

# **APOSTILA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS**

**Autora: Maria Helena Rodrigues Gomes**  
**Professora do Dep. Eng. Sanitária e Ambiental**  
**da Faculdade de Engenharia da UFJF**

# CAPÍTULO 1 – CONCEITOS FUNDAMENTAIS

## 1.1 – Mecânica dos Fluidos

A **mecânica dos fluidos** trata do comportamento dos fluidos em repouso ou em movimento e das leis que regem este comportamento. São áreas de atuação da mecânica dos fluidos:

- ✓ Ação de fluidos sobre superfícies submersas, ex.: barragens;
- ✓ Equilíbrio de corpos flutuantes, ex.: embarcações;
- ✓ Ação do vento sobre construções civis;
- ✓ Estudos de lubrificação;
- ✓ Transporte de sólidos por via pneumática ou hidráulica, ex.: elevadores hidráulicos;
- ✓ Cálculo de instalações hidráulicas, ex.: instalação de recalque;
- ✓ Cálculo de máquinas hidráulicas, ex.: bombas e turbinas;
- ✓ Instalações de vapor, ex.: caldeiras;
- ✓ Ação de fluidos sobre veículos – Aerodinâmica.

## 1.2 - Fluido

Pode-se definir **fluido** como uma substância que se deforma continuamente, isto é, escoar, sob ação de uma força tangencial por menor que ele seja.

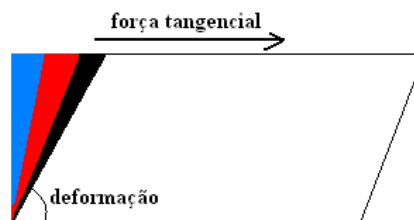


Figura 1.1: Força tangencial agindo sobre um fluido

O conceito de fluidos envolve líquidos e gases, logo, é necessário distinguir estas duas classes: “Líquidos é aquela substância que adquire a forma do recipiente que a contém possuindo volume definido e, é praticamente, incompressível. Já o gás é uma

substância que ao preencher o recipiente não formar superfície livre e não tem volume definido, além de serem compressíveis.

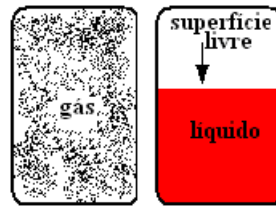


Figura 1.2: Fluido: gás e líquido

### 1.2.1 – Propriedade dos Fluidos

a) **massa específica  $\rho$** : a massa de um fluido em uma unidade de volume é denominada densidade absoluta, também conhecida como massa específica ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) (“density”)

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{sendo} \begin{cases} m - \text{massa} \\ V - \text{volume} \end{cases} \quad (1.1)$$

b) **peso específico  $\gamma$** : é o peso da unidade de volume desse fluido ( $\text{N}/\text{m}^3$ ) (“unit weight”)

- para os líquidos

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad \text{sendo} \begin{cases} G - \text{peso} \\ V - \text{volume} \end{cases} \quad (1.2)$$

- para os gases

$$\gamma = \frac{P}{RT} \quad \text{sendo} \begin{cases} P - \text{pressão absoluta (kgf}/\text{m}^2) \\ R - \text{constantel do gás} \\ T - \text{temperatura absoluta (}^\circ\text{C)} \end{cases} \quad (1.3)$$

O peso específico pode ser expresso nos diferentes sistemas de unidades, como segue:

Sistema MK\*S:  $[\gamma] = \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$

Sistema MKS:  $[\gamma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$  (S.I.)

Sistema C.G.S.:  $[\gamma] = \frac{\text{d}}{\text{cm}^3}$

Como exemplo de valores de peso específico para alguns fluidos tem-se:

Água:  $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3 \approx 10000 \text{ N/m}^3$

Mercúrio:  $\gamma = 13600 \text{ kgf/m}^3 \approx 136000 \text{ N/m}^3$

Ar:  $\gamma = 1,2 \text{ kgf/m}^3 \approx 12 \text{ N/m}^3$

**OBS: Relação entre  $\rho$  e  $\gamma$**

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{m}{V}g \Rightarrow \gamma = \rho g \quad (1.4)$$

**c) peso específico relativo  $\gamma_r$**

$$\gamma_r = \frac{G}{G_{\text{H}_2\text{O}}} \quad \text{sendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{G}{V} \Rightarrow G = \gamma V \\ \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{G_{\text{H}_2\text{O}}}{V_{\text{H}_2\text{O}}} \Rightarrow G_{\text{H}_2\text{O}} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}} \end{array} \right.$$

Substituindo

$$\gamma_r = \frac{\gamma V}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}}} \Rightarrow \gamma_r = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} \quad \text{sendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \rho g \\ \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g \end{array} \right.$$

$$\text{daí: } \gamma_r = \frac{\rho g}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} g} \Rightarrow \gamma_r = \frac{\rho}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \quad (1.5)$$

Exemplo de valores de peso específico relativo para alguns fluidos tem-se:

Água:  $\gamma_r = 1$

Mercúrio:  $\gamma_r = 13,6$

Ar:  $\gamma_r = 0,0012$

**d) volume específico  $V_s$**

$$V_s = \frac{V}{G} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{sendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} G - \text{peso} \\ V - \text{volume} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

O volume específico pode ser expresso nos diferentes sistemas de unidades, como

$$\text{Sistema MK*S: } [\gamma] = \frac{\text{m}^3}{\text{kgf}}$$

segue:

$$\text{Sistema MKS: } [\gamma] = \frac{\text{m}^3}{\text{N}} \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Sistema C.G.S.: } [\gamma] = \frac{\text{cm}^3}{\text{d}}$$

### e) compressibilidade

A compressibilidade de um fluido depende do módulo de compressibilidade volumétrico  $\epsilon_{\text{vol}}$ . Um fluido será mais ou menos compressível dependendo do valor de  $\epsilon_{\text{vol}}$ , nunca incompressível. Pode-se também usar o conceito de escoamento incompressível, isto é, um escoamento de um fluido no qual a massa específica tem variação desprezível devido às pequenas variações na pressão atmosférica.

Sempre que se tratar de um **escoamento incompressível**, ou, idealmente, de um sistema com fluido incompressível, a **massa específica** será considerada **constante**.

A compressibilidade volumétrica de um fluido é definida pela relação entre o acréscimo de pressão  $dP$  e o decréscimo do volume  $-dV$ . Como a variação  $dV$  depende do volume  $V$ , o módulo de compressibilidade volumétrica é definido por:

$$\epsilon_{\text{vol}} = -V \frac{dP}{dV} \quad \text{Unidade: } \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \quad (1.7)$$

O módulo de compressibilidade varia muito pouco com a pressão, entretanto, varia apreciavelmente com a temperatura. Os gases têm  $\epsilon_{\text{vol}}$  muito variável com a pressão e com a temperatura.

### g) elasticidade

É a propriedade dos fluidos de aumentar o seu volume quando se diminui a pressão, Berthelot, em 1850, descobriu essa propriedade também para os líquidos pois para os gases, a propriedade já era bem conhecida:

$$dV = -\frac{1}{E} V dP \begin{cases} dP = P_{\text{final}} - P_{\text{inicial}} < 0 \\ dV > 0 \end{cases}; \quad \text{unidade: } \text{kgf/m}^2 \quad (1.8)$$

Onde:  $E$  é o módulo de elasticidade volumétrico ( $\text{kgf/m}^2$ )  $\rightarrow R_{\text{gás}} = \frac{1}{E}$

### 1.3 - Equação Geral dos Gases Perfeitos

É a forma simplificada de relacionar o volume de um gás e a variáveis como temperatura e pressão. Por meio da hipótese de gás perfeito, a teoria cinética dos gases permite estabelecer uma constante universal dos gases **R**, que no SI, possui o seguinte valor:

$$R = 8,314510 \frac{\text{N.m}}{\text{mol.}^\circ\text{K}} \quad (1.9)$$

A equação dos gases perfeitos é uma relação entre a pressão absoluta, o volume específico molar e a constante universal dos gases:

$$PV = nRT \quad (1.10)$$

Onde: n é uma forma de quantificação da matéria em número de moles. O número de moles n pode ser obtido como:

$$n = \frac{m}{M} \quad (1.11)$$

Onde m é a massa total; M é a massa molecular do gás (kg/mol).

Substituindo a equação (1.11) em (1.10):

$$PV = mR_{\text{gás}}T \text{ sendo } R_{\text{gás}} = \frac{R}{M} \quad (1.12)$$

Sendo  $R_{\text{gás}}$  a constante particular do gás, nas unidades  $\frac{\text{N.m}}{\text{kg.}^\circ\text{K}}$

Para uma mesma massa de gás sujeita às condições diferentes:

$$\begin{aligned} \frac{P_1 V_1}{T_1} &= \frac{P_2 V_2}{T_2} = wR = \text{constante} \\ \frac{P_1 V_1}{w T_1} &= \frac{P_2 V_2}{w T_2} = R \rightarrow \frac{V}{w} = \frac{1}{\gamma} \\ \frac{P_1}{\gamma T_1} &= \frac{P_2}{\gamma T_2} = R = \text{constante} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para condições isotérmicas, ou seja, para uma mesma temperatura ( $T_1=T_2$ ):

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad (1.14)$$

Para condições adiabáticas, ou seja, não ocorre troca de calor:

$$\begin{aligned} P_1 V_1^{R_{\text{gas}}} &= P_2 V_2^{R_{\text{gas}}} \\ \frac{P_1}{P_2} &= \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{R_{\text{gas}}} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{R_{\text{gas}}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 1.4 - Atmosfera Padrão

A atmosfera terrestre é constituída de uma mistura de gases com alta predominância de nitrogênio e oxigênio que formam o que denominados de ar. Nas condições próximas ao nível do mar tem-se:

$$\text{ar} \begin{cases} 79\% \text{ de nitrogênio} \\ 21\% \text{ de oxigênio} \\ \text{demais gases porcentagem desprezível} \end{cases}$$

As condições físicas atmosféricas são variáveis em função da localização geográfica e do tempo. A pressão e a temperatura dependem da altura em relação ao nível do mar, além de apresentarem forte característica sazonal.

Para uniformizar os estudos que dependem das condições atmosféricas adota-se um valor-padrão para as condições normais e pressão e temperatura que se aproximam dos valores encontrados na atmosfera real e constituem a atmosfera-padrão. Os valores da atmosfera-padrão, no nível do mar (NM) são:

$$P_{\text{NM}} = 760 \text{ mmHg} = 102,325 \text{ KPa}$$

$$T_{\text{NM}} = 15^\circ\text{C} = 288^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1,2232 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma = 11,99 \text{ N/m}^3$$

$$\mu = 1,777 \times 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$$

A temperatura do ar, na atmosfera, decresce com a altura. A relação entre a temperatura ( $T$ ) em graus Kelvin ( $^{\circ}\text{K}$ ) e a altura ( $z$ ) em metros

$$T(^{\circ}\text{K}) = 288 - 0,006507z \quad (1.16)$$

## 1.5 - Pressão

A **pressão**, uma das grandezas mais importantes, é definida como a relação entre a força aplicada, perpendicularmente, sobre uma superfície e a área dessa superfície. Uma força tangencial agindo sobre uma superfície provoca uma tensão tangencial  $\tau$  na superfície. Portanto, uma força normal agindo sobre uma superfície também provoca tensão normal denominada pressão e indicada pela letra

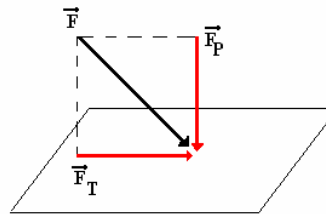


Figura 1.3: Esquema representativo da definição de pressão

Para melhor entendermos o conceito consideremos: Um cilindro no vácuo cheio de fluido, fechado em uma extremidade e munido de um pistão em outra, mantendo o fluido confinado no cilindro.

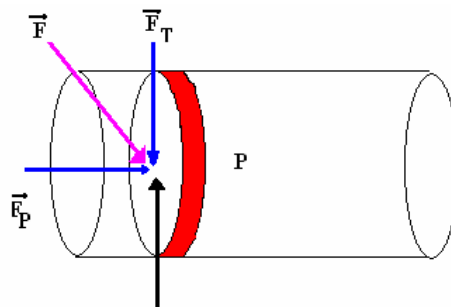


Figura 1.4: Esquema do cilindro para definição do conceito de pressão

O fluido age sobre toda a face do pistão, a reação é distribuída ao longo da face, gerando uma tensão normal que é uma medida da pressão do fluido sobre o pistão. A pressão é uma grandeza escalar não tendo direção e sentido associados. A força que a pressão causa no pistão é sempre de compressão e perpendicular à área onde age. A força de pressão é calculada por:



$$\vec{F}_p = \int_A \vec{P} dA \begin{cases} \vec{a} - \text{vetor associado à direção perpendicular à superfície considerada} \\ A - \text{área da superfície} \\ F_p - \text{força de pressão} \end{cases} \quad (1.17)$$

A unidade de pressão é definida pela relação entre as unidades de força e área e, no SI é dada por

$$[P] = \frac{[\vec{F}]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa \quad (1.18)$$

## 1.6 – Tensão Superficial e Capilaridade

**Tensão superficial** é a propriedade de a camada superficial exercer tensão e é a força necessária para manter o comprimento unitário do filme em equilíbrio. Logo, sua unidade é formada pela relação entre força e comprimento.

A tensão superficial também é importante no fenômeno da capilaridade, no qual intervém em conjunto com a capacidade de molhamento e adesão do líquido. Em um líquido que molha a superfície, a adesão é maior que a coesão e a ação da tensão superficial faz aparecer uma força que eleva o nível do líquido nas imediações de uma parede vertical. Se o líquido não molha a superfície, a tensão superficial é preponderante e força o nível a abaixar junto à parede vertical. Em tubos verticais de pequeno diâmetro imersos em água a superfície assume forma esférica e é denominada menisco. Para a água a forma do menisco é côncava e a tensão superficial força o líquido a se elevar no tubo, já para o mercúrio, que não molha a parede, o líquido é forçado a descer e essa variação do nível é denominada depressão ou elevação capilar e este fenômeno é denominado de **capilaridade**. (ROMA, 2003)

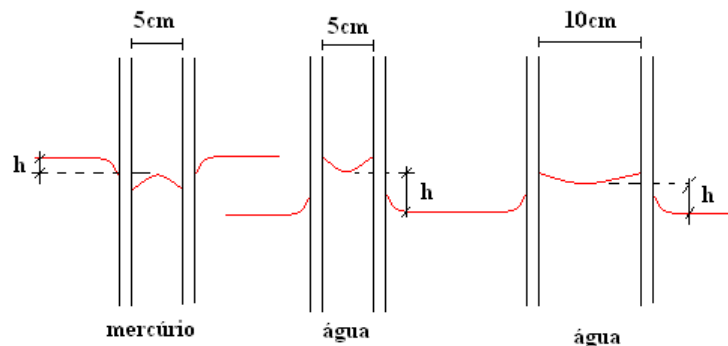


Figura 1.5: Capilaridade em tubos de diâmetros diferentes

## 1.7 – Escoamento de um Fluido em um Tubo

Existem várias camadas que se deslocam com velocidades diferentes, sendo a velocidade igual a zero junto à parede do tubo e máxima na parte central. Surgem, então, dois tipos de atrito:

- Atrito externo: resistência ao deslizamento do fluido ao longo de superfícies sólidas;
- Atrito interno ou viscosidade: resistência ao deslocamento mútuo das partículas do fluido.

## 1.8 – Viscosidade ou Atrito Interno

Durante o escoamento de um fluido observam-se um relativo movimento entre suas partículas, resultando um atrito entre as mesmas. Viscosidade ou Atrito Interno é a propriedade que determina o grau de resistência do fluido à força cisalhante, ou seja, resistir à deformação. Sejam duas placas largas e paralelas separadas por uma película de um fluido com espessura  $y$ .

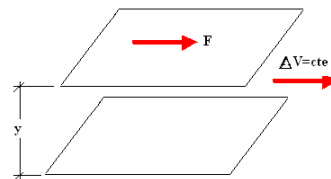


Figura 1.6: Esquema representativo da ação da viscosidade

$$\text{Lei de Newton} \rightarrow \text{força de atrito: } F = \mu \cdot A \cdot \frac{\Delta V}{y} \quad (1.19)$$

Onde:  $F$  é a força tangencial;  $A$  é a área;  $y$  é a espessura do fluido;  $\Delta V$  é a velocidade e  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta, característica de cada fluido. **DEPENDE DA TEMPERATURA.**

Mas a resistência à deformação, chamada de resistência viscosa, é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \mu \frac{\Delta V}{y} \quad (1.20)$$

## 1.9 – Viscosidade Específica

É a relação entre a viscosidade do fluido e da água a 20°C e 1 atm.

$$\mu_{\text{esp}} = \frac{\mu_{\text{fluido}}}{\mu_{\text{água}}^{20^\circ\text{C}, 1\text{atm}}} \quad (1.21)$$

## 1.10 – Viscosidade Cinética ou Cinemática

É a relação entre a viscosidade absoluta ou dinâmica e a massa específica do fluido.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \nu - \text{viscosidade cinemática} \\ \mu - \text{viscosidade absoluta} \\ \rho - \text{massa específica} \end{cases} \quad (1.22)$$

## 1.11 – Medidas de Viscosidade

a) **Viscosímetro de Michael (cilindros concêntricos):** mede a viscosidade absoluta ou dinâmica. Para os líquidos, quanto mais elevada for a temperatura, menor será a viscosidade e para os gases, temperaturas elevadas fornecem maiores valores para a viscosidade.

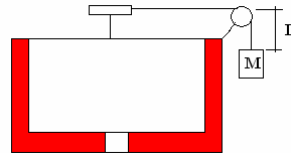
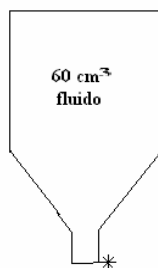


Figura 1.7 – Viscosímetro de Michael

$$\mu = \frac{kMt}{L} \quad \begin{cases} k - \text{constante do aparelho} \\ \mu - \text{viscosidade absoluta} \\ L - \text{comprimento da corda} \\ t - \text{tempo que a massa leva para percorrer um comprimento } L \end{cases} \quad (1.23)$$

b) **Viscosímetro de Saybott:** mede a viscosidade cinemática



$$\begin{aligned} \mu(\text{m}^2/\text{s}) &= 10^{-4} \left( 0,002197t - \frac{1,798}{t} \right) \\ \mu(\text{cm}^2/\text{s}) &= 0,002197t - \frac{1,798}{t} \end{aligned} \quad (1.24)$$

t – é o tempo de escoamento,  $t \geq 32\text{s}$

Figura 1.8: Viscosímetro de Saybott

## 1.12 – Classificação de fluidos – Newtonianos ou não - Newtonianos

Os fluidos que obedecem à equação de proporcionalidade (eq.1.20), ou seja, ocorre uma relação linear entre o valor da tensão de cisalhamento aplicada e a velocidade de deformação resultante, quer dizer, o coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$  constante, são denominados **fluidos newtonianos**, incluindo-se a água, líquidos finos assemelhados e os gases de maneira geral. Os fluidos que não seguem esta equação de proporcionalidade são denominados **fluidos não-newtonianos** e são muito encontrados nos problemas reais de engenharia civil, como exemplos citam-se: lamas e lodos em geral. Neste tipo de fluido não ocorre uma relação linear entre o valor da tensão de cisalhamento aplicada e a velocidade de deformação angular (AZEVEDO NETTO, 2007). Encontram-se divididos em três tipos: (i) a viscosidade não varia com o estado de agitação, obedecem a uma lei semelhante e neste caso o coeficiente de viscosidade cinemática  $\mu$  está elevado a uma potência; (ii) os tixotrópicos em que a viscosidade cai com o aumento da agitação. Quando em bombeamento podem ser tratados como fluidos newtonianos, ex: lodos adensados de estações de tratamento de esgoto, e (iii) os dilatantes, em que a viscosidade aumenta com o aumento da agitação, ex: melado da cana de açúcar.

## 1.13 - Fluidos Perfeitos

É definido como aquele fluido que em repouso goza da propriedade de isotropia, isto é, em torno de um ponto os esforços são iguais em todas as direções. São considerados fluidos sem viscosidade e incompressíveis, características essas que reforçam o conceito de fluido perfeito, no qual a densidade é uma constante e existe o estado isotrópico de tensões em condições de movimento. Na prática, o fluido perfeito não existe, ou seja, na natureza, sendo, portanto, uma abstração teórica, mas em um grande número de casos tal consideração torna-se prática quando, por exemplo, assumimos a água como fluido perfeito para efeito de cálculos expeditos.

## 1.14 – Unidade Técnica de Massa

Suponha que um corpo seja submetido a uma força de 1 kgf e adquira a aceleração de  $1 \text{ m/s}^2$ , então, a sua massa é igual a 1 unidade neste sistema, ou seja, 1 Unidade Técnica de Massa ( $1 \text{ kgf} = 1 (\text{unidade de massa}) \times 1 \text{ m/s}^2$ ).

No MKS, neste sistema a força é uma unidade derivada então a unidade Newton pode ser definida como a força atuante sobre uma massa de 1kg quando esta adquire uma aceleração de  $1\text{m/s}^2$  ( $1(\text{unidade de força}) = 1\text{kg} \times 1\text{m/s}^2$ ).

Comparando a unidade Newton com a UTM:

Dado 1 litro de água a  $4^\circ\text{C}$ , para o sistema MKS este terá massa igual a 1kg e peso igual a 9,8N e para o sistema MKS\* terá massa igual a  $1/9,8\text{UTM}$  e peso igual a 1kgf.

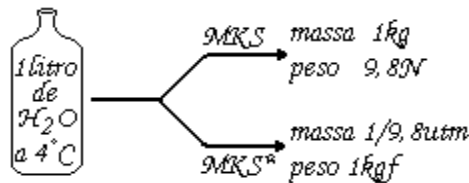


Figura 1.9: Esquema ilustrativo para comparação das unidades de medida no MKS e no MKS\*

A massa de 1kg no MKS pesa 9,8N mas no MKS\* pesa 1kgf porque:

No MKS: o peso de 1kg =  $1\text{kg} \times 9,8\text{m/s}^2 = 9,8\text{N}$

No MKS\*: o peso de 1kgf =  $m \times 9,8 \text{ m/s}^2 \quad m = 1/9,8\text{utm}$ .

### 1.15 - Conversão de Unidades

$$1\text{Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$1\text{atm} = 10,33\text{mca} = 1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} = 1,1013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^5 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} = 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 100\text{mca}$$

$$1 \frac{\text{dyna}}{\text{cm}^2} = 0,1 \text{ Pa}$$

$$1 \frac{\text{lb}}{\text{pol}^2} = 6,9 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{m.s}} = \frac{10^3 \text{ g}}{10^2 \text{ cm.s}} = 10 \text{ P, sendo P = Poise}$$

$$1\text{P} = 0,1 \frac{\text{N.s}}{\text{m}^2}$$

$$100\text{centipoise} = 1\text{P} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm.s}}$$

$$1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N}$$

$$1 \text{ UTM} = 9,8 \text{ kg}$$

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyna}$$

## CAPÍTULO 2 – ESTÁTICA DOS FLUIDOS

### 2.1 – Estática dos Fluidos

Considera-se um fluido em repouso quando não há velocidade diferente de zero em nenhum dos seus pontos e, neste caso, esta condição de repouso é conhecida por **Hidrostática**. Os princípios da **Hidrostática** ou **Estática dos Fluidos** envolvem o estudo dos fluidos em repouso e das forças sobre objetos submersos.

#### 2.1.1 – Lei de Stevin

O equacionamento matemático se dá através da **Equação Fundamental da Hidrostática - Lei de Stevin**. Este equacionamento consiste no equilíbrio das forças sobre um elemento de volume infinitesimal em forma cúbica, definido no plano cartesiano de coordenadas obtendo-se a distribuição das forças de pressão e as forças de ação a distância agindo sobre o elemento. Como o elemento está em repouso, o somatório das forças de pressão e das forças de ação a distância é igual a zero (Figura 2.1). (ROMA, 2003)

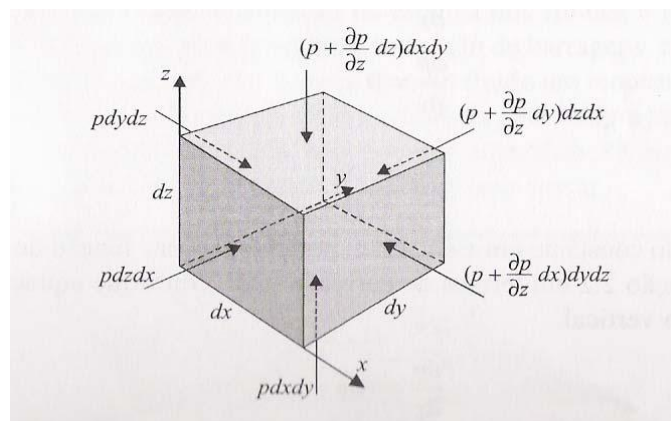


Figura 2.1 – Forças de pressão em um elemento de volume (ROMA, 2003)

Da figura, tem-se:

$$\left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz \vec{e}_x + \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \right] dx dz \vec{e}_y + \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \right] dx dy \vec{e}_z - mg \vec{e}_z = 0$$

em que  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  e  $\vec{e}_z$  são os versores nas três direções coordenadas.

(2.1)

Simplificando a equação (2.3), chega-se a:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \bar{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz \bar{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy \bar{e}_z - mg \bar{e}_z = 0$$

substituindo m por  $\rho dx dy dz$  e simplificando os fatores comuns, chega - se a :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{e}_z - \rho g \bar{e}_z = 0 \quad (2.2)$$

De forma compacta, pode-se expressar a eq. 2.1 empregando o conceito de gradiente de um escalar e do operador Nabla  $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla}(p + \rho g z) = 0 \quad (2.3)$$

A equação 2.1 (ou 2.3) é conhecida como **Equação Geral da Estática dos Fluidos**. Dessas equações infere-se que a pressão não depende de  $x$  e de  $y$ , ou seja, a pressão em um plano horizontal é constante. Logo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.4)$$

Sendo a pressão constante em  $x$  e de  $y$ , ela é função apenas de  $z$ , logo a eq. 2.4 pode ser escrita na forma:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g; \quad (2.5)$$

### Conclusões:

- 1 – A diferença de pressões entre 2 pontos de uma massa líquida em equilíbrio é igual à diferença de profundidade multiplicada pelo peso específico.**
- 2 – No interior de um fluido em repouso, pontos de uma mesma profundidade suportam a mesma pressão.**

### 2.1.2 - Aplicações da Equação Fundamental da Hidrostática (AZEVEDO NETO, 1985)

a) **Vasos Comunicantes:** “A altura de um líquido incompressível em equilíbrio estático preenchendo diversos vasos comunicantes independe da forma dos mesmos.”

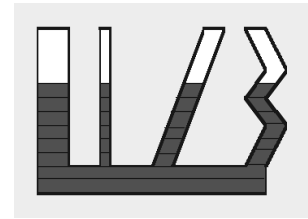


Figura 2.2: Princípio dos Vasos Comunicantes

b) **Pressão Contra o Fundo do Recipiente:**  
 Considerando somente a pressão exercida pelo fluido no fundo do recipiente.

$$P = \gamma h \Rightarrow \frac{F}{A} = \gamma h \Rightarrow F = \gamma h A \quad (2.6)$$

Onde F é a força que atua no fundo do recipiente e A é a área do fundo do recipiente onde atua a força.

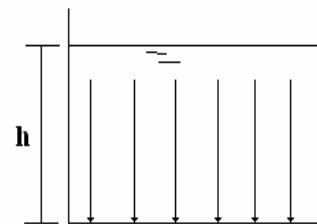


Figura 2.3: Pressão contra o fundo do recipiente

c) **Equilíbrio de dois líquidos de densidades diferentes:**

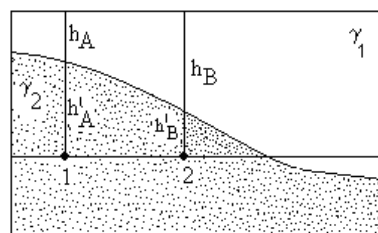


Figura 2.4: Tanque com fluidos de densidades diferentes

$$P_1 = P_2$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 h_A + \gamma_2 h'_A &= \gamma_1 h_B + \gamma_2 h'_B \\ \gamma_1 (h_A - h_B) &= \gamma_2 (h'_B - h'_A) \\ \gamma_1 (h_A - h_B) + \gamma_2 (h'_A - h'_B) &= 0 \end{aligned}$$

donde:

$$h_A - h_B = 0 \Rightarrow h_A = h_B$$

$$h'_A - h'_B \Rightarrow h'_A = h'_B$$

(2.7)

**Conclusões:** As camadas se superpõem na ordem crescente de suas densidades sendo plana e horizontal a superfície de separação. Os fluidos de densidades menores ficam acima dos fluidos de densidades maiores.

d) **Vasos comunicantes com líquidos de densidades diferentes**

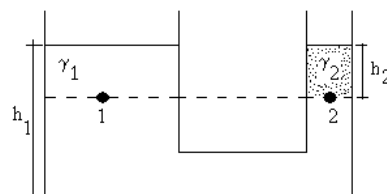


Figura 2.5 – Vasos comunicantes com líquidos de densidades diferentes

$$P_1 = P_2$$

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2 \quad (2.8)$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{h_2}{h_1}$$



## 2.2 - Altura Piezométrica

Altura piezométrica  $h$  representa a altura de uma coluna de um fluido que produzirá uma dada pressão (AZEVEDO NETO, 1985):

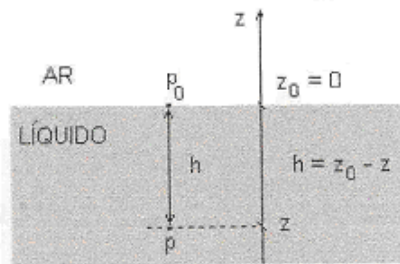
$$h(\text{m.c.f.}) = \frac{P \left( \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \right)}{\gamma \left( \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \right)} \quad (2.9)$$

## 2.3 – Pressão absoluta, atmosférica e manométrica.

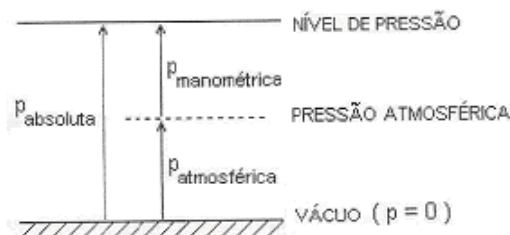
Segundo FOX (1988), considerando  $P_0$  a pressão correspondente ao nível de referência  $z_0$ , a pressão  $P$  em uma posição  $z$  qualquer é encontrada pela integração da eq. (2.5):

$$P - P_0 = -\rho g(z - z_0) = \rho g(z_0 - z) \quad (2.10)$$

Para os líquidos, adota-se a superfície livre como nível de referência. Dessa forma, medem-se as distâncias de cima para baixo como distâncias positivas, uma vez que para fluidos  $z$  está em geral abaixo de  $z_0$ . Com  $h$  positivo no sentido de cima para baixo conforme a Figura 2.6,  $h = z_0 - z$  resultando no **Princípio de Stevin**:



2.6 - Dedução do Princípio de Stevin



2.7 - Representação dos níveis de pressão

Da equação 2.10:

- a) **Pressão absoluta ou total  $P$**  decomposta em  $P_0$  no nível de referência  $z_0$  e  $\rho gh$  em função da massa líquida acima do ponto onde se deseja conhecer o valor da pressão. Quando acima de  $z_0$ , tem-se o ar ambiente, então  $P_0 = P_{\text{atm}}$  que é a pressão atmosférica. A pressão absoluta é medida a partir do vácuo absoluto. Seu valor é sempre positivo e

sempre se considera a pressão atmosférica.

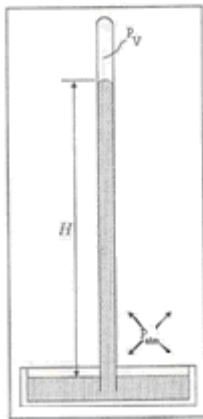
$$P_{atm} = 760 - 0,0081h \quad (2.11)$$

Onde  $h(m)$  é a altitude do local em metros e  $P_{atm}$  é a pressão atmosférica em  $mmH_g$ .

**b) Pressão manométrica:** É medida a partir da pressão atmosférica e seu valor tanto pode ser negativo quanto positivo. Não se leva em consideração a pressão atmosférica.

### b.1) Medidores de pressão

#### Barômetro de mercúrio



2.8 – Barômetro de mercúrio

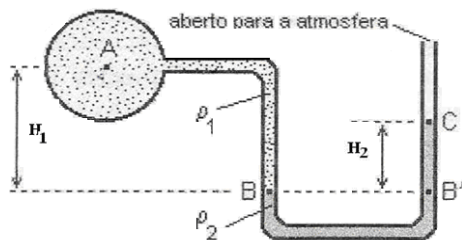
- Um dos primeiros instrumentos de medida de pressão com base em coluna de fluido desenvolvido por Torricelli;

- Consta de um tubo de vidro com 1,0 m de comprimento, fechado em uma das extremidades que após ser preenchido com mercúrio, é emborcado em uma cuba do mesmo elemento. A coluna de mercúrio no tubo vertical, inicialmente com um metro de comprimento, sofre redução de altura em razão da fuga do fluido pela abertura inferior, diminuindo o comprimento indicado por  $H$ . Esse fenômeno provoca o aparecimento de um espaço sobre a coluna de mercúrio, que é ocupado por seu vapor. Da eq. (2.10) pode-se determinar a pressão atmosférica  $P_{atm}$  em termos da altura  $H$  da coluna de

mercúrio:

$$P_{atm} = \rho_H H g \quad (2.12)$$

#### Manômetro de tubo aberto



2.9 – Manômetro de tubo aberto

Usado para medir pressões manométricas.

Possui um tubo em forma de U contendo um fluido de densidade  $\rho_2$  conhecida.

Numa extremidade do tubo é conectado um recipiente de fluido de densidade  $\rho_1$  conhecida e cuja pressão deseja-se medir.

A outra extremidade é aberta para a atmosfera.

Utilizando a equação (2.10), tem-se:

$$P_A - P_B = \rho_1 g(z_A - z_B) = \rho_1 gH_1 \quad (2.12)$$

$$P_B' - P_C = \rho_2 g(z_C - z_B') = \rho_2 gH_2 \quad (2.13)$$

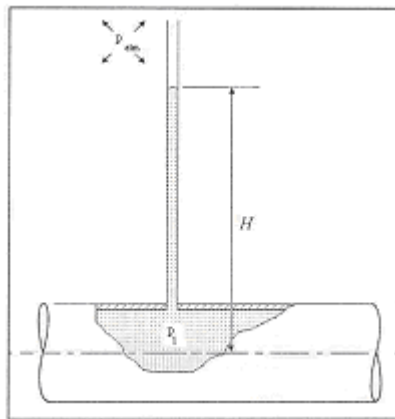
Os pontos B e B' se encontram na mesma elevação em trecho contínuo de fluido, logo  $P_{B'} = P_B$  (Princípio dos Vasos Comunicantes). Como o ramo da direita está aberto para a atmosfera, tem-se que  $P_C = P_{atm}$ . Substituindo esses resultados nas eq. (2.12) e (2.13) e subtraindo a primeira equação da segunda, tem-se:

$$P_A - P_{atm} = \rho_2 gH_2 - \rho_1 gH_1 \quad (2.14)$$

Se  $\rho_1$  for desprezível comparada com  $\rho_2$  ( $\rho_1 \ll \rho_2$ ), a expressão (2.11)

$$P_{manA} = \rho_2 gH_2 \quad (2.15)$$

### Piezômetro



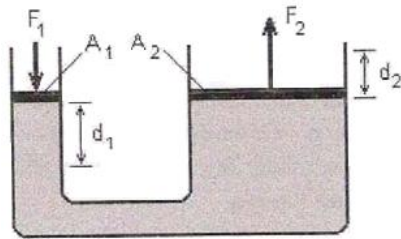
2.10 - Piezômetro

O cálculo da pressão no piezômetro é feito pela aplicação da equação da estática dos fluidos entre a pressão a ser obtida no centro do tubo e da pressão no topo da coluna fluida, que é a pressão atmosférica  $P_{atm}$ . Assim, a pressão é dada por:

$$P_1 = \gamma_f H \quad (2.16)$$

## 2.4 – Princípio de Pascal

*“A pressão exercida sobre a superfície da massa líquida é transmitida no seu interior, integralmente e em todas as direções.”*



2.11 – Prensa hidráulica

A figura mostra como este princípio é aproveitado através do funcionamento de uma prensa hidráulica. Quando uma força  $F_1$  é exercida para baixo sobre o pistão menor de área  $A_1$  (ramo da esquerda), o líquido (incompressível) contido no dispositivo exerce uma

força para cima de módulo  $F_2$  sobre o pistão maior de área  $A_2$  (ramo da direita). A fim de manter o sistema em equilíbrio, uma carga externa (não mostrada) deve exercer uma força para baixo no valor de  $F_2$  sobre o pistão menor. A variação de pressão  $\Delta P$  produzida pela força de entrada  $F_1$  exercida pelo pistão menor é transferida ao pistão maior, sobre o qual passa a atuar uma força de saída  $F_2$ . A equação que segue relaciona estas grandezas:

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = A_2 \frac{F_1}{A_1} \quad (2.17)$$

Como  $A_2 > A_1$ , pela relação acima fica claro que a força de saída  $F_2$  exercida sobre a carga é maior que a força de entrada  $F_1$

## 2.5 – Princípio de Arquimedes

*“Um corpo total ou parcialmente imerso em um fluido em equilíbrio recebe uma força vertical para cima denominada empuxo, de intensidade igual, mas de sentido contrário ao peso da porção deslocada de fluido e aplicada no ponto onde estava localizado o centro de massa desta porção de fluido.”*

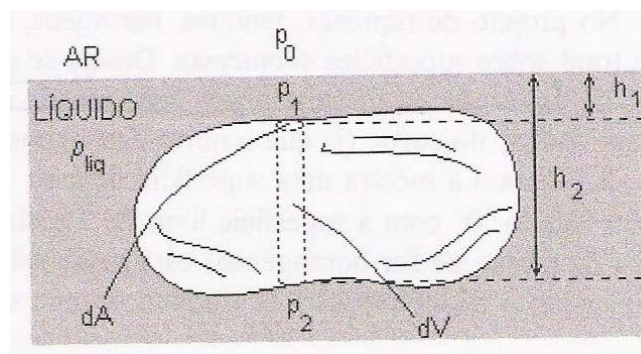


Figura 2.12 – Corpo imerso em um fluido estático

Esta força denominada empuxo será tanto maior quanto mais denso for o líquido e sua origem está relacionada com o fato da pressão no líquido aumentar com a profundidade (Princípio de Stevin). Considere um objeto totalmente imerso em um fluido estático, como na Figura 2.12. Considere, também, elementos finitos de volume que serão utilizados para determinação da força vertical sobre o corpo em função da pressão hidrostática. Da eq. (2.10) tem-se:

$$P_1 = P_0 + \rho_{\text{liq}}gh_1 \quad \text{e} \quad P_2 = P_0 + \rho_{\text{liq}}gh_2 \quad (2.18)$$

A força vertical  $dF_E$  resultante sobre o volume elementar é igual a:

$$dF_B = (P_0 + \rho_{\text{liq}}gh_2)dA - (P_0 + \rho_{\text{liq}}gh_1)dA \Rightarrow dF_B = \rho_{\text{liq}}g(h_2 - h_1)dA \quad (2.19)$$

Observe que  $(h_2 - h_1)dA = dV$  é volume do elemento cilíndrico. A força total  $F_B$  denominada **força de empuxo** é obtida por integração sobre todo o volume do objeto, ou seja:

$$F_B = \int dF_B = \int_V \rho_{\text{liq}}gdV = \rho_{\text{liq}}g \int_V dV = \rho_{\text{liq}}gV \Rightarrow F_B = \rho_{\text{liq}}Vg \quad (2.20)$$

Onde  $V$  é o volume do objeto. Como  $\rho_{\text{liq}}$  é a densidade do líquido (**e não do objeto**), temos que  $\rho_{\text{liq}}V$  corresponde à massa do líquido deslocado pela imersão do objeto e então pode-se anunciar o resultado anterior (equação 2.20) como **Princípio de Arquimedes**.

## 2.6 - Empuxo Exercido por um Líquido sobre Superfície Plana Imersa

Frequentemente, os engenheiros encontram problemas relacionados a estruturas que devem resistir às pressões exercidas por líquidos como, por exemplo: barragens, comportas, registros, etc. E, neste caso, deseja-se calcular o módulo, a direção, o sentido e o ponto de aplicação da força denominada **empuxo**.

### 2.6.1 – Grandeza e direção do empuxo

*“O empuxo exercido por um líquido sobre uma superfície plana imersa é uma força perpendicular à superfície e é igual ao produto da área pela pressão relativa ao centro de gravidade CG.”*

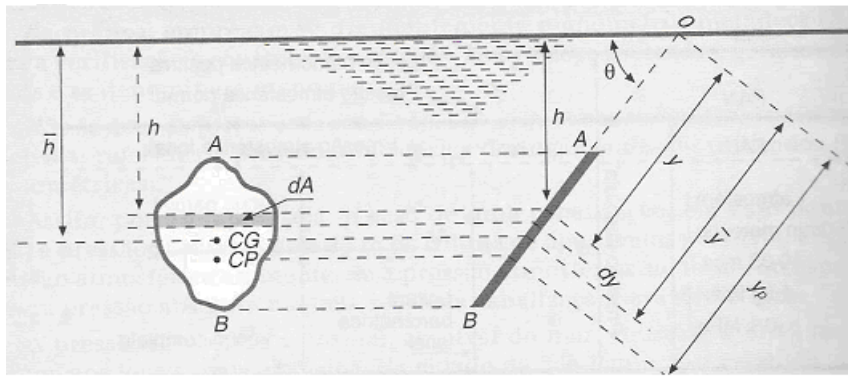


Figura 2.13: Esquema da força de empuxo sobre a face submersa de uma superfície plana.

Tem-se da figura acima uma superfície irregular de área  $A$ , localizada em um plano inclinado que faz ângulo  $\theta$  com a superfície livre do fluido de densidade  $\rho$ . O centro de massa da superfície ou centroide (se for homogênea), está localizado a uma profundidade  $h_C$ . Para determinar o empuxo total  $F$  sobre a superfície, vamos considerar um elemento de área  $dA$  sobre a mesma, localizado a uma profundidade  $h$ , abaixo da superfície livre do líquido. Lembrando-se que o líquido recobre apenas um dos lados, a força  $dF$  sobre este elemento é dada por:

$$dF = PdA = \rho g h dA = \quad (2.21)$$

Sendo:

$$\text{sen}\theta = \frac{h}{y} \Rightarrow h = y \text{sen}\theta \quad (2.22)$$

$$\gamma = \rho g$$

Substituindo a eq.(2.21) na eq.(2.22):

$$dF = \gamma y \text{sen}\theta dA \quad (2.23)$$

Onde a distância  $y$  é medida a partir da intersecção  $O$  do plano com a superfície livre do líquido. A força total é obtida por integração sobre toda a superfície:

O empuxo:

$$F = \int dF \quad (2.24)$$

$$F = \int \gamma y \text{sen}\theta dA \Rightarrow E = \gamma \text{sen}\theta \int y dA$$

A integral  $\int y \, dA$  é o momento da área em relação à linha  $O-O'$ . Esta integral equivale ao produto (ver figura):  $\int_A y \, dA = y_c A$ . Substituindo este resultado na eq.(2.24) e observando que  $h_c = y_c \sin\theta$ , tem-se a seguinte expressão para a força resultante sobre um lado de uma superfície submersa plana:

$$\begin{aligned} F &= \int \gamma y_c \sin\theta \, dA \\ F &= \gamma h_c A \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.6.2 – Centro de Pressão – CP

Não havendo tensão de cisalhamento, pois o fluido é estático, a direção desta força (eq.2.25) é normal ao plano da superfície. A posição do  $y_{CP}$  do ponto de aplicação do empuxo é denominado **centro de pressão**. A posição do CP será determinada aplicando-se o teorema de Varignon: **“O momento da resultante em relação ao ponto O deve ser igual à soma dos momentos das forças elementares  $dF$ .”**

$$M_F = y_{CP} F \quad (2.26)$$

Sendo  $M_F$  o momento (torque) total da força  $F$  em relação ao eixo  $O-O'$ . Considerando-se o elemento de área  $dA$ , o momento  $dM$  da força  $dF$  é igual a:

$$dM_F = y \, dF = \rho g y^2 \sin\theta \, dA \quad (2.27)$$

Integrando a eq.(2.27), tem-se o momento total:

$$M_F = \int M_F = \int_A \rho g y^2 \sin\theta \, dA = \rho g \sin\theta \int_A y^2 \, dA = \rho g \sin\theta I \quad (2.28)$$

A integral  $\int_A y^2 \, dA$  é uma integral de segunda ordem  $I$  da área  $A$ , em relação ao eixo  $O-O'$ . Neste caso, o centro de massa e o centro de pressão coincidem. Aplicando-se o teorema dos eixos paralelos para este momento de inércia, tem-se:

$$I = I_{CM} + y_{CM}^2 A = I_c + y_c^2 A \quad (2.29)$$

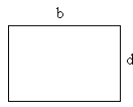
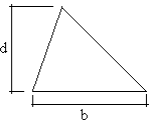

Sendo  $I$  o momento de inércia em relação ao eixo  $O$  e o  $I_C$  momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo  $CG$ .

Substituindo as equações (2.25), (2.27) e (2.28) na equação (2.26), tem-se:

$$\rho g \sin\theta (I_C + y_c^2 A) = y_{cp} \rho g \sin\theta y_c A \Rightarrow y_{cp} = y_c + \frac{I_C}{y_c A} \quad (2.30)$$

### 2.6.2.1 – Momentos de Inércia para Algumas Figuras Geométricas

Tabela 2.1: Momentos de Inércia e Área para algumas figuras geométricas

Figura	Área	Momento de Inércia $I_C$
	$A = bd$	$I_C = \frac{bd^3}{12}$
	$A = \frac{bd}{2}$	$I_C = \frac{bd^3}{36}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4}$	$I_C = \frac{\pi D^4}{64}$

## 2.7 – Forças Exercidas sobre Superfícies Curvas Submersas

Segundo ROMA (2003), quando o esforço hidrostático atua sobre uma superfície curva, a determinação do módulo resultante, pelo método citado no item 6, leva a formulações complexas, o que torna necessário um artifício para simplificar o cálculo. O artifício consiste em obter a força por meio de suas componentes, assim, a componente horizontal é obtida como se estivesse agindo sobre uma projeção da placa. A força é obtida pela soma vetorial dessas componentes.

Considere a componente horizontal sobre uma superfície curva, um elemento de área  $dA$  na superfície curva submersa, mostrada na Figura 2.14, localizado a uma distância vertical  $h$  da superfície livre. A força elementar  $dF$  sobre esse elemento vale  $dF = p dA$  e é perpendicular à superfície curva.



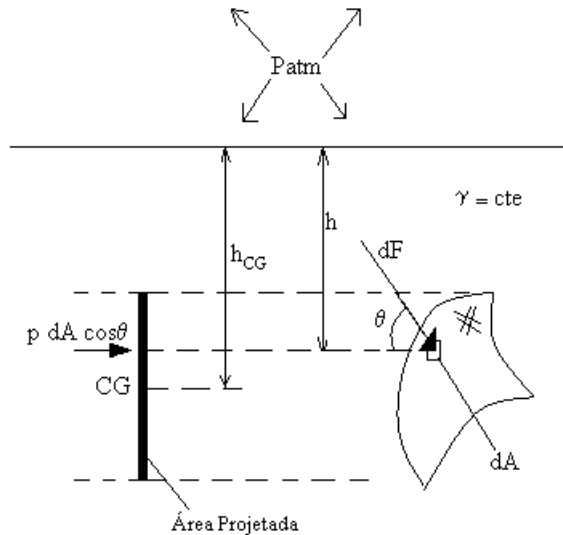


Figura 2.14 – Projeção horizontal da superfície curva sobre um plano vertical

### 2.7.1 – Determinação da componente horizontal da força F:

A componente horizontal de  $dF$  é:

$$dF_h = dF \cos\theta = p \, dA \cos\theta \quad (2.31)$$

Sendo a projeção da área  $dA$  em um plano perpendicular à direção horizontal igual a  $dA \cos\theta$  e em um plano vertical,  $p \, dA \cos\theta$  é a força elementar exercida sobre a área projetada, isto é,  $dF_h = p \, dA_{proj}$ . Essa relação pode ser integrada sobre toda a área projetada, obtendo:

$$F_h = \int_{A_{proj}} p \, dA_{proj} = \gamma \int_{A_{proj}} h \, dA_{proj} \quad (2.32)$$

Definindo  $h_c$  como a distância vertical da superfície livre até o centro de gravidade da área projetada e lembrando que a posição do centro de gravidade é definida por:

$$h_c = \frac{1}{A_{proj}} \int_{A_{proj}} h \, dA_{proj} \quad (2.33)$$

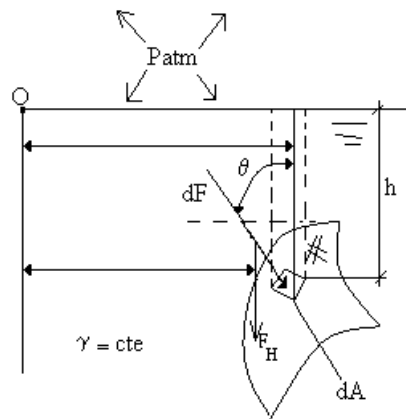
Substituindo a eq. (2.33) na eq.(2.32), tem-se:

$$F_h = \gamma h_c A_{proj} \quad (2.34)$$

A linha de ação de  $F_h$  passa pelo centro de pressão da área projetada. Assim, após projetar a superfície curva em um plano vertical podem-se utilizar os métodos anteriores (ROMA, 2003).

### 2.7.2 – Determinação da componente vertical da força F:

Seja  $dF = p dA = \gamma h dA$  a força elementar sobre o elemento de área  $dA$  da superfície curva esquematizada na Figura 2.15 (ROMA, 2003).



2.15 – Componente vertical do esforço hidrostático sobre a curva

A componente vertical de  $dF$  vale:

$$dF_v = dF \cos\theta = p dA \cos\theta = \gamma h dA \cos\theta \quad (2.35)$$

A componente vertical da força aplicada sobre a superfície é:

$$F_v = \int_A \gamma h dA \cos\theta \quad (2.36)$$

Sendo  $dA \cos\theta$  a projeção de  $dA$  num plano perpendicular à direção vertical. Num plano horizontal, o termo  $h dA \cos\theta$  é o volume do prisma elementar de altura  $h$  (desde a superfície curva até a superfície livre) e a área de base  $dA \cos\theta$ . Integrando, tem-se:

$$F_v = \gamma \int_A h \, dA \cos\theta = \gamma \int_{Vol} dVol = \gamma Vol \quad (2.37)$$

Pode-se concluir que o módulo da componente vertical da força hidrostática que age sobre uma superfície curva submersa é numericamente igual ao peso do volume de fluido contido verticalmente entre as superfícies curva e livre.

De acordo com ROMA (2003), a linha de ação da componente vertical é determinada quando se iguala o seu momento - em relação a um eixo que passa pela origem O - à somatória dos momentos das componentes verticais elementares. Considerando a Figura 2.15, tem-se:

$$M_o = F_v \bar{x} = \int_{Vol} x dF_v \quad (2.38)$$

$$\gamma Vol \bar{x} = \gamma \int_A x \, dVol \quad (2.39)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{Vol} \int_{Vol} x dVol \quad (2.40)$$

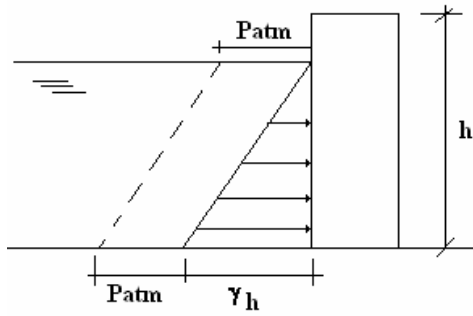
Daí pode-se observar que a linha de ação da componente vertical da força passa pelo centro de gravidade do volume do fluido acima da superfície curva, o qual se estende desde a superfície curva até a superfície livre, real ou imaginária.

## 2.8 – Variação da Pressão do Fluido com a Profundidade

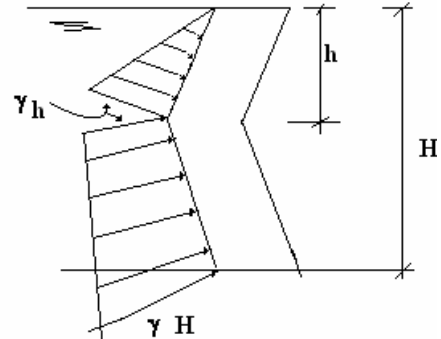
$$P_{abs} = P_{atm} + \gamma h \rightarrow \text{Equação da reta } y = ax + b \quad (2.41)$$

$$P_{man} = \gamma h \Rightarrow P_{man} = P_{abs} - P_{atm} \quad (2.42)$$

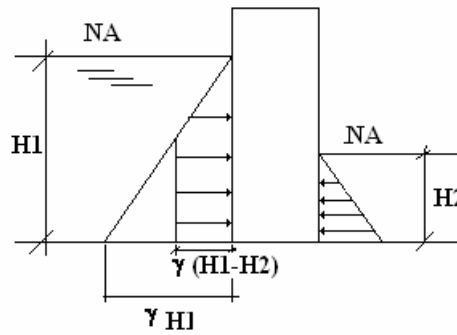
**a) Parede Vertical**



**b) Parede Inclinada**



**c) Parede Vertical com Líquido à Montante e à Jusante**



**d) Pressões sobre Comportas**

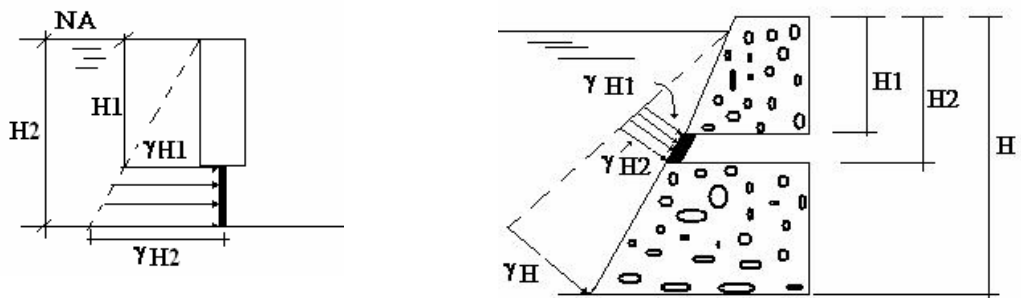
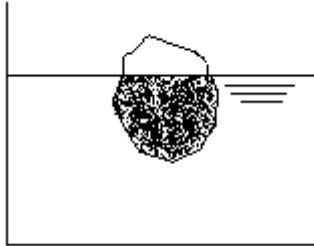


Figura 2.16 - Variação da Pressão do Fluido com a Profundidade

## 2.9 – Equilíbrio dos Corpos Flutuantes

### 2.9.1 – Corpo Flutuante e Corpo Imerso

#### a) Corpo Flutuante



#### b) Corpo Imerso

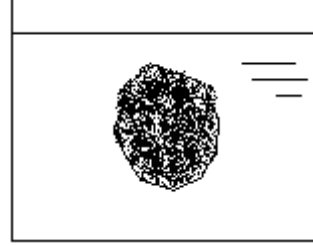
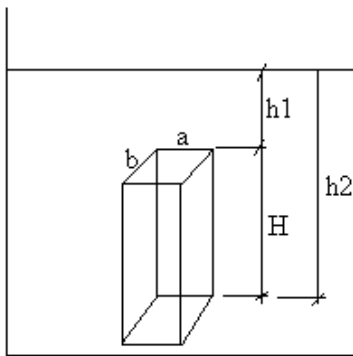


Figura 2.17 : Corpo flutuante e corpo imerso

### 2.9.2 – Princípio de Pascal

Seja um corpo imerso no interior de líquido.



Força na base superior

$$F_{BS} = \gamma h_1 \times a \times b$$

Força na base inferior

$$F_{BI} = \gamma h_2 \times a \times b$$

(2.43)

Diferença

$$F_{BI} - F_{BS} = \gamma a b (h_2 - h_1)$$

Figura 2.18 – Representação do Princípio de Pascal

***“Todo corpo imerso sofre um empuxo de baixo para cima, igual ao peso do volume de líquido deslocado.”***

### 2.9.3 – Critérios de Análise

- a) Se  $\gamma_{sol} > \gamma_{liq} \Rightarrow P > E$ , o corpo afunda sob a ação da força P-E
- b) Se  $\gamma_{sol} = \gamma_{liq} \Rightarrow P = E$ , o corpo fica imerso e em equilíbrio
- c) Se  $\gamma_{sol} < \gamma_{liq} \Rightarrow P < E$ , o corpo fica imerso – corpo flutuante.

**“Quando o corpo flutua o seu peso se iguala ao volume submerso multiplicado pelo peso específico.”**

### 2.9.4 – Carena

É a porção imersa do flutuante. O centro de gravidade – CG – da parte submersa se chama centro de carena e é o ponto de aplicação do empuxo.

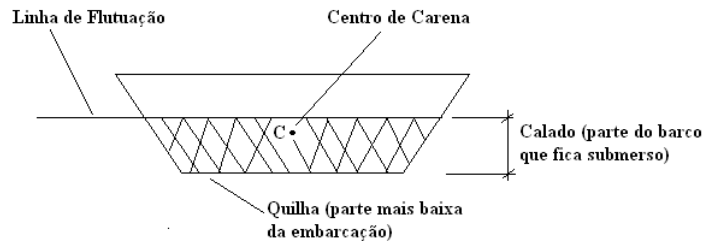


Figura 2.19 – Esquema das partes de uma embarcação

### 2.9.5 – Equilíbrio dos Corpos Flutuantes

Quando um corpo flutuante sofrer uma rotação devido a uma ação qualquer (ventos, ondas, etc.), o binário formado pelo peso  $P$  e o empuxo  $E$  tenderá a três situações:

- a) O centro de gravidade – CG está abaixo de C      b) O centro de gravidade – CG coincide com o centro de carena C, o equilíbrio é indiferente

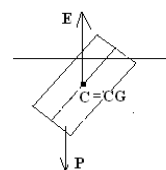
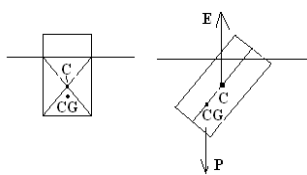


Figura 2.21: Localização do centro de gravidade CG abaixo do centro de carena C

Figura 2.22: Localização do centro de carena C coincidente com centro de gravidade CG.

c) O centro de gravidade – CG está acima do centro de carena C

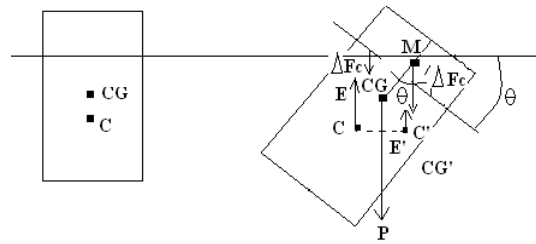


Figura 2.23: Localização do centro de gravidade CG acima do centro de carena C

Onde:

M é o metacentro – ponto em torno do qual gira o centro de carena;

C é o centro de carena;

C' é o novo centro de carena;

E é o empuxo no equilíbrio;

$\Delta F_c$  é o acréscimo e decréscimo do empuxo;

E' é a composição de E e  $\Delta F_c$

Logo, tem-se 3 classes de equilíbrio:

- 1) Equilíbrio estável: quando o metacentro está acima do centro de gravidade
- 2) Equilíbrio instável: quando o metacentro está abaixo do centro de gravidade
- 3) Equilíbrio indiferente: quando o metacentro coincide com o centro de gravidade

### 2.9.6 – Altura Metacêntrica

De acordo com ROMA (2003), altura metacêntrica é a medida de estabilidade da embarcação. Seja um flutuante sofrendo uma pequena oscilação, o centro de carena passa de C para C'. Aplicando o teorema de Varignon considerando C' o centro de redução dos momentos e k o binário das forças  $\Delta F_c$ :  $E\delta - k = E'.0$  e  $E\delta = k \rightarrow \delta = \frac{k}{E}$ .

O volume que emerge AOA' é igual ao que submerge BOB', assim:

$$\Delta F_c = \gamma \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2} \frac{b}{2} \text{tg}\theta \right) \right] L = \gamma \frac{b^2}{8} L \text{tg}\theta \quad (2.44)$$

O binário das forças será:

$$k = \Delta F_c \frac{2}{3} b = \gamma \frac{b^3}{12} L \text{tg}\theta = \gamma J \text{tg}\theta \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.44), tem-se:

$$\delta = \frac{k}{E} = \frac{\gamma J \operatorname{tg}\theta}{E} \quad (2.46)$$

Da figura:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{CC'}{CM} = \frac{\delta}{CM} \rightarrow \delta = CM \operatorname{sen}\theta \quad (2.47)$$

Igualando-se as equações (2.46) e (2.47):

$$\frac{\gamma J \operatorname{tg}\theta}{E} = CM \operatorname{sen}\theta \rightarrow CM = \frac{\gamma J \operatorname{tg}\theta}{E \operatorname{sen}\theta} \quad (2.48)$$

Como  $\theta$  é pequeno,  $\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 1$ :  $CM = \frac{\gamma J}{E}$  (2.49)

Já o empuxo é  $E = \gamma V$  logo:  $CM = \frac{J}{V}$  (2.50)

Onde  $CM$  é a posição do metacentro e  $V$  é o volume de carena (submerso).

### 2.9.6.1 – Altura Metacêntrica

$$GM = CM - CG \quad (2.51)$$

Na prática,  $0,3 < GM < 1,20\text{m}$

**Valores muito altos de GM** – momentos restauradores grandes causam desconforto e prejuízo estrutural.

**Valores muito baixos de GM** – momentos restauradores pequenos causam instabilidade, má distribuição da carga ou água na embarcação.

- ✓ transatlânticos 0,3 a 0,6m – menos instável
- ✓ cruzadores 0,8 a 1,2m - menos instável
- ✓ torpedeiros 0,4 a 0,6m
- ✓ iates 0,9 a 1,2m

$$\text{Equilíbrio} \begin{cases} \text{Estável: } CM > CG \rightarrow GM > 0 \\ \text{Instável: } CM < CG \rightarrow GM < 0 \\ \text{Indiferente: } CM = CG \rightarrow GM = 0 \end{cases}$$



## CAPÍTULO 3 - CINEMÁTICA E DINÂMICA DOS FLUIDOS

### 3.1 – Conceito

É a parte da mecânica dos fluidos que estuda o movimento e a vazão de uma massa fluida entre delimitadas superfícies sob a ação da gravidade e/ou pressões externas. O movimento dos fluidos é um fenômeno conhecido como escoamento que pode ser definido como o processo de movimentação de suas moléculas, umas em relação às outras e aos limites impostos ao escoamento. Os escoamentos são descritos por parâmetros físicos e o comportamento destes ao longo do tempo e do espaço permite separar os escoamentos em classes o que facilita o seu entendimento e a descrição do fenômeno em termos matemáticos (ROMA, 2003).

### 3.2 – Descarga de uma grandeza $N$

Os processos de transferência tratados em Mecânica dos Fluidos ocorrem, principalmente, em escoamentos de fluidos e, para tal, é necessário quantificar as grandezas envolvidas em seu movimento. De forma geral, conceitua-se descarga através do estudo de uma grandeza  $N$  qualquer transportada em um escoamento e esta é uma grandeza extensiva que tem sua correspondente grandeza intensiva  $n$ . (ROMA, 2003)

Define-se **grandeza intensiva** como qualquer grandeza associada a uma substância que seja independente de sua massa, por exemplo: velocidade e temperatura e, define-se **grandeza extensiva** como sendo aquela que depende da massa da substância (ROMA, 2003).

$$n = \frac{dN}{dm} \quad (3.1)$$

Tabela 3.1: Exemplos de grandezas extensivas e correspondentes grandezas intensivas

EXTENSIVAS		INTENSIVAS	
Massa	m		1
Quantidade de movimento	mV	Velocidade	V
Volume	vol	Volume específico	v
Energia interna	U	Energia interna específica	u
Energia cinética	$\frac{1}{2} mV^2$	Energia cinética específica	$\frac{1}{2} V^2$
Energia potencial	mgh	Energia potencial específica	gh

### 3.2.1 – Descarga de uma grandeza extensiva $N$

Define-se a descarga de  $N$  como a relação entre a quantidade da grandeza física  $N$  que atravessa uma superfície de referência e o tempo gasto para atravessá-la:

$$D_N = \frac{dN}{dt} \quad (3.2)$$

A equação acima representa o transporte de uma grandeza  $N$  pelo escoamento de um fluido através de uma superfície denominada superfície de controle ou de referência e dela pode-se obter uma equação para o cálculo da descarga da grandeza  $N$  por meio da área  $A$  do escoamento e da velocidade  $\bar{V}$  do fluido. A grandeza  $N$  e a velocidade  $\bar{V}$  variam em função do espaço, logo, o problema deve ser tratado de forma diferencial, adotando-se um elemento de fluido com um volume de área  $dA$  e comprimento  $dx$ , com massa específica  $\rho$  que no instante  $t$  localiza-se no limite da região à esquerda da superfície de referência (ROMA, 2003).

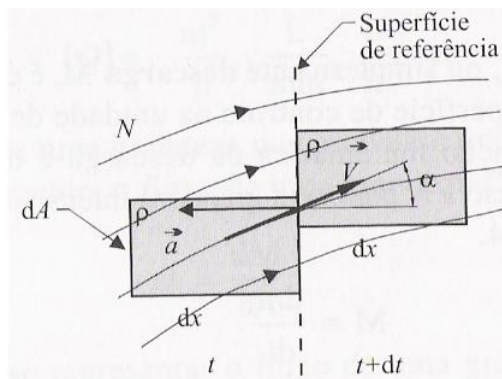


Figura 3.1: Fluido atravessando uma superfície com velocidade  $V$

A quantidade da grandeza  $dN$  contida no elemento do fluido, de massa  $dm$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$dN = n dm = n \rho dx dA \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.2), tem-se:

$$dD_N = \frac{n \rho dx dA}{dt} \quad (3.4)$$

Onde  $\frac{dx}{dt}$  representa a componente horizontal da velocidade  $V_x$ , calculada pelo produto do módulo do vetor velocidade e do cosseno do ângulo  $\alpha$  entre a velocidade e a normal à superfície de controle:  $\frac{dx}{dt} = V_x = |\vec{V}| \cos \alpha$ . Substituindo este valor na equação (3.5), tem-se:

$$dD_N = n \rho \vec{V} dA \cos \alpha \quad (3.6)$$

Considerando um versor  $\vec{a}$  na direção da normal à superfície de referência, pode-se definir o vetor área  $d\vec{A} = dA \times \vec{a}$ , em que  $dA$  é o módulo do vetor área. Dessa forma, reescreve-se a equação (3.6):

$$dD_N = n \rho |\vec{V}| |d\vec{A}| \cos \alpha \quad (3.7)$$

Em notação vetorial, tem-se:  $dD_N = n \rho \vec{V} d\vec{A}$  (3.8)

A descarga da grandeza  $N$  que atravessa a área  $A$  pode ser obtida integrando-se a equação (3.8):

$$D_N = \iint_A n \rho \vec{V} d\vec{A} \quad (3.9)$$

### 3.2.2 – Descarga, vazão e fluxo

a) **Descarga de massa  $D_m$**  ou simplesmente **descarga  $\dot{M}$**  é definida como a quantidade de massa que atravessa a superfície de controle na unidade de tempo, como indicado na equação (3.9). Matematicamente, representa-se a descarga através da equação (3.9), substituindo a grandeza extensiva  $N$  por  $m$  e a grandeza intensiva  $n$  por  $1$ , e aí tem-se a equação (3.10):

$$\dot{M} = \frac{dm}{dt} \quad (3.10)$$

$$\dot{M} = \int_A \rho \vec{V} d\vec{A} \quad (3.11)$$

As unidades de descarga de massa são obtidas pela divisão de unidade de massa por unidade de tempo. Dessa forma, tem-se uma unidade do SI:

$$[\dot{M}] = \frac{kg}{s} \quad (3.12)$$

b) **Vazão  $Q$**  é definida como a relação entre o volume de fluido que atravessa uma superfície e o tempo gasto para atravessá-la. Da eq. (3.9), tem-se:

$$Q = \frac{dvol}{dt} \quad (3.13)$$

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (3.14)$$

As unidades de vazão são obtidas pela divisão de unidade de volume por unidade de tempo. Tem-se, então:

$$[Q] = \frac{m^3}{s} \quad (3.15)$$

Pode-se também utilizar a vazão  $Q$  nas unidades  $\frac{m^3}{h}$ ,  $\frac{L}{min}$ ,  $\frac{l}{h}$ , etc...

c) **Fluxo** é a quantidade de uma grandeza que atravessa uma superfície por unidade de tempo e área e pode ser escrita como:

$$\dot{m} = \frac{dM}{dA} \quad (3.16)$$

### 3.2.3 – Campo de Velocidades

Em um fluido cada partícula ou molécula tem ou pode ter velocidades diferentes. A velocidade é uma grandeza vetorial, logo tem módulo ou magnitude, direção e sentido. Sua representação se dá por três componentes, uma para cada eixo coordenado. Pode-se representar a velocidade em um ponto ou em uma partícula do fluido pela equação:

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z \quad (3.17)$$

O movimento do fluido, de acordo com AZEVEDO NETTO (1998), é perfeitamente determinado em qualquer instante  $t$  se a grandeza e a direção da velocidade relativa a qualquer ponto forem conhecidas.

### 3.2.4 - Linhas e Tubos de Corrente

As linhas de corrente são as linhas que se mantêm tangentes, a cada instante  $t$ , em todos os pontos, às velocidades  $\mathbf{v}$  das partículas e gozam da propriedade de não serem atravessadas por partículas do fluido. As linhas de corrente não podem cortar-se. Admitindo o campo de velocidade  $\mathbf{v}$  contínuo, pode-se considerar um tubo de corrente (figura imaginária) como um conjunto constituído de linhas de corrente. Os tubos de corrente gozam da propriedade de não serem atravessados por partículas de fluido (as suas paredes podem ser consideradas impermeáveis). Um tubo de corrente de dimensões infinitesimais constitui o que se chama de filete de corrente (ROMA, 2003 e AZEVEDO NETTO, 1998).

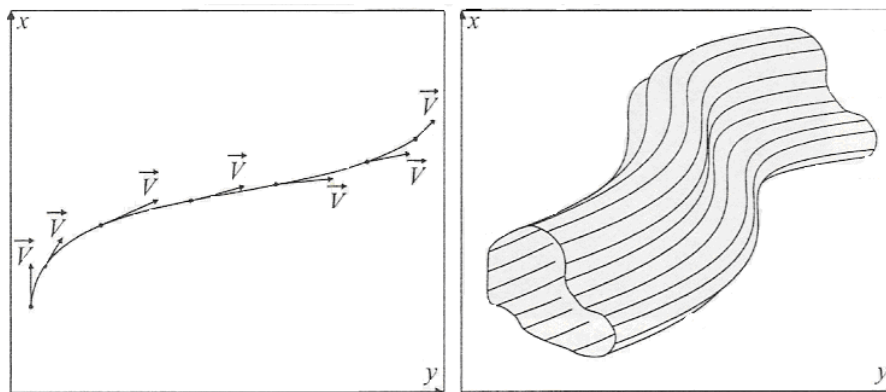
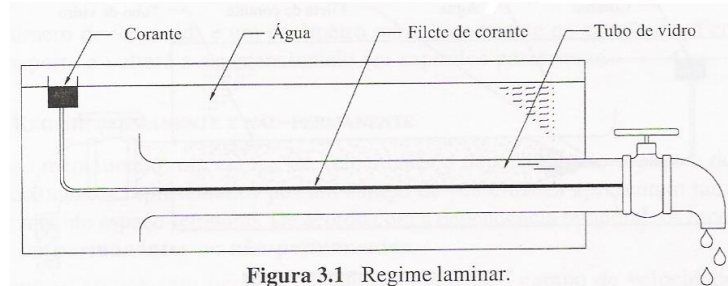


Figura 3.2 Definição de linha e visualização de um tubo de corrente.

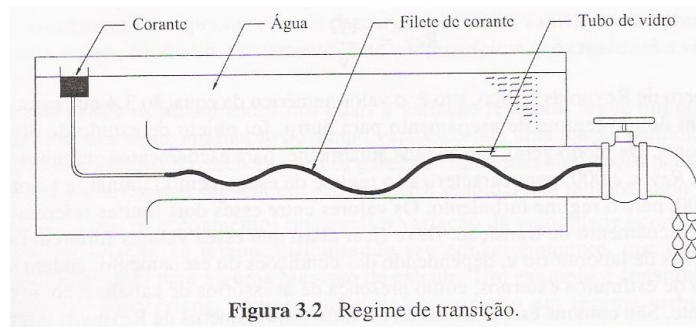
### 3.3 – Classificação dos Movimentos ou Escoamentos

A classificação dos escoamentos depende da velocidade e está sujeita ao comportamento das moléculas de fluido que adotam um padrão de movimento denominado estrutura interna. Em 1883, Osborne Reynolds publicou um estudo sobre a estrutura de escoamentos que atualmente é conhecido como Experimento de Reynolds, que consiste basicamente na injeção de um corante líquido na posição central de um escoamento de água interno a um tubo circular de vidro transparente (ROMA, 2003). O comportamento do filete de corante ao longo do escoamento no tubo define três características distintas:

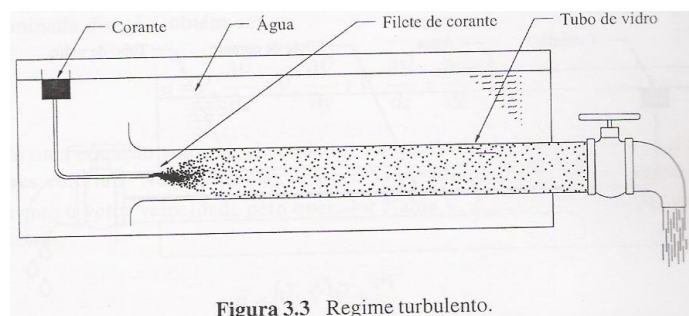
a) **Regime laminar:** o corante inserido não se mistura com o fluido, permanecendo na forma de um filete no centro do tubo. O escoamento ocorre sem que haja uma mistura entre o escoamento e o filete.



b) **Regime de transição:** o filete de corante apresenta alguma mistura com o escoamento, deixando de ser retilíneo e sofrendo ondulações. Neste caso, ocorre uma pequena variação na velocidade, é um estágio intermediário entre o regime laminar e um regime caótico (turbulento).



c) **Regime turbulento:** O filete de corante apresenta uma mistura intensa com dissipação rápida no meio do fluido. Os movimentos no interior do fluido são aleatórios e provocam um deslocamento de moléculas entre as diferentes camadas do fluido.



O regime de escoamento, seja ele laminar ou turbulento, depende das propriedades de cada escoamento em particular. Por exemplo: para escoamentos em condutos cilíndricos circulares, Reynolds determinou um valor que associa as grandezas diâmetro  $D$ , velocidade  $V$  e viscosidade cinemática  $\nu$  para o qual o fluido passa do escoamento laminar para o turbulento. Este valor é um parâmetro conhecido como número de Reynolds –  $Re_y$ :

$$Re_y = \frac{VD}{\nu} \quad (3.17)$$

Para:  **$Re_y > 2000$**  – o regime é considerado laminar

**$2000 < Re_y < 4000$**  – o regime é considerado de transição

**$Re_y > 4000$**  – o regime é considerado turbulento

O diâmetro mostrado na equação (3.17) é considerado como dimensão característica com unidade de comprimento, do escoamento em dutos, porém, outros tipos de escoamento podem ter outras dimensões características do tipo comprimento, por exemplo, o escoamento sobre placas planas e, nesse caso, o parâmetro usado será o comprimento e assim o número de Reynolds para a ser indicado como (AZEVEDO NETTO, 1998):

$$Re_y = \frac{VL}{\nu} \quad (3.18)$$

### 3.3.1 – Regime permanente e não permanente

Um campo de velocidade é dependente do espaço e do tempo, e os escoamentos representados por um campo de velocidades apresentam também um comportamento espaço-temporal. De acordo com a dependência temporal, os escoamentos podem ser **permanentes** ou **não permanentes** (ROMA, 2003).

**a) Escoamento estável, estacionário ou permanente:** As características do fluido (densidade, velocidade, pressão) para todos os pontos dele não variam com o tempo, ou seja, são constantes no tempo. No movimento permanente, a vazão é constante.

**b) Escoamentos não-permanentes:** é aquele representado por um campo de velocidades independentes da variável tempo, ou seja, todas as propriedades e grandezas características do escoamento são constantes no tempo.

**c) Escoamento transientes:** são os escoamentos que possuem uma fase inicial, escoamento permanente, e que em função de uma aceleração da velocidade assumem uma nova situação também permanente. Ex: descarga de vasos sanitários – ao ser pressionada, provoca inicialmente um movimento lento que acelera até a velocidade terminal.

**d) Escoamento periódico:** são os escoamentos que seguem a uma variação temporal contínua em função do tempo. Ex: escoamento de gases de combustão eliminados pelos motores à combustão interna que seguem um padrão senoidal.

**e) Escoamento aleatório:** os escoamentos ocorrem com uma variação aleatória da velocidade em relação ao tempo. Ex: movimentos atmosféricos.

### 3.4 – Escoamento de um Líquido em um Tubo

Utiliza-se o conceito de velocidade média expresso por:

$$V_{média} = \frac{Q}{A}, \text{ unidade: m/s} \quad (3.19)$$

### 3.5 – Princípio da Conservação de Massa

Comumente equaciona-se o escoamento de um fluido por meio de seu volume de controle, caracterizando o método de Euler. O desenvolvimento do chamado **princípio ou equação da continuidade** é utilizado para demonstrar o **conceito de volume de controle - VC**. Da figura abaixo, pode-se observar que a equação da continuidade é estabelecida quando se considera que o escoamento atravessa um determinado volume de controle, ou seja, o escoamento entra no VC por uma área de entrada  $A_E$  e sai por uma área de saída  $A_S$  (ROMA, 2003).



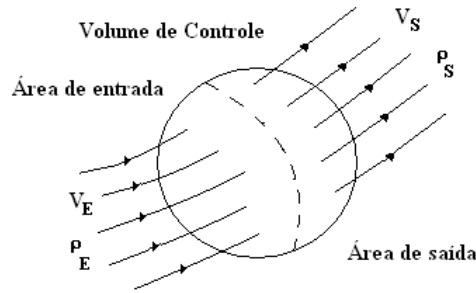


Figura 3.4 – Volume de controle

Pode-se afirmar que:

$$\frac{\text{massa que entra no VC}}{\Delta t} - \frac{\text{massa que sai no VC}}{\Delta t} = \frac{\text{variação massa no VC}}{\Delta t} \quad (3.20)$$

A massa que atravessa uma superfície dividida pelo tempo é a descarga de massa. Pode-se escrever a equação (3.20) da seguinte forma:

$$\frac{m_{\text{entra}}}{\Delta t} - \frac{m_{\text{sai}}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{\text{VC}}}{\Delta t} \quad (3.21)$$

Aplicando-se na equação (3.21) o conceito de limite para o intervalo  $\Delta t$  tendendo a zero tem-se:

$$\dot{M}_{\text{entra}} - \dot{M}_{\text{sai}} = \frac{d m_{\text{VC}}}{dt} \quad (3.22)$$

Aplicando a definição de descarga de massa e calculando a massa por intermédio da integração do volume de controle, tem-se:

$$- \int_{AE} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) - \int_{AS} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dVol \quad (3.23)$$

O sinal negativo, na primeira integral, corrigiu o sinal imposto pelo produto escalar, já que na área de entrada a velocidade tem sentido contrário ao do versor da área, gerando resultado negativo. O sinal introduzido corrige esse valor, pois a vazão de entrada deve ter valor positivo. Combinado as duas primeiras integrais, tem-se a equação da continuidade escrita de forma mais simples:

$$\int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) + \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dVol = 0 \quad (3.24)$$

Em termos mais simples, a equação acima pode ser escrita como:

$$\sum_{saída} \rho v A - \sum_{entradas} \rho v A = 0 \Rightarrow \sum_{saída} \dot{m} - \sum_{entradas} \dot{m} = 0 \quad (3.25)$$

Sendo  $\dot{m} = \rho v A =$  vazão mássica (massa por unidade de tempo).

Para escoamento incompressível (densidade constante),  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho$ , a equação (3.25) resulta em:

$$\sum_{saída} \rho v A = \sum_{entradas} \rho v A \Rightarrow \sum_{saída} \dot{Q} = \sum_{entradas} \dot{Q} \quad (3.26)$$

Onde: Sendo  $\dot{Q} = v A =$  vazão volumétrica (volume por unidade de tempo).

### 3.6 – Princípio da Conservação de Energia

O **princípio da conservação de energia** é a aplicação da **1ª Lei da Termodinâmica** a um sistema, e sua utilização por meio de um volume de controle - VC. A 1ª Lei da Termodinâmica pode ser escrita como:

$$\dot{Q}_c - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \quad (3.27)$$

Onde:

$\dot{Q}_c$  é o calor trocado entre o sistema e o meio, sendo positivo quando introduzido no sistema

$\dot{W}$  é o trabalho trocado entre o sistema e o meio, sendo positivo quando retirado do sistema

$E$  é a energia do sistema

A energia  $E_S$  é a energia total do sistema dada por:

$$E_S = \int_S e \, dm = \int_{VS} e \, \rho \, dV \quad \text{com } e = e_{int} + gz + \frac{1}{2} v^2 \quad (3.28)$$

Sendo  $e_{int}$  a energia interna específica relacionada à temperatura,  $v$  o módulo do vetor velocidade e  $z$  a altura da partícula fluida de massa  $dm$  em relação a um nível de referência.

A formulação integral da 1ª Lei da Termodinâmica (conservação de energia) para volumes de controle é dada por:

$$\dot{Q}_C - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VS} e \rho dV + \oint_{SC} e \rho \vec{v} d\vec{A} \quad (3.29)$$

Traduzindo em palavras:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de calor} \\ \text{adicionado ao} \\ \text{VC pelo meio} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de trabalho} \\ \text{realizado pelo} \\ \text{VC pelo meio} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{vazão de} \\ \text{energia p/} \\ \text{fora do VC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{vazão de} \\ \text{energia p/} \\ \text{dentro do VC} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de acúmulo} \\ \text{de energia no} \\ \text{interior do VC} \end{array} \right\}$$

### 3.6.1 – Equação de Bernoulli

A aplicação da equação de Euler a um escoamento em regime permanente e sua integração sobre uma linha de corrente fornece a equação de Bernoulli, que possui larga aplicação em Mecânica dos Fluidos e Hidráulica. Para se chegar à dedução desta equação, deve-se considerar um volume de controle sob a hipótese de propriedades uniformes nas seções de entrada e saída. Daí tem-se:

$$\oint_{SC} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} d\vec{A} = \left( e_{int1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) (-\rho_1 v_1 A_1) + \left( e_{int2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right) (-\rho_2 v_2 A_2) \quad (3.30)$$

Outras hipóteses são feitas em relação ao escoamento, sendo elas:

- regime permanente (invariância no tempo):  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV = 0$
- escoamento incompressível (densidade constante):  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$
- escoamento invíscido (viscosidade nula):  $\dot{W}_{visc} = 0$
- ausência de interações de calor e de trabalho:  $\dot{Q}_C = \dot{W}_{visc} = 0$  e  $e_{int,1} = e_{int,2} = e_{int}$

Fazendo-se todas as considerações acima, pode-se escrever a equação (3.30) da seguinte maneira:

$$0 = \left( e_{\text{int}1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) (\rho_1 v_1 A_1) + \left( e_{\text{int}2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right) (\rho_2 v_2 A_2) \quad (3.31)$$

A lei da conservação de massa implica em:  $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$

Cancelando-se os termos envolvendo a vazão mássica e a energia interna, tem-se:

$$gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \Leftrightarrow z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} \quad (3.32)$$

As relações apresentadas na equação (3.31) são conhecidas como **equação de Bernoulli**. E pode-se expressá-la considerando que ao longo do escoamento a soma das parcelas é igual a um valor constante.

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \text{constante} \quad (3.33)$$

Todos os termos da equação (3.33) possuem dimensão de comprimento e estas grandezas são denominadas cargas:

$$\frac{v^2}{2g} = \text{carga cinética}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \text{carga de pressão}$$

$z = \text{carga de posição}$

### 3.7 – Impulsão de Movimentos

Em vários problemas de mecânica dos fluidos ocorrem mudanças na grandeza e/ou na direção da velocidade de um fluido em movimento. A determinação da grandeza de força necessária para produzir a mudança na velocidade do fluido é dada pelo Teorema do Impulso e Quantidade de Movimento.

O impulso de uma força é dado por:

$$\vec{I} = \vec{F} \times \Delta t \quad (3.33)$$

Sendo  $\vec{F}$  a força que atua em um ponto durante um intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

A quantidade de movimento de um corpo de massa  $m$  se deslocando com velocidade  $\vec{v}$  é dada pela grandeza vetorial:

$$\vec{Q} = m \times \vec{v} \quad (3.34)$$

### 3.7.1 - Teorema do Impulso e Quantidade de Movimento

Dado um corpo de massa  $m$  submetido a um conjunto de forças que tem com força resultante  $\vec{F}_R$  constante. Sendo:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \quad \text{sendo} \quad a = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad (3.35)$$

$$\vec{F}_R = m \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \rightarrow \vec{F}_R \Delta t = m\Delta\vec{V} \quad (3.36)$$

$$\text{mas} \quad \Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

$$\vec{F}_R \Delta t = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (3.37)$$

$$\vec{F}_R \Delta t = m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1$$

$$\text{tem-se:} \begin{cases} \vec{I} = \vec{F}_R \Delta t \\ \vec{Q}_1 = m\vec{V}_1 \\ \vec{Q}_2 = m\vec{V}_2 \end{cases} \quad (3.38)$$

Daí:

$$\vec{I} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \quad (3.39)$$

***“O impulso da força resultante sobre um corpo é igual a variação da quantidade de movimento do corpo no mesmo intervalo de tempo.”***

Daí, podemos concluir que qualquer mudança na direção, grandeza ou sentido da velocidade de um corpo faz-se sempre por uma impulsão que representa a ação de todas as forças que atuam sobre o corpo durante o intervalo de tempo.

### 3.7.2 – Extensão do Teorema do Impulso e Quantidade de Movimento aos Fluidos

Seja a massa de fluido em movimento permanente no tubo divergente.

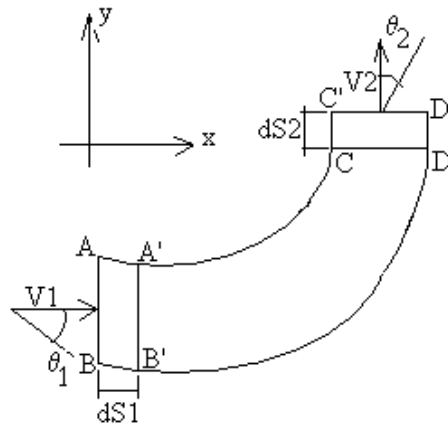


Figura 3.7: Movimento permanente no tubo divergente

Considere:

- (i) o fluxo normal às seções do tubo;
- (ii) a velocidade em cada seção sendo a velocidade média das partículas.

Sob o efeito de forças externas a massa de fluido na região ABCD é transferida para uma nova posição A'B'C'D' após um intervalo de tempo  $dt$ .

Assim, a massa de fluido tem velocidade média  $V_1$  e massa específica  $\rho_1$  na entrada, e velocidade média  $V_2$  e massa específica  $\rho_2$  na saída do tubo.

### 3.7.2.1 – Princípio da Conservação das Massas

Pelo princípio da conservação das massas tem-se:

$$\begin{aligned} \text{massa ABA'B'} &= \text{massa CDC'D'} \\ \rho_1 A_1 dS_1 &= \rho_2 A_2 dS_2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pelo princípio da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \text{Quantidade de movimento em ABA'B'} &= Q_1 = m_1 V_1 \\ Q_1 &= \rho_1 A_1 dS_1 V_1 \text{ mas } dS_1 = V_1 dt \\ Q_1 &= \rho_1 A_1 V_1 V_1 dt \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \text{Quantidade de movimento em CDC'D'} &= Q_2 = m_2 V_2 \\ Q_2 &= \rho_2 A_2 dS_2 V_2 \text{ mas } dS_2 = V_2 dt \\ Q_2 &= \rho_2 A_2 V_2 V_2 dt \end{aligned} \quad (3.42)$$

Logo, a variação de quantidade de movimento ( $\Delta Q$ ) será:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= Q_2 - Q_1 \\ \Delta Q &= \rho_2 A_2 V_2 V_2 dt - \rho_1 A_1 V_1 V_1 dt\end{aligned}\quad (3.43)$$

Considerando os líquidos como fluido em estudo, tem-se:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_2 = \rho = \text{cte} \\ A_1 V_1 &= A_2 V_2 = Q\end{aligned}\quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) em (3.43):

$$\Delta Q = \rho Q(V_2 - V_1)dt \quad (3.45)$$

Mas  $\vec{I} = \Delta \vec{Q}$ , logo:

$$\begin{aligned}\vec{F}dt &= \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)dt \\ \vec{F} &= \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \Rightarrow \text{teorema do impulso} \\ &\text{e quantidade de movimento} \\ &\text{aplicada a líquidos}\end{aligned}\quad (3.46)$$

A força  $\vec{F}$  e as velocidades  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_1$  podem ser representadas por suas componentes:

$$\vec{V}_1 \begin{cases} \text{direção } x \rightarrow \vec{V}_1 \cos \theta_1 \\ \text{direção } y \rightarrow \vec{V}_1 \text{sen} \theta_1 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\vec{V}_2 \begin{cases} \text{direção } x \rightarrow \vec{V}_2 \cos \theta_2 \\ \text{direção } y \rightarrow \vec{V}_2 \text{sen} \theta_2 \end{cases} \quad (3.48)$$

Logo:

$$\vec{F}_x = \rho Q(\vec{V}_2 \cos \theta_2 - \vec{V}_1 \cos \theta_1) \quad (4.49)$$

$$\vec{F}_y = \rho Q(\vec{V}_2 \text{sen} \theta_2 - \vec{V}_1 \text{sen} \theta_1) \quad (4.49)$$

A força  $\vec{F}$  representa a resultante total das forças aplicadas à porção de fluido e que determinam a modificação de sua quantidade de movimento. As forças aplicadas ao fluido são: (i) ações das pressões nas seções da entrada e saída sobre o fluido -  $\vec{F}_p$ , (ii) ação da força da gravidade sobre o fluido -  $\vec{F}_g$ , (iii) ações da parede do tubo ou conexões sobre o fluido -  $\vec{F}_t$ .

$$\vec{F} = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (4.50)$$

$$\vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{F}_g = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (4.51)$$

$$\vec{F}_t = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) - \vec{F}_p - \vec{F}_g \quad (4.52)$$

Com base na 2ª Lei de Newton (ação e reação), a força exercida pelo fluido sobre as paredes da tubulação será:

$$\vec{R} = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) + \vec{F}_p + \vec{F}_g \quad (4.53)$$

A força exercida pelo fluido sobre as paredes pode ser representada por suas componentes:

$$\vec{R}_x = \rho Q(\vec{V}_1 \cos \theta_1 - \vec{V}_2 \cos \theta_2) + P_1 S_1 \cos \theta_1 + P_2 S_2 \cos \theta_2 \quad (4.54)$$

$$\vec{R}_y = \rho Q(\vec{V}_1 \sin \theta_1 - \vec{V}_2 \sin \theta_2) + P_1 S_1 \sin \theta_1 + P_2 S_2 \sin \theta_2 - mg \quad (4.55)$$



## CAPÍTULO 4 – PERDA DE CARGA

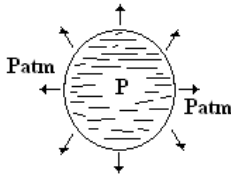
**4.1 – Condutos Hidráulicos:** São classificados de acordo com a pressão de funcionamento:



Figura 4.1: Conduto livre

### Condutos livres:

- Superfície livre
- Atua pressão atmosférica
- ex: cursos d'água, redes de esgoto, calhas, canais



4.2 – Conduto forçado

### Condutos forçados:

- $P \neq P_{atm}$
- Pressão interna diferente da pressão atmosférica
- ex: redes de água, instalações prediais, tubulações de sucção e recalque de bombas.

**4.2 – Perda de Carga:** é a energia dissipada em forma de calor devido ao atrito e à viscosidade em uma canalização.

### 4.2.1 – Classificação das Perdas de Carga

**a) Perda de carga contínua ou distribuída:** ocorre ao longo da canalização.

**b) Perda de carga localizada:** ocorre em pontos localizados na tubulação (curvas, registros, reduções, ampliações, derivações, etc.).

As perdas localizadas podem ser desprezadas nas tubulações longas cujo comprimento exceda cerca de 4000 vezes o diâmetro da tubulação. Ex: Linhas adutoras e redes de distribuição de água. Em canalizações curtas ou com grande número de peças é importante considerar as perdas localizadas. Ex: Instalações prediais, industriais, tubulações de sucção e recalque de bombas.

#### 4.2.1.1 – Perda de Carga Contínua ou Distribuída– Fórmula Geral

Criada por Darcy foi a primeira fórmula a considerar a natureza e os estado de conservação das paredes do tubo. Seus estudos foram baseados em 200 observações e

estas eram referentes a tubos novos, mas ele soube avaliar o processo de envelhecimento dos tubos com critério e dobrou o valor de seus coeficientes.

a) Expressão geral:

$$\begin{aligned}
 hf &= \varepsilon \frac{LV^n}{D^m} \\
 hf D^m &= \varepsilon L V^n \\
 \frac{hf}{L} D^m &= \varepsilon V^n \Rightarrow \frac{hf}{L} = J \\
 J D^m &= \varepsilon V^n
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Sendo:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| $\varepsilon$ = rugosidade absoluta do tubo | $V$ = velocidade de escoamento (m/s) |
| $hf$ = perda de carga (m)                   | $J$ = perda de carga unitária (m/m)  |
| $L$ = comprimento da canalização (m)        | $n, m$ = constantes numéricas        |

#### 4.2.1.1.1 – Natureza da rugosidade absoluta ( $\varepsilon$ )

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| - Material empregado na fabricação | - Tipos de ligação                  |
| - Processo de fabricação           | - Estado de conservação das paredes |
| - Comprimento dos tubos            | - Revestimentos especiais           |
| - Número de juntas                 |                                     |

Na Tabela 2.1 estão reunidos alguns valores para a rugosidade absoluta  $\varepsilon$ . Normalmente quando para um determinado tipo de material tem-se um limite inferior e um superior, utiliza-se um valor médio para cálculo, obviamente, quando não se estipula previamente qual desses limites deverá ser usado.

EX: aço laminado novo  $\rightarrow \varepsilon = \frac{0,04 + 0,10}{2} = 0,07mm$ , logo o valor a ser utilizado para a rugosidade absoluta será 0,07 mm

#### 4.2.1.2 – Fórmula Universal ou de Darcy-Weisbach

$$hf = f \frac{LV^2}{2gD} \left\{ \begin{array}{l} hf - \text{perda de carga (m)} \\ f - \text{coeficiente de atrito} \\ L - \text{comprimento (m)} \\ D - \text{diâmetro(m)} \\ V - \text{velocidade} \left(\frac{m}{s}\right) \end{array} \right.
 \tag{4.2}$$

Tabela 4.1 – Valores da rugosidade absoluta equivalente

Material	$\epsilon$ (mm) Rugosidade absoluta equivalente
Aço comercial novo	0,045
Aço laminado novo	0,04 a 0,10
Aço soldado novo	0,05 a 0,10
Aço soldado limpo, usado	0,15 a 0,20
Aço soldado moderadamente oxidado	0,4
Aço soldado revestido de cimento centrifugado	0,10
Aço laminado revestido de asfalto	0,05
Aço rebitado novo	1 a 3
Aço rebitado em uso	6
Aço galvanizado, com costura	0,15 a 0,20
Aço galvanizado, sem costura	0,06 a 0,15
Ferro forjado	0,05
Ferro fundido novo	0,25 a 0,50
Ferro fundido com leve oxidação	0,30
Ferro fundido velho	3 a 5
Ferro fundido centrifugado	0,05
Ferro fundido em uso com cimento centrifugado	0,10
Ferro fundido com revestimento asfáltico	0,12 a 0,20
Ferro fundido oxidado	1 a 1,5
Cimento amianto novo	0,025
Concreto centrifugado novo	0,16
Concreto armado liso, vários anos de uso	0,20 a 0,30
Concreto com acabamento normal	1 a 3
Concreto protendido Freyssinet	0,04
Cobre, latão, aço revestido de epoxi, PVC, plásticos em geral, tubos extrudados	0,0015 a 0,010

Fonte: Porto (2002)

#### 4.2.1.2.1 - Experiência de Nikuradse

J. Nikurade publicou em 1933 em um trabalho resultados de experimentais para a determinação do fator de atrito  $f$  (ROMA, 2003).

O ensaio consistia de tubos lisos com parede interna revestida com grãos de areia ( $\cong$  esféricos) com granulometria controlada criando assim uma rugosidade uniforme e artificial de valor  $\epsilon$ , correspondente ao diâmetro do grão de areia. A relação entre o fator de atrito  $f$ , o número de Reynolds  $Re$  e a rugosidade relativa artificial  $\epsilon/D$ . A figura abaixo representa o gráfico denominado Harpa de Nikuradse no qual se tem um resumo

dos resultados dos testes e permite uma análise dos fenômenos que ocorrem nas cinco regiões apresentadas, relacionadas abaixo (PORTO, 2002):

- **Região I** –  $Re_y < 2300$ , escoamento laminar, o fator de atrito independe da rugosidade, devido ao efeito da subcamada limite laminar e vale  $f = \frac{64}{Re_y}$
- **Região II** –  $2300 < Re_y < 4000$ , região crítica onde o valor de  $f$  não fica caracterizado.
- **Região III** –  $2300 < Re_y < 4000$ , curva dos tubos hidráulicamente lisos, influência da subcamada limite laminar, o fator de atrito só depende do número de Reynolds. Escoamento turbulento hidráulicamente liso.
- **Região IV**: transição entre o escoamento turbulento hidráulicamente liso e rugoso, o fator de atrito depende simultaneamente da rugosidade relativa e do número de Reynolds.
- **Região V**: turbulência completa, escoamento hidráulicamente rugoso, o fator de atrito só depende da rugosidade relativa e independe do número de Reynolds.

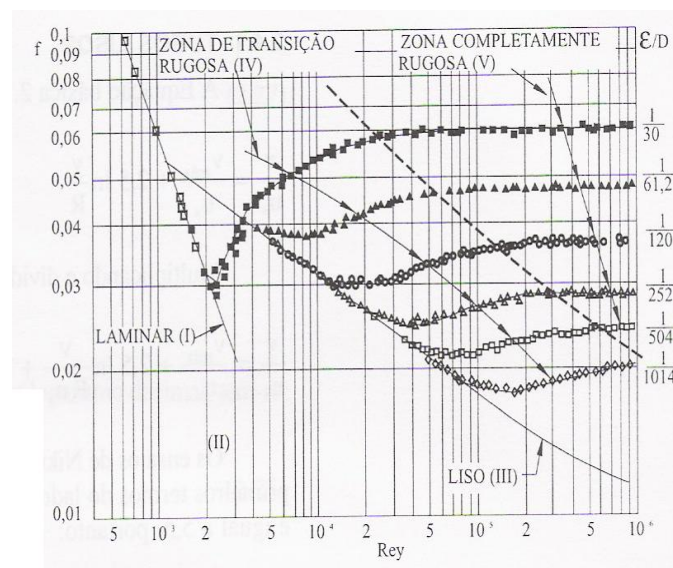


Figura 4.3 – Ábaco de Rouse com as regiões determinadas por Nikuradse

#### 4.2.1.2.2 – Valores do fator de atrito $f$

Regime laminar  $\rightarrow f = \frac{64}{Re_y}$

$$\text{Regime turbulento} \left\{ \begin{array}{l} \text{tubo liso} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(\text{Re}y\sqrt{f} - 0,8) \rightarrow \text{Theodore Van Karman} \\ \text{tubo rugoso} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = 1,74 + 2\log\left(\frac{D}{\varepsilon}\right) \\ \text{tubo de transição} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{\text{Re}y\sqrt{f}}\right) \rightarrow \text{Equação de Colebrook} \end{array} \right.$$

Regime turbulento (rugoso, liso, transição)

$$f = \left(1,4 \frac{\varepsilon}{D} + 0,1004\right) \left(\frac{\varepsilon}{D} + 5 \times 10^{-5} + \frac{72}{\text{Re}y}\right)^{0,24} \quad (4.3)$$

#### 4.2.2 - Equação de Hazen-Willians

A formulação empírica de Hazen-Willians é uma das mais comumente usadas, sua expressão é dada por:

$$Q = 0,278CD^{2,63}J^{0,54}$$

manipulando a equação tem-se:

$$J = 10,65 \frac{Q^{1,85}}{C^{1,85}D^{4,87}} \quad (4.4)$$

Onde : J(m/m) é a perda de carga unitária;

Q (m<sup>3</sup>/s) é a vazão; D(m) é o diâmetro;

C (m<sup>0,367</sup>/s) é o coeficiente de rugosidade que depende da natureza e estado das paredes do tubo

A equação de Hazen-Willians (2.6) é recomendada, preliminarmente para:

- ✓ Escoamento turbulento de transição
- ✓ Líquido: **água** a 20°C, pois não leva em conta o efeito viscoso;
- ✓ **Diâmetro**: em geral **maior ou igual a 50mm (4")**
- ✓ Aplicação: **redes de distribuição de água, adutoras, sistemas de recalque.**

Tabela 4.2 Valores do coeficiente C – Adaptado de (4).

Aço corrugado (chapa ondulada)	C = 60	Aço com juntas lock-bar, tubos novos	130
Aço com juntas lock-bar, em serviço	90	Aço galvanizado	125
Aço rebitado, tubos novos	110	Aço rebitado, em uso	85
Aço soldado, tubos novos	130	Aço soldado, em uso	90
Aço soldado com revestimento especial	130	Cobre	130
Concreto, bom acabamento	130	Concreto, acabamento comum	120
Ferro fundido, novos	130	Ferro fundido, após 15-20 anos de uso	100
Ferro fundido, usados	90	Ferro fundido revestido de cimento	130
Madeiras em aduelas	120	Tubos extrudados, P.V.C.	150

Fonte: Porto (2002)

Tabela 4.3 Valores do coeficiente C segundo os dados analisados por Hazen-Williams.  
 Tubos de ferro fundido\*

Anos	0,10 4"	0,15 6"	0,20 8"	0,25 10"	0,30 12"	0,35 14"	0,40 16"	0,45 18"	0,50 20"	0,60 24"	0,75 30"	0,90 36"	1,05 42"	1,50 60"
00**	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140
0	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130	130
5	117	118	119	120	120	120	120	120	120	120	121	122	122	122
10	106	108	109	110	110	110	111	112	112	112	113	113	113	113
15	96	100	102	103	103	103	104	104	105	105	106	106	106	106
20	88	93	94	96	97	97	98	98	99	99	100	100	100	100
25	81	86	89	91	91	91	92	92	93	93	94	94	94	95
30	75	80	83	85	86	86	87	87	88	89	90	90	90	91
35	70	75	78	80	82	82	83	84	85	85	86	86	87	88
40	64	71	74	76	78	78	79	80	81	81	82	83	83	84
45	60	67	71	73	75	76	76	77	77	78	78	79	80	81
50	56	63	67	70	71	72	73	73	74	75	76	76	77	78

\*Valores do coeficiente C para tubulações de aço:

- Com juntas *lock-bar*, adotar os mesmos coeficientes indicados para os tubos de ferro fundido;
- soldadas, tomar como valores de C os valores indicados para tubos de ferro fundido 5 anos mais velhos;
- rebitados tomar como valores de C os valores indicados para tubos de ferro fundido 10 anos mais velhos;
- com revestimentos especiais, admitir 130

\*\*O valor 140 corresponde ao início de funcionamento de linhas muito bem executadas, com tubos de boa qualidade

Fonte: Azevedo Neto (1998)

#### 4.2.3 – Comparação entre a Fórmula de Hazen-Willians e a Fórmula Universal

**Fórmula Universal**  
Válida para qualquer fluido.  
Usada quando é dada a  
temperatura do fluido

**Fórmula de Hazen-Willians**  
Válida somente para água  
Usada quando NÃO é dada a  
temperatura do fluido

#### 4.2.4 – Fórmula de Fair-Whipple-Hsiao – Formulação para perda de carga contínua em instalações prediais de água

Usada em projetos de instalações prediais de água fria ou quente, cuja topologia é caracterizada por trechos curtos de tubulações, variação de diâmetros (**em geral menores que 50mm (4'')**) e presença de grande número de conexões, é usual a utilização de uma fórmula empírica na forma:

- a) Material: aço galvanizado novo conduzindo água fria

$$J = 0,002021 \frac{Q^{1,88}}{D^{4,88}}; \quad Q(\text{m}^3/\text{s}), D(\text{m}) \text{ e } J(\text{m/m}) \quad (4.5)$$

- b) Material PVC rígido conduzindo água fria

$$J = 0,0008695 \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}; \quad Q(\text{m}^3/\text{s}), D(\text{m}) \text{ e } J(\text{m/m}) \quad (4.6)$$

### 4.3 – Perda de Carga Localizada

As canalizações que transportam água sob pressão, de qualquer porte, são constituídas por tubos interligados, em seqüência, unidos por acessórios diversos como válvulas, registros, etc., e, eventualmente, uma máquina hidráulica (bomba ou turbina).

A presença destas peças especiais ocorre em função da operação do sistema e colaboram para que haja alteração de módulo ou direção da velocidade média e, conseqüentemente, da pressão, localmente. Tal fato ocorre pelo acréscimo de turbulência que produz perdas de carga que devem ser acrescidas às perdas distribuídas (contínuas), devido ao atrito, ao longo dos trechos retilíneos das tubulações. A essas perdas denominam-se **perdas de carga localizadas ou singulares**.

### 4.3.1 – Expressão Geral das Perdas Localizadas

As perdas localizadas em acessórios podem ser expressas pela equação:

$$hf_{loc} = k \frac{V^2}{2g} \quad (4.7)$$

Onde: k – valor experimental para cada peça ou acessório.

A perda de carga localizada é sempre verificada na saída da canalização

Verificou-se que o valor de k é praticamente constante para valores do número de Reynolds superiores a 50000, ou seja, para escoamentos turbulentos pode-se considerar o valor de k constante, independente do diâmetro da tubulação e da velocidade e natureza do fluido (Azevedo Neto, 1998).

Tabela 4.4 – Valores de k para as singularidades

Acessório	k	Acessório	k
Cotovelo de 90° raio curto	0,9	Válvula de ângulo aberta	5
Cotovelo de 90° raio longo	0,6	Válvula de globo aberta	10
Cotovelo de 45°	0,4	Válvula de pé com crivo	3
Curva de 90°, r/D=1	0,4	Válvula de retenção	2,5
Curva de 45°	0,2	Curva de retorno, α=180°	2,2
Curva de 22 ½°	0,1	Válvula de bóia	6
Tê, passagem direta	0,9	Controlador de vazão	2,5
Tê, saída lateral.	2,0	Comporta aberta	1,0
Bocais	2,75	Existência de pequena derivação	0,03
Ampliação gradual	0,3	Medidor Venturi**	2,5
Junção	0,4		
Redução gradual*	0,15		

\*Com base na velocidade maior (menor seção)

\*\* Relativa à velocidade na canalização

### 4.3.2 – Perda de Carga na Entrada de uma Canalização (Saída do Reservatório)

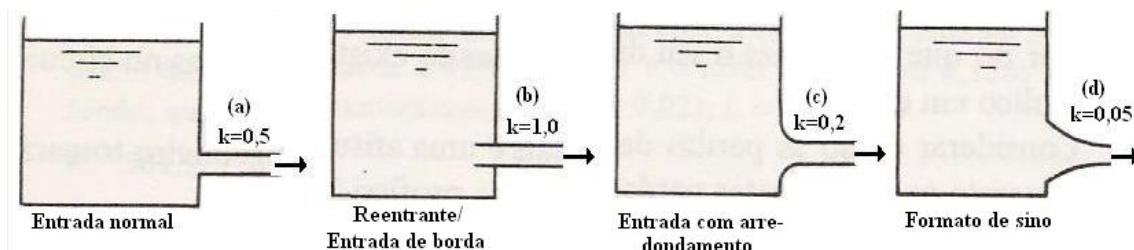


Figura 4.3 – Valores de k para entradas de uma canalização/saída do reservatório



### 4.3.3 – Valores de k para saída da canalização

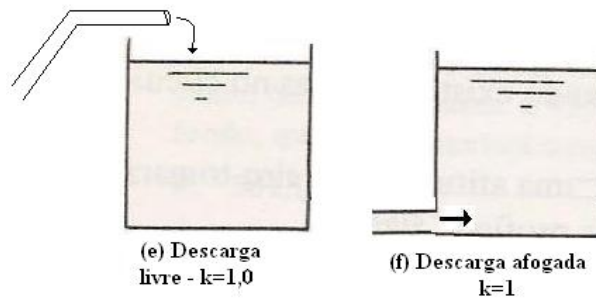


Figura 4.4 – Valores de k para saída da canalização

## 4.4 - Valores de k para algumas singularidades

### 4.4.1 – Alargamentos e estreitamentos

A mudança de diâmetro em uma linha de tubulações pode ser feita de forma brusca ou gradual, seja por um aumento (alargamento) ou diminuição (estreitamento) da seção transversal (PORTO, 2002).

#### 4.4.1.1 – Para alargamentos bruscos

A perda de carga, nestes casos, ocorre pela desaceleração do fluido no trecho curto entre as seções 1 e 2, com áreas  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente. A perda localizada é determinada, através de solução analítica, usando-se o teorema da quantidade de movimento e a equação da energia aplicada ao fluido que ocupa o volume de controle limitado pelas seções 1 e 2. Observou-se, experimentalmente, que a pressão na área AB é, em média, aproximadamente igual à pressão na seção 1, e a flutuação se deve aos redemoinhos na zona morta fora do escoamento principal. Para o volume de controle escolhido, a aplicação do teorema da quantidade de movimento, no regime permanente e uniforme tem-se:

$$\sum F_x = \rho Q(V_2 - V_1) \quad (4.8)$$

Onde  $\sum F_x$  é o somatório de todas as forças que atuam sobre o líquido contido no volume de controle na direção x e  $\rho Q$  é a vazão mássica através das seções 1 e 2 e  $V_i$ , as velocidades médias do escoamento estabelecido. Daí:

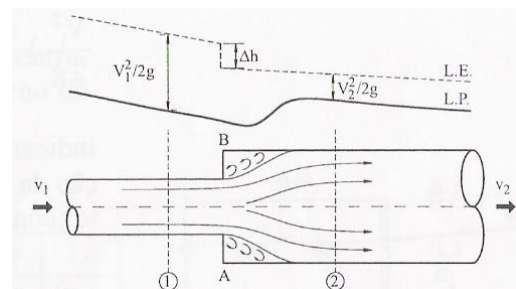


Figura 4.5: Alargamento brusco

$$p_1 A_1 + p_1 (A_2 - A_1) - p_2 A_2 = \rho Q (V_2 - V_1) \quad (4.9)$$

A equação de Bernoulli aplicada entre as seções 1 e 2, com perda de carga total igual à perda de carga localizada devido à singularidade pode ser escrita como:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + hf \quad (4.10)$$

Eliminando-se as diferenças de pressão e manipulando a equação, chega-se a:

$$hf = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right) \right]^2 = K \frac{V_1^2}{2g} \quad (4.11)$$

Equação denomina da equação de Borda – Carnot.

A seguinte desigualdade é válida é válida com  $V_1 > V_2$  semelhante à situação de um alargamento brusco:

$$\frac{V_1^2}{2g} > \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} > hf + \frac{V_2^2}{2g} \quad (4.12)$$

Indicando uma recuperação da pressão na seção 2, à custa da diminuição da carga cinética, e que a linha piezométrica sobe no sentido do escoamento.

No caso particular importante da passagem em aresta viva de uma canalização para um reservatório de grandes, situação em que a velocidade é nula no trecho de maior seção (reservatório), pois  $A_2 \rightarrow \infty$ , o valor de  $k$  é igual a 1, indicando a perda total da carga cinética, como na figura ao lado.

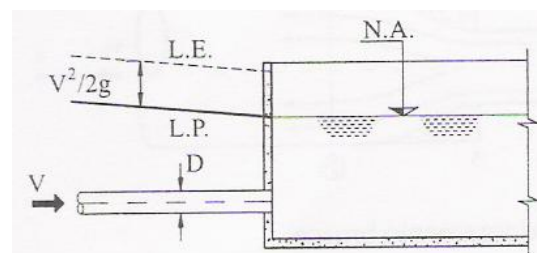


Figura 4.6: Passagem em aresta viva de uma canalização para um reservatório

#### 4.4.3.1.2 – Para estreitamentos bruscos

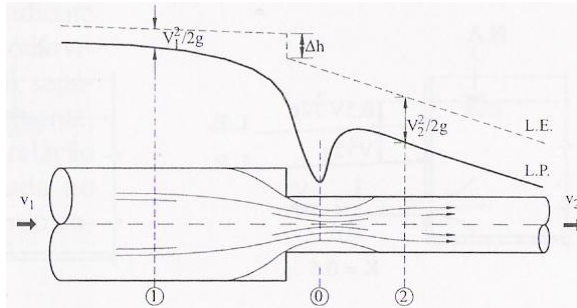


Figura 4.7: Para estreitamentos bruscos

Para uma contração brusca, o escoamento tem características semelhantes à expansão, na qual, primeiro, o fluido se afasta da fronteira sólida na forma de uma contração do jato e, então, se expande para preencher totalmente a seção de menor diâmetro a jusante. Pelo fato de a perda de carga no fluxo acelerado ser bem menor que no fluxo desacelerado, a perda de carga entre as seções 1 e 0, ver figura, pode ser

desprezada de modo que a perda de carga entre as seções 0 e 1 seja tomada como a perda localizada na singularidade.

$$hf = \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g} \quad (4.13)$$

Em que  $V_0$  é a velocidade média do jato na seção de menor diâmetro, chamada *seção contraída*, cuja área é, usualmente, expressa através do conceito de **coeficiente de contração  $C_c$** , na forma:

$$C_c = \frac{A_0}{A_1} \quad (4.14).$$

Utilizando a equação da continuidade entre a seção 0-2, a equação (2.15) fica (PORTO, 2002):

$$hf = \left[ \frac{1}{C_c} - 1 \right]^2 \frac{V_2^2}{2g} = K \frac{V_2^2}{2g} \quad (4.15)$$

Os valores do coeficiente de perda de carga localizada em uma contração brusca são definidos na Tabela 4.4, em relação à velocidade no trecho de menor diâmetro. (MELO PORTO, 2001)

Tabela 4.5 – Valores do coeficiente k para reduções bruscas

$\frac{A_2}{A_1}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
<b>k</b>	0,50	0,46	0,41	0,36	0,30	0,24	0,18	0,12	0,06	0,02	0,0

#### 4.4.3.2 – Método dos Comprimentos Equivalentes ou Virtuais

As equações representativas das perdas de carga distribuída e localizada possuem uma analogia formal, isto é, ambas são função direta da carga cinética. Assim sendo, e por conveniência de cálculo, as singularidades existentes nas tubulações são muitas vezes expressas em termos de comprimentos equivalentes de condutos retilíneos, os quais provocam, os quais provocam a mesma perda de carga que aquela gerada pelo acessório, quando a vazão em ambos é a mesma.

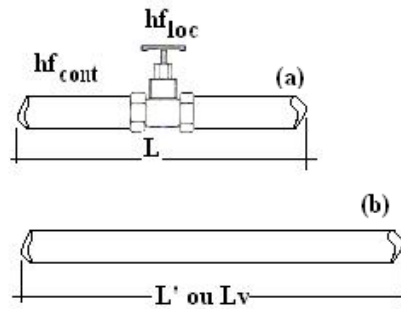


Figura 4.8: Perda localizada calculada pelo método dos comprimentos virtuais

$$a) hf = hf_{cont} + hf_{loc} \quad (4.16)$$

b)




















$$Le = L + L_{sing} \left\{ \begin{array}{l} Le - \text{Comprimento virtual ou equivalente} \\ L - \text{Comprimento real} \\ L_{sing} - \text{Comprimento que gera uma perda de carga} \\ \text{equivalente à singularidade} \end{array} \right.$$

$$hf_{cont} = f \frac{Le + V^2}{2gD} \rightarrow \text{perda de carga contínua} \quad (4.17)$$

$$hf_{loc} = k \frac{V^2}{2g} \rightarrow \text{perda de carga localizada}$$

A Tabela 4.5 reúne valores de comprimentos equivalentes para algumas singularidades.

Tabela 4.6 Comprimentos equivalentes a perdas localizadas. (Expressos em metros de canalização retilínea)\*

DIÂMETRO D mm pol	COTOVELO 90° RAIO LONGO		COTOVELO 90° RAIO MÉDIO		COTOVELO 90° RAIO CURTO		COTOVELO 45°		CURVA 90° R/D = 1½		CURVA 90° R/D = 1		CURVA 45°		ENTRADA NORMAL	ENTRADA DE BORDA	REGISTRO DE GAVETA ABERTO	REGISTRO DE GLOBO ABERTO	REGISTRO DE ÂNGULO ABERTO	TÊ PASSAGEM DIRETA	TÊ SAÍDA DE LADO	TÊ SAÍDA BILATERAL	VÁLVULA DE PÉ E CRIVO	SAÍDA DA CANALIZ.	VÁLVULA DE RETEÇÃO TIPO LEVE	VÁLVULA DE RETEÇÃO TIPO PESADO
																										
13	1/2	0,3	0,4	0,5	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,4	0,1	4,9	2,6	0,3	1,0	1,0	3,6	0,4	1,1	1,6						
19	3/4	0,4	0,6	0,7	0,3	0,3	0,4	0,2	0,2	0,5	0,1	6,7	3,6	0,4	1,4	1,4	5,6	0,5	1,6	2,4						
25	1	0,5	0,7	0,8	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3	0,7	0,2	8,2	4,6	0,5	1,7	1,7	7,3	0,7	2,1	3,2						
32	1 1/4	0,7	0,9	1,1	0,5	0,4	0,6	0,3	0,4	0,9	0,2	11,3	5,6	0,7	2,3	2,3	10,0	0,9	2,7	4,0						
38	1 1/2	0,9	1,1	1,3	0,6	0,5	0,7	0,3	0,5	1,0	0,3	13,4	6,7	0,9	2,8	2,8	11,6	1,0	3,2	4,8						
50	2	1,1	1,4	1,7	0,8	0,6	0,9	0,4	0,7	1,5	0,4	17,4	8,5	1,1	3,5	3,5	14,0	1,5	4,2	6,4						
63	2 1/2	1,3	1,7	2,0	0,9	0,8	1,0	0,5	0,9	1,9	0,4	21,0	10,0	1,3	4,3	4,3	17,0	1,9	5,2	8,1						
75	3	1,6	2,1	2,5	1,2	1,0	1,3	0,6	1,1	2,2	0,5	26,0	13,0	1,6	5,2	5,2	20,0	2,2	6,3	9,7						
100	4	2,1	2,8	3,4	1,5	1,3	1,6	0,7	1,6	3,2	0,7	34,0	17,0	2,1	6,7	6,7	23,0	3,2	8,4	12,9						
125	5	2,7	3,7	4,2	1,9	1,6	2,1	0,9	2,0	4,0	0,9	43,0	21,0	2,7	8,4	8,4	30,0	4,0	10,4	16,1						
150	6	3,4	4,3	4,9	2,3	1,9	2,5	1,1	2,5	5,0	1,1	51,0	26,0	3,4	10,0	10,0	39,0	5,0	12,5	19,3						
200	8	4,3	5,5	6,4	3,0	2,4	3,3	1,5	3,5	6,0	1,4	67,0	34,0	4,3	13,0	13,0	52,0	6,0	16,0	25,0						
250	10	5,5	6,7	7,9	3,8	3,0	4,1	1,8	4,5	7,5	1,7	85,0	43,0	5,5	16,0	16,0	65,0	7,5	20,0	32,0						
300	12	6,1	7,9	9,5	4,6	3,6	4,8	2,2	5,5	9,0	2,1	102,0	51,0	6,1	19,0	19,0	78,0	9,0	24,0	38,0						
350	14	7,3	9,5	10,5	5,3	4,4	5,4	2,5	6,2	11,0	2,4	120,0	60,0	7,3	22,0	22,0	90,0	11,0	28,0	45,0						

\*Os valores indicados para registros de globo aplicam-se também às torneiras, válvulas para chuveiros e válvulas de descarga

## CAPÍTULO 5 – ORIFÍCIOS, BOCAIS E TUBOS CURTOS

### 5.1 – Orifícios

Orifícios são perfurações, geralmente, de forma geométrica definida, feitas abaixo da superfície livre do líquido em paredes de reservatórios, tanques, canais ou canalizações (Figura 5.1). As superfícies feitas até a superfície do líquido constituem vertedores (Azevedo Neto, 1993).

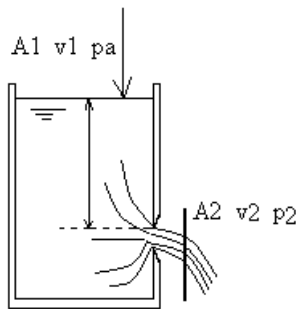


Figura 5.1 - Ilustração de um orifício.

#### 5.1.1 – Classificação dos Orifícios

- a) quanto à forma: circulares, retangulares, etc.,
- b) quanto às dimensões: pequenos ou grandes.
- c) quanto à natureza das paredes: orifícios em parede delgada e orifícios em parede espessa (Figura 5.2).

Os orifícios considerados pequenos são muito menores que a profundidade em que se encontra - a dimensão vertical é igual ou inferior a 1/3 da profundidade. Nos orifícios pequenos com área menor que 1/10 da superfície do recipiente pode-se desprezar  $v_1$  do líquido (Azevedo Neto, 1993).

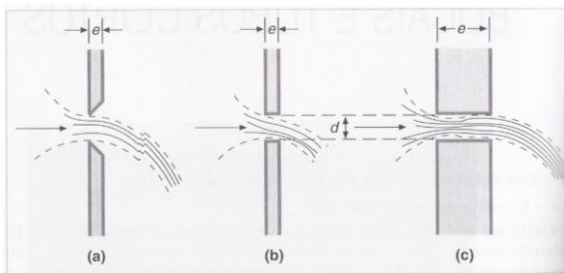


Figura 5.2 – (a) Parede delgada biselada; (b) Parede delgada  $e < 1,5d$ ; (c) Parede espessa  $e > 1,5d$  (AZEVEDO NETO, 1998)

Diz-se que o orifício é aberto em parede delgada ou aresta viva, sempre que a veia líquida fica apenas em contacto com o bordo interno do orifício.

Se o valor de  $e$  estiver compreendido entre 2 e 3 vezes o diâmetro  $d$ , tem-se um bocal.

#### 5.1.2 – Coeficientes

É a relação entre a área da seção contraída  $A_2$  e a área do orifício  $A$ , dada pela expressão:

$$C_c = \frac{A_2}{A} \quad (5.1)$$

O valor médio prático de  $C_c$  é 0,62.

**Tabela 5.1 — Orifícios circulares em paredes delgadas. Coeficientes de contração  $C_c$**

Carga h, m	Diâmetro do orifício, cm				
	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0,20	0,685	0,656	0,626	0,621	0,617
0,40	0,681	0,646	0,625	0,619	0,616
0,60	0,676	0,644	0,623	0,618	0,615
0,80	0,673	0,641	0,622	0,617	0,615
1,00	0,670	0,639	0,621	0,617	0,615
1,50	0,666	0,637	0,620	0,617	0,615
2,00	0,665	0,636	0,620	0,617	0,615
3,00	0,663	0,634	0,620	0,616	0,615
5,00	0,663	0,634	0,619	0,616	0,614
10,00	0,662	0,633	0,617	0,615	0,614

Fonte: AZEVEDO NETO (1998)

Para o caso de orifícios circulares, a seção contraída encontra-se a uma distância da face interna do orifício aproximadamente igual à metade do diâmetro do orifício (Azevedo Neto, 1993).

Para os orifícios pequenos, pode-se admitir que todas as partículas atravessam o orifício animadas da mesma velocidade, sob a mesma carga h

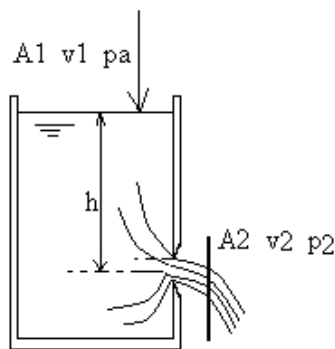


Figura 5.3

Aplicando o teorema de Bernoulli às seções 1 e 2 (Figura 5.2) e tendo o eixo de orifício como de referência.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_a}{\gamma} + h = \frac{V_t^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} \quad (5.2)$$

Sendo  $A_1 \gg A$ , despreza-se  $v_1$ .

Manipulando a equação 5.2 e colocando  $V_t$  em evidência tem-se:

$$V_t = \sqrt{2g \left( h + \frac{P_a - P_2}{\gamma} \right)} \quad (5.3)$$

Os pontos 1 e 2 estão em contato com atmosfera, logo  $P_a=P_2$ . Substituindo na equação (5.3) tem-se o conhecido teorema de Torricelli:

$$V_t = \sqrt{2gh} \quad (5.4)$$

Cada partícula tem ao atravessar a seção contraída a velocidade idêntica a da queda livre, desde a superfície livre do reservatório até o plano de referencia passando pelo centro do orifício (Azevedo Neto, 1993).

A velocidade  $V_t$  é a velocidade teórica, ou seja, são desconsideradas as perdas de carga existentes. A velocidade real  $V_2$  é menor que  $V_t$ , daí a necessidade de se fazer uma correção no valor da velocidade através do coeficiente de redução da velocidade  $C_v$ :

$$C_v = \frac{V_2}{V_t} < 1 \quad (5.5)$$

O valor médio de  $C_v$  é igual 0,985 (Tabela 5.2). Utilizando-se da equação da Conservação de Massas,

$$Q = AV = A_2 V_2 \quad (5.6)$$

E substituindo as equações (5.1) e (5.3) na equação (5.4) e

$$Q = AC_c C_v \sqrt{2gh} \quad (5.7)$$

O produto  $C_c C_v$  da equação (5.7) é denominado de coeficiente de descarga  $C_d$ . A equação geral para pequenos orifícios é dada por:

$$Q = AC_d \sqrt{2gh} \quad (5.8)$$

Sendo  $A$  a área do orifício ( $m^2$ );  $h$  a carga sobre o centro do orifício;  $C_d$  o coeficiente de descarga.



**Tabela 5.2** Orifícios circulares em paredes delgadas.  
 Coeficiente de velocidade  $C_v$

Carga $h, m$	Diâmetro do orifício, cm				
	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0,20	0,954	0,964	0,973	0,978	0,984
0,40	0,956	0,967	0,976	0,981	0,986
0,60	0,958	0,971	0,980	0,983	0,988
0,80	0,959	0,972	0,931	0,984	0,988
1,00	0,958	0,974	0,982	0,984	0,988
1,50	0,958	0,976	0,984	0,984	0,988
2,00	0,956	0,978	0,984	0,984	0,988
3,00	0,957	0,979	0,985	0,986	0,988
5,00	0,957	0,980	0,987	0,986	0,990
10,00	0,958	0,981	0,990	0,988	0,992

**Tabela 5.3** Orifícios circulares em paredes delgadas.  
 Coeficiente de descarga  $C_d^*$

Carga $h, m$	Diâmetro do orifício, cm				
	2,00	3,00	4,0	5,0	6,0
0,20	0,653	0,632	0,609	0,607	0,607
0,40	0,651	0,625	0,610	0,607	0,607
0,60	0,648	0,625	0,610	0,607	0,608
0,80	0,645	0,623	0,610	0,607	0,608
1,00	0,642	0,622	0,610	0,607	0,608
1,50	0,638	0,622	0,610	0,607	0,608
2,00	0,636	0,622	0,610	0,607	0,608
3,00	0,634	0,621	0,611	0,607	0,608
5,00	0,634	0,621	0,611	0,607	0,608
10,00	0,634	0,621	0,611	0,607	0,609

\* O valor médio geralmente adotado em problemas é 0,61

Fonte: AZEVEDO NETO (1998)

### 5.1.3 – Orifícios Afogados

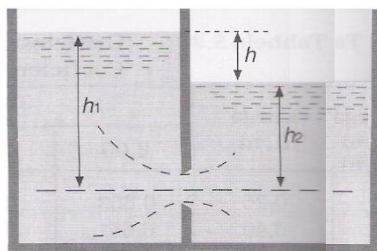
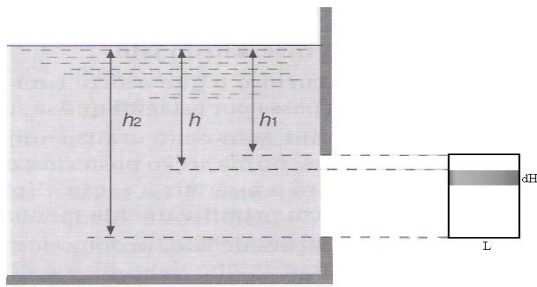


Figura 5.4 – Orifício Afogado  
 (Azevedo Neto, 1993)

Para orifícios afogados, o valor de  $h$  que da equação de Torricelli passa a ser:

$$h = h_1 - h_2 \quad (5.9)$$



Sendo  $L$  a largura do orifício e  $h$  a carga sobre um trecho elementar de espessura  $dh$ .

A carga para esse trecho elementar será:

$$dQ = C_d \cdot L \cdot dh \cdot \sqrt{2gh} \quad (5.10)$$

Figura 5.5 – Orifício de grandes de dimensões

A descarga de todo o orifício será obtida integrando-se expressão (5.10) entre os limites  $h_1$  e  $h_2$  (cargas correspondentes ao topo e à base do orifício).

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} C_d \cdot L \cdot dh \cdot \sqrt{2gh} = Q = C_d \cdot L \cdot \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{hd}h = Q = C_d \cdot L \cdot \sqrt{2g} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right) \quad (5.11)$$

Substituindo-se o valor  $L = \frac{A}{h_2 - h_1}$ , obtém-se:

$$Q = \frac{2}{3} C_d \cdot L \cdot \sqrt{2g} \left( \frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1} \right) \quad (5.12)$$

### 5.1.4– Contração Incompleta

Para posições particulares dos orifícios (Figura 5.6), a contração da veia pode ser afetada, modificada, ou mesmo suprimida, alterando-se a vazão (Azevedo Neto, 1993).

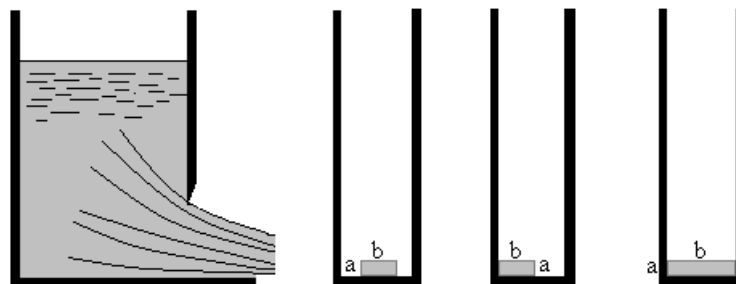


Figura 5.6 – Contração incompleta

Onde:

$$k = \frac{\text{perímetro da parte em que há supressão}}{\text{perímetro total do orifício}}$$

Os casos apresentados na Figura 5.6 são, respectivamente:

$$k = \frac{b}{2(a+b)}; k = \frac{a+b}{2(a+b)}; k = \frac{2a+b}{2(a+b)} \quad (5.13)$$

$$\text{Para orifícios circulares: } C'_d = C_d(1 + 0,13k) \quad (5.14)$$

### 5.1.5 – Perda de Carga nos orifícios, adufas e comportas

A perda de carga que ocorre na passagem por um orifício corresponde à diferença de energia cinética:

$$h_f = \frac{V_t^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.15)$$

$$\text{Sendo: } C_v = \frac{V_2}{V_t}; V_t = \frac{V_2}{C_v}; hf$$

Dessa forma a equação (5.15) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$h_f = \frac{V_2^2}{2gC_v^2} - \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.16)$$

A expressão acima também se aplica às adufas e comportas. Para as comportas, o valor do coeficiente em geral está entre 0,6 e 0,8. Admite-se como valor comum 0,7 e encontra-se para o valor da perda de carga para comportas:

$$h_f = \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.17)$$

E a vazão é dada pela expressão comum:

$$Q = 0,7\sqrt{2gH} \quad (5.18)$$

Sendo  $H$  a altura do nível d'água em relação ao centro da comporta. Para comportas afogadas,  $H$  é a diferença entre os níveis d'água de montante e jusante.

Para o caso de  $h$  sendo uma carga variável, ou seja, diminuirá com o tempo, em consequência do próprio escoamento pelo orifício. A carga sobre o orifício também diminuirá. O problema é determinar o tempo necessário para o esvaziamento de um recipiente ou de um tanque (Azevedo Neto, 1993).

Sendo  $A$  a área do orifício,  $A_R$  a área do reservatório (superfície) e  $t$  o tempo necessário para o seu esvaziamento, em segundos.

Num pequeno intervalo  $dt$ , a vazão será:

$$Q = C_d A \sqrt{2gh} \quad \text{- pequenos orifícios} \quad (5.19)$$

E o volume de líquido descarregado:  $C_d A \sqrt{2gh} dt \rightarrow (\text{Vol}=Qxt)$ .

Nesse mesmo intervalo de tempo, o nível de água no reservatório baixará de  $dh$ , o que corresponde a um volume líquido  $A_R dh$ . As duas expressões que dão volume são iguais:

$$A_R dh = C_d A \sqrt{2gh} dt \therefore dt = \frac{A_R dh}{C_d A \sqrt{2gh}} \quad (5.20)$$

Integrando-se a expressão acima, entre dois níveis  $h_1$  e  $h_2$ :

$$dt = \frac{A_R}{C_d A \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} h^{-\frac{1}{2}} dh \Rightarrow t = \frac{2A_R}{C_d A \sqrt{2g}} \left( h_1^{\frac{1}{2}} - h_2^{\frac{1}{2}} \right) \quad (5.21)$$

Para esvaziamento completo  $h_2=0$  e  $h_1=h$ :

$$t = \frac{2A_R}{C_d A \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad (5.22)$$

Expressão aproximada, uma vez que depois de certo tempo de escoamento o orifício deixaria de ser “pequeno”. Substituindo-se os valores:  $C_d=0,61$  e  $\sqrt{2g} = 4,43$ , encontra-se:

$$t = 0,74 \frac{A_R}{A} \sqrt{h} \quad (5.23)$$

## 5.2 - Bocais

Os bocais ou tubos adicionais são constituídos de peças tubulares adaptadas aos orifícios e tem por finalidade dirigir o jato (Azevedo Netto, 1998).

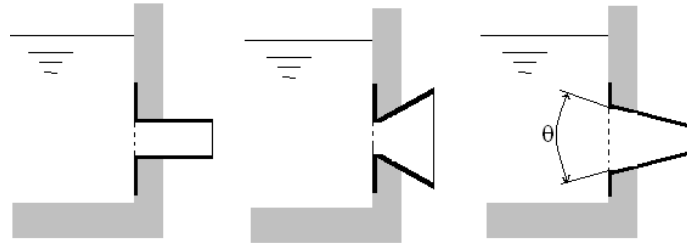


Figura 5.7 – Esquema representativo de bocais

O comprimento dos bocais deve estar entre 1,5 e 3,0 vezes o valor do diâmetro.

De modo geral tem-se:

- Bocais: 1,5 a 3,0 D
- Tubos muito curtos: 3,0 a 500D
- Tubos curtos: 500 a 4000D
- Tubos longos: acima de 4000D

Denomina-se bocal-padrão ao bocal cujo comprimento iguala-se a 2,5 vezes o seu diâmetro e bocal de borda ao bocal reentrante de comprimento padrão.

### 5.2.1 - Classificação

Os bocais podem ser classificados como:

#### a) Bocal Cilíndrico Externo

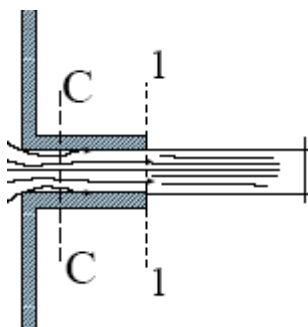


Figura 5.8 – Bocal Cilíndrico Externo

A contração da veia ocorre no interior dos bocais cilíndricos.

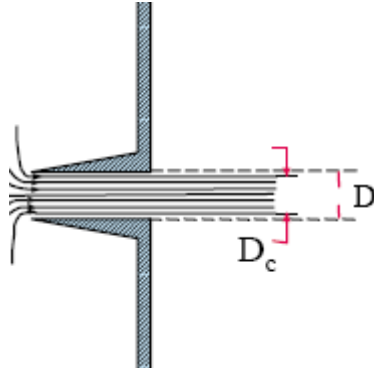
Não apresenta área de seção contraída ( $C_c = 1$ );

Tem perda de carga maior que um orifício de iguais dimensões.

$$C_v = 0,82$$

$C_Q = 0,82$  (maior que do orifício: 0,62. É o paradoxo do bocal, solucionado por Venturi)

**b) Bocal Cilíndrico Interior  
 ou Bocal de Borda**



Distribuição de pressões na parede é hidrostática;

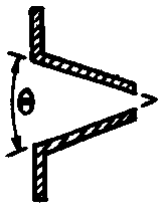
Jato estável.

$$C_c = 0,52$$

$$C_Q = 0,51$$

Figura 5.9 – Bocal Cilíndrico Exterior

**c) Bocais Cônicos Convergentes**



Bocal cônico aumenta a vazão;

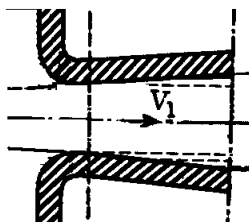
Vazão máxima para  $\theta = 13^\circ 30'$ ;

$$C_Q = 0,94$$

$C_Q$  varia com o ângulo de convergência do bocal.

Figura 5.10 – Bocais Cônicos Convergentes

**d) Bocal Cônico Divergente**



$Q$  aumenta com  $\theta$ , condicionada ao não

descolamento do jato das paredes do bocal;

- Venturi encontrou  $Q_{\text{máx}}$  para  $\theta = 5^\circ$  para  $L = 9D$ .

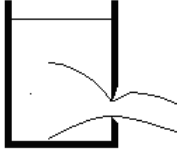

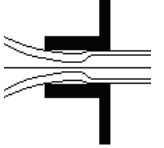

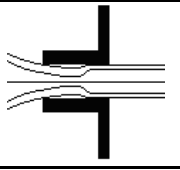
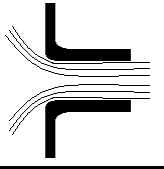
Figura 5.11 – Bocal Cônico Divergente

**5.2.2 – Perda de Carga**

Da carga total  $H$  que atua sobre um bocal cilíndrico, cerca de  $2/3$  se converte em velocidade, correspondendo o terço restante à energia despendida na entrada do bocal (Azevedo Netto, 1998).

$$h_f = \left( \frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{V^2}{2g} \quad (5.24)$$

Tabela 5.3 – Bocais: Coeficientes médios

Casos	$C_c$	$C_v$	$C_d$	Observações
	0,62	0,985	0,61	Valores médios para orifícios comuns em parede delgada
	0,52	0,98	0,51	Veia livre
	1,00	0,75	0,75	Veia colada
	0,62	0,985	0,61	Veia livre (valores médios)
	1,00	0,82	0,82	Veia colada
	1,00	0,98	0,98	Bordas arredondadas acompanhado os filetes líquidos

Fonte: (Azevedo Neto, 1993)

### 5.3 – Tubos Curtos

Pode-se assumir que a denominação para bocais, tubos curtos, orifícios e canalizações de pende do comprimento  $L$  em função do diâmetro  $D$  destes:

$L = 0 \rightarrow$  orifícios

$L = D \rightarrow$  orifícios

$L = 2D \rightarrow$  bocais

$L = 3 D \rightarrow$  bocais

Quando  $L = nD$  tem-se as tubulações.

Medidas compreendidas entre  $3D$  e  $nD$  excedem aos bocais e as condições não permitem que seja classificados como canalizações. Os tubos curtos, em geral, tem comprimento maior que  $3D$  e menor que  $500D$ .

### 5.3.1 – Perda de Carga

Os tubos ou as canalizações retilíneas, além da perda de carga localizada na entrada da canalização  $\left(0,5 \frac{V^2}{2g}\right)$  e da carga correspondente à velocidade  $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$  existe ainda a perda por atrito ao longo das peças ( $h_f$ ). Daí tem-se:

$$H = 0,5 \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} + h_f \quad (5.25)$$

$$H = 1,5 \frac{V^2}{2g} + \frac{fLV^2}{2gD} \quad (5.26)$$

$$2gH = \left(1,5 + \frac{fL}{D}\right)V^2 \therefore V = \sqrt{\frac{2gH}{1,5 + \frac{fL}{D}}} \quad (5.27)$$

$$Q = VA = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1,5 + \frac{fL}{D}}} \quad (5.28)$$

$$Q = A \sqrt{\frac{2gH}{1,5 + \frac{fL}{D}}} \quad (5.29)$$

### 5.3.2 – Calculo da Vazão

$$Q = C_d A \sqrt{2gH} \quad (5.30)$$

Para tubos curtos o coeficiente  $C_d$  depende do comprimento relativo ao tubo, isto é, de  $L/D$ , esta relação aumenta à medida que o coeficiente  $C_d$  diminui. Na Tabela 5.4



Tabela 5.4 – Valores de  $C_d$  práticos para tubos curtos.

<b>L/D</b>	<b>Azevedo Netto*</b>	<b>Bazard</b>	<b>Eytelwein</b>	<b>Fanning**</b>
300	0,33			0,38
200	0,39			0,44
150	0,42			0,48
100	0,47	0,50		0,55
90	0,49	0,52		0,56
80	0,52	0,54		0,58
70	0,54	0,57		0,60
60	0,56	0,60	0,60	0,62
50	0,58	0,63	0,63	0,64
40	0,64	0,66	0,66	0,67
30	0,70	0,70	0,70	0,70
20	0,73	0,73	0,73	0,73
15		0,75	0,75	0,75
10		0,77	0,77	0,77

\* Valores obtidos com tubos de pequeno diâmetro

\*\* Valores obtidos com tubos de ferro fundido de  $D = 0,30\text{m}$

## CAPÍTULO 6 – VERTEDORES

### 6.1 – Conceito

Vertedores são definidos como paredes, diques ou aberturas sobre as quais um líquido escoar. Os vertedores são, por assim dizer, orifícios sem a borda superior (Azevedo Neto, 1993). São utilizados para medir e/ou controlar a vazão em um escoamento em canal e são úteis em sistemas de irrigação, estações de tratamento de água e esgoto, barragens e controle/medição de vazão em pequenos cursos d'água (córregos, igarapés). Em geral são colocados transversalmente no canal interposto ao fluxo do líquido, fazendo com que o mesmo sobreleve o seu nível a montante ( $p$ ), até atingir uma altura que produza uma lâmina d'água sobre a abertura (Figura 6.1).

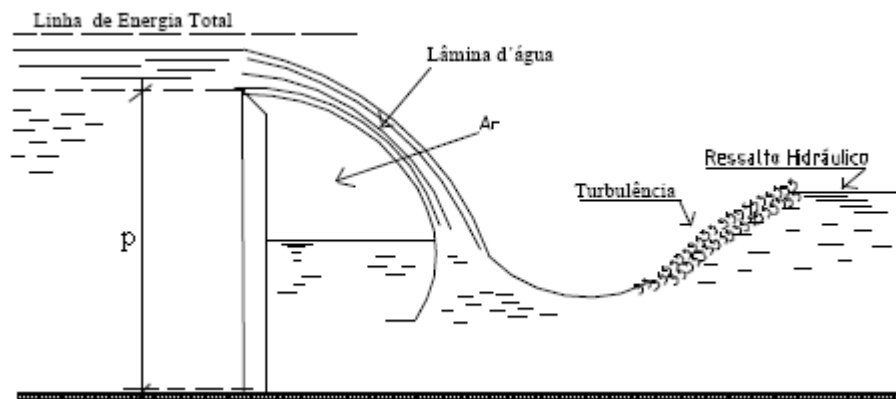


Figura 6.1: Esquema ilustrativo de um vertedor

### 6.1 – Terminologia

As terminologias de um vertedor são as seguintes:

- a) **Crista ou soleira:** é a borda horizontal em que há contato com a lâmina d'água (Figura 6.1).
- b) **Faces** (Figura 6.2): constituem as bordas verticais do vertedor. Se o contato da lâmina do líquido for limitado a uma aresta biselada, ou seja, um comprimento bastante curto (espessura de chapas metálicas) chama-se o vertedor de parede delgada, mas se o

contato do líquido com as bordas verticais do vertedor for de um comprimento apreciável, o vertedor é chamado de parede espessa (Azevedo Neto, 1993).

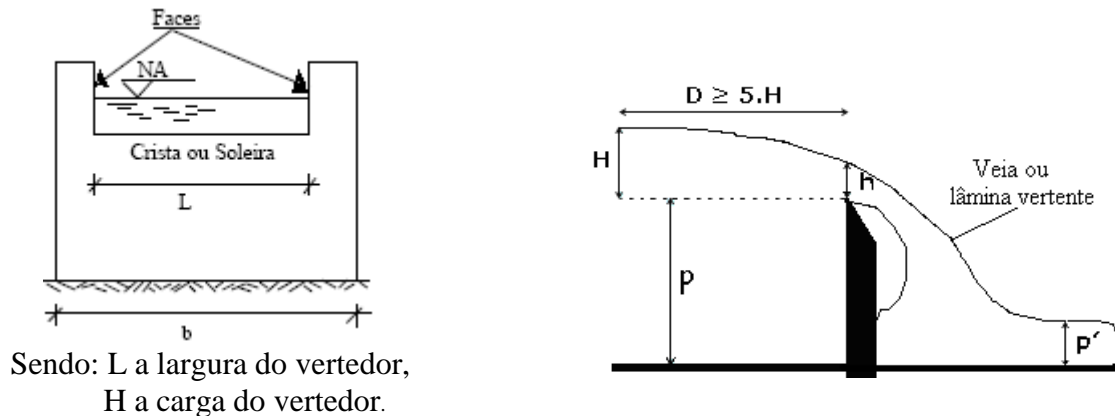


Figura 6.2 - Ilustração de um vertedor

## 6.2 – Classificação

### a) Quanto à forma:

- Simples (retangular, trapezoidal, triangular)
- Composto – seções combinadas

### b) Quanto à altura relativa da soleira (Figura 6.3)

- Vertedores completos ou livres ( $p > p'$ )
- Vertedores incompletos ou afogados ( $p < p'$ ): Nesse caso o vertedor é dito afogado quando a altura do líquido a montante do vertedor  $h_1$  é menor ou igual a altura da lâmina líquida de jusante do vertedor ( $h_2$ ), ou seja,  $h_1 \leq h_2$ .

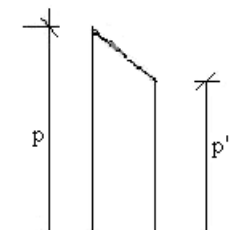


Figura 6.3 – Vista lateral de um vertedor

### c) Natureza da parede

- Vertedor em parede delgada (chapas ou madeira chanfrada): São construídos a partir de chapas metálicas (delgadas) ou de outro material, de modo que o jato

passa livremente ao deixar a face de montante (Figura 6.4). Possuem soleira horizontal e biselada.

- Vertedor em parede espessa ( $e > 0,66H$ ): Os vertedores de soleira espessa mantêm o escoamento numa direção longitudinal (Figura 6.5)

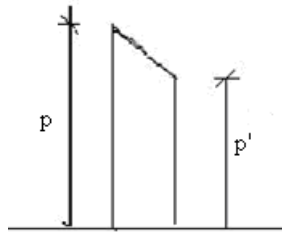


Figura 6.4 – Perfil longitudinal de um vertedor de parede delgada

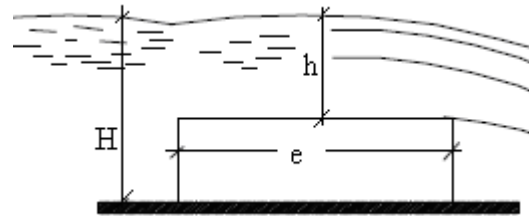


Figura 6.5 – Perfil longitudinal de vertedor de parede espessa

d) Largura relativa

- Vertedores sem contrações laterais ( $L=B$ )
- Vertedores contraídos ( $L < B$ ) – com uma ou duas contrações (Figuras 6.6 e 6.7)

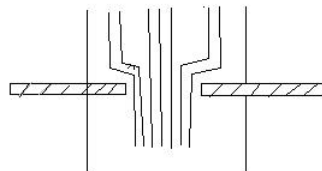


Figura 6.6: Vertedor com duas contrações

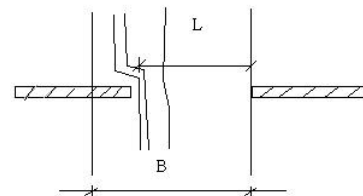


Figura 6.7: Vertedor com uma contração

### 6.3 – Formulação

Para orifícios de grandes dimensões tem-se que:

$$Q = \frac{2}{3} C_d \cdot L \sqrt{2g} \cdot (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) \quad (1)$$

Fazendo  $h_1=0$ ;  $h_2=H$  tem-se:

$$Q = \frac{2}{3} C_d \cdot L \sqrt{2g} \cdot H^{3/2} \quad (2)$$

Sendo:  $k = \frac{2}{3} C_d \cdot \sqrt{2g}$ , tem-se:

$$Q = k \cdot L \cdot H^{3/2} \quad (3)$$

O valor médio para  $C_d = 0,62$  assim  $k = 1,83$ .

## 6.4 – Fórmulas Práticas

a) Fórmula de Francis:  $Q = 1,838LH^{3/2}$  (4)

Sendo  $Q$  ( $m^3/s$ ),  $L$ (m) e  $H$ (m).

b) Fórmula da Sociedade Suíça de Engenheiros e Arquitetos

$$Q = \left( 1,816 + \frac{1,816}{1000H + 1,6} \right) \left[ 1 + 0,5 \left( \frac{H}{H + p} \right)^2 \right] LH^{3/2} \quad (5)$$

c) Fórmula de Bazin

$$Q = \left( 0,405 + \frac{0,003}{H} \right) \left[ 1 + 0,55 \left( \frac{H}{H + p} \right)^2 \right] LH \sqrt{2gH} \quad (6)$$

## 6.5 – Influência das Contrações

Ocorrem quando a largura do vertedor é menor do que a largura do canal em que se encontram instalados ( $L < B$ ) (Azevedo Neto, 1993).

Francis sugere uma correção para o valor de  $L$  quando da aplicação da fórmula:

- para o caso de uma contração:  $L' = L - 0,1H$

- para o caso de duas contrações:  $L' = L - 0,2H$  e nesse caso a fórmula de Francis passa a ser:

$$Q = 1,838(L - 0,2H)H^{3/2} \quad (7)$$

(sem levar em conta a velocidade de chegada da água). Segundo Azevedo Neto (1998) para que esses valores se aproximem dos valores reais, é preciso que  $H/p < 0,5$  e que  $H/L < 0,5$ . Essa correção proposta por Francis tem sido utilizada em outras expressões incluindo-se a fórmula de Bazin (Azevedo Neto, 1993).

## 6.6 – Tipos de Vertedor

### a) Vertedor Retangular de Parede Delgada

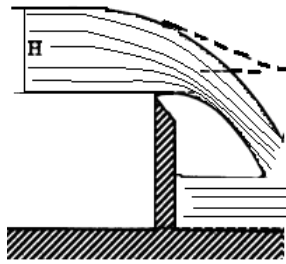


Figura. 6.8 – Vertedor retangular

Fórmula de Francis (equação 4):

$$Q = 1,84.L.H^{3/2}$$

Havendo contrações:

- Uma contração:  $L' = L - 0,1H$

- Duas contrações:  $L' = L - 0,2H$

### b) Vertedor Triangular de Parede Delgada

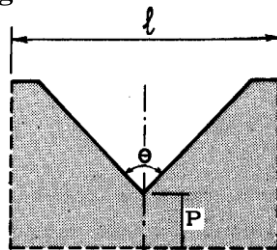


Figura 6.9 – Vertedor triangular

Precisão maior que o retangular para vazões pequenas – abaixo de 30 l/s e cargas entre 0,06 e 0,5 m;

Ângulo de construção usual: 90° (triângulo isósceles)

Fórmula de Thomson:

$$Q = 1,4.H^{5/2} \quad (8)$$

Sendo Q (l/s) e H(cm)

### c) Vertedor Trapezoidal de Cipolletti

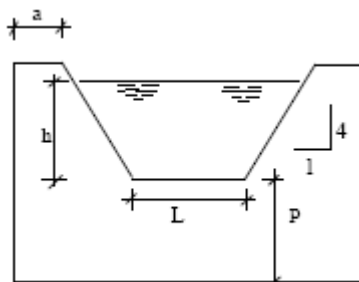


Figura 6.10 – Vertedor Cipolletti

Inclinação 1:4 (1 na horizontal e 4 na vertical) para compensar o efeito das contrações laterais – trapézio isósceles;

Q igual à de um vertedor retangular de igual largura.

$$Q = Q_2 + 2Q_1 \quad (9)$$

$$Q = 1,861.L.h^{3/2} \quad (10)$$

Validade:  $0,08 < h < 0,60$  m,  $a > 2h$ ,  $L > 3h$ ,  $P > 3h$  e b (largura do canal) de 30 a 60 h.

Influencia da velocidade de chegada da água:

$$Q = 1,838 \left[ \left( H + \frac{v^2}{2g} \right) - \left( \frac{v^2}{2g} \right) \right] \quad (11)$$

Sendo v a velocidade do canal.

**d) Vertedor Circular (em parede vertical)**

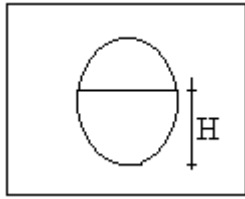


Figura 6.11 – Vertedor Circular

**Vertedor Circular**

$$Q = 1,518D^{0,693}H^{1,807} \quad (12)$$

Sendo:

Q (m<sup>3</sup>/s), D e H (m)

**e) Vertedor Tubular**

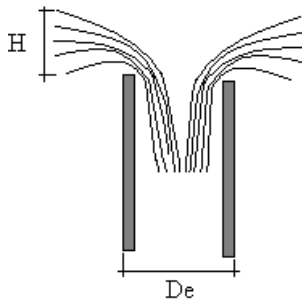


Figura 6.12 – Vertedor Tubular

**Vertedor Tubular, tubos verticais livres**

Tubos verticais = vertedor quando  $H < \frac{D_e}{5}$

$$Q = k LH^n \quad (13)$$

onde  $L = \pi D_e$

$$n = 1,42$$

k depende do diâmetro do tubo (Tabela 6.1).

Tabela 6.1 – Valores de k em função do D<sub>e</sub>

Valores de D <sub>e</sub> (m)	K
0,175	1,435
0,25	1,440
0,35	1,455
0,50	1,465
0,70	1,515

**f) Vertedor de parede Espessa**

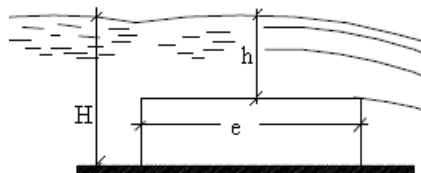


Figura 6.13 – Vertedor de parede espessa

**Equação de Torricelli**

$$v = \sqrt{2g(H - h)} \quad (14)$$

$$Q = Lh\sqrt{2g(H - h)} \quad (15)$$

Ou para L = 1 (largura unitária):

$$Q = \sqrt{2g(Hh^2 - h^3)} \quad (16)$$

Derivando  $Hh^2 - h^3$  e igualando a zero tem-se:  $h = \frac{2}{3}H$  (17)

Substituindo a eq.(17) na eq.(15) tem-se:

$$Q = L \frac{2}{3} h \sqrt{2g \frac{1}{3} H} \quad (18)$$

Fazendo  $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g} = 1,71$  tem-se que:

$$Q = 1,71 LH^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$