

PISM PROGRAMAS DE INGRESSO 2018

Módulo

3

1º DIA

MATEMÁTICA

EXATAS

NOTAS

1
2
3
4
5

ufjf
UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

ARBITRÁRIO
INSCRIÇÃO
COLE AQUI A ETIQUETA

UFJF - PISM 2018 - 3 - PROVA 1 (MATEMÁTICA - EXATAS)

NOME LEGÍVEL:

ASSINATURA:

INSCRIÇÃO:

| | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|---|--|--|
| | | | | | | - | | |
|--|--|--|--|--|--|---|--|--|

ATENÇÃO, FISCAL: NÃO CORTAR O CANHOTO ANTES DE ETIQUETAR E CONFERIR TODAS AS PROVAS

ATENÇÃO:

1. Suas respostas devem estar escritas obrigatoriamente com **caneta esferográfica azul ou preta**, de corpo transparente.
2. **ESCREVA SEU NOME E ASSINE SOMENTE NO ESPAÇO PRÓPRIO DA CAPA.**
3. **NÃO FAÇA NAS DEMAIS PÁGINAS QUALQUER MARCA PARA ALÉM DO SEU TEXTO.** Qualquer tipo de identificação pessoal do candidato nas folhas de questões acarretará sua eliminação.
4. Não ultrapasse o espaço que está pautado nas questões.

QUESTÃO 1 – Para os itens (a) e (b) abaixo, considere a seguinte circunferência: $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 44$.

a) Encontre o centro e o raio da circunferência acima.

Para encontrar o centro e o raio da circunferência, precisamos completar os quadrados:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 44$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 44 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 49.$$

Portanto, o centro da circunferência é o ponto $C = (1, -2)$ e o seu raio vale $R = 7$.

b) Encontre a equação da reta que passa pelo centro da circunferência e que é perpendicular a reta que contém os pontos $P_1 = (6, 3)$ e $P_2 = (9, 2)$.

Seja r a reta que passa pelos pontos $(6, 3)$ e $(9, 2)$. O coeficiente angular da reta r é:

$$m = \frac{2 - 3}{9 - 6} = \frac{-1}{3}.$$

Logo, o coeficiente angular de qualquer reta perpendicular a reta r será 3, e terá a seguinte forma:

$$y = 3x + b.$$

Como queremos que a reta perpendicular contenha o ponto $C = (1, -2)$, vemos que

$$-2 = 3 + b.$$

Portanto, $b = -5$. Assim a equação da reta procurada será

$$y = 3x - 5.$$

QUESTÃO 2 - Anagrama é a reordenação de letras de uma palavra para formar outras palavras.

a) Quantos são os anagramas da palavra **paralela**?

A palavra paralela possui três letras **A** e duas letras **L**, e as outras três letras não se repetem. Logo, esta palavra possui

$$\frac{8!}{3!2!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2 = 3360 \text{ anagramas.}$$

b) Quantos são os anagramas da palavra **paralela** que começam e terminam com a mesma letra?

Consideramos dois casos:

Caso 1) O anagrama começa e termina com a letra **A**.

Das seis letras remanescentes, temos duas letras **L**, e as demais não se repetem. Assim, temos

$$\frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ anagramas.}$$

Caso 2) O anagrama começa e termina com a letra **L**.

Mais uma vez temos seis letras, porém a letra **A** aparece três vezes. Portanto, temos

$$\frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ anagramas.}$$

Logo, a palavra paralela possui $360 + 120 = 480$ anagramas que começam e terminam com a mesma letra.

QUESTÃO 3 - Determine o polinômio $P(x)$ de grau 4 que satisfaz todas as propriedades abaixo:

- i) $P(-x)=P(x)$, para todo x real.
- ii) $P(-1)=3$.
- iii) O produto de suas raízes é igual a 2.
- iv) O resto da divisão de $P(x)$ por $x^3 + 1$ é um polinômio de grau 1.

Todo polinômio de grau 4 pode ser escrito da seguinte forma:

$$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ onde } a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ são números reais.}$$

Pela condição **i)** temos que $P(-x) = P(x)$. Portanto,

$$a_4 x^4 - a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0 = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$a_3 x^3 + a_1 x = 0.$$

Como o polinômio $a_3 x^3 + a_1 x$ coincide com o polinômio identicamente nulo, vemos que $a_3 = a_1 = 0$.

Assim,

$$P(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0.$$

Ao dividirmos $P(x)$ por $x^3 + 1$, encontramos:

$$P(x) = a_4 x(x^3 + 1) + (a_2 x^2 - a_4 x + a_0).$$

Pela condição **iv)**, a divisão acima deixa como resto um polinômio de grau 1. Portanto, $a_2 = 0$.

Assim, $P(x) = a_4 x^4 + a_0$.

Pela condição **ii)** obtemos que $P(-1) = a_4 + a_0 = 3$.

A condição **iii)** nos diz que $\frac{a_0}{a_4} = 2$.

Então $a_4 = 1$ e $a_0 = 2$. Logo, $P(x) = x^4 + 2$.

QUESTÃO 4 - Um funcionário da UFJF gastou 106 reais ao comprar 20 lápis, 4 borrachas, 10 canetas e uma mochila para seu filho. Ao chegar em casa, ele percebeu que o valor da mochila é igual a 10 vezes o valor de cada lápis mais 8 vezes o valor de cada borracha e mais 6 vezes o valor de cada caneta. Sabendo-se que o gasto com os lápis é igual ao dobro do gasto com as canetas mais o dobro do gasto com as borrachas, e que o gasto com as borrachas é igual ao gasto com as canetas, determine o preço de cada produto.

Denotaremos os preços de cada borracha, lápis, caneta e mochila respectivamente por B, L, C e M.

Interpretando o enunciado da questão, podemos formular as seguintes equações:

Equação 1: $20L + 4B + 10C + M = 106$

Equação 2: $M = 10L + 8B + 6C$

Equação 3: $20L = 20C + 8B$

Equação 4: $4B = 10C$

Usando as equações 3 e 4, obtemos:

$$20L = 20C + 8B = 20C + 20C = 40C$$

Equação 5: $L = 2C$

Usando as equações 2, 4 e 5 temos:

Equação 6: $M = 10L + 8B + 6C = 20C + 20C + 6C = 46C$

Substituindo as equações 4, 5 e 6 na equação 1, obtemos:

$$106 = 20L + 4B + 10C + M = 40C + 10C + 10C + 46C = 106C$$

Portanto $C = 1$. Substituindo $C = 1$ nas equações 4, 5 e 6 concluímos que:

Cada borracha custa R\$ 2,50;

Cada lápis custa R\$2,00;

A mochila custa R\$ 46;

Cada caneta custa R\$1,00.

QUESTÃO 5 - Durante um jogo de videogame um estudante da UFJF precisou descobrir uma senha para abrir uma porta e escapar de uma situação de perigo. Ele usou os algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 para descobrir a senha de 6 dígitos, como demonstrado no exemplo da tabela abaixo.

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 3 | 2 | 1 | 4 |

a) Quantas senhas de 6 dígitos com números distintos o aluno poderia escrever de maneira que dois quadrados consecutivos da tabela não tivessem dois números pares ou dois números ímpares lado a lado?

Primeiramente observe que temos 4 números pares, a saber 2, 4, 6 e 8, e 5 números ímpares, a saber, 1, 3, 5, 7 e 9.

Nós consideraremos dois casos:

Caso 1) O primeiro algarismo da senha é par:

Neste caso, temos exatamente $4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 1440$ senhas.

Caso 2) O primeiro algarismo da senha é ímpar:

Como no caso 1), temos $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 1440$ senhas.

Logo, temos um total de $1440 \times 2 = 2880$ senhas.

b) Dentre todas as senhas descritas no item (a), qual a probabilidade do aluno escolher uma senha de 6 dígitos com números distintos, tal que a soma dos números que ficam nas posições C e D seja igual a 5?

Para a soma ser 5 temos 4 possibilidades:

C=1 e D=4, C=2 e D=3, C=4 e D=1, e D=2 e C=3.

Quando C=1 e D=4 temos exatamente $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ senhas. (Neste caso o primeiro número tem que ser ímpar).

Quando C=2 e D=3 temos exatamente $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ senhas. (Neste caso o primeiro número tem que ser par).

Os outros dois casos são análogos.

Assim, vemos que existem $72 \times 4 = 288$ senhas, onde a soma dos números das posições C e D seja igual a 5.

Logo, a probabilidade será:

$$P = \frac{288}{2880} = 10\%$$

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DISCURSIVA

Antes de abrir esse caderno, leia atentamente as instruções.

Antes da prova:

- Não use em sala: boné, chapéu, chaveiros de qualquer tipo, óculos escuros, relógio e similares.
- Se você possui cabelos compridos, mantenha-os presos, deixando as orelhas descobertas.
- Mantenha com você somente materiais de escrita, documento de identificação, alimentos, água (em garrafa transparente) e medicamentos, se necessário. Tudo o mais que trazer deve ficar no saco plástico que você recebeu, amarrado e colocado embaixo da cadeira.
- **Assine a lista de presença** com a assinatura idêntica à da sua identidade.
- Se solicitado pelo Fiscal, assine a Ata de Abertura do Lacre da pasta que contém as provas.
- Quando autorizado, **vire o caderno e preencha os dados na capa.**
- **Abra seu caderno e confira** se sua prova tem **5 questões**. Caso haja algum problema, solicite imediatamente a substituição de seu caderno de questões.
- Você terá **4 horas e 30 min** para fazer as provas de hoje. Você só pode sair da sala **1h e 30min** depois do início do exame.
- **Será excluído do concurso o candidato que for flagrado portando ou mantendo consigo celular e/ou aparelho e componente eletrônico.**

Durante a prova:

- Suas respostas devem estar escritas obrigatoriamente com **caneta esferográfica azul ou preta**, de corpo transparente.
- **Devolva ao fiscal esse caderno de questões completo. Se não fizer isso, sua prova não será corrigida.**
- **Se as folhas do seu caderno se soltarem, por algum motivo, peça ao fiscal que as grampeie novamente.**
- Os três últimos candidatos deverão permanecer até o final da prova para assinar a Ata de Encerramento do exame.
- Comunique aos fiscais qualquer irregularidade observada durante a realização da prova. Se eles não tomarem as devidas providências, solicite a presença do Coordenador do Setor ou fale com ele depois que você sair da sala.