Questão 1:

Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível por $(x+1)^2$, determine a e b.

Pontuação: até 5 pontos.

Solução: Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3+bx+2$ é divisível pelo polinômio $(x+1)^2$, então $p(x)$ é divisível por $(x+1)$. Usando o método de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & a & 0 & b & 2 \\ \hline & a & -a & b+a & -(b+a)+2 \end{array}$$

Logo,

$$a+b = 2 \qquad (1)$$

e $p(x) = ax^3+bx+2 = [ax^2 - ax + (b+a)](x+1)$. Como $p(x)$ é divisível por $(x+1)^2$, temos que o polinômio $ax^2 - ax + (b+a)$ é divisível por $(x+1)$. Usando novamente o método de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & a & -a & b+a \\ \hline & a & -2a & b+3a \end{array}$$

Logo,

$$b+3a = 0. \qquad (2)$$

Da equação (1), temos $b = 2-a$. Substituindo em (2), temos:

$$2-a+3a = 0,$$

logo, $a = -1$ e $b = 3$.

Questão 2:

Considere a circunferência C: $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

a) Determine se o ponto $A=(4,-3)$ é interior, exterior ou pertencente à circunferência C.

Pontuação: até 1 ponto.

Solução: Como

$$(4-1)^2+(-3+3)^2=3^2+0=9,$$

o ponto A é pertencente à circunferência C.

b) Encontre o(s) valor(es) de a para que a circunferência C e a reta $y=ax$ possuam dois pontos em comum.

Pontuação: até 4 pontos.

Solução: Precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2=9 & (1) \\ y=\alpha x & (2) \end{cases}$$

Substituindo y na equação (1), temos:

$(x-1)^2+(\alpha x+3)^2=9$, logo $x^2-2x+1+\alpha^2x^2+6\alpha x+9=9$ e, portanto,
$(\alpha^2+1)x^2+(6\alpha-2)x+1=0$.

Para que a circunferência C e a reta $y=\alpha x$ tenham dois pontos em comum, a equação de segundo grau acima deve ter duas raízes distintas, então

$\Delta=(6\alpha-2)^2-4(\alpha^2+1)>0$.

Mas, $\Delta=36\alpha^2-24\alpha+4-4\alpha^2-4=32\alpha^2-24\alpha$.

Então $32\alpha^2-24\alpha-1>0$,

logo $\alpha<0$ ou $\alpha>3/4$.

Questão 3:

Considere o sistema dado pelas equações:

$$\begin{aligned} x - 3y + 4z &= 3 \\ 2x - 5y + 10z &= 8 \\ x - y + (a^2 - 1)z &= a + 10 \end{aligned}$$

a) Determine o(s) valor(es) de a para que o sistema seja possível e determinado e encontre seu conjunto solução.

Pontuação: até 3,5 pontos.

Solução: Por escalonamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 10 & 8 \\ 1 & -1 & a^2-1 & a+10 \end{array}\right]$$

$L2 \leftrightarrow L2 - 2\,L1$

$L3 \leftrightarrow L3 - L1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & a^2-5 & a+7 \end{array}\right]$$

$L3 \leftrightarrow L3 - 2\,L2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a+3 \end{array}\right]$$

Para que o sistema seja possível e determinado devemos ter $a^2 - 9 \neq 0$, logo

$$a \neq 3 \text{ e } a \neq -3.$$

O conjunto solução é

$$S = \{(x,y,z)\ ;\ x = (9a - 37)/(a - 3)\ ,\ y = (2a - 8)/(a - 3) \text{ e } z = 1/(a - 3)\}.$$

b) Determine o(s) valor(es) de a para que o sistema seja possível e indeterminado.

Pontuação: até 1,5 pontos.

Solução: Para que o sistema seja possível e indeterminado devemos ter $a^2 - 9 = 0$, isto é, $a = 3$ ou $a = -3$.

Além disso, devemos ter $a+3=0$.

Logo, $a = -3$.

Questão 4:

a) Quantos números inteiros positivos de até três algarismos começando com um número par são múltiplos de 5?

Pontuação: até 2 pontos.

Solução: Se n é um números de até três algarismos começando com um número par e múltiplo de 5, simultaneamente, existem três possibilidades a considerar: n tem exatamente um algarismo, n tem exatamente dois algarismos ou n tem exatamente três algarismos.

Caso 1: n = a. Nesse caso devemos ter a par e a =5. Logo, não existem números de apenas um algarismo começando com um número par e múltiplo de 5, simultaneamente.

Caso 2: n = ab. Temos 4 possibilidades para o algarismo a: 2 ou 4 ou 6 ou 8.
Temos 2 possibilidades para o algarismo b: 0 ou 5. Sendo assim, existem $4 \cdot 2 = 8$ números com exatamente dois algarismos começando com um número par e múltiplo de 5.

Caso 3: n = abc. Temos 4 possibilidades para o algarismo a: 2 ou 4 ou 6 ou 8.
Temos 10 possibilidades para o algarismo b: 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 ou 9.
Temos 2 possibilidades para o algarismo b: 0 ou 5. Sendo assim, existem $4 \cdot 10 \cdot 2 = 80$ números com exatamente três algarismos começando com um número par e múltiplo de 5.

Então, existem $0 + 8 + 80 = 88$ números.

b) Quantos números inteiros positivos com três algarismos distintos são múltiplos de 5 e têm a soma de seus algarismos igual a um número ímpar?

Pontuação: até 3 pontos.

Solução: Dividiremos em dois casos:
Caso 1: O número termina com o algarismo 0, ou seja, n = $ab0$.
Como a soma deve ser ímpar, temos duas possibilidades:

1) a é par e b é ímpar: temos $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades.
2) a é ímpar e b é par: temos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades.

Caso 2: O número termina com o algarismo 5, ou seja, n = $ab5$.
Novamente, temos duas possibilidades:

1) a é par e b é par: temos $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades.
2) a é ímpar e b é ímpar: temos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

Então, existem $20 + 20 + 16 + 12 = 68$ números.