Resolução das Questões Objetivas

Questão 11:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\mu x^2+10x+5$, onde $\mu\neq 0$. Temos que $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, se e somente se,

i) $\mu>0$;

ii) A equação $\mu x^2+10x+5=0$ não possui solução real.

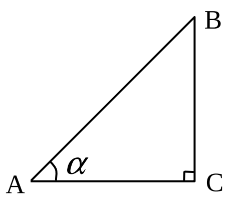
Para que ii) ocorra, devemos ter:

$$\Delta=(10)^2-4.\mu.5<0\text{, ou seja, }100<20\mu\text{, implicando }\mu>5.$$

Portanto $f(x)>0$ se, e somente, $\mu\in\,]5,+\infty[$.

RESPOSTA: B

Questão 12:



Sabemos pela relação fundamental trigonométrica que

$$\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1.$$

Como $\text{sen}(\alpha)=\dfrac{1}{3}$, segue que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2(\alpha)=1$, ou seja, $\cos^2(\alpha)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$. Logo, $\cos(\alpha)=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do triângulo ABC retângulo em C, temos $\cos(\alpha)=\dfrac{AC}{AB}$. Como $AC=1$, segue que $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{AB}$. Portanto, $AB=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

RESPOSTA: D

Questão 13:

Denotaremos *Gr* o grau do polinômio correspondente.

Se $Gr(A(x))>Gr(B(x))$, então $Gr(S(x))=Gr(A(x))$ e $Gr(D(x))=Gr(A(x))$. Logo,

$$Gr(S(x))=Gr(A(x))=Gr(D(x)),$$

contrariando as condições do enunciado.

Se $Gr(B(x))>Gr(A(x))$, então $Gr(S(x))=Gr(B(x))$ e $Gr(D(x))=Gr(B(x))$. Logo,

$$Gr(S(x))=Gr(B(x))=Gr(D(x)),$$

contrariando novamente as condições do enunciado.

Portanto, conclui-se que $Gr(A(x)) = Gr(B(x)) \geq Gr(S(x)) = 8$ (é possível mostrar que $Gr(A(x)) = Gr(B(x)) = 8$).

a) Incorreta, pois $Gr(W(x)) = Gr(D(x)) = 5$.
b) Correta.
c) Incorreta, pois $Gr(C(x)) \geq 16$.
d) Incorreta, pois $Gr(A(x)) \geq 8$.
e) Incorreta, pois $Gr(B(x)) \geq 8$.

RESPOSTA: B

Questão 14:

Para cada $n \in IN$, considere o intervalo $I_n = \left[-\frac{1}{32}, b_n\right]$, onde $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Note que b_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = \frac{1}{2}$. Sabemos que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, com primeiro termo a_1 e razão r, é dada por $a_1 \frac{(1-r^n)}{1-r}$. Logo,

$$b_n = 1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

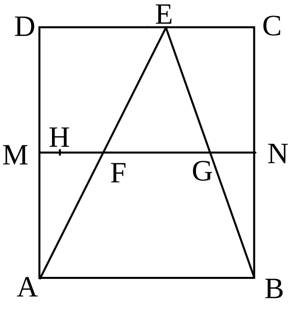
Queremos encontrar o valor de n para o qual $l(I_n) = 2$, ou seja,

$$2 = l(I_n) = b_n - \left(-\frac{1}{32}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{32}.$$

Assim $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2^{n-1} = 32 = 2^5 \Rightarrow n-1 = 5$.
Portanto, $n = 6$.

RESPOSTA: C

Questão 15:



No retângulo $ABCD$, M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC. Logo os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ e $\overline{DC}$ são paralelos. Pelo teorema de Tales:

$$\frac{1}{2}=\frac{CN}{CB}=\frac{EG}{EB}\Rightarrow EB=2EG. \qquad (\text{ I })$$

Como os triângulos AEB e FEG são semelhantes, por (I) temos que $AB=2FG$.

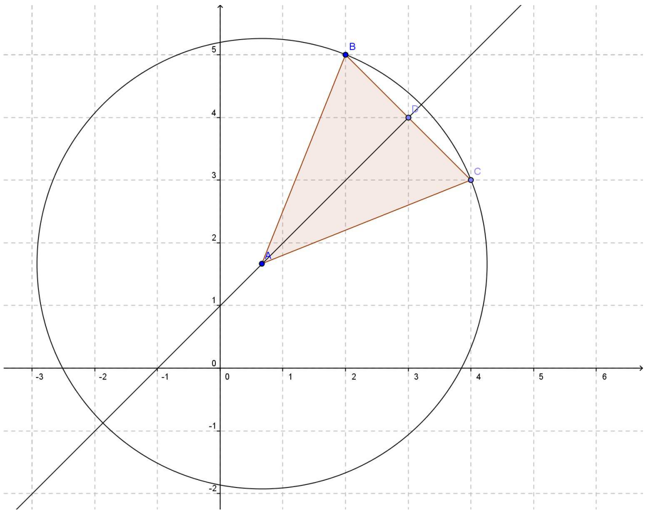
Note que, a medida da altura do triângulo ABH de base $\overline{AB}$ é igual a medida da altura do triângulo FGE de base $\overline{FG}$, cujo valor é NC. Assim a área do triângulo ABH é

$$\frac{1}{2}(AB\cdot NC)=\frac{1}{2}(2FG\cdot NC)=2(\frac{1}{2}FG\cdot NC).$$

Portanto, a área do triângulo ABH mede o dobro da área do triângulo EFG, ou seja, $10\,\text{cm}^2$.

RESPOSTA: C

Questão 16:



Como B e C pertencem à circunferência de centro A e de raio $\overline{AB}$, a reta r que passa pelo ponto A e que divide o ângulo $B\hat{A}C$ ao meio passa pelo ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Esse ponto é $D\left(\frac{2+4}{2},\frac{5+3}{2}\right)=D(3,4)$.

Assim, a inclinação desta reta r é:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-\frac{5}{3}}{3-\frac{2}{3}}=1.$$

Portanto, $r: y=x+b$, para algum $b\in\mathbb{R}$. Substituindo o ponto $D(3,4)$ na reta r, obtemos:

$$4=3+b\Rightarrow b=1.$$

Então, esta reta é dada por: $r: y=x+1$. Substituindo $x=0$, obtemos a ordenada do ponto em que a reta r intersecta o eixo y cujo valor é 1.

RESPOSTA: E

Questão 17:

a) Incorreta. Contra-exemplo: $\log_{10} 1 = 0$, enquanto que $1^0 \neq 10$.
b) Incorreta. Contra-exemplo: $\log_{10}(1+9) = 1$, enquanto que $(\log_{10} 1)\cdot(\log_{10} 9) = 0$.
c) Incorreta. Contra-exemplo: $\log_{10}\left(\frac{10}{10}\right) = 0$, enquanto que $\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 10} = 1$.
d) Correta, pois (pelas propriedades de logaritmo)

$$\log_c\left(\frac{1}{a}\right) = \log_c(a)^{-1} = (-1)\log_c a = -\log_c a.$$

e) Incorreta. Contra-exemplo: $\log_2(8-4) = 2$, enquanto que

$$\log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1.$$

RESPOSTA: D

Questão 18:

Chamemos de p o valor do ingresso vendido para a pista antes do dia do show e de c o valor do ingresso vendido para o camarote antes do dia do show. Como, antes do dia do show, foram vendidos 300 ingressos para pista e 200 para camarote, arrecadando-se um total de R$22.000,00, podemos escrever:

(I) $300p + 200c = 22.000,00$.

Como os preços dos ingressos vendidos antes do dia do show tiveram 50% de desconto, os ingressos vendidos para a pista e camarote, respectivamente, no dia do show, foram $2p$ e $2c$. Como no dia do show foram vendidos 100 ingressos para pista e 200 para camarote, arrecadando-se um total de R$28000,00, podemos escrever:

(II) $100(2p) + 200(2c) = 28.000,00$.

De (I) e (II) temos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 300p + 200c = 22.000 \\ 100(2p) + 200(2c) = 28.000 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 3p + 2c = 220 \\ p + 2c = 140 \end{cases}$$

Portanto $220 - 3p = 2c = 140 - p$, de onde obtemos que $p = 40$.

RESPOSTA: A

Questão 19:

No conjunto $\left\{-1, 1, \sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}, 5, \sqrt{4}, \frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{7}{3}\right\}$, os únicos números irracionais gravados nas bolas são $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, enquanto que os demais são números racionais (note que $\sqrt{4} = 2$). A probabilidade $P(racional)$ de se retirar desta urna, ao acaso, uma bola em que está gravado um número racional é:

$$P = \frac{(quantidade\, de\, elementos\, racionais)}{(quantidade\, total\, de\, elementos)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

RESPOSTA: E

Questão 20:

Considere as motocicletas 1, 2 e 3, em que m_1, m_2 e m_3 são, respectivamente, os lugares ocupados pelos pilotos das motocicletas 1, 2 e 3. Considere também c_1, c_2 e c_3 os lugares ocupados pelos caronas das motocicletas 1, 2 e 3, respectivamente.

m_1 c_1 Motocicleta 1

m_2 c_2 Motocicleta 2

m_3 c_3 Motocicleta 3

De acordo com as condições do problema, temos que existem 4 possibilidades de escolha para m_1, 3 possibilidades de escolha para m_2 e 2 possibilidades de escolha para m_3. Para cada escolha dos pilotos (para as três motocicletas), existem 3 possibilidades de escolha para c_1, 2 possibilidades de escolha para c_2 e 1 possibilidade de escolha para c_3. Pelo princípio multiplicativo, temos que o número de maneiras distintas que esses amigos podem se dispor nas motocicletas para realizar a viagem é:

4 x 3 x 2 x 3 x 2 x 1 = 144.

RESPOSTA: D