARIÂNCIA

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e X uma variável aleatória. As seguintes propriedades são válidas:

- $\text{Var}(a) = 0$,
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

Prova:

a)

$$\text{Var}(a) = (a - E(a))^2 \times 1 = (a - a)^2 = 0.$$

b) Sem perda de generalidade, suponhamos que X é uma v.a. discreta. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Var}(aX) &= \sum_{i=1}^N (ax_i - E(aX))^2 p(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N (ax_i - aE(X))^2 p(x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - E(X))^2 p(x_i) \\ &= a^2 \text{Var}(X)\end{aligned}$$

Resultado 3.39:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Prova:

Sem perda de generalidade, suponhamos que X é uma v.a. discreta. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^N (x_i - E(X))^2 p(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2) p(x_i) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N x_i^2 p(x_i)}_{E(X^2)} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^N x_i p(x_i)}_{E(X)} + (E(X))^2 \underbrace{\sum_{i=1}^N p(x_i)}_1 \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2.\end{aligned}$$

■

3.14 Exercícios

Exercício 3.1 Uma variável aleatória X tem densidade

$$p(x) = \begin{cases} \frac{k}{2} e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Qual é o valor de k ?

b) Qual é a função de distribuição acumulada de X ?

c) Qual é a mediana da distribuição de X ?

Exercício 3.2 Seja X uma variável aleatória associada ao diâmetro de um cabo elétrico. Assuma que X tem densidade

$$p(x) = \begin{cases} k(2x - x^2), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

- a) Qual é o valor de k ?
- b) Calcule $E(X)$ e $VAR(X)$.
- c) Calcule $P(0 \leq X \leq 1/2)$

Exercício 3.3 Seja X uma variável aleatória com densidade

$$p(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Calcule $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$, onde $\mu = E(X)$ e $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$.

Exercício 3.4 Considere a função:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{14}, & \text{para } x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

- a) Mostre que esta função é uma função de probabilidade.
- b) Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x)$. Qual é a função de distribuição acumulada de X .
- c) Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x)$. Determine $P(X = 1 | X \leq 2)$.

3.15 Respostas dos exercícios

3.1) a) $k = 2$; b) $F_X(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x}), & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$; c) 0.693147.

3.2) a) $k = \frac{3}{2}$; b) $E(X) = \frac{5}{8}$; c) $P(0 \leq X \leq 1/2) = \frac{5}{16}$.

3.3) $\mu = E(X) = \frac{1}{2}$, $E(X^2) = \frac{3}{10}$, $\sigma = 0.22$, $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.979264$.

3.4) a) Primeiro, observe que $p(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\sum_{x=1}^3 \frac{x^2}{14} = 1$; b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1/14, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 5/14, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x > 3 \end{cases}; \text{ c) } 0.2.$$