Questão 1 - Um monumento será construído no formato de uma pirâmide de base hexagonal regular. Sabendo que a altura h do monumento é 4m, a aresta lateral a mede 7m, a aresta da base l mede $4\sqrt{6}$ m e desconsiderando possíveis perdas, determine:

a) a área ocupada pela base do monumento em metros quadrados.

Como a pirâmide tem base hexagonal regular, a medida da área da base é dada por $A_B = 6A_T$, sendo A_T a área do triângulo equilátero de lado $l = 4\sqrt{6}$.

Assim, $A_B = 6\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6\dfrac{\left(4\sqrt{6}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$ m².

Tendo em vista os dados inconsistentes apresentados na formulação da questão 1, outras soluções também foram consideradas, tais como:

1) Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo de hipotenusa $a = 7$ e cateto $h = 4$ obtém-se o outro cateto $r = \sqrt{33}$. Assim, encontra-se o triângulo isósceles de lados $r = \sqrt{33}$, $r = \sqrt{33}$ e $l = 4\sqrt{6}$, cuja altura relativa ao lado $l = 4\sqrt{6}$ é igual a $m = 3$, também pelo Teorema de Pitágoras. Assim, $A_B = 6\dfrac{l.m}{2} = 6\dfrac{4\sqrt{6}\,.3}{2} = 36\sqrt{6}$ m².

2) O apótema g da pirâmide de base hexagonal regular é a altura do triângulo isósceles de lados $a = 7$, $a = 7$ e $l = 4\sqrt{6}$ relativa ao lado $l = 4\sqrt{6}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $g = 5$ e, segue que, $m = 3$, também pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo de hipotenusa $g = 5$ e catetos m e $h = 4$. Assim, $A_B = 6\dfrac{l.m}{2} = 6\dfrac{4\sqrt{6}\,.3}{2} = 36\sqrt{6}$ m².

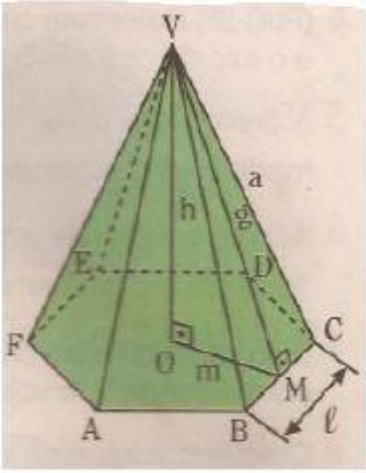
Valor da letra a: até 2,0 pontos.

b) a área mínima de espelhos necessária para cobrir completamente as laterais do monumento.

A medida da área da lateral do monumento é dada por $A_l = 6A$, sendo A a área de cada triângulo isósceles de lados $a = 7$, $a = 7$ e $l = 4\sqrt{6}$. Pelo Teorema de Pitágoras, a altura g relativa ao lado $l = 4\sqrt{6}$ é obtida por:

$$7^2 = \left(\frac{4\sqrt{6}}{2}\right)^2 + g^2 \Rightarrow g^2 = 49 - 24 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = 5\text{m}$$

Assim, $A_l = 6A = 6\dfrac{l.g}{2} = 6\dfrac{4\sqrt{6}.5}{2} = 60\sqrt{6}$ m².



Tendo em vista os dados inconsistentes apresentados na formulação da questão 1, outras soluções também foram consideradas, como por exemplo:

A altura do triângulo equilátero de lado $l = 4\sqrt{6}$ é dada por $m = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo de hipotenusa g e catetos $m = 6\sqrt{2}$ e $h = 4$ obtemos $g = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$. Assim, $A_l = 6A = 6\frac{l.g}{2} = 6\frac{4\sqrt{6}.2\sqrt{22}}{2} = 24\sqrt{132} = 48\sqrt{33}$ m^2.

Valor da letra b: até 2,0 pontos.

c) o volume desse monumento.

O volume do monumento é dado por: $V = \frac{1}{3}A_B h,$ sendo A_B a medida da área da base e h a altura da pirâmide.

Logo, $V = \frac{1}{3}144\sqrt{3}.4 = 192\sqrt{3}$ m^3.

Tendo em vista os dados inconsistentes apresentados na formulação da questão 1, outras soluções também foram consideradas, como por exemplo:

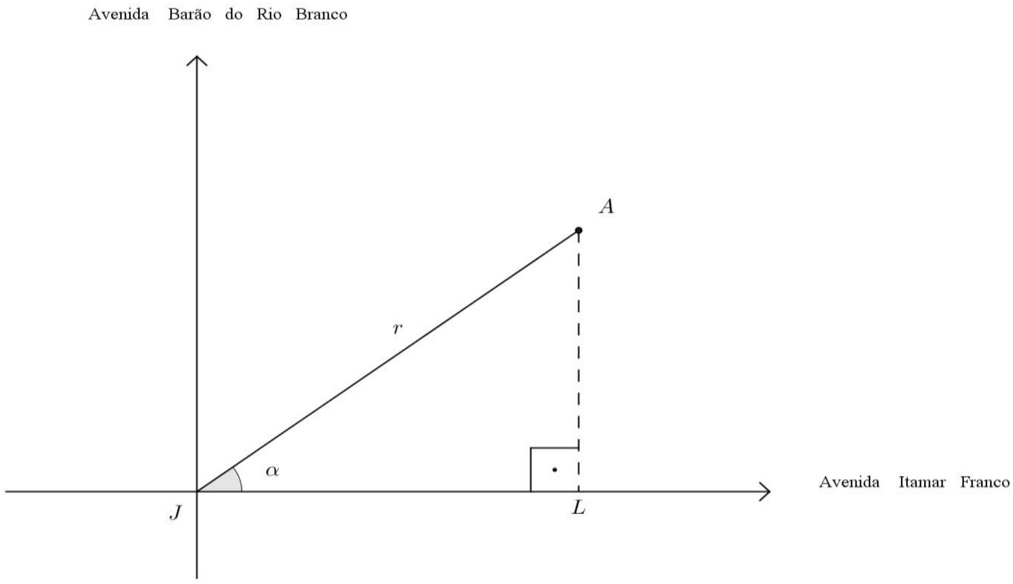
$V = \frac{1}{3}36\sqrt{6}.4 = 48\sqrt{6}$ m^3.

Valor da letra c: até 1,0 ponto.

Questão 2 - Em Juiz de Fora, há duas avenidas principais: Avenida Itamar Franco e Avenida Barão do Rio Branco. Suponha que essas avenidas se cruzam perpendicularmente.
João está no encontro das avenidas. Sua irmã Ana está à distância r de João, numa posição inicial I e não se encontra em nenhuma das duas avenidas. Já seu irmão Luiz parou na Avenida Itamar Franco, de onde vê João e Ana sob um ângulo reto.

a) Sabendo que João vê Ana e Luiz sob um ângulo $\alpha,$ determine a distância entre João e Luiz em função de r e $\alpha.$

A seguir, apresentaremos uma representação da situação descrita, com a posição inicial I de Ana coincidindo com A.



Temos que:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$

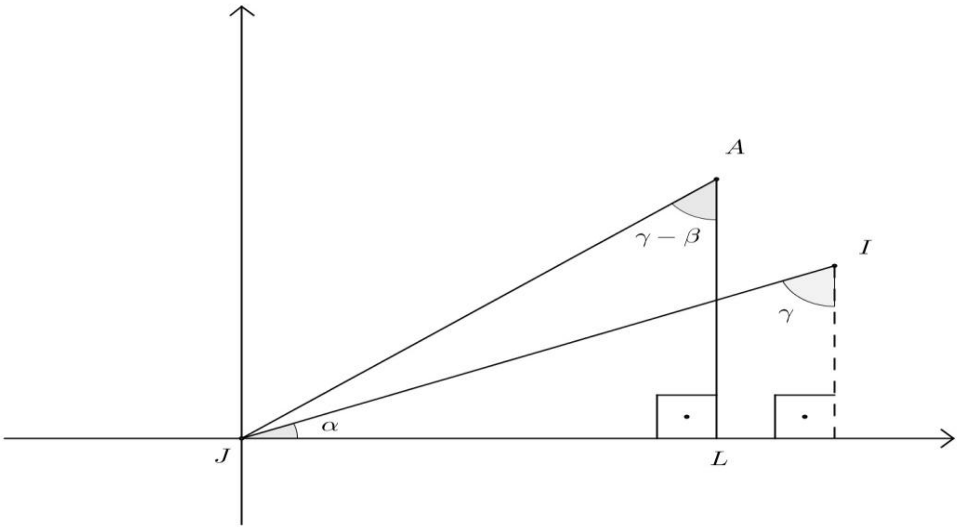
sendo x a medida da distância entre João (J) e Luiz (L), ou seja, $x = r\cos\alpha.$

Alternativamente, podemos considerar a Av. Rio Branco como sendo o eixo x e Av. Itamar Franco como sendo o eixo y. Neste caso, teremos que Luiz (L) está sobre o eixo y. As relações obtidas para esta situação são as mesmas e a resposta final também será igual a $x = r\cos\alpha.$

Valor da letra a: até 1,0 ponto, considerando uma das configurações descritas acima.

b) Num segundo momento, João permanece no encontro das duas avenidas, Ana se desloca no sentido anti-horário, mantendo a mesma distância de João. Luiz se desloca na mesma avenida que se encontrava, na direção de João. Além disso, ambos param simultaneamente, de modo que Luiz, ao parar, vê João e Ana sob um ângulo reto, enquanto o ângulo de visão que Ana tinha de João e Luiz diminuiu $\beta.$ Determine a distância entre Ana e Luiz em função de r, α e $\beta.$

A seguir, apresentaremos uma nova representação da situação descrita nesse item.



Considere θ o ângulo que João vê Ana e Luiz; assim, $\theta = \alpha + \beta$, pois, pela situação descrita no item a), $\alpha + \gamma + 90^o = 180^o$ e $\theta + (\gamma - \beta) + 90^o = 180^o$, pela situação descrita nesse item.

Logo,

$$sen\ \theta = sen(\alpha + \beta) = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = rsen(\alpha + \beta),$$

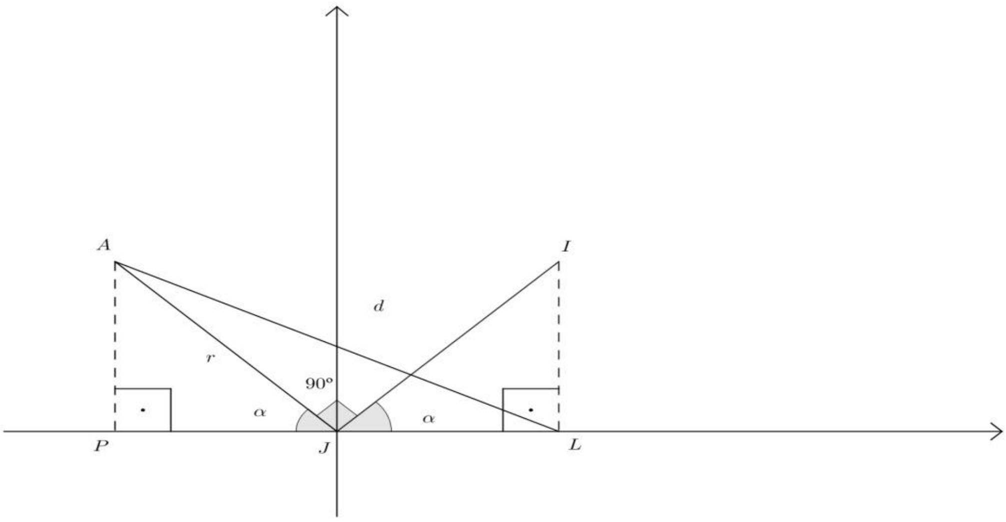
sendo y a distância entre Ana (A) e Luiz (L).

Novamente, a resposta será a mesma se considerarmos a configuração com a Av. Rio Branco sendo o eixo x e a Av. Itamar Franco sendo o eixo y.

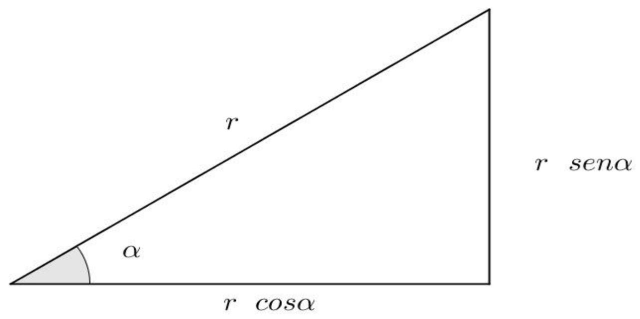
Valor da letra b: até 2,0 pontos, considerando uma das configurações descritas acima.

c) Se, em vez da situação descrita no item b), apenas Ana tivesse se deslocado da posição inicial I, no sentido anti-horário, descrevendo um arco de 90°, mantendo a mesma distância r de João, qual seria a distância entre Ana e Luiz, considerando $\alpha = 45^{\circ}$ e $r = 4m$?

Considere a representação a seguir:



Note que os triângulos APJ e ILJ são congruentes para $\alpha = 45^o$ e seus lados possuem as medidas indicadas na figura abaixo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo de vértices APL, retângulo em P, obtemos:

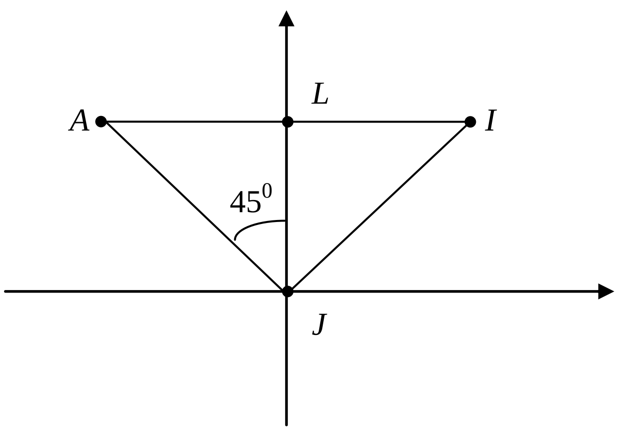
$$d^2 = (rsen\alpha)^2 + (2r\cos\alpha)^2 \Rightarrow d^2 = r^2sen^2\alpha + 4r^2\cos^2\alpha \Rightarrow d^2 = r^2\left(sen^2\alpha + 4\cos^2\alpha\right)$$

Como $\alpha = 45^o$ e $r = 4m$ temos:

$$d^2 = 4^2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 16\left(\frac{5}{2}\right) = 40 \Rightarrow d = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}m,$$

sendo d a distância entre Ana (A) e Luiz (L).

Agora, considerando a situação inicial com a Av. Rio Branco sendo o eixo x e a Av. Itamar Franco sendo o eixo y, temos outra resposta para este item.



Neste caso, os triângulos ILJ e ALJ são congruentes. A distância d entre Ana (A) e Luiz (L) é igual a $d = \overline{AL} = rsen45^o = 4.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}m$.

Valor da letra c: até 2,0 pontos, considerando uma das configurações descritas acima.