Soluções da Prova Dissertativa de Matemática do PISM III- 2017

Questão 1 Considere os pontos $P(2,4)$, $Q(-1,0)$ e $S(-5,3)$.

$a)$ **Determine a equação da reta contendo o segmento PQ, da reta contendo o segmento PS e da reta contendo o segmento QS.**

Solução: O coeficiente angular da reta r_1 contendo PQ é $m_1 = \frac{0-4}{-1-2} = \frac{4}{3}$. Como $P(2,4)$ pertence a r_1, a equação desta reta é:

$$(y-4) = \frac{4}{3}(x-2) \quad \text{ou} \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

O coeficiente angular da reta r_2 contendo PS é $m_2 = \frac{3-4}{-5-2} = \frac{1}{7}$. Como $P(2,4)$ pertence a r_2, a equação desta reta é:

$$(y-4) = \frac{1}{7}(x-2) \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{7}x + \frac{26}{7}$$

O coeficiente angular da reta r_3 contendo QS é $m_3 = \frac{3-0}{-5+1} = -\frac{3}{4}$. Como $Q(-1,0)$ pertence a r_3, a equação desta reta é:

$$(y-0) = -\frac{3}{4}(x+1) \quad \text{ou} \quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$b)$ **Considere o triângulo de vértices P, Q e S. O triângulo dado é retângulo ? Justifique sua resposta.**

Solução: A reta contendo PQ tem coeficiente angular $m_1 = \frac{4}{3}$ e a reta contendo QS tem coeficiente angular $m_2 = -\frac{3}{4}$. Como $m_1.m_2 = -1$, estas retas são perpendiculares. Logo, o ângulo $P\widehat{Q}S$ é reto e o triângulo PQS é retângulo.

$c)$**Obtenha a equação da circunferência que contém os pontos P, Q e S.**

Solução: A circunferência C contendo P, Q e S circunscreve o triângulo retângulo PQS cuja hipotenusa é o segmento PS. Assim, PS é um diâmetro de C, o ponto médio, M, de PS é o centro de C e seu raio é a distância $d(P,M)$ entre P e M.

Como $P(2,4)$ e $S(-5,3)$ tem-se

$$M = \left(\frac{2-5}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \quad e \quad d(P,M) = \sqrt{\left(2+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(4-\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

Portanto, C é uma circunferência de centro $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ e raio $\frac{\sqrt{50}}{2}$. Logo a equação de C é

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

Questão 2 O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por um polinômio $q(x)$ é o polinômio

$$r(x) = x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 15x - 105$$

Sabendo que 7 é raiz de $p(x)$ e de $q(x)$, determine todas as raízes de $r(x)$.

Solução: Se $g(x)$ é o polinômio tal que $p(x) = q(x)g(x) + r(x)$ então

$$r(x) = p(x) - q(x).g(x)$$

e como 7 é raiz de $p(x)$ e de $q(x)$, temos

$$r(7) = p(7) - q(7).g(7) = 0$$

Portanto, 7 é uma raiz de $r(x)$ e este polinômio é divisível por $(x - 7)$.

Dividindo $r(x)$ por $(x - 7)$ obtemos o polinômio

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$$

e as demais raízes de $r(x)$ são as raízes de $f(x)$. Para obter estas raízes, substituímos $y = x^2$ na equação $f(x) = 0$ obtendo a equação

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

Usando a fórmula de Bhaskara obtemos que as soluções desta equação são:

$$y = \frac{8 + \sqrt{4}}{2} = 5 \quad ou \quad y = \frac{8 - \sqrt{4}}{2} = 3$$

Se $y = 5$ então $x^2 = 5$ e $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. Se $y = 3$ então $x^2 = 3$ e $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Consequentemente, as raízes de $r(x)$ são

$$\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3} \quad e \quad 7$$

Questão 3 A soma dos algarismos de um número N de três algarismos é 18, o algarismo da unidade é duas vezes maior do que o algarismo da dezena. Trocando-se o algarismo das centenas com o algarismo das unidades obtemos um número M maior que N em 198 unidades. Determine o número N.

Solução : Se c, d e u são, respectivamente, os algarismos das centenas, das dezenas e das unidades de N então

$$N = 100.c + 10.d + 1.u$$

Trocando-se o algarismo das centenas com o algarismo das unidades , obtemos o número

$$M = 100.u + 10.d + 1.c$$

Já que $M = N + 198$, temos

$$100.u + 10.d + 1.c = 100.c + 10.d + 1.u + 198$$

donde,

$$99.u - 99c = 198 \quad \Rightarrow \quad u - c = 2$$

Como a soma dos algarimos de N é 18 e o algarismo das unidades é duas vezes maior que o algarismo das dezenas temos

$$c + d + u = 18 \quad e \quad u = 2d$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} u - c &= 2 & (1) \\ c + d + u &= 18 & (2) \\ u - 2d &= 0 & (3) \end{aligned}$$

obtemos

$$c = 6, d = 4 \quad e \quad mu = 8$$

Assim,o número procurado é $N = 648$.

Questão 4 Considere no plano cartesiano o seguinte conjunto de 13 pontos.

$$A = \{(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,-3),(0,-2),(0,-1),(0,1),(0,2),(0,3)\}$$

a) **Quantos são os triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto A.**

Solução: O número destes triângulos corresponde ao número de subconjuntos de A contendo três pontos não colineares. Portanto, se n é número total de subconjuntos de três pontos de A e m é o número de subconjuntos de A contendo três pontos colineares então o número de triângulos com vértices em A é $n - m$

Como A tem 13 pontos, o número de subconjuntos de A contendo três pontos é

$$n = C_3^{13} = \frac{13!}{3!10!} = 286$$

Os pontos de A estão distribuídos no eixo das abscissas e das ordenadas. Há um subconjunto de 7 pontos sobre o eixo das ordenadas, a saber

$$A_1 = \{(0,-3),(0,-2),(0,-1),(0,1),(0,2),(0,3),(0,0)\}$$

e um subconjunto de 7 pontos sobre o eixo das abscissas, a saber

$$A_2 = \{(-3,0),(-2,0),(-1,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,0)\}$$

Portanto, qualquer subconjunto de três pontos colineares de A é um subconjunto de A_1 ou A_2. Como estes conjuntos tem 7 pontos cada um, o número de subconjuntos de A com três pontos colineares é:

$$m = 2.C_3^7 = 2.\frac{7!}{3!4!} = 70$$

Assim, o número total de triângulos satisfazendo as condições dadas é $n - m = 216$

b) **Quantos são os triângulos com vértices em A e dois de seus vértices no eixo das ordenadas.**

Solução: Se um triângulo tem dois vértices sobre no eixo das ordenadas então, necessariamente, o terceiro vértice pertence ao eixo das abscissas e deve ser diferente de $(0,0)$. Portanto, para formar um triângulo nas condições dadas devemos escolher dois pontos dos 7 pontos no eixo das ordenadas e um terceiro ponto no conjunto de 6 pontos do eixo das abscissas distintos de $(0,0)$.

O número total de escolhas de 2 pontos sobre o eixo das ordenadas é

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

e como há 6 possibilidades de escolha para o terceiro vértice sobre o eixo das abscissas, o número de triângulos satisfazendo as condições dadas é $21.6 = 126$.