1. Seja ABC um triângulo cujas medidas dos ângulos internos formam uma progressão aritmética não constante e cujos lados AB e AC têm medidas $\sqrt{6}\ cm$ e $3\ cm$, respectivamente.

a) Prove que um dos ângulos internos desse triângulo mede 60^o.

Ate 1,5 ponto.

Como as medidas dos ângulos internos do triângulo formam uma PA, podemos denotá-las por $a-r, a, a+r$.
Temos que $a-r+a+a+r=180$, donde $3a=180$, isto é, $a=60$.
Assim, um dos ângulos mede 60°.

b) Suponha que o ângulo $A\hat{B}C$ seja o que mede 60^o. Determine a medida do ângulo $A\hat{C}B$.

Ate 2 pontos.

No triângulo abaixo, temos que $\overline{AB}=\sqrt{6}$ e $\overline{AC}=3$. Seja x a medida do ângulo $A\hat{C}B$. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{3}{sen\,60}=\frac{\sqrt{6}}{sen\,x}$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{sen\,x}$$

$$sen\,x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $x=45°$.

c) Com as hipóteses do item anterior, determine o seno do ângulo $B\hat{A}C$.

Ate 1,5 ponto.

Pelo item anterior, a medida do ângulo $B\hat{A}C$, em graus, é

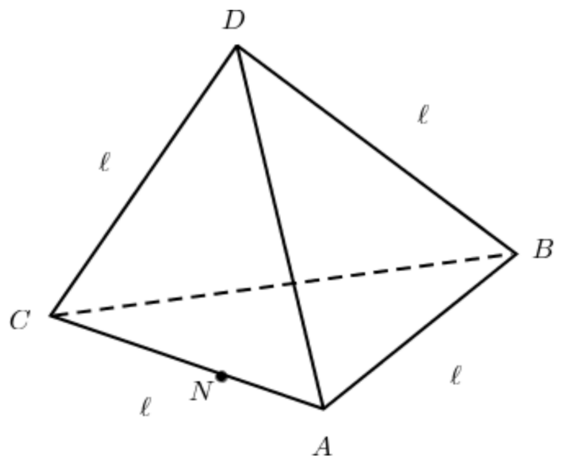
$$180-60-45=75.$$

O seno desse ângulo é:

$$sen\,75 = sen\,30 \times \cos 45 + sen\,45 \times \cos 30 = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

2. Na figura abaixo, $ABCD$ é um tetraedro regular de lado ℓ e N é um ponto sobre a aresta AC tal que $2\overline{AN} = \overline{NC}$.



a) Calcule $\overline{DN}$.

Ate 2 pontos.

Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo ADN, temos que

$$\overline{DN}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AN}\,\overline{AD}\cos 60^o.$$

Como $\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{NC}$ e $2\overline{AN} = \overline{NC}$, temos que $\overline{AN} = \frac{1}{3}\ell$. Sabendo que $\overline{AD} = \ell$, obtemos $\overline{DN} = \frac{\sqrt{7}}{3}\ell$.

b) Calcule a área do triângulo BDN.

Ate 3 pontos.

Note que $\overline{DN} = \overline{BN}$ de onde concluímos que o triângulo BDNé isósceles com base BD. Pelo teorema de Pitágoras, a altura $\hbar$ é dada por

$$\hbar^2 = \overline{DN}^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 = \frac{19}{36}\ell^2.$$

Portanto, a área do triângulo BDN é dada por $\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\hbar = \frac{\sqrt{19}}{12}\ell^2$.