

PISM PROGRAMAS DE INGRESSO 2018

Módulo

2

1º DIA

MATEMÁTICA

NOTAS

1

2

ufjf
UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

ARBITRÁRIO

COLE AQUI A ETIQUETA

INSCRIÇÃO

UFJF - PISM 2018 - 2 - PROVA 1 (MATEMÁTICA)

NOME LEGÍVEL:

ASSINATURA:

INSCRIÇÃO:

						-		
--	--	--	--	--	--	---	--	--

ATENÇÃO, FISCAL: NÃO CORTAR O CANHOTO ANTES DE ETIQUETAR E CONFERIR TODAS AS PROVAS

ATENÇÃO:

1. Suas respostas devem estar escritas obrigatoriamente com **caneta esferográfica azul ou preta**, de corpo transparente.
2. **ESCREVA SEU NOME E ASSINE SOMENTE NO ESPAÇO PRÓPRIO DA CAPA.**
3. **NÃO FAÇA NAS DEMAIS PÁGINAS QUALQUER MARCA PARA ALÉM DO SEU TEXTO.** Qualquer tipo de identificação pessoal do candidato nas folhas de questões acarretará sua eliminação.
4. Não ultrapasse o espaço que está pautado nas questões.

QUESTÃO 1 - João é um menino que gosta muito do Natal. Sabendo disso seu pai resolveu fazer um globo de Neve com um boneco de neve dentro. Como materiais, seu pai usou um cilindro circular reto de vidro com 20cm de altura e com tampa e fundo de 8 cm de diâmetro, duas esferas de isopor de mesmo tamanho e uma terceira esfera com um tamanho menor. O boneco foi construído de acordo com a figura abaixo. Após colocar o boneco no interior do cilindro, o globo foi preenchido completamente com 712 cm^3 de um líquido apropriado, de maneira que o vidro ficou sem bolhas de ar. (Utilize $\pi = 3$).



a) Calcule o volume do boneco de Neve.

Notamos que o raio da base do cilindro e a sua altura valem respectivamente

$$r_c = 4 \text{ cm} \quad \text{e} \quad h = 8 \text{ cm} .$$

Agora, calculamos o volume do cilindro circular reto de vidro:

$$V_c = \pi r_c^2 h = 3 \times 4^2 \times 20 = 960 \text{ cm}^3 .$$

Portanto, o volume V_b do boneco vale:

$$V_b = V_c - V_L = 960 - 712 = 248 \text{ cm}^3 , \quad \text{onde } V_L \text{ é o volume do líquido.}$$

b) Sabendo-se que a razão entre a área da esfera de isopor menor e a área da esfera de isopor maior é $\frac{4}{9}$ e que, na estrutura do boneco, os centros das esferas estão perfeitamente alinhados, calcule a altura do boneco de neve.

Vamos considerar r o raio da esfera menor e R o raio da esfera maior.

Como a razão entre a área da esfera menor e a área da esfera maior é $\frac{4}{9}$ temos:

$$\frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{4}{9} \quad R = \frac{3r}{2}$$

Pelo item a), $V_b = 2 \times \text{volume da esfera maior} + \text{volume da esfera menor} = 248 \text{ cm}^3 .$

Portanto,

$$248 = 2 \times \frac{4\pi}{3} \frac{27r^3}{8} + \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$31r^3 = 248$$

Assim,

$$r = 2 \text{ cm}$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Altura do boneco} = 2 \times (2R) + 2r = 12 + 4 = 16 \text{ cm}$$

QUESTÃO 2 - Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 os quatro primeiros termos de uma progressão geométrica de termos positivos, tais que a_3, a_4 e $a_4 - 7a_3 + 16a_2$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, respectivamente.

a) Sabendo-se que $a_1 + a_3 + a_4 = 91$, calcule a razão e os quatro primeiros termos da progressão geométrica.

Do enunciado, temos que $a_3, a_4, a_4 - 7a_3 + 16a_2$ estão em progressão aritmética. Assim,

$$(a_4 - 7a_3 + 16a_2) - a_4 = a_4 - a_3$$

$$-7a_3 + 16a_2 = a_4 - a_3$$

Seja q a razão da progressão geométrica formada por a_1, a_2, a_3, a_4 . Daí, vemos que a igualdade $-7a_3 + 16a_2 = a_4 - a_3$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$-7a_1q^2 + 16a_1q = a_1q^3 - a_1q^2$$

Simplificando, temos:

$$a_1q(-7q + 16) = a_1q(q^2 - q)$$

$$(-7q + 16) = (q^2 - q), \text{ pois } a_1q > 0.$$

Assim,

$$q^2 + 6q - 16 = 0.$$

Como, $q > 0$ a única solução da equação acima é $q = 2$.

Por outro lado,

$$a_1 + a_1q^2 + a_1q^3 = 91$$

$$a_1 + 4a_1 + 8a_1 = 91.$$

Portanto, $a_1 = 7$. Logo, $q = 2, a_1 = 7, a_2 = 14, a_3 = 28, a_4 = 56$.

b) Calcule a soma do sexto até o décimo termo da progressão geométrica.

Por definição, temos:

$$S_{10} = a_1 + \dots + a_5 + a_6 + \dots + a_{10} = S_5 + a_6 + \dots + a_{10}.$$

A soma dos n primeiros termos de uma P.G é dada por: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Usando a fórmula, vemos que $S_5 = 217$ e $S_{10} = 7161$.

Logo,

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{10} = S_{10} - S_5 = 7161 - 217 = 6944.$$

RASCUNHO

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DISCURSIVA

Antes de abrir esse caderno, leia atentamente as instruções.

Antes da prova:

- Não use em sala: boné, chapéu, chaveiros de qualquer tipo, óculos escuros, relógio e similares.
- Se você possui cabelos compridos, mantenha-os presos, deixando as orelhas descobertas.
- Mantenha com você somente materiais de escrita, documento de identificação, alimentos, água (em garrafa transparente) e medicamentos, se necessário. Tudo o mais que trazer deve ficar no saco plástico que você recebeu, amarrado e colocado embaixo da cadeira.
- **Assine a lista de presença** com a assinatura idêntica à da sua identidade.
- Se solicitado pelo Fiscal, assine a Ata de Abertura do Lacre da pasta que contém as provas.
- Quando autorizado, **vire o caderno e preencha os dados na capa.**
- **Abra seu caderno e confira** se sua prova tem **2 questões**. Caso haja algum problema, solicite imediatamente a substituição de seu caderno de questões.
- Você terá **4 horas e 30 min** para fazer as provas de hoje. Você só pode sair da sala **1h e 30min** depois do início do exame.
- **Será excluído do concurso o candidato que for flagrado portando ou mantendo consigo celular e/ou aparelho e componente eletrônico.**

Durante a prova:

- Suas respostas devem estar escritas obrigatoriamente com **caneta esferográfica azul ou preta**, de corpo transparente.
- **Devolva ao fiscal esse caderno de questões completo. Se não fizer isso, sua prova não será corrigida.**
- **Se as folhas do seu caderno se soltarem, por algum motivo, peça ao fiscal que as grampeie novamente.**
- Os três últimos candidatos deverão permanecer até o final da prova para assinar a Ata de Encerramento do exame.
- Comunique aos fiscais qualquer irregularidade observada durante a realização da prova. Se eles não tomarem as devidas providências, solicite a presença do Coordenador do Setor ou fale com ele depois que você sair da sala.