

Questão 1:

Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível por $(x + 1)^2$, determine a e b .

Pontuação: até 5 pontos.

Solução: Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível pelo polinômio $(x+1)^2$, então $p(x)$ é divisível por $(x+1)$. Usando o método de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & a & 0 & b & 2 \\ \hline & a & -a & b+a & -(b+a)+2 \end{array}$$

Logo,

$$a+b = 2 \quad (1)$$

e $p(x) = ax^3 + bx + 2 = [ax^2 - ax + (b+a)](x+1)$. Como $p(x)$ é divisível por $(x+1)^2$, temos que o polinômio $ax^2 - ax + (b+a)$ é divisível por $(x+1)$. Usando novamente o método de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & a & -a & b+a \\ \hline & a & -2a & b+3a \end{array}$$

Logo,

$$b+3a = 0. \quad (2)$$

Da equação (1), temos $b = 2-a$. Substituindo em (2), temos:

$$2-a+3a = 0,$$

logo, $a = -1$ e $b = 3$.

Questão 2:

Considere os pontos $A = (2,0)$, $B = (-1,\sqrt{3})$ e $C = (-1,-\sqrt{3})$ em um plano cartesiano.

a) Determine o ângulo \widehat{ABC} .

Pontuação: até 2,5 pontos.

Solução: Calculando as distâncias entre os pontos A, B e C, temos:

$$d(A,B) = \sqrt{3^2 + 3} = \sqrt{12}$$

$$d(A,C) = \sqrt{3^2 + 3} = \sqrt{12}$$

$$d(B,C) = \sqrt{3^2 + 3} = \sqrt{12}.$$

Logo o triângulo é equilátero. Então o ângulo é 60° .

b) Calcule a área do triângulo ABC .

Pontuação: até 2,5 pontos.

Solução: A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

onde a é o lado do triângulo equilátero. Então,

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{12 \sqrt{3}}{4} = 3 \sqrt{3} \text{ u.a..}$$

Questão 3:

Considere a circunferência C: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$

- a) Determine se o ponto $A = (4, -3)$ é interior, exterior ou pertencente à circunferência C.

Pontuação: até 1 ponto.

Solução: Como

$$(4 - 1)^2 + (-3 + 3)^2 = 3^2 + 0 = 9,$$

o ponto A é pertencente à circunferência C.

- b) Encontre o(s) valor(es) de a para que a circunferência C e a reta $y = ax$ possuam dois pontos em comum.

Pontuação: até 4 pontos.

Solução: Precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9 & (1) \\ y = ax & (2) \end{cases}$$

Substituindo y na equação (1), temos:

$$(x - 1)^2 + (ax + 3)^2 = 9, \text{ logo } x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 + 6ax + 9 = 9 \text{ e, portanto,} \\ (a^2 + 1)x^2 + (6a - 2)x + 1 = 0.$$

Para que a circunferência C e a reta $y = ax$ tenham dois pontos em comum, a equação de segundo grau acima deve ter duas raízes distintas, então

$$\Delta = (6a - 2)^2 - 4(a^2 + 1) > 0.$$

$$\text{Mas, } \Delta = 36a^2 - 24a + 4 - 4a^2 - 4 = 32a^2 - 24a.$$

$$\text{Então } 32a^2 - 24a - 1 > 0,$$

$$\text{logo } a < 0 \text{ ou } a > \frac{3}{4}.$$

Questão 4:

Considere o sistema dado pelas equações:

$$\begin{aligned}x - 3y + 4z &= 3 \\2x - 5y + 10z &= 8 \\x - y + (\alpha^2 - 1)z &= \alpha + 10\end{aligned}$$

- a) Determine o(s) valor(es) de α para que o sistema seja possível e determinado e encontre seu conjunto solução.

Pontuação: até 3,5 pontos.

Solução: Por escalonamento:

$$\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 4 & 3 \\2 & -5 & 10 & 8 \\1 & -1 & \alpha^2 - 1 & \alpha + 10\end{array}$$

$L2 \leftrightarrow L2 - 2L1$

$L3 \leftrightarrow L3 - L1$

$$\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 4 & 3 \\0 & 1 & 2 & 2 \\0 & 2 & \alpha^2 - 5 & \alpha + 7\end{array}$$

$L3 \leftrightarrow L3 - 2L2$

$$\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 4 & 3 \\0 & 1 & 2 & 2 \\0 & 0 & \alpha^2 - 9 & \alpha + 3\end{array}$$

Para que o sistema seja possível e determinado devemos ter $\alpha^2 - 9 \neq 0$, logo

$$\alpha \neq 3 \text{ e } \alpha \neq -3.$$

O conjunto solução é

$$S = \{(x,y,z) ; x = (9\alpha - 37)/(\alpha - 3), y = (2\alpha - 8)/(\alpha - 3) \text{ e } z = 1/(\alpha - 3)\}.$$

- b) Determine o(s) valor(es) de α para que o sistema seja possível e indeterminado.

Pontuação: até 1,5 pontos.

Solução: Para que o sistema seja possível e indeterminado devemos ter $\alpha^2 - 9 = 0$, isto é, $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$.

Além disso, devemos ter $\alpha + 3 = 0$.

Logo, $\alpha = -3$.

Questão 5:

- a) Quantos números inteiros positivos de até três algarismos começando com um número par são múltiplos de 5?

Pontuação: até 2 pontos.

Solução: Se n é um número de até três algarismos começando com um número par e múltiplo de 5, simultaneamente, existem três possibilidades a considerar: n tem exatamente um algarismo, n tem exatamente dois algarismos ou n tem exatamente três algarismos.

Caso 1: $n = a$. Nesse caso devemos ter a par e $a = 5$. Logo, não existem números de apenas um algarismo começando com um número par e múltiplo de 5, simultaneamente.

Caso 2: $n = ab$. Temos 4 possibilidades para o algarismo a : 2 ou 4 ou 6 ou 8.
Temos 2 possibilidades para o algarismo b : 0 ou 5. Sendo assim, existem $4 \cdot 2 = 8$ números com exatamente dois algarismos começando com um número par e múltiplo de 5.

Caso 3: $n = abc$. Temos 4 possibilidades para o algarismo a : 2 ou 4 ou 6 ou 8.
Temos 10 possibilidades para o algarismo b : 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 ou 9.
Temos 2 possibilidades para o algarismo c : 0 ou 5. Sendo assim, existem $4 \cdot 10 \cdot 2 = 80$ números com exatamente três algarismos começando com um número par e múltiplo de 5.

Então, existem $0 + 8 + 80 = 88$ números.

- b) Quantos números inteiros positivos com três algarismos distintos são múltiplos de 5 e têm a soma de seus algarismos igual a um número ímpar?

Pontuação: até 3 pontos.

Solução: Dividiremos em dois casos:

Caso 1: O número termina com o algarismo 0, ou seja, $n = ab0$.

Como a soma deve ser ímpar, temos duas possibilidades:

- 1) a é par e b é ímpar: temos $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades.
- 2) a é ímpar e b é par: temos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades.

Caso 2: O número termina com o algarismo 5, ou seja, $n = ab5$.

Novamente, temos duas possibilidades:

- 1) a é par e b é par: temos $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades.
- 2) a é ímpar e b é ímpar: temos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

Então, existem $20 + 20 + 16 + 12 = 68$ números.