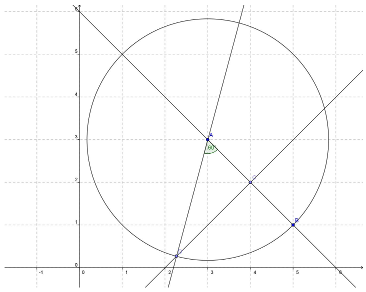
Questão 1 – No plano cartesiano, considere uma haste metálica rígida, de espessura desprezível, com extremidades nos pontos $A(3,3)$ e $B(5,1)$.

a) Determine a equação da circunferência de centro no ponto A e que contém o ponto B.

b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e é perpendicular ao mesmo segmento.

c) Fixando a extremidade em A e rotacionando a haste no sentido horário em 60°, quais são as coordenadas da posição final da extremidade inicialmente em B?

Considere o esboço abaixo:



a) Seja λ a circunferência de centro no ponto A e que contém o ponto B. O raio de λ é dado por

$$r = \sqrt{(5-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}\,.$$

Assim, a equação da circunferência λ é dada por

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8\,.$$

b) Seja C o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Então as coordenadas de C são:

$$\left(\frac{5+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (4,2)\,.$$

O coeficiente angular m_1 da reta r que passa por A e B é dado por

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{5-3} = -1\,.$$

Seja s a reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e é perpendicular ao mesmo segmento. Então o coeficiente angular m_2 da reta s é dado por:

$$m_2 = -{}^{1}\!/_{m_1} = 1\,.$$

Assim, a equação da reta s é $y = x + b$, para algum $b \in \mathbb{R}$.
Substituindo o ponto $C(4,2)$ nessa equação, obtemos: $2 = 4 + b \Rightarrow b = -2$.
Portanto,

$$s : y = x - 2\,.$$

c) Fixando a extremidade em A e rotacionando a haste no sentido horário em 60°, sejam x, y as coordenadas da posição final da extremidade inicialmente em B. Chamemos $D(x, y)$ o ponto correspondente a essas coordenadas.

Temos que $AB = AD$. Então D pertence à circunferência λ. Além disso, no triângulo ABD, como o ângulo $\hat{A}$ é igual a 60°, temos também que, os ângulos de vértices B e D tem medida 60° e daí o triângulo ABD é eqüilátero. Então, a mediana relativa à base $\overline{AB}$ coincide com a altura, e como a reta s é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, concluímos que $D \in s$.

]Assim, o ponto D é um dos pontos de intersecção entre a reta s e a circunferência λ, que obtemos resolvendo o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} y = x - 2 & (I) \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 8 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), encontramos: $(x-3)^2 + (x-5)^2 = 8$, ou seja, $x^2 - 8x + 13 = 0$.

Resolvendo essa equação do segundo grau obtemos: $\Delta = 12$,

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}.$$

Graficamente, podemos **descartar** a possibilidade de $x = 4 + \sqrt{3}$.

Para encontrar a coordenada y, substituímos $x = 4 - \sqrt{3}$ na equação (I), obtendo $y = 2 - \sqrt{3}$. Daí, $x = 4 - \sqrt{3}$ e $y = 2 - \sqrt{3}$ são as coordenadas da posição final da extremidade, inicialmente, em B.

Questão 2 – Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita estritamente crescente quando $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1$, com $x_2, x_1 \in \mathbb{R}$.

a) Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente.

b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Para $a \in \mathbb{R}$ fixado, considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = [f(x) - f(a)](x - a)$. Mostre que $g(a) < g(x)$, para todo $x \neq a$.

a) Seja, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$.

Note que: se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Inicialmente note que $g(a) = [f(a) - f(a)](a - a) = 0$.

Estudaremos a função g, quando $x \neq a$, isto é quando $x > a$ ou $x < a$. Como f é uma função estritamente crescente, temos:

- Se $x < a$ então $f(x) < f(a)$. Logo $x - a < 0$ e $f(x) - f(a) < 0$, logo

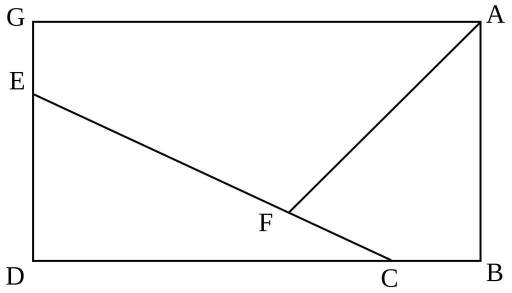
$$g(x) = [f(x) - f(a)](x - a) > 0 \Rightarrow g(x) > g(a).$$

- Se $x > a$ então $f(x) > f(a)$. Logo $x - a > 0$ e $f(x) - f(a) > 0$, logo

$$g(x) = [f(x) - f(a)](x - a) > 0 \Rightarrow g(x) > g(a).$$

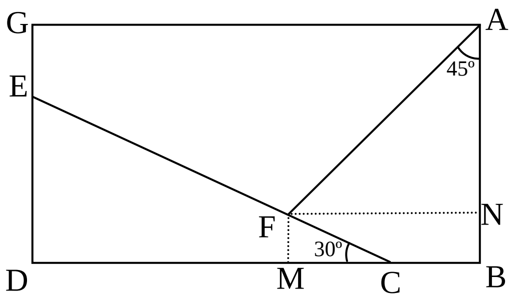
Portanto, concluímos que, $\forall x \neq a$, $g(x) > g(a)$.

Questão 3 – Na figura a seguir, considere o retângulo $ABDG$. Sejam C e E pontos dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DG}$, respectivamente, e F um ponto do segmento $\overline{EC}$.



Sabendo que $AB = 3$ cm, $BC = 1$ cm, $B\hat{A}F = 45^\circ$ e $D\hat{C}E = 30^\circ$, determine a medida do comprimento do segmento $\overline{CF}$.

Na figura abaixo, considere M e N os pés das perpendiculares do ponto nos segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{BA}$, respectivamente.



No triângulo retângulo CMF, obtemos:

$$(I) \qquad sen(30^\circ) = \frac{FM}{FC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow FM = \frac{FC}{2}$$

$$(II) \qquad \cos(30^\circ) = \frac{CM}{FC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CM}{FC} \Rightarrow CM = FC\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Note que $NF = BC + CM = 1 + CM$ e $AN = AB - NB = 3 - FM$. Então, no triângulo retângulo ANF, obtemos

$$(III) \qquad tg(45^\circ) = \frac{1 + CM}{3 - FM} \Rightarrow 1 = \frac{1 + CM}{3 - FM} \Rightarrow CM + FM = 2$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$\frac{1}{2}FC + \frac{\sqrt{3}}{2}FC = 2 \Rightarrow (1 + \sqrt{3})FC = 4.$$

Portanto,

$$FC = \frac{4}{1 + \sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1).$$

Questão 4 – Uma mesa de massa total medindo $32\,\text{Kg}$ foi construída utilizando-se dois materiais: madeira e aço. Na confecção desse objeto, foi gasto o mesmo valor na compra de cada material. Sabendo que o custo de cada quilograma de aço foi um terço do custo de cada quilograma de madeira, qual a quantidade de aço utilizada na construção dessa mesa?

Defina as notações:

$$\left.\begin{array}{l} M_a = \text{quantidade do aço utilizado} \\ \\ M_m = \text{quantidade da madeira utilizada} \end{array}\right\} \Rightarrow M_a + M_m = 32 \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_a = \text{Custo de 1Kg de aço} \\ \\ C_m = \text{Custo de 1Kg de madeira} \end{array}\right\} \Rightarrow C_a = \frac{1}{3}C_m \qquad \text{(II)}$$

Como na confecção desse objeto, foi gasto o mesmo valor na compra de cada material, de (II) temos:

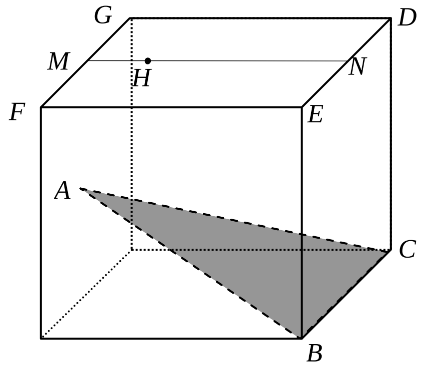
$$M_a C_a = M_m C_m \Rightarrow M_a\left(\frac{1}{3}C_m\right) = M_m C_m \Rightarrow \frac{1}{3}M_a = M_m . \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I), obtemos:

$$M_a + \frac{1}{3}M_a = 32 \Rightarrow M_a = 24 .$$

Então, a quantidade do aço utilizado nesta confecção foi 24kg.

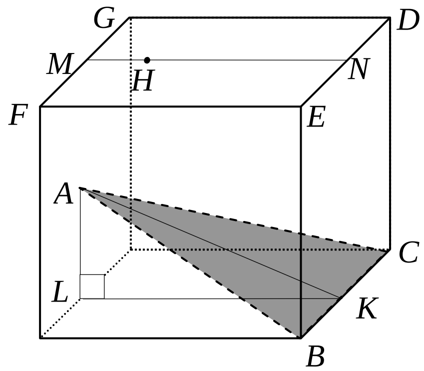
Questão 5 – Na figura a seguir, considere o cubo de aresta de medida $2\,\text{cm}$ e faces adjacentes $BCDE$ e $DEFG$. Nesse cubo, o ponto A localiza-se no centro da face oposta à face $BCDE$, N e M são pontos médios das arestas $\overline{DE}$ e $\overline{GF}$, respectivamente, e H pertence ao segmento $\overline{MN}$.



a) Calcule a medida da área do triângulo ABC.

b) Sabendo que $\overline{AH}$ é a altura da pirâmide $HABC$ de base triangular ABC, determine o valor da medida do volume dessa pirâmide.

Na figura abaixo, considere K o ponto médio da aresta $\overline{BC}$ e L o ponto médio da aresta oposta.
Note que $AL = 1$, $LK = 2$ e o triângulo ALK é retângulo em L.



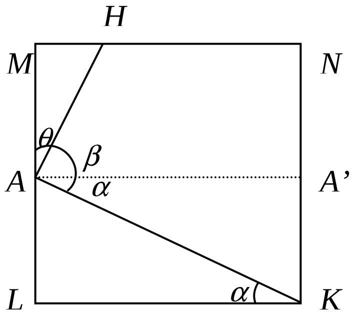
a) Pelo teorema de Pitágoras,

$$(AK)^2 = (AL)^2 + (LK)^2 = 1 + 4 \Rightarrow AK = \sqrt{5}.$$

A área do triângulo ABC é dada por

$$S(ABC) = \frac{1}{2}(BC \cdot AK) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}\,\text{cm}^2.$$

b) É fácil ver que $\overline{MN}$ e $\overline{LK}$ são paralelos. Considere a secção do plano, que passa pelos pontos M, N e K, com o cubo acima. Seja A' o ponto médio do segmento $\overline{KN}$.



Chamemos $L\widehat{K}A = \alpha$, $A'\widehat{A}H = \beta$ e $H\widehat{A}M = \theta$, como na figura. Como $\overline{AA'}$ é paralelo a $\overline{LK}$, temos que $K\widehat{A}A' = L\widehat{K}A = \alpha$, pois são ângulos alternos internos. Como, por hipótese, $\overline{AH}$ é a altura da pirâmide $HABC$ de base triangular ABC, então $\overline{AH}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AK}$.

Logo: $\alpha + \beta = 90° = \theta + \beta \Rightarrow \alpha = \theta.$

Então, $L\widehat{K}A = H\widehat{A}M$ e $A\widehat{L}K = H\widehat{M}A = 90°$ e daí $AMH \sim KLA.$

Por essa semelhança:

$$\frac{KL}{AM} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{5}}{AH} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

O volume V da pirâmide $HABC$ é dado por

$$V = \frac{1}{3} AH \cdot (\text{área da base}) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{5} = \frac{5}{6} cm^3.$$

$$V = \frac{5}{6} cm^3.$$