PROGRAMA DE INGRESSO SELETIVO MISTO – PISM 2025

DIA 1 – MÓDULO III – Exatas

Prova realizada em 14 de dezembro de 2024

REFERÊNCIAS DE CORREÇÃO DAS PROVAS DISCURSIVAS

LÍNGUA PORTUGUESA

Discursivas (5 questões)

QUESTÃO 1:

Uberização é o nome dado à nova relação trabalhista, a qual apresenta mudança nas maneiras de controlar o funcionário e de gerenciar e organizar seu trabalho. Suas duas características principais são a produção "just in time" e a informalização, isto é, o trabalhador passa a ser visto como um produto, acionado sob demanda e sem respaldo de leis trabalhistas.

QUESTÃO 2:

A citação de autoridade é uma estratégia argumentativa utilizada para conferir maior credibilidade ao posicionamento defendido, comprovando que a opinião é fundamentada por outros pesquisadores. Isso ocorre no seguinte trecho: **"**É como o Marx já falava em "O Capital": o ideal do capitalista é uma fábrica que funcione sob encomenda. Isso é uma produção *just in time*".

QUESTÃO 3:

A entrevistada avalia negativamente o trabalho gerenciado por aplicativos. Uma das suas consequências é o chamado pela entrevistada de transferência de gerenciamento: o próprio trabalhador é responsável pela organização da sua vida profissional e, consequentemente, das suas condições de trabalho e financeiras. Isso significa que o trabalhador passa a ser, cada vez mais, reduzido a apenas força de trabalho.

QUESTÃO 4:

A charge critica a exploração de trabalhadores por aplicativos. Isso é perceptível pela imagem do trabalhador, com cargas em sua bicicleta, carregando o patrão, o qual está com dinheiro na cartola, sentado em uma carruagem com símbolo de uma suástica, controlando o empregado com uma rédea e cobrando mais agilidade. O funcionário segue em silêncio, suado e descalço, sugerindo a exploração do trabalho.

QUESTÃO 5:

Conforme Cíntia relata, sua tia Rita sofreu uma série de abusos enquanto trabalhava como doméstica na cidade de São Paulo na década de 90. Esta teve seus cabelos cortados e foi proibida de utilizar sandálias para que não tivesse sua aparecia física comparada à da família.

MATEMÁTICA

Discursivas (5 questões)

QUESTÃO 1:

a) Encontre os valores de a, b e c.

Sabemos que dois polinômios são idênticos quando todos os seus coeficientes são iguais, assim $P(x) \equiv Q(x)$ se:

$$(I): \begin{cases} -2a + 3b - c = 1 & (1) \\ a + 2b - c = 4 & (2) \\ -2a - b - c = -3 & (3) \end{cases}$$

Somando a equação (1) com – (3) obtemos,

$$4b = 4 \quad \Longrightarrow \quad b = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = 1}$$

Substituindo o valor de b em (I), segue que:

$$\begin{cases} -2a + 3 - c = 1 \\ a + 2 - c = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2a - c = 1 - 3 \\ a - c = 4 - 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (II): \begin{cases} -2a - c = -2 & (4) \\ a - c = \ 2 & (5) \end{cases}$$

Somando a equação (4) com – (5) do sistema (II) obtemos que:

$$-3a = -4 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{4}{3}}$$

Substituindo $a = \frac{4}{3}$ na equação (5) segue que:

$$\frac{4}{3} - c = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{4}{3} - 2 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{4-6}{3} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{-2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c = -\frac{2}{3}}$$

b) Encontre o resto da divisão do polinômio $P(x)$ pelo binômio $M(x) = x - 7$.

Temos

$$P(x) = x^2 + 4x - 3$$

Sabemos que ao dividimos o polinômio $P(x)$ pelo binômio $M(x) = (x - 7)$, o resto, $R(x)$, da divisão é um monômio e igual a $P(7)$, sendo 7 a raiz do binômio $M(x) = (x - 7)$. Assim:

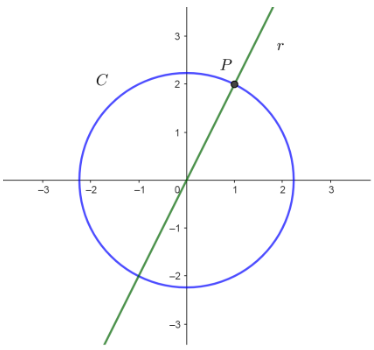
$$R(x) = P(7) = 7^2 + 4 \cdot 7 - 3 = 74$$

Portanto, o resto da divisão do polinômio $P(x)$ pelo binômio $M(x) = (x - 7)$ é 74.

QUESTÃO 2:

a) Encontre as coordenadas cartesianas do ponto P pertencente ao primeiro quadrante, sendo P o ponto de interseção da reta r com a circunferência C.

Seja $P(x_o, y_o)$ o ponto procurado.



Como $P(x_o, y_o)$ pertence a reta $r: y = 2x$, temos,

$$y_o = 2x_o.$$

Logo $P(x_o, 2x_o)$.

Sendo que P também pertence à Circunferência C, temos

$$x_o{}^2 + y_o{}^2 = 5.$$

Substituindo $y_o = 2x_o$ obtemos:

$$x_o{}^2 + (2x_o)^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad x_o{}^2 + 4\,x_o{}^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad 5x_o{}^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad x_o{}^2 = 1$$

Logo,

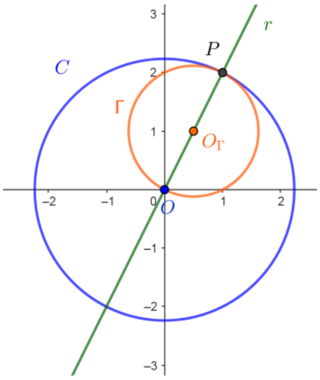
$$x_o = \pm 1.$$

Como P é um ponto no primeiro quadrante, temos $x_o = 1$. Assim

$$y_o = 2x_o = 2.$$

Portanto, $P(1,2)$.

b) Encontre a equação da circunferência Γ, interior a C, que tangencia C em P e cuja medida de seu raio é $d/2$, sendo d a distância de P até a origem $O(0,0)$ do plano cartesiano.



Seja λ a medida do raio da circunferência Γ. Temos

$$\lambda = d/2,$$

sendo $d = dist(P, O)$ (distância de P até a origem $O(0,0)$ do plano cartesiano).

Como $P \in C$ e a circunferência C está centrada na origem, temos que a distância de P até a origem é igual a medida do raio de C, que é $R = \sqrt{5}$. Logo:

$$d = R = \sqrt{5}.$$

Seja O_Γ o centro da circunferência Γ. Como Γ tangencia C em P, O_Γ está sobre a reta que passa por P e pelo centro de C, que é $O(0,0)$. Ou seja, O_Γ está sobre a reta r.

Como a circunferência Γ é interior a C, temos então que O_Γ está entre os pontos O e P da reta r. Além disso,

- $P \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad dist(P, O_\Gamma) = \lambda = \frac{d}{2}$;
- $d = dist(P, O) = R$ (medida do comprimento do segmento $\overline{OP}$).

Assim:

$$dist(O, O_\Gamma) = d - dist(P, O_\Gamma) = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Ou seja, O_Γ é o ponto médio do segmento $\overline{OP}$,

$$O_\Gamma = \left(\frac{x_P + x_O}{2}, \frac{y_P + y_O}{2}\right) = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Portanto a equação da circunferência Γ é:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \lambda^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Ou seja,

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{5}{4}.$$

QUESTÃO 3:

Temos

$$A(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$$

Como $x = 0$ é uma raiz de $A(x)$, segue que $A(0) = 0$. Assim:

$$0 = A(0) = (0)^4 + a(0)^3 + b(0) + c \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = c$$

Ou seja, $\boxed{c = 0}$.

Sabemos que ao dividir o polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$, obtemos como quociente o trinômio $Q(x) = x^2 + x - 2$ e como resto o monômio $R(x) = 4$. Logo:

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \xRightarrow{R(x)=4} A(x) = B(x)Q(x) + 4$$

Note que se $x_o \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $Q(x)$, isto é, $Q(x_o) = 0$, então:

$$A(x_o) = B(x_o)Q(x_o) + 4 \quad \Longrightarrow \quad A(x_o) = B(x_o) \cdot 0 + 4 \quad \Longrightarrow \quad A(x_o) = 4 \quad (I)$$

Vamos então encontrar as raízes de $Q(x)$:

$$Q(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot (-2)}}{2}$$

Ou seja,

$$Q(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2 \ \text{ ou } \ x = 1$$

Temos então por (I) que $A(-2) = 4$ e $A(1) = 4$. Logo:

$$4 = A(1) = (1)^4 + a(1)^3 + b(1) \quad \Longrightarrow \quad a + b = 3 \qquad (II)$$

$$4 = A(-2) = (-2)^4 + a(-2)^3 + b(-2) \quad \Longrightarrow \quad -8a - 2b = -12 \qquad (III)$$

De, (II), e (III) temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -8a - 2b = -12 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + b = 6 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 3 & (IV) \\ 4a + b = 6 & (V) \end{cases}$$

Somando a equação (V) com $(-1) \times (IV)$ do sistema acima obtemos que:

$$3a = 3 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3}{3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

Substituindo $a = 1$ na equação (IV) segue que:

$$1 + b = 3 \quad \Longrightarrow \quad b = 3 - 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = 2}$$

Portanto,

$$a = 1, \quad b = 2 \quad \text{e} \quad c = 0.$$

QUESTÃO 4:

a) Dado que o habitante dessa cidade foi selecionado de forma aleatória, queremos saber qual a probabilidade dele ser usuário de somente uma dessas três redes sociais.

Com os dados disponibilizados na representação em diagramas, temos que do total de habitantes dessa cidade (2000 habitantes): 50 habitantes usam somente a rede *Multigram*, 100 habitantes usam somente a rede *Tatetable* e 100 habitantes usam somente a rede *TokTok*. Então a partir do conceito de probabilidade, temos que:

$$P(Somente\ uma\ das\ três\ redes\ sociais) = \frac{50 + 100 + 100}{2000} = \frac{250}{2000}$$
$$= \frac{1}{8} \approx 12{,}50\%$$

b) Dado que o habitante dessa cidade foi selecionado de forma aleatória, queremos saber qual a probabilidade dele ser usuário de pelo menos uma dessas três redes sociais.

Com os dados disponibilizados na representação em diagramas, temos que do total de habitantes dessa cidade (2000 habitantes):

- 250 habitantes usam somente uma das três redes sociais, como visto na letra (a) desta questão;
- 650 habitantes usam exatamente as redes *Multigram* e *TokTok*, 50 habitantes usam exatamente as redes *Multigram* e *Tatetable*, e 400 habitantes usam exatamente as redes *Tatetable* e *TokTok*. Ou seja,
$$650 + 50 + 400 = 1100$$
usam exatamente duas redes sociais;
- 50 habitantes usam exatamente as três redes sociais.

Assim do total de habitantes dessa cidade (2000 habitantes)
$$250 + 1100 + 50 = 1400$$
usam pelo menos uma das três redes sociais.
Então a partir do conceito de probabilidade, temos que:
$$P(\textit{Pelo menos uma das três redes sociais}) = \frac{1400}{2000} = \frac{14}{20} = 70\%$$

Dado que o habitante dessa cidade foi selecionado de forma aleatória, queremos saber qual a probabilidade dele ser usuário de somente uma dessas três redes sociais.

Com os dados disponibilizados na representação em diagramas, temos que do total de habitantes dessa cidade (2000 habitantes): 50 habitantes usam somente a rede *Multigram*, 100 habitantes usam somente a rede *Tatetable* e 100 habitantes usam somente a rede *TokTok*. Então a partir do conceito de probabilidade, temos que:

$$P(\textit{Somente uma das três redes sociais}) = \frac{50 + 100 + 100}{2000} = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8} \approx 12{,}50\%$$

c) Dado que o habitante dessa cidade foi selecionado de forma aleatória, queremos saber qual a probabilidade dele ser usuário de pelo menos uma dessas três redes sociais.

Com os dados disponibilizados na representação em diagramas, temos que do total de habitantes dessa cidade (2000 habitantes):

- 250 habitantes usam somente uma das três redes sociais, como visto na letra (a) desta questão;
- 650 habitantes usam exatamente as redes *Multigram* e *TokTok*, 50 habitantes usam exatamente as redes *Multigram* e *Tatetable*, e 400 habitantes usam exatamente as redes *Tatetable* e *TokTok*. Ou seja,
$$650 + 50 + 400 = 1100$$
usam exatamente duas redes sociais;
- 50 habitantes usam exatamente as três redes sociais.

Assim do total de habitantes dessa cidade (2000 habitantes)
$$250 + 1100 + 50 = 1400$$
usam pelo menos uma das três redes sociais.
Então a partir do conceito de probabilidade, temos que:
$$P(\textit{Pelo menos uma das três redes sociais}) = \frac{1400}{2000} = \frac{14}{20} = 70\%$$

reais.

QUESTÃO 5:

a) Um jogador sortudo avança sua peça uma casa em todas as rodadas. Quantos trajetos diferentes permitem a esse jogador vencer o jogo se sua peça estiver na casa 22 do tabuleiro?

Note que para o jogador sortudo vencer o jogo, sua peça deve chegar a casa 36.

Sua peça está na casa 22 do tabuleiro e ele a avança uma casa em cada rodada, assim para chegar a casa 36, terá que realizar 4 deslocamentos, sendo 2 para a esquerda e 2 para cima.

Como queremos o total de trajetos diferentes que a peça do jogador sortudo deve percorrer para chegar a casa 36 (partindo da casa 22 e deslocando uma casa em cada rodada), precisamos calcular o número de permutações com repetição de 4 deslocamentos, sendo 2 para a esquerda e 2 para cima.

Assim, a quantidade de trajetos diferentes que permitem esse jogador sortudo vencer o jogo, avançando sua peça uma casa em todas as rodadas, é:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = \frac{4}{2} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Portanto 6 trajetos diferentes.

b) Se em uma determinada rodada, o jogador J_1 tem sua peça na casa 28 e obteve o número 2 no lançamento do dado, qual a probabilidade do jogador J_2, que tem sua peça na casa 30, vencer o jogo nesta rodada?

Para que o jogador J_2, que tem sua peça na casa 30, venca o jogo nesta rodada, ele necessita deslocar sua peça uma casa para cima.

Para conseguir este deslocamente, seguindo as regras do jogo, ele precisa obter ao lançar o dado (na face voltada para cima) um número:

1. maior que 2, pois o jogador J_1 obteve o número 2 em seu lançamento de dado;
2. ímpar, pois o deslocamento de sua peça deve ser para cima.

Assim, precisa obter ao lançar o dado (na face voltada para cima) o número 3 ou o número 5.

Como o dado possui 6 faces, a probabilidade de obter o número 3, $P(3)$, é igual a $\frac{1}{6}$ e a probabilidade de obter o número 5, $P(5)$, é também igual a $\frac{1}{6}$.

Portanto, a probabilidade do jogador J_2 vencer o jogo é:

$P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.