Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Relatório Técnico – RTE 01/2013

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

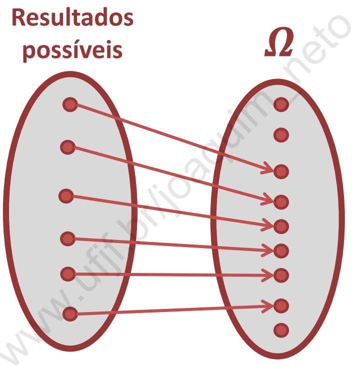
Joaquim H. Vianna Neto

Juiz de Fora
2013

2.1 Espaço amostral

Definição 2.5: Suponhamos um experimento realizado sob certas condições fixas. O **espaço amostral** Ω do experimento é um conjunto que contém representações de todos os resultados possíveis, onde por "resultado possível", entende-se resultado elementar e indivisível do experimento. Ω deve satisfazer as seguintes condições:

- A todo resultado possível corresponde um, e somente um, elemento $\omega \in \Omega$.
- Resultados distintos correspondem a elementos distintos em Ω, ou seja, $\omega \in \Omega$ não pode representar mais de um resultado.



■

Exemplo 2.13: Considere um experimento que consiste em arremessar dois dados e observar os números obtidos nas faces voltadas para cima. Defina um espaço amostral para este experimento.

Solução: Não é difícil encontrar quem defina $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como espaço amostral deste experimento. No entanto, esta definição está incorreta, pois no experimento são arremessados dois dados e não um. Lembre-se que o espaço amostral deve conter representações de todos os resultados possíveis do experimento. Um espaço amostral para este experimento é

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),\dots,(1,6),\\ &(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\\ &(3,1),(3,2),\dots,(3,6),\\ &(4,1),(4,2),\dots,(4,6),\\ &(5,1),(5,2),\dots,(5,6),\\ &(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.14: Considere um experimento que consiste em selecionar ao acaso a altura de um habitante do estado de Minas Gerais. Quais os resultados possíveis deste experimento? Supondo que não exista uma altura máxima, talvez seja razoável assumir $\Omega = (0,\infty)$. Evidentemente, este conjunto contém todos os resultados possíveis e também resultados impossíveis, tais como 1 milhão ou 1 bilhão de metros. Outros candidatos para Ω seriam, por exemplo, os intervalos $(0,3)$ e $[1/10,3]$. ■

Exemplo 2.15: Considere um experimento que consiste em escolher aleatoriamente um ponto do círculo de raio unitário centrado na origem do sistema cartesiano. Neste caso, temos

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

■

2.2 Eventos

Quando se realiza um experimento, há certos eventos que ocorrem ou não. Por exemplo, ao jogar um dado e observar o resultado, alguns eventos são:

- observar um número par,
- observar o número 2 e
- observar um número maior ou igual a 4.

Todo evento associado à um experimento pode ser identificado a um subconjunto do espaço amostral Ω. Reciprocamente, todo subconjunto A de Ω pode ser associado a um evento. Assim, podemos associar

- o conjunto $\{2,4,6\}$ ao evento observar um número par e
- o conjunto $\{4,5,6\}$ ao evento observar um número maior ou igual a 4.

Definição 2.6: Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento.

- Ω é o evento certo.

- $\emptyset$ é o evento impossível.

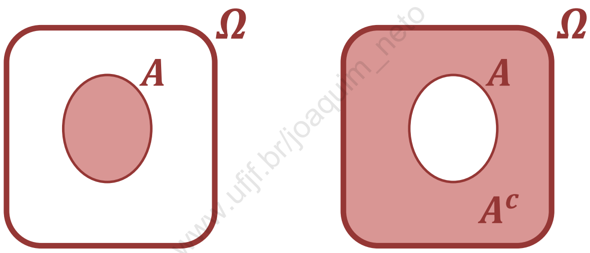
- Para $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

- Eventos com uma atribuição de probabilidade são chamados de eventos aleatórios.

■

Definição 2.7: O complementar de um evento A, denotado por A^c, é o conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem à A. Assim, $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.

■



2.3 Definições de probabilidade

Há várias interpretações da probabilidade. A seguir, veremos as três mais importantes.

Definição 2.8: Se Ω é finito, a definição clássica da probabilidade $P(A)$ de um evento $A \subset \Omega$ é dada por

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega}.$$

Obs: Esta definição basea-se no conceito de resultados equiprováveis, ou melhor, no princípio da indiferença. Por exemplo, em um experimento que consiste em lançar um dado e observar o resultado, podemos usar $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ e, diante da indiferença entre os resultados, temos $P(i) = \frac{1}{6}$, $\forall i \in \Omega$. ■

Exemplo 2.16: Suponhamos um experimento que consiste em retirar uma carta em um baralho. Usando a definição clássica de probabilidade, qual é a probabilidade de tirar um 7?

Solução: Seja $\Omega = \{A\heartsuit, 2\heartsuit, \ldots, J\clubsuit, K\clubsuit\}$ o espaço amostral e $A = \{7\clubsuit, 7\diamondsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit\}$ o evento de interesse. Assim,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{52}.$$

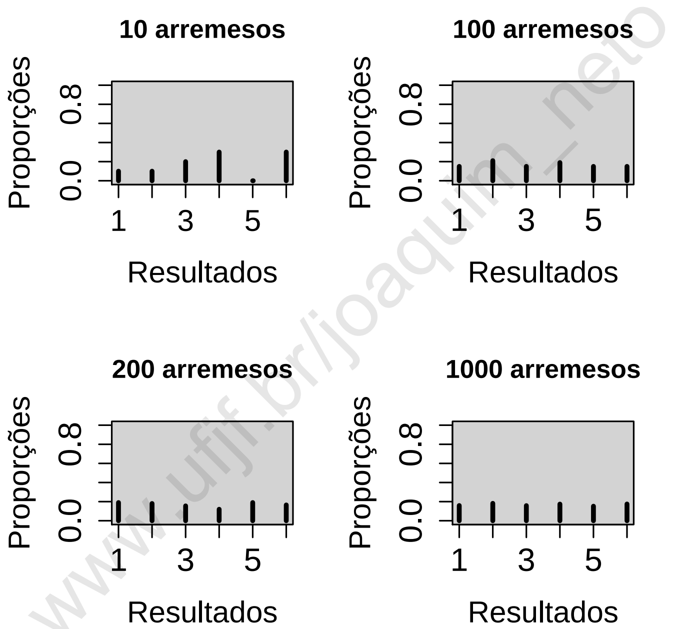
■

Definição 2.9: A **definição frequentista** baseia-se na freqüência relativa de um número grande de realizações do experimento. Mais especificamente, definimos a probabilidade P(A) de um evento A usando o limite da freqüência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes[1] do experimento, com n tendendo ao infinito, ou seja,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \times \left(\begin{array}{c} \text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ realizações} \\ \text{independentes do experimento} \end{array} \right).$$

Obs: A grande dificuldade da definição frequentista é que os experimentos nunca são realizados infinitas vezes, logo não há como avaliar a probabilidade de forma estrita.

Número de arremessos de uma moeda honesta versos proporções de coroas obtidas.



Proporção de resultados em 10, 100, 200 e 1000 arremessos de um dado.

[1] Mais adiante vamos formalizar o conceito de independência.

■

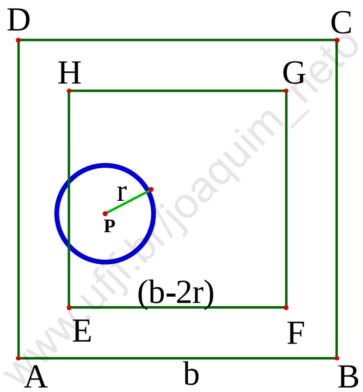
Definição 2.10: Consideremos um experimento que consiste em escolher um ponto ao acaso em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. A **definição geométrica** da probabilidade $P(A)$ de um evento $A \subset \Omega$ é dada por

$$P(A) = \frac{\text{volume de } A}{\text{volume de } \Omega}.$$

Obs: Naturalmente, em espaços unidimensionais ($p = 1$) o volume é substituído por comprimento e em espaços bidimensionais ($p = 2$), por área. ■

Exemplo 2.17: O **jogo de franc-carreau** foi estudado pela primeira vez em 1733 pelo naturalista e matemático francês Georges-Louis Leclerc e é apresentado por Badizé et al. (1996) como uma proposição para introdução às probabilidades. O jogo consiste em lançar uma moeda em um piso de azulejos de forma quadrada. Os jogadores então apostam se a moeda irá parar completamente sobre um único azulejo, posição chamada "franc-carreau", ou sobrepor algum trecho do rejunte (junção dos azulejos). Em uma região com n azulejos de lado igual a b centímetros, qual é a probabilidade de uma moeda de raio r centímetros parar em posição "franc-carreau"?

Solução:



Cada localização possível para a moeda pode ser caracterizada pelo seu ponto central. Na figura acima, o quadrado de vértices A, B, C e D ilustra um azulejo e a circunferência de centro P e raio r ilustra a moeda. Repare que a moeda estará localizada completamente sobre o azulejo (posição "franc-carreau") se, e somente se, seu centro estiver no interior do quadrado de vértices E, F, G e H. Assim, usando a definição geométrica, a probabilidade procurada é

$$\frac{n(b-2r)^2}{nb^2} = \frac{(b-2r)^2}{b^2}.$$

Para explorar um aplicativo deste jogo, acesse http://www.ufjf.br/joaquim_neto/aplicativos.

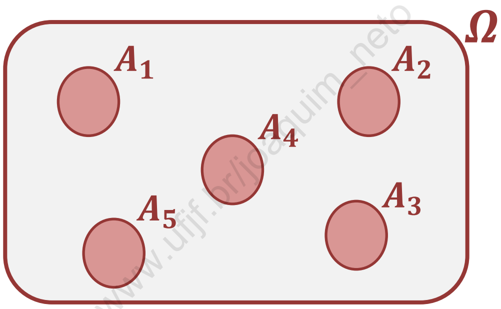
■

Definição 2.11: A definição subjetiva de probabilidade baseia-se em crenças e/ou informações do observador a respeito do fenômeno em estudo. ■

Exemplo 2.18: Consideremos o evento A ="chove em Moscou". Para alguém em Minas Gerais podemos ter a seguinte avaliação: $P(A) = 0,5$. Para alguém de Leningrado, podemos ter $P(A) = 0,8$, se chove em Leningrado e $P(A) = 0,2$, se não chove em Leningrado. Para alguém de Moscou, $P(C) = 1$, se está chovendo em Moscou e $P(C) = 0$, se não está chovendo em Moscou. ■

2.4 Teoria dos conjuntos: revisão de conceitos

Definição 2.12: Os conjuntos da sequência (finita ou enumerável) $A_1, A_2, \ldots$ são disjuntos 2 a 2, se $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.



■

Definição 2.13: O conjunto das partes $\mathscr{P}(A)$ de um conjunto A é definido por

$$\mathscr{P}(A) = \{B | B \subset A\}.$$

■

Exemplo 2.19: Se $A = \{3, 5, 7\}$, então

$$\mathscr{P}(A) = \{\{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \emptyset\}.$$

■

2.5 Axiomas de probabilidade e espaço de probabilidade

Não vamos nos preocupar, doravante, com o problema de como definir probabilidade para cada experimento. Simplesmente, vamos admitir que as probabilidades estão definidas em um certo conjunto $\mathscr{A}$[2] de eventos, chamados de eventos aleatórios. Vamos supor que a todo $A \in \mathscr{A}$ seja associado um número real $P(A)$, chamado de probabilidade de A, de modo que os axiomas a seguir sejam satisfeitos.

[2]Geralmente usamos $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Para saber mais sobre condições que $\mathscr{A}$ deve satisfazer, consulte James (1981).

- Axioma 1: $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{A}$.
- Axioma 2: $P(\Omega) = 1$.
- Axioma 3: Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ são disjuntos 2 a 2, então

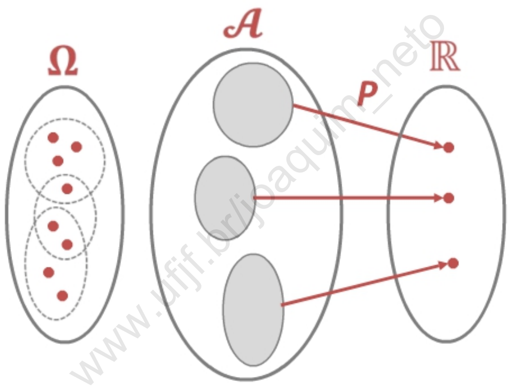
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

■

Definição 2.14: Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, onde

- Ω é um conjunto não vazio,
- $\mathscr{A}$ é um conjunto de eventos aleatórios e
- P é uma probabilidade em $\mathscr{A}$.

■



2.6 Principais resultados

Resultado 2.13 (probabilidade do evento impossível): $P(\emptyset) = 0$.

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) \Rightarrow \\
P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \Rightarrow \\
0 &= P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \Rightarrow \\
P(\emptyset) &= 0.
\end{aligned}$$

■

Resultado 2.14: Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ são eventos aleatórios disjuntos 2 a 2 então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Prova: Fazendo $A_i = \emptyset$ $\forall i \in \{n+1, n+2, \ldots\}$, temos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = (\text{pelo axioma 3}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) = (\text{pelo resultado anterior}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} 0 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

■

Resultado 2.15 (probabilidade do complementar):

$$P(A^c) = 1 - P(A), \forall A \in \mathscr{A}.$$

Prova: Temos que

$$\Omega = A \cup A^c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(\Omega) = P(A \cup A^c) \Rightarrow (\text{aplicando os axiomas 2 e 3}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c).$$

■

Resultado 2.16: $\forall A, B \in \mathscr{A}$,

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Prova: Pelo axioma 1, temos que $P(B \cap A^c) \geq 0$. Assim,

$$P(B \cap A^c) \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B \cap A^c) + P(A) \geq P(A) \Rightarrow (\text{pelo axioma 3}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P((B \cap A^c) \cup A) \geq P(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B) \geq P(A).$$

■

Resultado 2.17:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathscr{A}$$

Prova: Como $A \subset \Omega$, aplicando o resultado 2.6, temos que

$$P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow (\text{pelo axioma 2}) \Rightarrow P(A) \leq 1.$$

Além disso, pelo axioma 1, $P(A) \geq 0$. Logo $0 \leq P(A) \leq 1$.

Resultado 2.18: $\forall A, B \in \mathscr{A}$,

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
&(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A \Rightarrow \\
&\Rightarrow P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) = P(A) \Rightarrow \\
&\Rightarrow P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow \\
&\Rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).
\end{aligned}$$

■

Resultado 2.19 (desigualdade de Boole): Supondo que $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são eventos aleatórios,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prova: Consideremos a seguinte sequência de eventos

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \cap A_1^c \\
B_3 &= A_3 \cap (A_1 \cup A_2)^c \\
&\vdots \\
B_i &= A_i \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1})^c \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que esta sequência é de eventos disjuntos 2 a 2. Além disso, temos que $B_i \subset A_i$, o que implica $P(B_i) \leq P(A_i)$. Deste modo, temos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \text{(pelo axioma 3)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

■

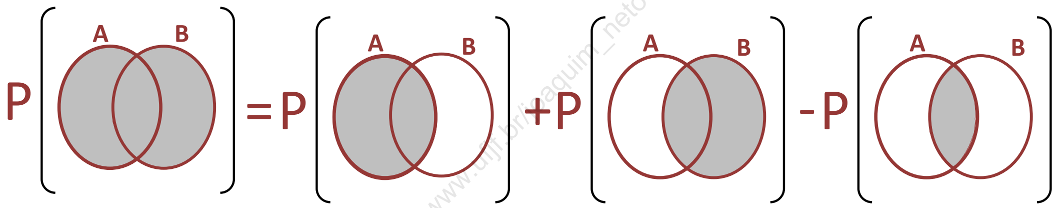
Resultado 2.20: Supondo que $A_1, A_2, \ldots, A_N$ são eventos aleatórios, temos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} P(A_i),$$

Prova: Análoga à prova do resultado anterior. ■

Resultado 2.21: Se A e B forem eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Prova:

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P((A\cap B^c)\cup B)\\
&= (\text{repare que } A\cap B^c \text{ e } B \text{ são disjuntos}) =\\
&= P(A\cap B^c) + P(B)\\
&= P(A) - P(A\cap B) + P(B).
\end{aligned}
$$

■

Resultado 2.22: Se A, B e C forem eventos quaisquer, então

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C).$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C) &= (\text{pelo resultado } \boxed{2.6}) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C)\\
&= (\text{pelo resultado } \boxed{2.6}) =\\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P((A\cup B)\cap C)\\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P((A\cap C)\cup(B\cap C))\\
&= (\text{pelo resultado } \boxed{2.6}) =\\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B)\\
&\quad - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C).
\end{aligned}
$$

■

Resultado 2.23: Supondo uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_N$ de eventos aleatórios, temos que

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_N) &= \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{N} P(A_i\cap A_j)\\
&\quad + \sum_{i<j<r=3}^{N} P(A_i\cap A_j\cap A_r) + \ldots\\
&\quad + (-1)^{N-1} P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_N).
\end{aligned}
$$

Prova: Por indução finita. **Obs:** Os dois últimos resultados são casos particulares deste resultado. ■

Resultado 2.24: Sejam $A, B \in \mathscr{A}$.

$$\text{Se } P(B) = 1 \text{ então } P(A) = P(A\cap B).$$

Prova: Como $B \subset (A \cup B)$, pelo resultado 2.6, $P(B) \leq P(A \cup B)$, o que implica $1 \leq P(A \cup B) \leq 1$, ou seja, $P(A \cup B) = 1$. Pelo resultado 2.6, temos ainda que

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 = P(A) + 1 - P(A \cap B) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A \cap B) = P(A). \end{aligned}$$

■

2.7 Probabilidade condicional e principais teoremas

Definição 2.15: Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathscr{A}$ e $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de $A \in \mathscr{A}$ dado B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Obs:

- Se $P(B) = 0$, $P(A|B)$ pode ser arbitrariamente definida. Mas, por independência, é conveniente fazer $P(A|B) = P(A)$, como veremos adiante.
- Decorre da definição que $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ e esta igualdade também é válida quando $P(B) = 0$ (verifique!).

■

Exemplo 2.20: Suponhamos que uma fábrica possui 310 máquinas de soldar. Algumas destas máquinas são elétricas (E), enquanto outras são manuais (M). Por outro lado, temos também que algumas são novas (N) e outras são usadas (U). A tabela abaixo informa o número de máquinas de cada categoria.

	Elétricas	Manuais	Totais
Novas	10	60	70
Usadas	200	40	240
Totais	210	100	310

a) Sabendo que uma determinada peça foi soldada usando uma máquina nova, qual é a probabilidade (clássica) de ter sido soldada por uma máquina elétrica?

b) Sabendo que uma determinada peça foi soldada usando uma máquina elétrica, qual é a probabilidade (clássica) de ter sido soldada por uma máquina nova?

Solução:

a)

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{\#(E \cap N)}{\#N} = \frac{10}{70} = 0.142857.$$

b)

$$P(N \mid E) = \frac{P(N \cap E)}{P(E)} = \frac{\#(N \cap E)}{\#N} = \frac{10}{200} = 0.05.$$

■

Resultado 2.25: Uma probabilidade condicional dado um evento B qualquer é uma probabilidade.

Solução:

Para mostrar que a probabilidade condicional é uma probabilidade, devemos verificar que

- $P(A \mid B) \geq 0, \ \forall A \in \mathscr{A}$,
- $P(\Omega \mid B) = 1$ e que
- se $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ são disjuntos 2 a 2, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

Vamos verificar então as condições acima.

- Como $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) > 0$, temos que $P(A \mid B) \geq 0$ e a 1 condição foi satisfeita.
- Temos também que $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ e a segunda condição foi satisfeita.
- Por fim, temos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)} = (\text{pelo axioma } 3) =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

■

Teorema 2.1 (Teorema da Multiplicação): Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade com $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$. Então

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\ &\times P(A_{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \\ &\times \ldots \times \\ &\times P(A_2|A_1)\, P(A_1) \end{aligned}$$

Prova: Por indução finita.

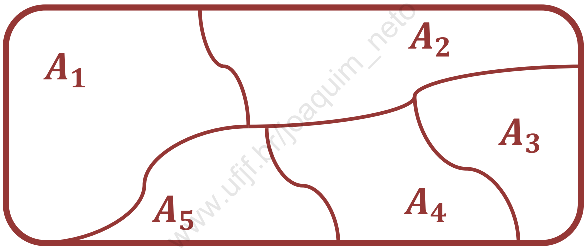
Obs: Especificamente, para $n = 2$, temos

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) = P(A_1 \mid A_2)P(A_2).$$

■

Definição 2.16U: ma sequência $A_1, A_2, \ldots$ finita ou enumerável de conjuntos é uma **partição** de um conjunto A quando

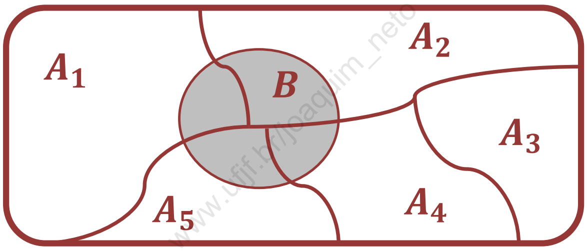
- for uma sequência de conjuntos disjuntos 2 a 2 e
- $\bigcup_i A_i = A$.



■

Teorema 2.2 (Teorema da Probabilidade Total): Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se a sequência (finita ou enumerável) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ formar uma partição de Ω, então

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i).$$



Prova:

$$P(B) = P\left(\bigcup_i (B \cap A_i)\right) = (\text{pelo axioma } 3) =$$
$$= \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i).$$

■

Exemplo 2.21: Um empresa produz circuitos em três fábricas, denotadas por I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e a III produzem 30% cada uma. As probabilidades de que um circuito produzido por essas fábricas não funcione são 0.01, 0.04 e 0.03 respectivamente. Escolhido ao acaso um circuito da produção conjunta das três fábricas, qual é a probabilidade do circuito não funcionar?

Solução: Consideremos os eventos

- A ="o circuito foi produzido pela fábrica I",
- B ="o circuito foi produzido pela fábrica II",
- C ="o circuito foi produzido pela fábrica III"e

- D ="o circuito não funciona".

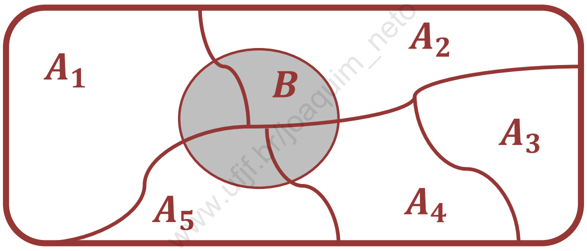
Primeiro repare que os conjuntos A, B e C formam uma partição do espaço amostral. Assim, aplicando o teorema da probabilidade total, temos que

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.01 \times 0.4 + 0.04 \times 0.3 + 0.03 \times 0.3 = 0.025. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3 (Teorema de Bayes): Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se a sequência (finita ou enumerável) $A_1, A_2, \ldots, \in \mathscr{A}$ formar uma partição de Ω, então

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}.$$



Prova:

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \\ &= (\text{pelo teorema da probabilidade total}) = \\ &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.22: Um empresa produz circuitos em três fábricas, denotadas por I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e a III produzem 30% cada uma. As probabilidades de que um circuito produzido por essas fábricas não funcione são 0.01, 0.04 e 0.03 respectivamente. Um circuito é escolhido ao acaso da produção conjunta das três fábricas. Dado que o circuito escolhido não funciona, qual é a probabilidade do circuito ter sido produzido pela fábrica I?

Solução: Consideremos os eventos

- A ="o circuito foi produzido pela fábrica I",
- B ="o circuito foi produzido pela fábrica II",
- C ="o circuito foi produzido pela fábrica III"e

- D ="o circuito não funciona".

Primeiro repare que os conjuntos A, B e C formam uma partição do espaço amostral. Assim, aplicando o teorema de Bayes, temos que

$$
\begin{aligned}
P(A|D) &= \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\
&= \frac{0.01 \times 0.4}{0.025} = 0.16
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 2.23: Uma pessoa vai ao médico reclamando de dores. O médico acredita que o paciente pode ter uma determinada doença. Ele então examina o paciente cuidadosamente, observa seus sintomas e prescreve um exame laboratorial.

Seja θ uma quantidade desconhecida que indica se o paciente tem a doença ou não. Se ele possui a doença então $\theta = 1$, caso contrário $\theta = 0$. O médico assume subjetivamente que $P(\theta = 1|H) = 0.6$, onde H representa toda a informação disponível antes de saber o resultado do exame laboratotial. Para simplificar, iremos omitir H fazendo $P(\theta = 1) = P(\theta = 1|H) = 0.6$.

Seja X uma variável aleatória associada ao resultado do exame laboratorial, de modo que $X = 1$ indica que o exame acusou a doença e $X = 0$ caso contrário. O exame fornece um resultado incerto com as seguintes probabilidades

$$
\begin{aligned}
P(X = 1 \mid \theta = 0) = 0.10 &\quad \text{(exame positivo sem a doença) e} \\
P(X = 1 \mid \theta = 1) = 0.95 &\quad \text{(exame positivo com a doença).}
\end{aligned}
$$

Dado que o exame acusou a doença ($X = 1$), qual é a probabilidade do paciente ter a doença?

Solução: Pelo teorema de Bayes, temos que

$$
\begin{aligned}
P(\theta = 1 \mid X = 1) &= \frac{P(X = 1 \mid \theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X = 1 \mid \theta = 1)P(\theta = 1) + P(X = 1 \mid \theta = 0)P(\theta = 0)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.6}{0.95 \times 0.6 + 0.1 \times 0.4} = 0.9344262.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 2.24: O problema de Monty Hall é um problema matemático que surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos da América chamado Let's Make a Deal, exibido na década de 1970.

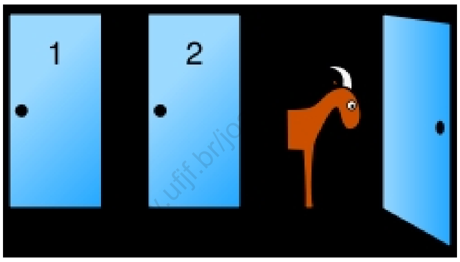
O jogo consiste no seguinte: Monty Hall (o apresentador) apresentava 3 portas aos concorrentes, sabendo que atrás de uma delas está um carro (prêmio bom) e que as outras têm prêmios de pouco valor.

1. • Na 1 etapa o concorrente escolhe uma porta (que ainda não é aberta).

2. • Em seguida, Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, sabendo que o carro não se encontra nela.

3. • Agora, com duas portas apenas para escolher e sabendo que o carro está atrás de uma delas, o concorrente tem que se decidir se permanece com a porta que escolheu no início do jogo e abre-a ou se muda para a outra porta que ainda está fechada para então a abrir.

Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Com qual das duas portas ainda fechadas o concorrente tem mais probabilidades de ganhar? Por que?



Solução: Consideremos os eventos

- A_1 = "Carro está na primeira porta",
- A_2 = "Carro está na segunda porta",
- A_3 = "Carro está na terceira porta" e
- C = "O apresentador abre a terceira porta".

Naturalmente, iremos assumir $P(C \mid A_1) = 0.5$, $P(C \mid A_2) = 1$ e $P(C \mid A_3) = 0$. Assim, pelo teorema da probabilidade total, temos

$$P(C) = P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) + P(C|A_3)P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Agora, usando o teorema de Bayes, temos

$$P(A_1 \mid C) = \frac{P(C \mid A_1)P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_2 \mid C) = \frac{P(C \mid A_2)P(A_2)}{P(C)} = \frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{e}$$

$$P(A_3 \mid C) = \frac{P(C \mid A_3)P(A_3)}{P(C)} = \frac{0\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0.$$

Portanto, escolhendo trocar de porta a chance de ganhar o carro é maior.

■

Exemplo 2.25: Recomenda-se que, a partir dos 40 anos, as mulheres façam mamografias anuais. Nesta idade, 1% das mulheres são portadoras de um tumor assintomático de mama.

Seja θ uma quantidade desconhecida que indica se uma paciente desta faixa etária tem a doença ou não. Se ela possui a doença então $\theta = 1$, caso contrário $\theta = 0$. Assim, podemos assumir que

$$P(\theta = 1) = 0.01 \quad \text{e} \quad P(\theta = 0) = 0.99.$$

Sabe-se que a mamografia indica a doença em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com 9.6% das mulheres sem o câncer. Assim, seja X uma variável aleatória associada ao resultado da mamografia, de modo que se $X = 1$ o exame acusou a doença e $X = 0$ caso contrário. Temos então que

$$\begin{aligned} P(X = 1 \mid \theta = 0) &= 0.096 \\ P(X = 1 \mid \theta = 1) &= 0.80 \end{aligned}$$

Imagine agora que você encontra uma amiga de 40 e poucos anos aos prantos, desesperada, porque fez uma mamografia de rotina e o exame acusou a doença. Qual a probabilidade de ela ter um câncer de mama?

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} P(\theta = 1 \mid X = 1) &= \frac{P(X = 1 \mid \theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X = 1 \mid \theta = 1)P(\theta = 1) + P(X = 1 \mid \theta = 0)P(\theta = 0)} \\ &= \frac{0.80 \times 0.01}{0.80 \times 0.01 + 0.096 \times 0.99} = 0.07763975 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade dela ter a doença é de aproximadamente 7.8%.

Obs: Ao apresentar este problema a várias pessoas, inclusive estudantes de medicina, observa-se uma tendência a superestimar a probabilidade a posteriori da doença. Isto revela que o raciocínio bayesiano não é intuitivo. Parece haver uma tendência geral a ignorar o fato de que a probabilidade a priori de doença é pequena, fenômeno denominado "falácia da probabilidade de base" pelo psicólogo norte-americano (de origem israelense) Daniel Kahneman, premiado com o Nobel de Economia em 2002 por estudos sobre o comportamento de investidores. Num sentido específico: "as pessoas não são racionais". ■

2.8 Independência

Definição 2.17 (independência entre dois eventos): Dois eventos aleatórios A e B são independentes quando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Obs: Se os eventos A e B são independentes, então

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B \mid A) = P(B).$$

Assim, se dois eventos forem independentes, a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. ■

Exemplo 2.26: Consideremos novamente o experimento que consiste em escolher um ponto aleatoriamente no círculo de raio unitário (centrado na origem do sistema cartesiano de coordenadas). Sejam A um evento formado pelos pontos que estão a menos de meia unidade de distância da origem e B um evento formado pelos pontos que possuem primeira coordenada maior que a segunda. Mostre que os eventos A e B são independentes.

Solução: Como

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad P(A)P(B) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

temos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e, consequentemente, os eventos são independentes. ■

Agora, vejamos dois modos de definir independência para 2 ou mais eventos: a independência 2 a 2 e a independência mútua.

Definição 2.18 (Independência 2 a 2): Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma coleção de eventos aleatórios indexada por um conjunto (de índices) I. Os eventos desta coleção são ditos **independentes 2 a 2** se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i, j \in I \quad \text{tais que} \quad i \neq j.$$

■

Definição 2.19 (Independência mútua): Seja $\mathcal{B} = \{A_i : i \in I\}$ uma coleção de eventos aleatórios indexada por um conjunto (de índices) I. Os eventos desta coleção são (mutuamente) **independentes** se, para toda subfamília finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_N}\}$ de eventos em $\mathcal{B}$, tivermos

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_N}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_N})$$

■

Obs: As duas definições de independência formuladas acima são parecidas, porém não são equivalentes. O resultado a seguir estabelece que uma coleção de eventos (mutuamente) independentes é necessariamente uma coleção de eventos independentes 2 a 2. Porém, a recíproca não é verdadeira, conforme veremos no exemplo 2.8.

Resultado 2.26: Qualquer coleção $\mathcal{B}$ de eventos aleatórios (mutuamente) independentes é uma coleção de eventos independentes 2 a 2.

Prova: Como $\mathcal{B}$ é uma coleção de eventos (mutuamente) independentes, para toda subfamília finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_N}\}$ de eventos em $\mathcal{B}$, temos que

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_N}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_N}).$$

Em particular, para todas as subfamílias $\{A_i, A_j\}$ com $i \neq j$, temos que

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Logo, $\mathcal{B}$ é uma coleção de eventos independentes 2 a 2. ■

Exemplo 2.27: Suponhamos um experimento que consiste em jogar dois dados. Considere os eventos:

- A = {o primeiro dado mostra um número par},
- B = {o segundo dado mostra um número ímpar},
- C = {ambos os dados mostram números ímpares ou ambos mostram números pares}.

a) Os eventos acima são independentes 2 a 2?
b) Os eventos acima são mutuamente independentes?
Solução:

a) Para mostrar que os eventos são independentes 2 a 2, devemos verificar se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad \text{e} \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C).$$

Primeiro, note que

- $P(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = 0.5$,
- $P(B) = \frac{6 \times 3}{6 \times 6} = 0.5$,
- $P(C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} + \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = 0.5$,
- $P(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = 0.25$,
- $P(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = 0.25$ e
- $P(B \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = 0.25$.

Consequentemente,

- $P(A \cap B) = 0.25 = 0.5 \times 0.5 = P(A)P(B)$,
- $P(A \cap C) = 0.25 = 0.5 \times 0.5 = P(A)P(C)$ e
- $P(B \cap C) = 0.25 = 0.5 \times 0.5 = P(B)P(C)$.

Logo os eventos são independentes 2 a 2.
Solução:

b) Para mostrar que os eventos são (mutuamente) independentes, devemos verificar se

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$,
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ e
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

No item (a), verificamos que as 3 primeiras condições são verdadeiras e, portanto, falta apenas avaliar se $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Pelo item (a), temos ainda que $P(A) = P(B) = P(C) = 0.5$ e, consequentemente, $P(A)P(B)P(C) = 0.5^3 = 0.125$. Por outro lado, $A \cap B \cap C = \emptyset$ e, consequentemente, $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$. Assim,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq 0.125 = P(A)P(B)P(C).$$

Logo, os eventos não são mutuamente independentes. ■

Resultado 2.27: Se A e B forem acontecimentos independentes, também o serão

a) A e B^c,
b) A^c e B e
c) A^c e B^c.

Solução:

a)

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

b)

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c).$$

c)

$$\begin{aligned} P\left(A^c \cap B^c\right) &= P\left(\left(A \cup B\right)^c\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) \\ &= \left(\text{pelo resultado } \boxed{2.6}\right) = 1 - \left(P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)\right) \\ &= 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A\right)P\left(B\right) \\ &= \left(\text{colocando } -P\left(B\right) \text{ em evidência}\right) = \\ &= 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right)\left(1 - P\left(A\right)\right) \\ &= \left(\text{colocando } 1 - P\left(A\right) \text{ em evidência}\right) = \\ &= \left(1 - P\left(A\right)\right)\left(1 - P\left(B\right)\right) = P\left(A^c\right)P\left(B^c\right). \end{aligned}$$

■

2.9 Exercícios

Exercício 2.1 Sejam A e B dois eventos. Se $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ e $P(A \cap B) = 0.1$, então calcule:

a) $P(A^c)$,

b) $P(A \cup B)$,

c) $P(A^c \cap B)$,

d) $P(A \cap B^c)$,

e) $P((A \cup B)^c)$ e

f) $P(A^c \cup B)$.

Exercício 2.2 Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de 50%. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de 3/4, caso contrário esta probabilidade é de 1/3.

a) Qual a probabilidade do empreiteiro ganhar os dois contratos?

b) Qual a probabilidade do empreiteiro ganhar apenas um?

c) Qual a probabilidade do empreiteiro perder a parte elétrica e perder a parte de encanamento?

Exercício 2.3 Óleos de cozinha são produzidos em duas principais variedades: monoinsaturados e polinsaturados. Duas matérias primas para óleos de cozinha são: milho e canola. A tabela a seguir mostra o número de garrafas destes óleos em um supermercado.

		Tipo de óleo	
		Canola	Milho
Tipo de insaturação	mono	7	13
	poly	93	77

a) Se uma garrafa de óleo é selecionada aleatoriamente, qual a probabilidade (clássica) de ser um óleo polinsaturado?

b) Se uma garrafa de óleo é selecionada aleatoriamente, qual a probabilidade (clássica) de ser monoinsaturado de canola?

Exercício 2.4 Um certo tipo de motor elétrico falha se ocorrer uma das seguintes situações: emperramento dos mancais, queima dos rolamentos ou desgaste das escovas. Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima, esta sendo quatro vezes mais provável do que o desgaste das escovas. Qual é a probabilidade de que a falha seja devida a cada uma dessas circunstâncias?

Exercício 2.5 Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$. Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de x, y e z.

a) $P(A^c \cup B^c)$.

b) $P(A^c \cap B)$.

c) $P(A^c \cup B)$.

d) $P(A^c \cap B^c)$.

Exercício 2.6 Suponha que A, B, C sejam eventos tais que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$ e $P(A \cap C) = 1/8$. Calcule a probabilidade de que ao menos um dos eventos (A, B ou C) ocorra.

Exercício 2.7 Se A, B e C são eventos disjuntos dois a dois, é possível ter $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ e $P(C) = 0.5$? Por que ou por que não?

Exercício 2.8 Qual é a probabilidade (clássica) de observar quatro números diferentes ao lançar quatro dados?

Exercício 2.9 Se 12 bolas são colocadas aleatoriamente em 20 caixas, qual é a probabilidade (clássica) de nenhuma caixa receber mais do que uma bola?

Exercício 2.10 Uma caixa contém 24 lampadas, das quais 4 são defeituosas. Se uma pessoa seleciona 4 lampadas aleatoriamente desta caixa, qual é a probabilidade (clássica) das quatro lampadas serem defeituosas?

Exercício 2.11 Suponhamos que n pessoas irão se sentar aleatoriamente em n cadeiras alinhadas em fila (de um teatro). Qual é a probabilidade (clássica) de duas pessoas em particular, A e B, sentarem uma do lado da outra?

Exercício 2.12 Suponhamos que k pessoas irão se sentar aleatoriamente em n cadeiras alinhadas em fila (de um teatro). Qual é a probabilidade (clássica) de k pessoas ocuparem cadeiras adjacentes?

Exercício 2.13 Suponha que um comitê de 12 pessoas será selecionado aleatoriamente dentre 100 pessoas. Qual é a probabilidade (clássica) de duas pessoas em particular, A e B, serem selecionadas.

Exercício 2.14 Uma caixa contém 24 lampadas, das quais 4 são defeituosas. Suponhamos que uma pessoa seleciona 10 lampadas aleatoriamente e, em seguida, uma outra pessoa seleciona as 14 lampadas restantes. Qual é a probabilidade (clássica) das 4 lampadas defeituosas serem selecionadas pela mesma pessoa?

Exercício 2.15 Um baralho contém 52 cartas e 4 ases. Se as cartas forem embaralhadas e distribuídas de maneira aleatória para 4 pessoas, de modo que cada pessoa receba 13 cartas, qual é a probabilidade (clássica) dos 4 ases ficarem com a mesma pessoa?

Exercício 2.16 a) Suponha que os três dígitos do número 123 sejam escritos em ordem aleatória. Qual é a probabilidade de que ao menos um dígito ocupe seu lugar próprio? b) Suponha que os quatro dígitos do número 1234 sejam escritos em ordem aleatória. Qual é a probabilidade de que ao menos um dígito ocupe seu lugar próprio?

Exercício 2.17 Um equipamento eletrônico é formado por 2 componentes, I e II. Suponha que

- a chance do componente I falhar é 0,20;
- a chance de apenas o componente II falhar é 0,15 e
- a chance de I e II falharem simultaneamente é 0,15.

a) Calcule a probabilidade de apenas o componente I falhar.

b) Calcule a probabilidade do componente I falhar dado que o componente II falhou.

Exercício **2.18** Um operador de rádio envia pontos e traços com igual probabilidade, mas devido a perturbações atmosféricas, os pontos são muitas vezes entendidos pelo receptor como traços e vice-versa. Seja $\frac{1}{5}$ a probabilidade de um ponto ser recebido como traço e $\frac{1}{4}$ a probabilidade de um traço ser recebido como ponto. Supondo que o receptor interpreta todos os pontos aparentes como pontos verdadeiros (o mesmo valendo para os traços), qual é a probabilidade de haver um erro na transmissão?

Exercício **2.19** A urna I contém x bolas brancas e y bolas vermelhas. A urna II contém z bolas brancas e v bolas vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna I e posta na urna II. Em seguida, uma bola é escolhida ao acaso da urna II. Qual é a probabilidade desta bola ser branca?

Exercício **2.20** Uma caixa contém 4 válvulas defeituosas e 6 perfeitas. Duas válvulas são extraidas juntas. Sabendo que uma delas é perfeita, qual é a probabilidade da outra válvula também ser perfeita?

Exercício **2.21** Suponha que temos duas urnas I e II, cada uma com duas gavetas. A urna I contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta, enquanto a urna II contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida ao acaso e, em seguida, uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Sabendo que a moeda encontrada nesta gaveta é de ouro, qual é a probabilidade de que a moeda provenha da urna II?

Exercício **2.22** Um dado é lançado e, independentemente, uma carta é extraída de um baralho completo (52 cartas).

a) Qual é a probabilidade de obter um número par no dado e uma carta de naipe vermelho?

b) Qual é a probabilidade de obter um número par no dado ou uma carta de naipe vermelho?

Exercício **2.23** Uma montagem eletrônica é formada de dois subsistemas . Supondo que a probabilidade do primeiro sistema falhar é igual a 0.20, que a probabilidade ambos falharem é 0.15 e que a probabilidade do segundo sitema falhar sozinho é 0.15, calcule:

a) a probabilidade do primeiro sistema ter falhado dado que o segundo sistema falhou e

b) a probabilide de ocorrer falha apenas no primeiro sistema.

Exercício **2.24** Em um lote de 100 chips semicondutores 20 são defeituosos. Dois deles são selecionados ao acaso e sem reposição.

a) Qual é a probabilidade do primeiro chip selecionado ser defeituoso?

b) Qual é a probabilidade do segundo chip selecionado ser defeituoso, dado que o primeiro deles é defeituoso?

c) Como a resposta do item (b) mudaria se os chips selecionados fossem repostos antes da próxima seleção?

Exercício 2.25 Amostras de uma peça de alumínio fundido são classificadas em duas categorias de acabamento: "excelente" e "bom". Uma outra classificação divide as peças em duas categorias de comprimento: "excelente" e "bom". A tabela abaixo exibe o número de peças por categoria de um determinado lote:

		Comprimento	
		Excelente	Bom
Acabamento da superfície	Excelente	75	7
	Bom	10	8

Suponhamos que uma peça é selecionada aleatoriamente deste lote.

a) Qual é a probabilidade da peça ter um excelente acabamento na superfície;

b) Qual é a probabilidade da peça ter um excelente comprimento;

c) Se a peça selecionada tiver excelente acabamento na superfície, qual é a probabilidade do comprimento ser excelente?

d) Se a peça selecionada tiver bom comprimento, qual é a probabilidade do acabamento na superfície ser excelente?

Exercício 2.26 Duas válvulas defeituosas se misturam com duas válvulas perfeitas. As válvulas são selecionadas, uma a uma e sem reposição, até que ambas as defeituosas sejam encontradas.

a) Qual é a probabilidade de encontrar a última válvula defeituosa no segundo ensaio?

b) Qual é a probabilidade de encontrar a última válvula defeituosa no terceiro ensaio?

c) Qual é a probabilidade de encontrar a última válvula defeituosa no quarto ensaio?

d) Some os números obtidos em (a), (b) e (c) acima. O resultado surprende?

Exercício 2.27 Suponha que A e B são eventos independetes associados a um experimento. Se a probabilidade de A ou B ocorrerem for igual a 0.6 e a probabilidade da ocorrência de A for igual a 0.4, determine a probabilidade da ocorrência de B.

Exercício 2.28 Vinte peças, 12 das quais são defeituosas e 8 perfeitas, são inspecionadas uma após a outra. Se estas peças forem extraídas ao acaso, qual é probabilidade de que:

a) Qual é probabilidade das duas primeiras peças serem defeituosas?

b) Qual é probabilidade das duas primeiras peças serem perfeitas?

c) Dentre as duas primeiras peças inspecionadas, qual é a probabilidade de uma ser perfeita e a outra defeituosa?

Exercício 2.29 No design preliminar de produtos são utilizadas avaliações de clientes. No passado, 95% dos produtos de alto sucesso receberam boas avaliações, 60% dos produtos de sucesso moderado receberam boas avaliações, e 10% dos produtos de pobre desempenho receberam boas avaliações. Além disso, 40% dos produtos tiveram alto sucesso, 35% tiveram sucesso moderado e 25% tiveram desempenho pobre.

a) Qual é a probabilidade de que o produto consiga uma boa avaliação?

b) Se um novo design obtém uma boa avaliação, qual a probabilidade de que ele tenha alto sucesso?

c) Se um produto não recebe uma boa avaliação, qual é a probabilidade de que ele tenha alto sucesso?

Exercício 2.30 Um software que detecta fraudes em cartões telefônicos detecta o número de áreas metropolitanas onde as chamadas são originadas a cada dia. São obtidos os seguintes dados:

- 1% dos usuários legítimos chamam de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia.
- 30% dos usuários fraudulentos chamam de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia.
- A proporção de usuários fraudulentos é de 0.01%.

Se um mesmo usuário faz chamadas de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia, qual é a probabilidade de que o usuário seja fraudulento?

Exercício 2.31 Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Duas bolas são retiradas da urna sucessivamente e sem reposição. Determine a probabilidade da primeira bola ser branca sabendo que a segunda bola é branca.

Exercício 2.32 Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total, respectivamente. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que é defeituoso.

a) Qual a probabilidade de que o parafuso tenha sido produzido na máquina A?

b) Qual a probabilidade de que o parafuso tenha sido produzido na máquina B?

c) Qual a probabilidade de que o parafuso tenha sido produzido na máquina C?

Exercício 2.33 Um inspetor trabalhando para uma companhia de manufatura tem uma probabilidade de 99% de identificar corretamente um item com defeito e 0.5% de probabilidade de classificar incorretamente um produto bom como defeituoso. A companhia tem evidências de que sua linha produz 0.9% de itens defeituosos.

a) Qual é a probabilidade de um item selecionado para inspeção ser classificado como defeituoso?

b) Se um item selecionado aleatoriamente é classificado como não-defeituoso, qual é a probabilidade dele ser realmente bom?

Exercício 2.34 Um fabricante de lâmpadas para faróis automotivos testa as lâmpadas sob condições de alta umidade e alta temperatura, usando a intensidade e vida útil como parâmetros de interesse. A tabela abaixo mostra a performance de 130 lâmpadas.

		Vida útil	
		Satisfatório	Insatisfatório
Intensidade	Satisfatório	117	3
	Insatisfatório	8	2

a) Qual é a probabilidade de uma lâmpada selecionada aleatoriamente ser insatisfatória sob qualquer critério?

b) Clientes exigem 95% de resultados satisfatórios. O fabricante pode atender a esta exigência?

2.10 Respostas dos exercícios

2.1) a) 0.7; b) 0.4; c) 0.1; d) 0.2; e) 0.6; f) 0.8.

2.2)

a) $P(EL \cap EN) = P(EN|EL)P(EL) = 0.75 \times 0.5 = 0.375$;

b) $P(EL \cap EN^c) + P(EN \cap EL^c) = P(EN^c \mid EL)P(EL) + P(EN \mid EL^c)P(EL^c) = 0.25 \times 0.5 + \frac{1}{3} \times 0.5 = 0.2916667$;

c) Temos que $P(EN) = P(EN \mid EL)P(EL) + P(EN \mid EL^c)P(EL^c) = 0.75 \times 0.5 + \frac{1}{3} \times 0.5 = 0.5416667$. Além disso, $P(EL \cup EN) = P(EL) + P(EN) - P(EL \cap EN) = 0.5 + 0.5416667 - 0.375 = \frac{2}{3}$. Portanto, $P(EL^c \cap EN^c) = P((EL \cup EN)^c) = 1 - P(EL \cup EN) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

2.3) a) $\frac{93+77}{7+13+93+77} = \frac{170}{190} = 0.8947368$; b) $\frac{7}{7+13+93+77} = \frac{7}{190} = 0.03684211$.

2.4) $\frac{1}{13}, \frac{4}{13}, \frac{8}{13}$.

2.5) a) $1 - z$; b) $y - z$; c) $1 - x + z$; d) $1 - x - y + z$.

2.6) $P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0.625$.

2.7) Não é possível, pois $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.3 + 0.4 + 0.5 = 1{,}2 > 1$.

2.8) $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = 0.277777$.

2.9) $\frac{20!}{8! 20^{12}} = 0.01473140$.

2.10) $\frac{1}{\binom{24}{4}} = 9.410879 \times 10^{-5}$.

2.11) $\frac{2(n-2)!(n-1)}{n!}$ ou $\frac{n-1}{\binom{n}{n-2}}$.

2.12) $\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$.

2.13) $\frac{\binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} = 0.01333333$.

2.14) $\frac{\binom{20}{6} + \binom{20}{10}}{\binom{24}{10}} = 0.1139657$.

2.15) $\frac{4\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = 0.01056423$.

2.16) a) $3 \times \frac{2!}{3!} - 3 \times \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = 0.6666667$; b) $4 \times \frac{3!}{4!} - 6 \times \frac{2!}{4!} + 4 \times \frac{1}{4!} - \frac{1}{4!} = 0.625$.

2.17) a) 0,05; a) 0,05;

2.18) $\frac{9}{40}$.

2.19) $(\frac{x}{x+y})(\frac{z+1}{z+v+1}) + (\frac{y}{x+y})(\frac{z}{z+v+1})$.

2.20) $\frac{5}{9}$.

2.21) $\frac{2}{3}$.

2.22) a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$.

2.23) a) 0.50; b) 0.05.

2.24) a) 0.20; b) 0.038; c) 0.04.

2.25) a) 0.82; b) 0.85; c) 0.61; d) 0.466666.

2.26) a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) O resultado não surpreende, pois os eventos descritos nos itens anteriores formam uma partição do espaço amostral. Assim, a soma de suas probabilidades deve ser 1.

2.27) 0.2.

2.28) a) $\frac{33}{95}$; b) $\frac{14}{95}$; c) $\frac{48}{95}$.

2.29) a) 0.615; b) 0.618; c) 0.052.

2.30) 0.00299.

2.31) $\frac{1}{3}$.

2.32) a) 0.36; b) 0.41; c) 0.23.

2.33) a) $0,99 \times 0,009 + 0,005 \times (1 - 0,009) = 0.013865$; b) $\frac{(1-0.005)(1-0.009)}{1-0.013865} = 0,9999087$.

2.34) a) $\frac{1}{10}$; b) 0.9.