

Soluções da Prova Dissertativa de Matemática do PISM III- 2017

Questão 1 Considere os pontos $P(2, 4)$, $Q(-1, 0)$ e $S(-5, 3)$.

a) Determine a equação da reta contendo o segmento PQ , da reta contendo o segmento PS e da reta contendo o segmento QS .

Solução: O coeficiente angular da reta r_1 contendo PQ é $m_1 = \frac{0-4}{-1-2} = \frac{4}{3}$. Como $P(2, 4)$ pertence a r_1 , a equação desta reta é:

$$(y - 4) = \frac{4}{3}(x - 2) \quad \text{ou} \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

O coeficiente angular da reta r_2 contendo PS é $m_2 = \frac{3-4}{-5-2} = \frac{1}{7}$. Como $P(2, 4)$ pertence a r_2 , a equação desta reta é:

$$(y - 4) = \frac{1}{7}(x - 2) \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{7}x + \frac{26}{7}$$

O coeficiente angular da reta r_3 contendo QS é $m_3 = \frac{3-0}{-5+1} = -\frac{3}{4}$. Como $Q(-1, 0)$ pertence a r_3 , a equação desta reta é:

$$(y - 0) = -\frac{3}{4}(x + 1) \quad \text{ou} \quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

b) Considere o triângulo de vértices P , Q e S . O triângulo dado é retângulo? Justifique sua resposta.

Solução: A reta contendo PQ tem coeficiente angular $m_1 = \frac{4}{3}$ e a reta contendo QS tem coeficiente angular $m_2 = -\frac{3}{4}$. Como $m_1 \cdot m_2 = -1$, estas retas são perpendiculares. Logo, o ângulo $P\hat{Q}S$ é reto e o triângulo PQS é retângulo.

c) Obtenha a equação da circunferência que contém os pontos P , Q e S .

Solução: A circunferência C contendo P, Q e S circunscreve o triângulo retângulo PQS cuja hipotenusa é o segmento PS . Assim, PS é um diâmetro de C , o ponto médio, M , de PS é o centro de C e seu raio é a distância $d(P, M)$ entre P e M .

Como $P(2, 4)$ e $S(-5, 3)$ tem-se

$$M = \left(\frac{2-5}{2}, \frac{4+3}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \text{e} \quad d(P, M) = \sqrt{\left(2 + \frac{3}{2} \right)^2 + \left(4 - \frac{7}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

Portanto, C é uma circunferência de centro $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ e raio $\frac{\sqrt{50}}{2}$. Logo a equação de C é

$$\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{7}{2} \right)^2 = \frac{50}{4}$$

Questão 2 O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por um polinômio $q(x)$ é o polinômio

$$r(x) = x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 15x - 105$$

Sabendo que 7 é raiz de $p(x)$ e de $q(x)$, determine todas as raízes de $r(x)$.

Solução: Se $g(x)$ é o polinômio tal que $p(x) = q(x)g(x) + r(x)$ então

$$r(x) = p(x) - q(x).g(x)$$

e como 7 é raiz de $p(x)$ e de $q(x)$, temos

$$r(7) = p(7) - q(7).g(7) = 0$$

Portanto, 7 é uma raiz de $r(x)$ e este polinômio é divisível por $(x - 7)$.

Dividindo $r(x)$ por $(x - 7)$ obtemos o polinômio

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$$

e as demais raízes de $r(x)$ são as raízes de $f(x)$. Para obter estas raízes, substituímos $y = x^2$ na equação $f(x) = 0$ obtendo a equação

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

Usando a fórmula de Bhaskara obtemos que as soluções desta equação são:

$$y = \frac{8 + \sqrt{4}}{2} = 5 \quad \text{ou} \quad y = \frac{8 - \sqrt{4}}{2} = 3$$

Se $y = 5$ então $x^2 = 5$ e $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. Se $y = 3$ então $x^2 = 3$ e $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Consequentemente, as raízes de $r(x)$ são

$$\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3} \text{ e } 7$$

Questão 3 A soma dos algarismos de um número N de três algarismos é 18, o algarismo da unidade é duas vezes maior do que o algarismo da dezena. Trocando-se o algarismo das centenas com o algarismo das unidades obtemos um número M maior que N em 198 unidades. Determine o número N .

Solução : Se c , d e u são, respectivamente, os algarismos das centenas, das dezenas e das unidades de N então

$$N = 100.c + 10.d + 1.u$$

Trocando-se o algarismo das centenas com o algarismo das unidades , obtemos o número

$$M = 100.u + 10.d + 1.c$$

Já que $M = N + 198$, temos

$$100.u + 10.d + 1.c = 100.c + 10.d + 1.u + 198$$

donde,

$$99.u - 99c = 198 \Rightarrow u - c = 2$$

Como a soma dos algarismos de N é 18 e o algarismo das unidades é duas vezes maior que o algarismo das dezenas temos

$$c + d + u = 18 \quad e \quad u = 2d$$

Resolvendo o sistema

$$u - c = 2 \tag{1}$$

$$c + d + u = 18 \tag{2}$$

$$u - 2d = 0 \tag{3}$$

obtemos

$$c = 6, d = 4 \quad e \quad u = 8$$

Assim,o número procurado é $N = 648$.

Questão 4 Considere no plano cartesiano o seguinte conjunto de 13 pontos.

$$A = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

a) Quantos são os triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto A .

Solução: O número destes triângulos corresponde ao número de subconjuntos de A contendo três pontos não colineares. Portanto, se n é número total de subconjuntos de três pontos de A e m é o número de subconjuntos de A contendo três pontos colineares então o número de triângulos com vértices em A é $n - m$

Como A tem 13 pontos, o número de subconjuntos de A contendo três pontos é

$$n = C_3^{13} = \frac{13!}{3!10!} = 286$$

Os pontos de A estão distribuídos no eixo das abscissas e das ordenadas. Há um subconjunto de 7 pontos sobre o eixo das ordenadas, a saber

$$A_1 = \{(0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 0)\}$$

e um subconjunto de 7 pontos sobre o eixo das abscissas, a saber

$$A_2 = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 0)\}$$

Portanto, qualquer subconjunto de três pontos colineares de A é um subconjunto de A_1 ou A_2 . Como estes conjuntos tem 7 pontos cada um, o número de subconjuntos de A com três pontos colineares é:

$$m = 2.C_3^7 = 2 \cdot \frac{7!}{3!4!} = 70$$

Assim, o número total de triângulos satisfazendo as condições dadas é $n - m = 216$

b) Quantos são os triângulos com vértices em A e dois de seus vértices no eixo das ordenadas.

Solução: Se um triângulo tem dois vértices sobre no eixo das ordenadas então, necessariamente, o terceiro vértice pertence ao eixo das abscissas e deve ser diferente de $(0, 0)$. Portanto, para formar um triângulo nas condições dadas devemos escolher dois pontos dos 7 pontos no eixo das ordenadas e um terceiro ponto no conjunto de 6 pontos do eixo das abscissas distintos de $(0, 0)$.

O número total de escolhas de 2 pontos sobre o eixo das ordenadas é

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

e como há 6 possibilidades de escolha para o terceiro vértice sobre o eixo das abscissas, o número de triângulos satisfazendo as condições dadas é $21 \cdot 6 = 126$.

Questão 5 Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Cada bola tem peso proporcional ao número marcado nela, de modo que, após o sorteio de uma bola, a probabilidade de observarmos um número é proporcional a este número, com a mesma constante de proporcionalidade para todos os números. Determine a probabilidade de sortearmos:

a) **um número ímpar.**

Solução: Seja p_i a probabilidade de sortearmos o número i . Como, para todo $i \in \{1, \dots, 10\}$, p_i é proporcional a i com a mesma constante de proporcionalidade, existe $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} p_1 &= 1.k, \\ p_2 &= 2.k, \\ p_3 &= 3.k, \\ &\vdots \\ p_9 &= 9.k, \\ p_{10} &= 10.k \end{aligned}$$

Mas,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_9 + p_{10} = 1$$

donde,

$$k + 2k + \dots + 9k + 10k = 1 \Rightarrow 55k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{55}$$

Estamos interessados no evento $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e a probabilidade de ocorrer este evento é

$$P(A) = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 = \frac{1}{55} + \frac{3}{55} + \frac{5}{55} + \frac{7}{55} + \frac{9}{55} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$

b) **um número par, maior ou igual a 6.**

Solução: O evento que nos interessa é $B = \{6, 8, 10\}$ e a probabilidade de ocorrer este evento é

$$P(B) = p_6 + p_8 + p_{10} = \frac{6}{55} + \frac{8}{55} + \frac{10}{55} = \frac{24}{55}$$